

# 道路对 Lotka-Volterra 竞争系统稳定性的影响\*

招倩仪 郭淑玲 杨勇 吴楚芬

(佛山科学技术学院 数学与大数据学院, 广东 佛山 528000)

**摘要:**考虑了道路对一类带有三次功能反应项和扩散的 Lotka-Volterra 竞争系统稳定性的影响。通过将系统离散化,借助数值模拟,发现设置道路会延长生态系统达到稳态的时间。

**关键词:**竞争系统;稳定性;道路影响

## 1 概述

道路的大肆兴建促进了社会经济迅速发展,但同时,它们对自然景观和生态系统所产生的诸如环境污染、景观破碎、生境退化、生物死亡率递增、生物多样性减少、生物入侵、生态阻隔和廊道效应等各种生态影响也在急剧地扩大<sup>[1-4]</sup>。正确理解和全面分析道路网络建设以及交通所产生的生态影响,最大限度地降低道路网络对自然生态系统的负面效应,进而保护生物多样性、维持生态系统的平衡<sup>[1,5]</sup>。

关于道路生态学的研究,早期主要基于生物调查<sup>[6]</sup>、叠图分析<sup>[7]</sup>等方法。这类方法的研究对象较为片面,例如,选取穿越一段树林的道路两侧,这导致了道路与生态系统之间的全局相互作用不甚明了。利用反应扩散系统模拟道路与生态系统的相互作用并对模型进行动力学行为分析是近年来的研究热点<sup>[8]</sup>。物种的随机扩散可以借助简单 Laplace 算子  $\Delta$  描述;不设置道路时,物种在空间上具有一致的扩散速率;设置道路时,物种从道路一侧穿越到另一侧的扩散速率由于受到车流量等因素的影响会显著减小。

受文<sup>[9]</sup>的启发,在本文中,考虑两竞争种群的 Lotka-Volterra 反应扩散系统,对模型进行了稳定性分析和数值模拟,研究了道路干扰对竞争系统达到稳态的影响,发现设置道路会延长生态系统达到稳态的时间。这说明,在自然保护区不宜设置太多的道路,以便维护生态系统的稳定性及其生物多样性。在众多的 Lotka-Volterra 反应扩散系统中,一般反应项是二次的<sup>[10-11]</sup>,本文讨论如下带有三次反应项的 Lotka-Volterra 竞争反应扩散系统:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + au - bu^3 - cuv^2 \\ v_t &= d_2 \Delta v + ev - gv^3 - fu^2v \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $u$  和  $v$  分别表示两竞争种群的数量;  $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  是二维空间的 Laplace 算子,描述了物种在二维空间扩散;  $d_1$  和  $d_2$  为扩散系数,  $a, e$  表示  $u$  和  $v$  的出生率,  $b, g$  表示  $u$  和  $v$  的自我调节率,  $c, f$  描述的是  $u$  和  $v$  之间的竞争关系。所有的参数均为正常数。

在系统(1)中,若  $c > g, f > b$ ,则表示两不同种群之间的相互作用强于同一种群内部个体之间的相互作用。此时称系统(1)为一个强竞争系统。若  $c < g, f < b$  则表示两不同种群之间的相互作用弱于同一种群内部的相互作用。此时称系统(1)为一个弱竞争系统。若  $c = g, f = b$  则表示两不同种群间的相互作用与同一种群内部的相互作用的强弱程度几乎相同<sup>[12]</sup>。

## 2 稳定性分析

考虑系统(1)相应的反应系统:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au - bu^3 - cuv^2 \\ \frac{dv}{dt} &= ev - gv^3 - fu^2v \end{aligned} \quad (2)$$

由于问题的实际背景,文中仅需考虑系统的非负解。易见系统(2)有零平衡点  $E_0(0,0)$ ;两个边界平衡点  $E_1(\sqrt{\frac{a}{b}},0)$  和  $E_2(0,\sqrt{\frac{e}{g}})$ ,边界平衡点表示仅有一个种群存活。若  $(bg - cf)(ag - ce) > 0$  和  $(bg - cf)(be - af) > 0$ ,则系统(2)有正平衡点  $E_*(u_*, v_*)$ ,其表示两个种群共存,其中  $u_* = \sqrt{\frac{ag - ce}{bg - cf}}, v_* = \sqrt{\frac{be - af}{bg - cf}}$ 。

注意到系统(2)在点  $E(u, v)$  处的雅克比矩阵为:

$$J_{(u,v)} = \begin{pmatrix} a - 3bu^2 - cv^2 & -2cuv \\ -2fu^2 & e - 3gv^2 - fu^2 \end{pmatrix}。$$

定理1 零平衡点  $E_0(0,0)$  总是不稳定的。

证明 系统(2)在  $E_0(0,0)$  处的雅克比矩阵为:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}。$$

故特征值  $\lambda_1 = a > 0, \lambda_2 = e > 0$ 。由李雅普诺夫第一方法<sup>[13]</sup>,知系统(2)在零平衡点  $E_0(0,0)$  处总是不稳定的。证毕。

定理2 若  $be < af$ ,则系统(2)在边界平衡点  $E_1(\sqrt{\frac{a}{b}},0)$  处是渐近稳定的。

证明 系统(2)在  $E_1(\sqrt{\frac{a}{b}},0)$  处的雅克比矩阵为:

$$J_{(\sqrt{\frac{a}{b}},0)} = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & e - \frac{af}{b} \end{pmatrix}$$

故特征值  $\lambda_1 = -2a < 0, \lambda_2 = e - \frac{af}{b} < 0$ 。由李雅普诺夫第一方法,知系统(2)在边界平衡点  $E_1(\sqrt{\frac{a}{b}},0)$  处是渐近稳定的。证毕。

定理3 若  $ag < ce$ ,则系统(2)在边界平衡点  $E_2(0,\sqrt{\frac{e}{g}})$  处是渐近稳定的。

证明 系统(2)在  $E_2(0,\sqrt{\frac{e}{g}})$  处的雅克比矩阵为:

$$J_{(0,\sqrt{\frac{e}{g}})} = \begin{pmatrix} a - \frac{ce}{g} & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}$$

故特征值  $\lambda_1 = a - \frac{ce}{g} < 0, \lambda_2 = -2e < 0$ 。由李雅普诺夫第一方法,知系

统(2)在边界平衡点  $E_2(0,\sqrt{\frac{e}{g}})$  处是渐近稳定的。证毕。

定理4 若  $bg > cf, ag > ce, be > af$  同时成立,则系统(2)在正平衡点  $E_*(u_*, v_*)$  处是渐近稳定的。

证明 系统(2)在  $E_*(u_*, v_*)$  处的雅克比矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} a - 3bu_*^2 - cv_*^2 & -2cu_*v_* \\ -2fu_*^2 & e - 3gv_*^2 - fu_*^2 \end{pmatrix}$$

利用  $a - bu_*^2 - cv_*^2$  和  $e - fu_*^2 - gv_*^2 = 0$ ,化简  $J$ ,得

$$J = \begin{pmatrix} -2bu_*^2 & -2cu_*v_* \\ -2fu_*^2 & -2gv_*^2 \end{pmatrix}$$

其相应的特方程为:

$$\lambda^2 + 2(bu_*^2 + gv_*^2)\lambda + 4(bg - cf)u_*^2v_*^2 = 0。故$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2(bu_*^2 + gv_*^2) < 0, \lambda_1\lambda_2 = 4(bg - cf)u_*^2v_*^2 > 0。$$

由李雅普诺夫第一方法,知系统(2)在正平衡点  $E_*(u_*, v_*)$  处是渐近稳定的。证毕。

## 3 数值模拟及分析

\* 基金项目:广东省教育厅教学研究课题:理论与建模相结合的《常微分方程》实践教学(gj41209);广东省大学生科技创新培育专项基金(No. pdjh2016a0520)

在这一节,首先对系统(2)进行数值模拟。取  $a=0.5, b=0.08, c=0.03, e=0.3, f=0.06, g=0.02$ , 则  $E_1(\sqrt{g}, 0) = (2.5, 0)$  为渐近稳定的, 如图 1 所示, 在第 20 年左右  $u$  种群趋于最大环境容纳量 2.5, 而  $v$  种群在第 60 年左右趋于灭亡。取  $a=0.5, b=0.08, c=0.03, e=0.5, f=0.06, g=0.02$ , 故  $E_2(0, \sqrt{g}) = (0, 5)$  为渐近稳定的, 如图 2 所示, 在第 20 年左右  $v$  种群趋于最大环境容纳量 5, 而  $u$  种群在第 30 年左右趋于灭亡。取  $a=0.5, b=0.08, c=0.03, e=0.3, f=0.04, g=0.02$  故  $E_*(u_*, v_*) \approx (1.5811, 3.1623)$  是渐近稳定的, 如图 3 所示, 两个种群一直保持相互依存的关系。

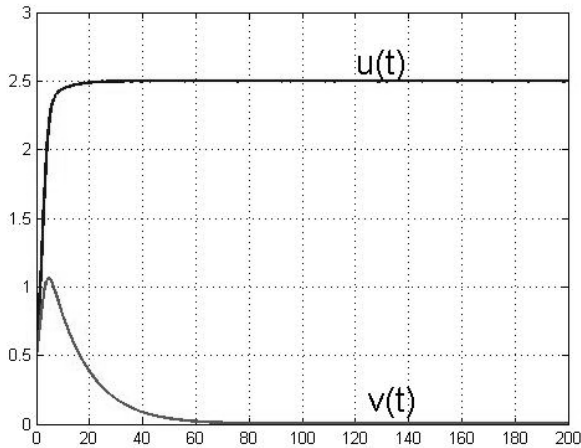


图 1  $E_1(\sqrt{g}, 0)$  是渐近稳定的

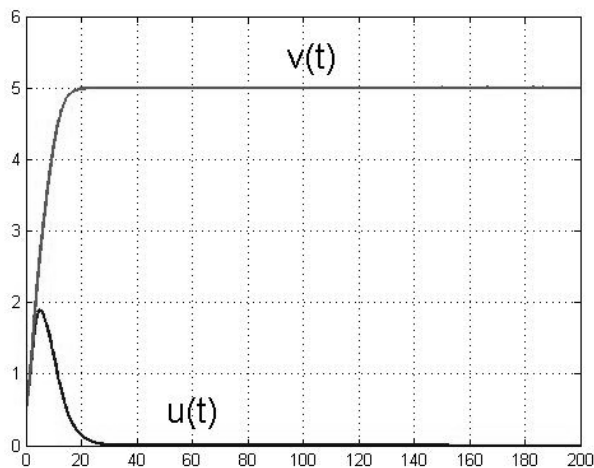


图 2  $E_2(0, \sqrt{g})$  是渐近稳定的

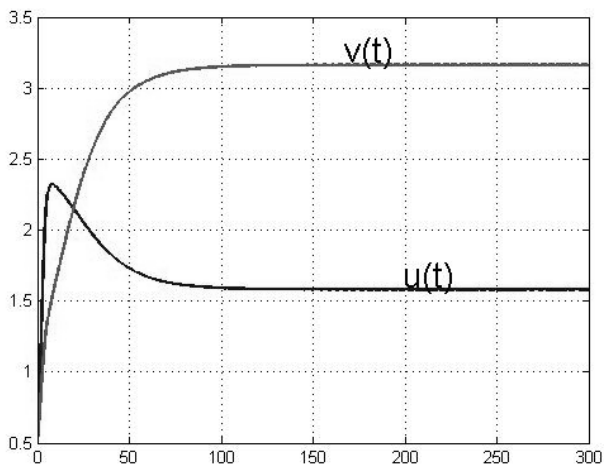


图 3  $E_*(u_*, v_*)$  是渐近稳定的

现在研究设置道路对生态系统稳定性的影响。对算子  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$  采用五点差分格式<sup>[14]</sup>逼近:

$$\Delta u = \frac{u_{x-h,y} + u_{x+h,y} + u_{x,y-h} + u_{x,y+h} - 4u_{x,y}}{h^2}$$

其中  $h$  为相邻离散网格点距离。对时间坐标类似处理, 则系统

(1) 的相应离散系统为:

$$\begin{aligned} u(t+\tau, x, y) &= u(t, x, y) + \frac{d_1\tau}{h^2} [u(t, x-h, y) \\ &+ u(t, x+h, y) + u(t, x, y-h) + u(t, x, y+h) \\ &- 4u(t, x, y)] + \tau [au(t, x, y) - bu^3(t, x, y) \\ &- cu(t, x, y)v^2(t, x, y)], \\ v(t+\tau, x, y) &= v(t, x, y) + \frac{d_2\tau}{h^2} [v(t, x-h, y) \\ &+ v(t, x+h, y) + v(t, x, y-h) + v(t, x, y+h) \\ &- 4v(t, x, y)] + \tau [ev(t, x, y) - gv^3(t, x, y) \\ &- fu^2(t, x, y)v(t, x, y)], \end{aligned}$$

其中  $\tau$  为离散时间步长,  $h$  为离散空间步长。先考虑不设置道路时, 两竞争种群的空间传播性质。取  $a=0.5, b=0.08, c=0.03, e=0.3, f=0.04, g=0.02, d_1=d_2=0.1, \tau=0.2, h=0.4$ 。模拟初始时, 系统中第一列两种群的密度分别为 1, 其它列为 0。采用  $500 \times 500$  的空间, 每个格点与相邻的四个格点之间可以扩散, 边界按零流边界处理, 即整个空间是封闭的, 边界上的点只在空间内部扩散。经过计算, 在  $t=469.8$  秒时,  $u$  种群的生物波传到最后一列, 见图 5; 在  $t=1325.2$  秒时,  $v$  种群的生物波传到最后一列, 见图 7。在  $t=1483.6$  秒时,  $u$  种群的生物波达到稳态值 1.5811, 见图 8; 在  $t=1493.6$  秒时,  $v$  种群的生物波达到稳态值 3.1623, 见图 9。

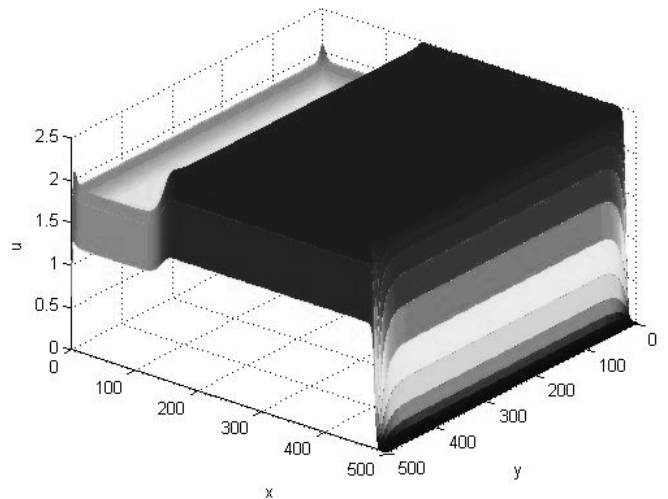


图 4  $u$ -波传到最后一列

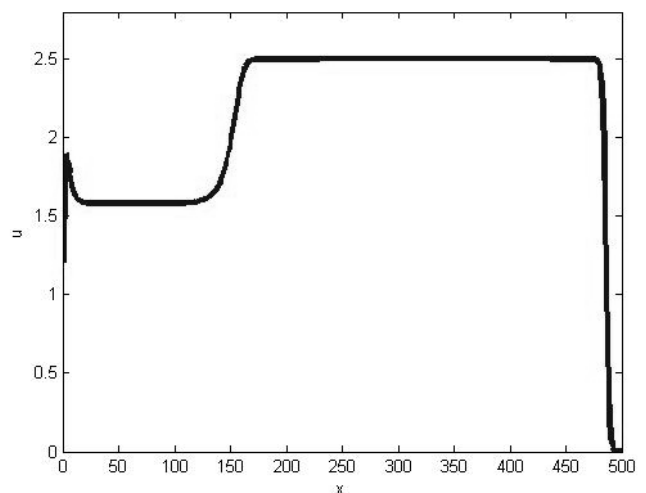


图 5  $u$ -波传到最后一列的截面图

下面进一步考虑设置道路以后对物种扩散的影响。假设在道路垂直方向上, 道路两侧点的格点的扩散系数为  $d_1=d_2=0.03$ , 其它格点的扩散系数为  $d_1=d_2=0.1$ , 别的参数值不变。经过计算, 在  $t=471.4$  秒时,  $u$  种群的生物波传到最后一列, 见图 11; 在  $t=1341$  秒时,  $v$  种群的生物波传到最后一列, 见图 13。在  $t=1499.6$  秒时,  $u$  种群的生物波达到稳态值 1.5811, 见图 15; 在  $t=1509.6$  秒时,  $v$  种群的生物波达到

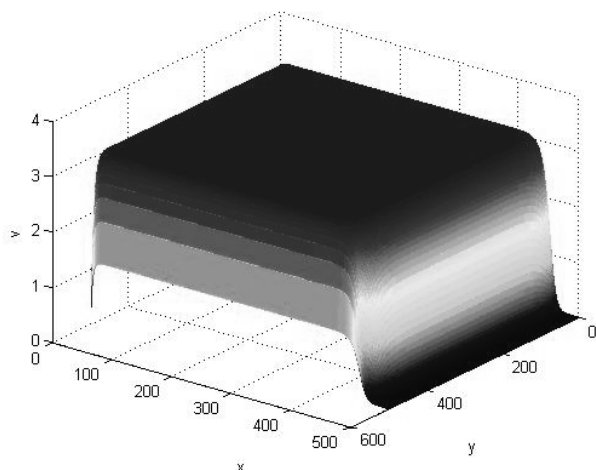


图6 v-波传到最后一列

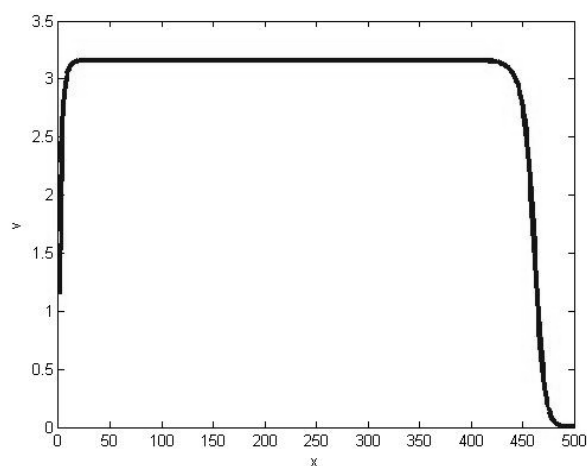


图7 v-波传到最后一列的截面图

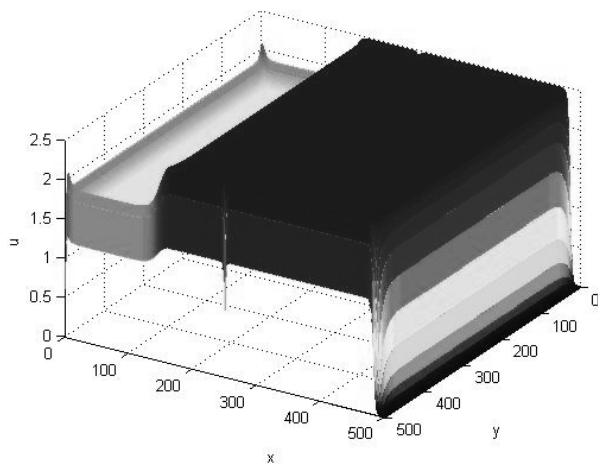


图10 u-波传到最后一列

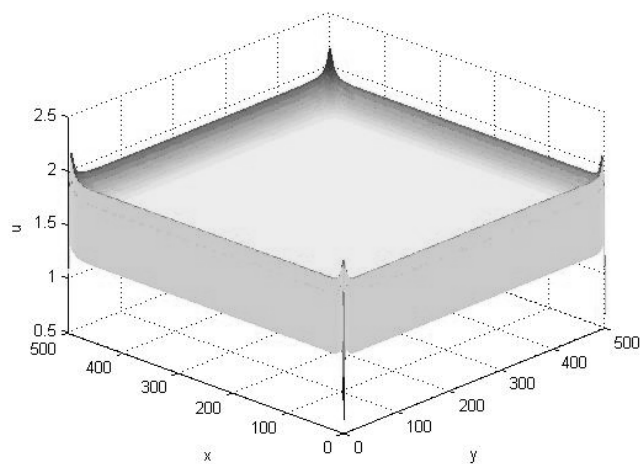


图8 u-波达到稳态值

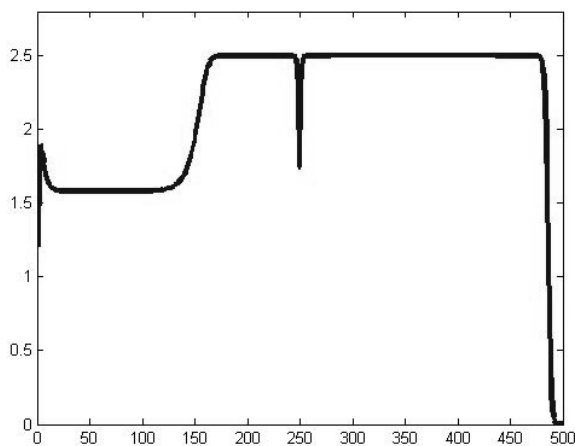


图11 u-波传到最后一列的截面图

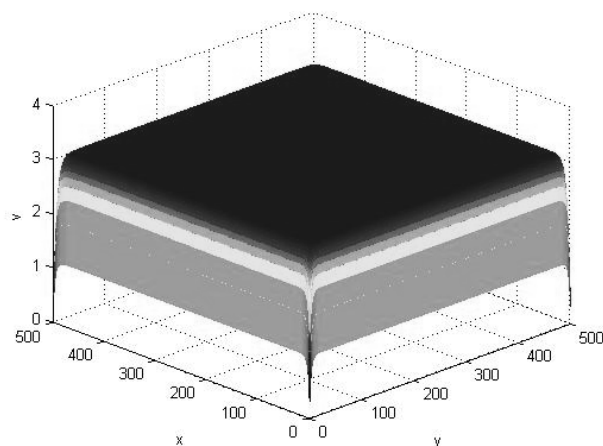


图9 v-波达到稳态值

稳态值 3.1623, 见图 17。通过比较, 发现在第 200 列设置一条道路时, 生态系统达到稳态的时间比不设道路的时间长。这说明道路会影响生态系统达到稳态的时间。

#### 4 结束语

两种群竞争系统在自然界非常普遍。研究道路设置与两种群达到稳态值的时间关系, 对于自然保护区是否设置生态廊道<sup>[5]</sup>提供了一定的理论指导与借鉴作用。

#### 参考文献

- [1]李俊生, 张晓岚, 吴晓菁, 等. 道路交通的生态影响研究综述[J]. 生态环境学报, 2009, 18(3): 1169-1175.
- [2]刘世梁, 温敏霞, 崔宝山, 等. 道路网络扩展对区域生态系统的影响——以景洪市纵向岭谷区为例[J]. 生态学报, 2006, 26(9): 3018-

3024.

- [3]Forman R T T, . Estimate of the area affected ecologically by the road system in the United States [J]. Conservation Biology, 2000, 14: 31-35.
- [4]李月辉, 胡远满, 李秀珍, 等. 道路生态研究进展[J]. 应用生态学报, 2003, 14(3): 447-452.
- [5]Seidler R. Roads and the land: two giants in uneasy embrace[J]. Conservation Biology, 2004, 18: 850-852.
- [6]汪自书, 曹辉, 魏建兵. 道路生态学中的景观生态问题[J]. 生态学杂志, 2007, 26(10): 1665-1670.
- [7]道路生态学: 科学与解决方案[M]. 李太安, 安黎哲, 译. 北京: 高等教育出版社, 2008.

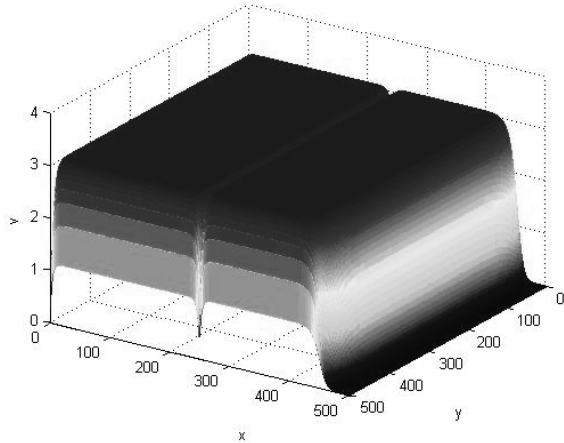


图 12 v-波传到最后一列

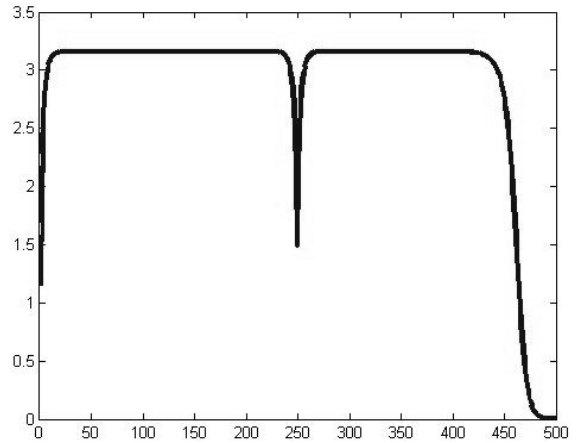


图 13 v-波传到最后一列的截面图

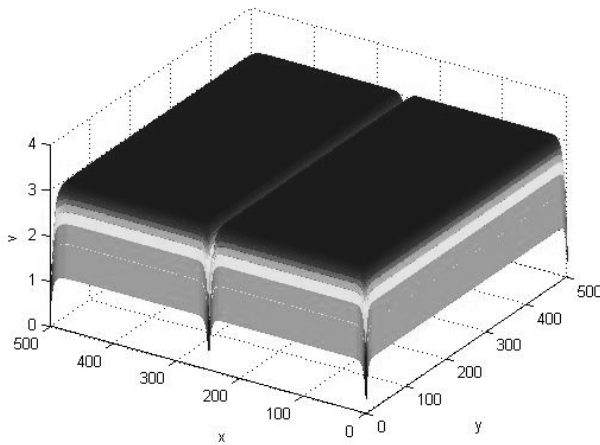


图 16 v-波达到稳态值

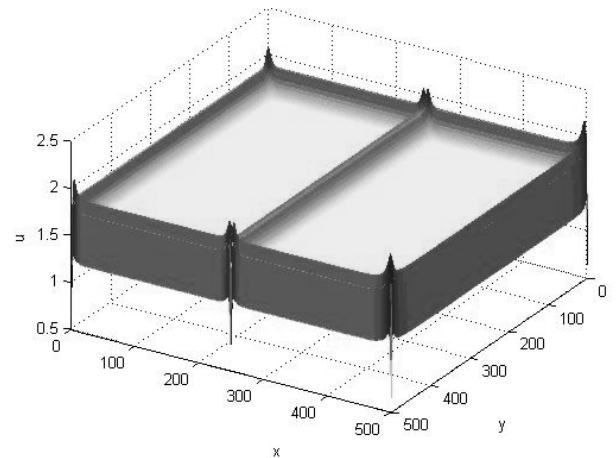


图 14 u-波达到稳态值

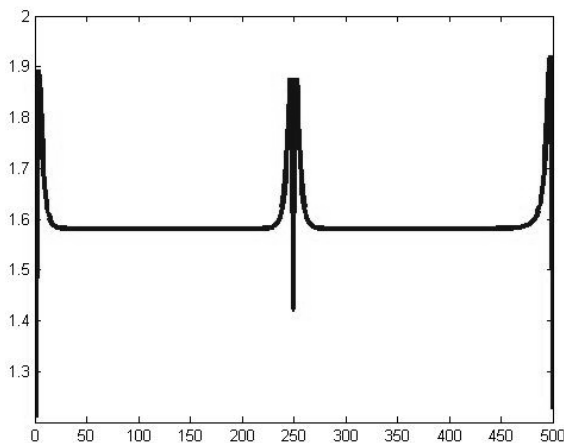


图 17 v-波达到稳态值的截面图

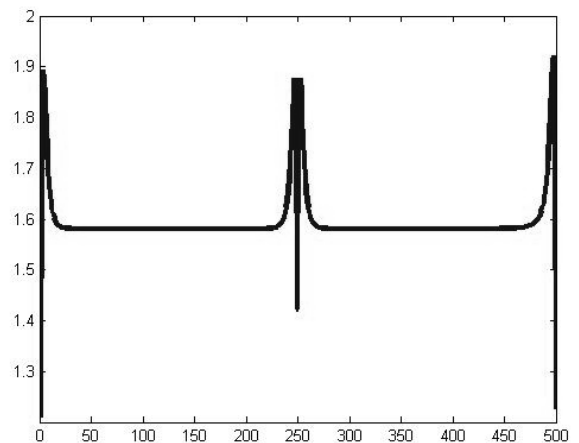


图 15 u-波达到稳态值的截面图

- [8]王勤龙,李百炼.生物入侵模型研究进展[J].科技导报,2011,29(10):71-79.
- [9]高雪娇.道路干扰下的生态系统空间特性研究[D].北京:北京交通大学,2010.
- [10]聂华,吴建华,王艳娥,等.反应扩散模型的动力学[D].北京:科学出版社,2013.
- [11]Zhang J F, Zhang P A. Global asymptotic stability for a diffusion Lotka-Volterra competition system with time delays [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2012, 49(6):1255-1262.
- [12]贾云锋,王莹.一类带有扩散的 Lotka-Volterra 竞争系统的共存态[J].计算机工程与应用, 2013, 49(11):35-37.
- [13]廖晓昕.动力系统的稳定性理论与应用[M].北京:国防工业出版社, 2001.

- [14]李荣华,刘播.微分方程数值解法[M].北京:高等教育出版社, 2009.
- [15]董艳竹.生态廊道——一场道路建设的“革命”[N].郑州日报, 2014.

作者简介:招倩仪(1995-),女,学士,研究领域为计算数学。

郭淑玲(1994-),女,学士,研究领域为应用数学。

杨勇(1980-),男,博士,讲师,研究领域为生物信息学。

吴楚芬(1982-),女,博士,副教授,研究领域为微分方程理论及应用。