

# Identyfikacja parametrów ciągłego obiektu liniowego.

Michał Jarzyna

13 grudnia 2019

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Zadanie identyfikacyjne</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Wyznaczanie algorytmu</b>	<b>4</b>
2.1	Założenia uzupełniające . . . . .	4
2.2	Model identyfikacyjny . . . . .	4
2.3	Algorytm identyfikacyjny . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Symulacja algorytmu identyfikacyjnego</b>	<b>7</b>
3.1	Symulowany układ . . . . .	7
3.2	Sygnał sterujący . . . . .	8
3.3	Przykładowa symulacja . . . . .	8

# 1 Zadanie identyfikacyjne

Proces do identyfikacji zadany jest następującym równaniem:

$$\dot{y}(t) = -a \cdot y(t) + u(t). \quad (1.1)$$

Należy zaprojektować i zasymulować algorytm adaptacyjny postaci:

$$\dot{k}(t) = f(y(t)) \quad (1.2)$$

służący do identyfikacji nieznanego parametru  $a$  zakładając, że sterowanie jest funkcją odpowiedzi procesu:

$$u(t) = g(y(t)), \quad (1.3)$$

oraz gwarantując jego stabilność.

## 2 Wyznaczanie algorytmu

Rozpoczynając od tego rozdziału dla wszystkich uprzednio zdefiniowanych funkcji czasu zostaje pominięty jawny zapis zależności od czasu ( $y(t) \rightarrow y$ ) w celu zwiększenia klarowności zapisu.

### 2.1 Założenia uzupełniające

Stabilność obiektu wymaga spełnienia warunków Hurwitza, w szczególności, dla zadanego obiektu warunek ten sprowadza się do postaci:

$$a > 0. \quad (2.1)$$

Założono występowanie nieznanego parametru obiektu skalującego wpływ sterowania. Zmodyfikowane równanie 1.1 przyjmuje postać:

$$\dot{y} = -a \cdot y + b \cdot u \quad (2.2)$$

Identyfikacji będą podlegać dwa parametry, więc algorytm identyfikacyjny (1.2) przyjmie postać:

$$\dot{k} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1(t) \\ \dot{\Theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(y(t)) \\ f_2(y(t)) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### 2.2 Model identyfikacyjny

Identyfikację parametrów zrealizowano poprzez zastosowanie referencyjnego obiektu liniowego:

$$\dot{\hat{y}}(t) = -\hat{a}\hat{y}(t) + \hat{b}u_c(t), \hat{a} > 0. \quad (2.4)$$

Wykorzystując tak skonstruowany model i algorytm identyfikacji (2.3) sterowanie (1.3) wyznaczono w następujący sposób:

$$u = \Theta_1 u_c - \Theta_2 y. \quad (2.5)$$

Zagwarantowanie równoważnego zachowania obiektu (1.1) oraz modelu (2.4) od momentu zrównania się wyjść obu obiektów  $y = \hat{y}$  wymaga spełnienia warunku:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{\hat{y}} \\ -ay + bu &= -\hat{a}\hat{y} + \hat{b}u_c & | u &= \Theta_1 u_c - \Theta_2 y \\ -ay + b(\Theta_1 u_c - \Theta_2 y) &= -\hat{a}\hat{y} + \hat{b}u_c \\ \hat{a}\hat{y} - ay - b\Theta_2 y + b\Theta_1 u_c - \hat{b}u_c &= 0 & | y &= \hat{y} \\ y(\hat{a} - a - b\Theta_2) + u_c(b\Theta_1 - \hat{b}) &= 0 & | (y \neq 0 \wedge \hat{y} \neq 0). \end{aligned}$$

Powyższy warunek jest spełniony, jeśli parametry  $\Theta$  przyjmą następujące wartości:

$$\Theta_1 = \frac{\hat{b}}{b} \wedge \Theta_2 = \frac{\hat{a} - a}{b}. \quad (2.6)$$

Ponadto różnica pomiędzy wyjściami obiektu i modelu jest następująca:

$$e(t) = y - \hat{y}. \quad (2.7)$$

Pożądany punkt stabilności jest więc następującej postaci:

$$x^* = \begin{bmatrix} e^* \\ \Theta_1^* \\ \Theta_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\hat{b}}{b} \\ \frac{\hat{a}-a}{b} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

## 2.3 Algorytm identyfikacyjny

Dysponując pożądanym punktem stabilności (2.8) można zaproponować funkcję Lapunowa w formie połowy modyfikowanej normy  $L_2$  wektora łączącego bieżący stan z pożądanym:

$$V(e, \Theta_1, \Theta_2) = \frac{1}{2} \left[ e^2 + \frac{1}{\gamma b} \left( b\Theta_1 - \hat{b} \right)^2 + \frac{1}{\gamma b} \left( b\Theta_2 - (\hat{a} - a) \right)^2 \right]. \quad (2.9)$$

Wartość tak skonstruowanej funkcji Lapunowa w punkcie  $x_0$  wynosi:

$$V(x^*) = \frac{1}{2} \left[ e^2 + \frac{1}{\gamma b} \left( b\frac{\hat{b}}{b} - \hat{b} \right)^2 + \frac{1}{\gamma b} \left( b\frac{\hat{a}-a}{b} - (\hat{a} - a) \right)^2 \right] = 0, \quad (2.10)$$

więc spełnia 1° warunek twierdzenia Lapunowa o stabilności.

Parametr  $b$  jest nieznany, jednak znając jego znak (dla obiektu liniowego parametr  $b > 0$  da odpowiedź prostą, natomiast  $b < 0$  odpowiedź odwrotną; określenie znaku wymaga więc jedynie jednego prostego eksperymentu) łatwo dobrać parametr  $\gamma$  tak, żeby iloczyn  $b\gamma > 0$ . Tak dobrany parametr  $\gamma$  sprawia, że funkcja Lapunowa określona równaniem (2.9) jest sumą kwadratów zmiennych ważoną dodatnimi parametrami, a więc dla dowolnych zmiennych niezerujących całego wyrażenia wartość tej funkcji będzie dodatnia. To spostrzeżenie gwarantuje spełnienie 2° warunku twierdzenia Lapunowa o stabilności.

3° warunku twierdzenia Lapunowa o stabilności wymaga wyznaczenia pochodnej funkcji Lapunowa po czasie:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \Theta_1, \Theta_2) &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma} \left( b\Theta_1 - \hat{b} \right) \dot{\Theta}_1 + \frac{1}{\gamma} \left( b\Theta_2 - (\hat{a} - a) \right) \dot{\Theta}_2 \\ &\quad \begin{array}{ll} / \dot{e} = \dot{y} - \hat{y} & | \dot{y} = -ay + bu \wedge \hat{y} = -\hat{a}\hat{y} + \hat{b}u_c / \\ / \dot{e} = -ay + bu - (-\hat{a}\hat{y} + \hat{b}u_c) & | u = \Theta_1 u_c - \Theta_2 y / \\ / \dot{e} = -ay + b(\Theta_1 u_c - \Theta_2 y) + \hat{a}\hat{y} - \hat{b}u_c + 0 & | 0 = \hat{a}y - \hat{a}\hat{y} / \\ / \dot{e} = -ay + b\Theta_1 u_c - b\Theta_2 y + \hat{a}\hat{y} - \hat{b}u_c + \hat{a}y - \hat{a}\hat{y} / & \\ / \dot{e} = -\hat{a}(y - \hat{y}) + (b\Theta_1 - \hat{b})u_c + (\hat{a} - a - b\Theta_2)y & | e = y - \hat{y} / \\ / e\dot{e} = -\hat{a}e^2 + (b\Theta_1 - \hat{b})u_c e + (\hat{a} - a - b\Theta_2)ye / & \end{array} \end{aligned}$$

$$\dot{V} = -\hat{a}e^2 + (b\Theta_1 - \hat{b})u_c e + (\hat{a} - a - b\Theta_2)ye + \frac{1}{\gamma} \left( b\Theta_1 - \hat{b} \right) \dot{\Theta}_1 + \frac{1}{\gamma} \left( b\Theta_2 - (\hat{a} - a) \right) \dot{\Theta}_2$$

$$\dot{V} = -\hat{a}e^2 + (b\Theta_1 - \hat{b}) \left( \frac{\dot{\Theta}_1}{\gamma} + u_c e \right) + (b\Theta_2 - (\hat{a} - a)) \left( \frac{\dot{\Theta}_2}{\gamma} - ye \right) \quad (2.11)$$

Spełnienie 3° warunku twierdzenia Lapunowa o stabilności wymaga, aby wartość wyrażenia (2.11) była ujemna wszędzie poza punktem stabilności. Wyraz  $-\hat{a}e^2$  spełnia ten warunek zawsze, ze względu na założenia (2.4). Można wpływać na wartości  $\dot{\Theta}_1$  i  $\dot{\Theta}_2$ , a więc najprostszą metodą zapewnienia wymagań 3° warunku twierdzenia Lapunowa o stabilności jest wyzerowanie pozostałych wyrazów wyrażenia (2.11) w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_c e \gamma \\ y e \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Dysponując metodą wyznaczania parametru  $\gamma$  powyższe wyrażenie jest gotowym algorytmem identyfikującym zadane parametry. Gdy wartość  $e$  ustabilizuje się w 0, to poszukiwane parametry procesu można odczytać w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} a_{est} \\ b_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a} - \hat{b} \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \\ \frac{\hat{b}}{\Theta_1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

### 3 Symulacja algorytmu identyfikacyjnego

Symulację zaprojektowanego algorytmu przeprowadzono za pomocą pakietu MATLAB.

#### 3.1 Symulowany układ

Układ równań różniczkowych opisujących układ wraz z algorytmem identyfikacyjnym składa się z równań (1.1), (2.4), (2.7) oraz (2.12) i wyraża się w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\hat{y}} \\ \dot{e} \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ay + bu \\ -\hat{a}\hat{y} + \hat{b}u_c \\ y - \hat{y} \\ -u_c e \gamma \\ ye \gamma \end{bmatrix} = |u = \Theta_1 u_c - \Theta_2 y| = \begin{bmatrix} -ay + b\Theta_1 u_c - b\Theta_2 y \\ -\hat{a}\hat{y} + \hat{b}u_c \\ y - \hat{y} \\ -u_c e \gamma \\ ye \gamma \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

W układzie tym występują następujące obiekty:

- zmienne stanu:  $[y, \hat{y}, e, \Theta_1, \Theta_2]^T$  (nie występują przekształcenia między stanem, a wyjściem, więc można je traktować jako tożsame),
- sygnał sterujący  $[u_c]$ ,
- parametry znane:  $[\hat{a}, \hat{b}, \gamma]$ ,
- parametry nieznane:  $[a, b]$ .

Sygnał  $e$  jest wyznacznikiem realizacji zadania identyfikacji, jednak łatwo go wyrugować z równań, a następnie ponownie wyznaczyć na podstawie pozostałych przebiegów. Dodatkowo zmniejszenie układu równań przyspieszy obliczenia (w tym przypadku nieznacznie, ale w ogólności warto się o to starać). Zmodyfikowany układ przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\hat{y}} \\ \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ay + b\Theta_1 u_c - b\Theta_2 y \\ -\hat{a}\hat{y} + \hat{b}u_c \\ -u_c(y - \hat{y})\gamma \\ y(y - \hat{y})\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Uzyskany układ składa się z równań różniczkowych pierwszego rzędu i jako taki nie wymaga dalszych modyfikacji przed implementacją. Aspekty, które wymagają komentarza są następujące:

- stan początkowy  $x_0 = [y_0, \hat{y}_0, \Theta_{10}, \Theta_{20}]^T$  będzie generowany w następujący sposób:  $y_0$  losowe - nie ma powodu zakładać czegokolwiek o nieznanym obiekcie,  $\hat{y}_0 = 0$  w obiekcie nie występuje wyraz  $\sim \frac{1}{\hat{y}}$ , więc to bezpieczny punkt startowy,  $\Theta_{10} = 1$  optymistyczne założenie, że obiekt i model mają takie same parametry  $b$ ,  $\Theta_{20} = 0$  optymistyczne założenie, że obiekt i model mają równe parametry  $a$ ;

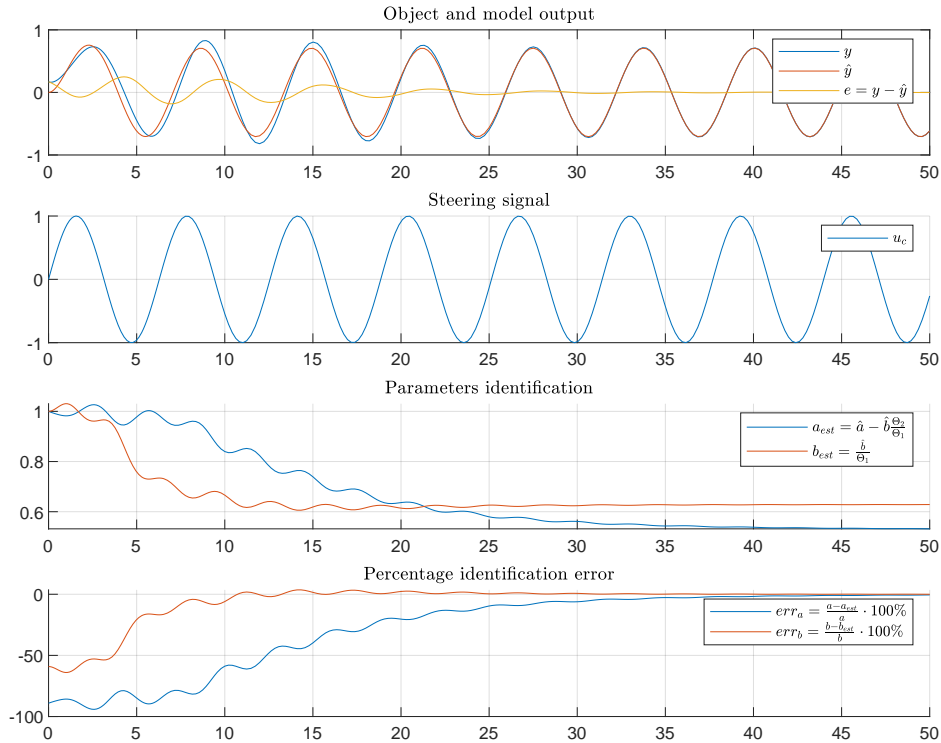
- parametry nieznane  $[a, b]$  będą losowane;
- parametry znane  $[\hat{a}, \hat{b}]$  będą wybierane jako [11] - najprostszy nietrywialny obiekt, natomiast parametr  $\gamma$  będzie określony jako  $\gamma = \text{sign}(b)$ , w celu spełnienia założenia  $b\gamma > 0$ .

### 3.2 Sygnał sterujący

Analizując układ równań (3.2) widać, że pochodne sygnałów identyfikujących  $\dot{\Theta}_1, \dot{\Theta}_2$  są zależne liniowo od różnicy pomiędzy wyjściami obiektu i modelu  $e = y - \hat{y}$ , w szczególności, gdy wyraz  $e = 0$  nadmienione pochodne zerują się, co oznacza, że algorytm adaptacyjny zatrzyma się. Wyzerowanie się sygnału  $e$  może nastąpić w dwóch przypadkach: identyfikacja obiektu zakończyła się sukcesem, albo sygnały  $y$  i  $\hat{y}$  ustaliły się na równym poziomie ze względu na stałość sterowania  $u_c$ , jednak parametry  $\Theta_1, \Theta_2$  zidentyfikowały inny obiekt liniowy, który dla sterowania  $u = \Theta_1 u_c - \Theta_2 y$  ustala się akurat na tym samym poziomie (istnieje nieskończenie wiele takich obiektów liniowych dla zadanego poziomu). Zabezpieczenie się przed zagrożeniem zajścia drugiej sytuacji wymaga zmienności sygnału sterującego  $u_c$  w czasie. Z tego względu zaproponowano sinusoidalny przebieg sygnału sterującego  $u_c = \sin(t)$ .

### 3.3 Przykładowa symulacja

Przygotowany projekt symuluje algorytm identyfikacji nieznanych parametrów obiektu liniowego. Poniżej przedstawiono przykładowy wynik symulacji:



Rysunek 1: Przebiegi sygnałów symulacji algorytmu identyfikacyjnego.