ПЛАНИМЕТРИЯ

П.В. Леонов

Содержание

1 **Треугольник** **2**
1.1 Треугольник. Общее . . . 2
1.2 Замечательные линии треугольника . . . 6
1.3 Некоторые особые треугольники . . . 8
1.4 Площадь треугольника . . . 12
1.5 Подобные треугольники . . . 16
1.6 Средняя линия треугольника . . . 19
1.7 Площадь подобных треугольников . . . 20
1.8 Теорема Менелая . . . 21
1.9 Высота и подобие . . . 24
1.10 Теорема синусов . . . 26
1.11 Теорема косинусов . . . 29
1.12 Площадь и вписанная/описанная окружность . . . 31
1.13 Про медиану . . . 33
1.14 Про биссектрису . . . 35

2 **Окружность** **36**
2.1 Окружность. Общее . . . 36
2.2 Углы в окружности . . . 38
2.3 Касательные и секущие . . . 44
2.4 Вписанная и описанная окружность . . . 45
2.5 Площадь круга . . . 47

3 **Многоугольник** **48**
3.1 Четырехугольник . . . 48
3.2 Параллелограмм . . . 49
3.3 Площадь параллелограмма . . . 52
3.4 Диагонали параллелограмма . . . 54
3.5 Особые параллелограммы . . . 55
3.6 Трапеция . . . 56
3.7 Площадь выпуклого четырехугольника . . . 57

1 Треугольник

1.1 Треугольник. Общее

Треугольник — это фигура, которая получается, если соединить три точки (не лежащие на одной прямой) отрезками.

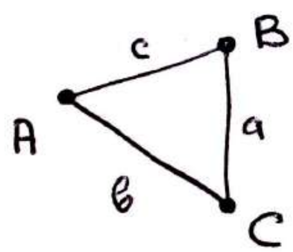


рис. 1

У треугольника имеется три стороны a, b, c и три угла $\angle A, \angle B, \angle C$. То есть шесть чисел $(a, b, c, \angle A, \angle B, \angle C)$ его определяют.

Поэтому, если имеется два треугольника

$$(a_1, b_1, c_1, \angle A_1, \angle B_1, \angle C_1) \text{ и } (a_2, b_2, c_2, \angle A_2, \angle B_2, \angle C_2)$$

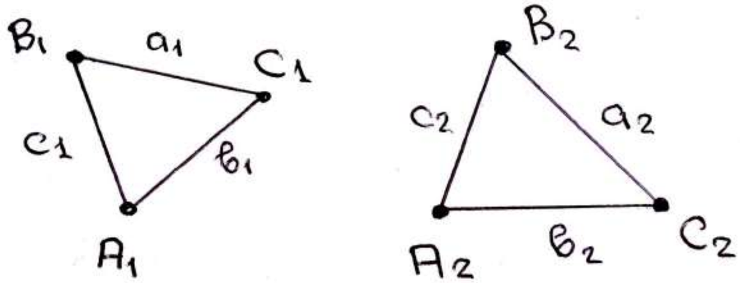


рис. 2

они равны тогда, когда эти шесть параметров соответственно совпадают:

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, \quad \angle A_1 = \angle A_2, \angle B_1 = \angle B_2, \angle C_1 = \angle C_2$$

Может быть шесть параметров слишком много (избыточно) для однозначного задания треугольника? То есть возможно ли заполнить только часть из имеющихся шести параметров и все равно однозначно получить некоторый треугольник?

Будем перебирать варианты. Начнем с одного параметра, например, с угла. Пусть задан угол $\angle A = 45°$. Можно ли найти два разных треугольника, с таким параметром? Легко! Например, два прямоугольных равнобедренных треугольника с катетами 2 и 4.

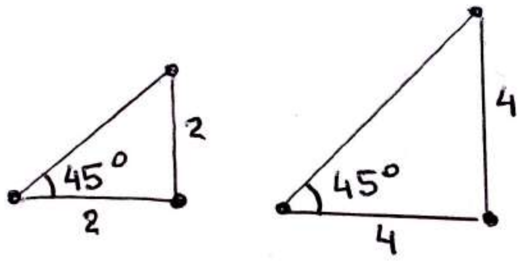


рис. 3

Если зададим только сторону, опять будет неоднозначность. Итак, одного параметра недостаточно. Продолжая в том же духе, остановимся на трех параметрах. Конкретнее на следующих трех ситуациях:

1. две стороны и угол между ними, например $(\angle A, b, c)$

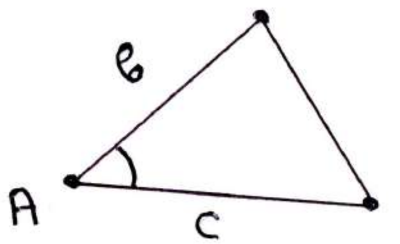


рис. 4

2. сторона и два прилежащих к ней угла, например $(\angle A, \angle B, c)$

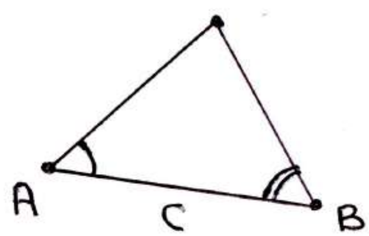


рис. 5

3. три стороны (a, b, c)

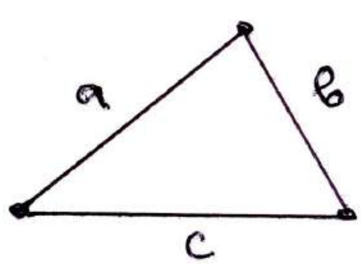


рис. 6

Это минимальные наборы, которые однозначно задают некоторый треугольник.

Формально равенство двух треугольников означает равенство всех параметров, задающих эти треугольники. С геометрической же точки зрения это означает, что фигуры совпадут при наложении.

Только что выше мы записали три признака равенства треугольников.

Интересен следующий вопрос: любой ли числовой набор $(a, b, c, \angle A, \angle B, \angle C)$ соответствует некоторому треугольнику? Например, (1, 3, 5, 20°, 40°, 100°) — какой-то треугольник или просто какие-то числа?

Оказывается, ограничения имеются, их два:

1. Сумма углов в треугольнике равна 180°.

   Сумма углов в треугольнике

   $$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \qquad (1)$$

   Возьмем произвольный треугольник и проведем через некоторую вершину, например, A прямую, параллельную противолежащей стороне BC.

   Отметим две точки на полученной прямой: M — левее A, N — правее A.

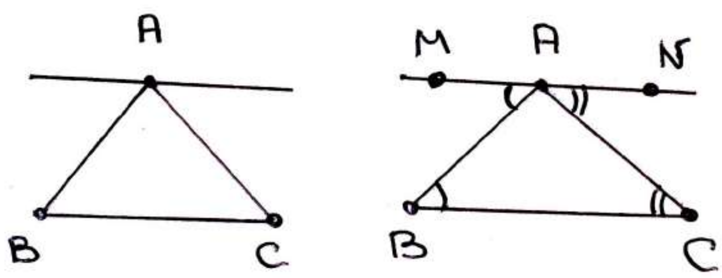
   

   рис. 7

   Заметим равенства накрест лежащих углов: $\angle MAB = \angle ABC$ и $\angle BCA = \angle CAN$.

   Углы $\angle MAB, \angle BAC$ и $\angle CAN$ образуют развернутый угол, который равен 180°. Значит и углы треугольника в сумме дают 180°.

2. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон (неравенство треугольника).

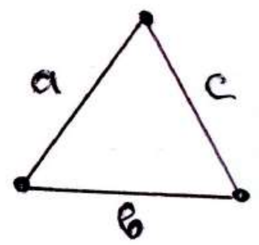


Рис. 8

Неравенство треугольника

$$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a \tag{2}$$

Получается, набор (1, 3, 5, 20°, 40°, 100°) не удовлетворяет как первому, так и второму условию:

1. $1{+}3 < 5$
2. $20^\circ + 40^\circ + 100^\circ = 160^\circ \neq 180^\circ$

1.2 Замечательные линии треугольника

Возьмем любую вершину треугольника $\triangle ABC$ и начнем выпускать из нее лучи на противолежащую сторону. Пусть выбрали вершину A, обозначим точки пересечения с прямой, содержащей отрезок BC, буквами $A_1, A_2, \ldots$

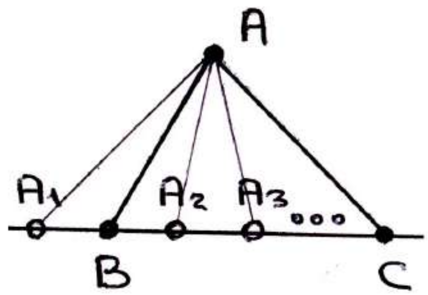


РИС. 9

В общем случае, например, отрезок AA_1 ведет себя как угодно. Тем не менее выделяют три особых случая его поведения:

1. $BA_1 = A_1C$, то есть точка A_1 — середина отрезка BC.

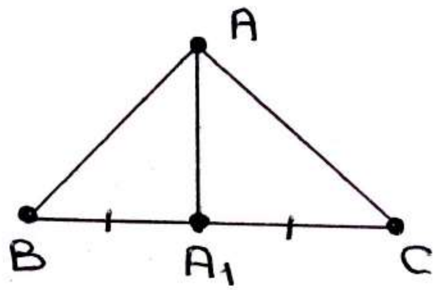


РИС. 10

Тогда прямая AA_1 называется **медианой**.

2. $\angle BA_1A = \angle CA_1A = 90°$, то есть AA_1 — это перпендикуляр к BC. Тогда AA_1 называется **высотой**.

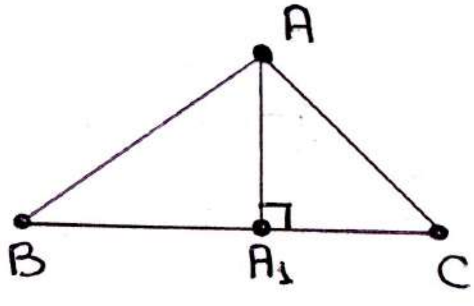


РИС. 11

3. $\angle BAA_1 = \angle A_1AC$, тогда AA_1 называется **биссектрисой**.

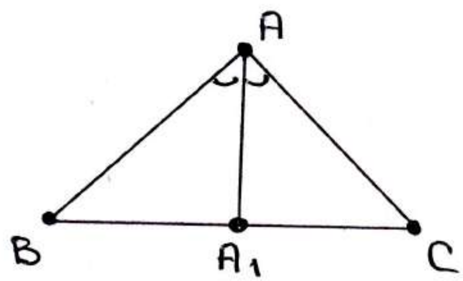


РИС. 12

1.3 Некоторые особые треугольники

Рассмотрим несколько особых видов треугольника.

1. Пусть у треугольника один из углов прямой (равен 90°), тогда он называется **прямоугольным**.

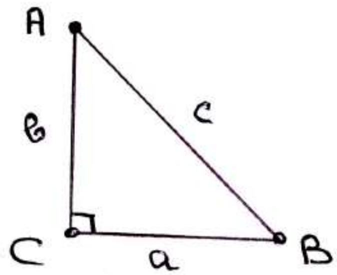


рис. 13

Что примечательного в прямоугольном треугольнике?

Во-первых, $\angle A + \angle B = 90°$.

Во-вторых, для него выполняется особое равенство: связь между сторонами (теорема Пифагора).

Теорема Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3}$$

Квадрат гипотенузы (стороны, лежащей против прямого угла) равен сумме квадратов катетов (двух других сторон).

Убедимся в верности этого утверждения [1]. Воспользуемся "пристальным разглядыванием". Возьмем два одинаковых квадрата со сторонами $a + b$. Разобъем их так, как показано на рисунке.

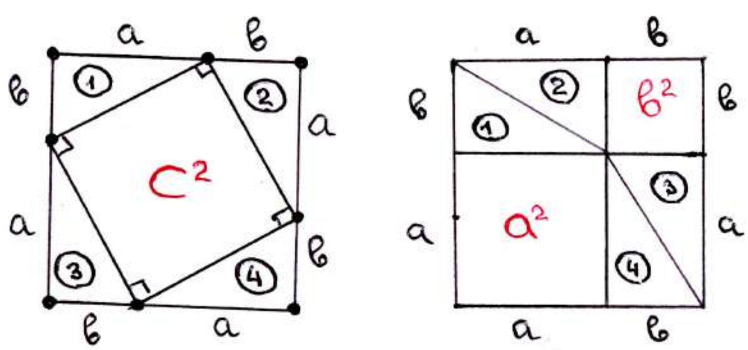


рис. 14

[1]Для доказательство будем пользоваться площадами, которые рассмотрим чуть позже. Тем не менее доказательство приведем именно в данном месте.

В результате в первом квадрате имеем четыре одинаковых треугольника, помеченных цифрами $1, 2, 3, 4$ и в центре — квадрат со стороной c. Это действительно будет квадрат, потому что каждый его угол равен развернутому за вычетом острых углом любого треугольника $1, 2, 3, 4$. А эти острые углы в сумме дают $90°$. Значит разность равна $180° - 90° = 90°$.

Эти же самые четыре треугольника $1, 2, 3, 4$ можно заметить во втором квадрате. Оба квадрата одинаковые, поэтому у них площади равны $S_1 = S_2$.

Если отрезать четыре треугольника $1, 2, 3, 4$ у первого и второго больших квадратов, то равенство площадей сохранится, потому что вычетаем справа и слева одно и то же число:

S_1- (площадь треугольников 1,2,3,4) $= S_2-$ (площадь треугольников 1,2,3,4)

Сообразим, что осталось от первого большого квадрата: квадрат со стороной c, его площадь равна c^2. От второго большого квадрата: два квадратика со сторонами a и b, их площади соответственно a^2 и b^2.

$$S_1 - \text{ (площадь треугольников 1,2,3,4) } = c^2$$

$$S_2 - \text{ (площадь треугольников 1,2,3,4) } = a^2 + b^2$$

Значит

$$a^2 + b^2 = c^2$$

На прямоугольном треугольнике задаются **тригонометрические функции**: синус, косинус, тангенс и котангенс.

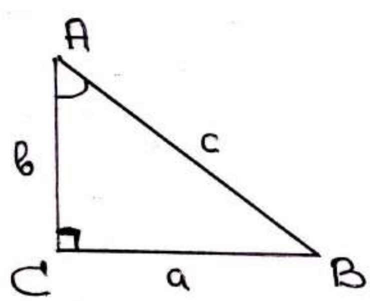


РИС. 15

Тригонометрические функции

$$\sin\angle A = \frac{a}{c} \qquad \cos\angle A = \frac{b}{c} \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\angle A = \frac{\sin\angle A}{\cos\angle A} = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{ctg}\angle A = \frac{1}{\operatorname{tg}\angle A} = \frac{b}{a}$$

Угол $\angle A$ острый. Далее тригонометрические функции с помощью единичной окружности обобщаются на произвольные углы.

2. Пусть у треугольника имеются две одинаковые стороны, например $AC = BC$. В этом случае его принято называть **равнобедренным**.

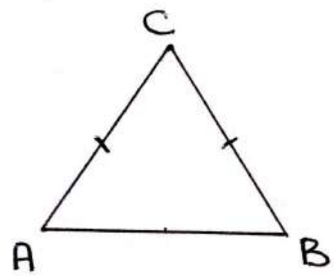


Рис. 16

Сразу отметим, что из равенства сторон $AC = BC$ следует равенство углов $\angle A = \angle B$.

Действительно, проведем из вершины C биссектрису CC_1.

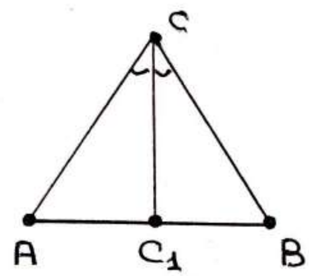


Рис. 17

$\triangle ACC_1 = \triangle CC_1B$ по двум сторонам ($AC = CB, CC_1$ — общая) и углу между ними ($\angle ACC_1 = \angle C_1CB$).

В равных треугольниках против одинаковых сторон лежат одинаковые углы, значит $\angle A = \angle B$.

Также из равенства треугольников $\triangle ACC_1$ и $\triangle CC_1B$ следует равенство сторон AC_1 и C_1B, то есть CC_1 еще и медиана, а также высота:

$$\angle AC_1C = \angle CC_1B \text{ и } \angle AC_1C + \angle CC_1B = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle AC_1C = \angle CC_1B = 90^\circ$$

3. Пусть у треугольника все стороны равны. Тогда он называется **равносторонним**. Это особый случай равнобедренного треугольника, поэтому все свойства последнего распространяются и на него.

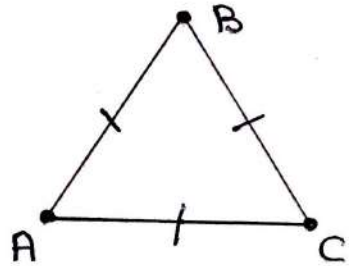


рис. 18

При этом добавляется еще кое-что:

$$BC = AC \Rightarrow \angle B = \angle A$$

$$AB = BC \Rightarrow \angle A = \angle C$$

Значит $\angle A = \angle B = \angle C$, но для любого треугольника сумма углов равна 180°, значит в равностороннем треугольнике каждый угод равен $\dfrac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

4. Пристальнее рассмотрим треугольник, у который имеется один прямой угол и при этом он еще и равнобедренный.

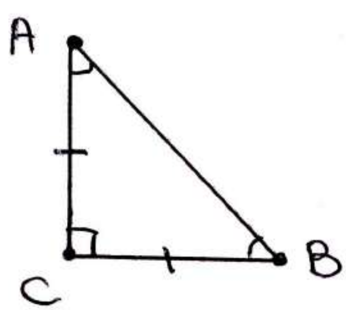


рис. 19

$$\angle A + \angle B + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B = 90^\circ$$
$$\angle A = \angle B \Rightarrow \angle A = \angle B = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

1.4 Площадь треугольника

Рассмотрим произвольный прямоугольник, обозначим его стороны за a и b.

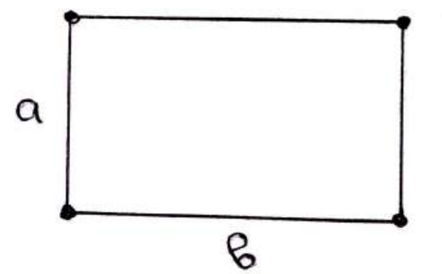


РИС. 20

Величину той части плоскости, которую он занимает, будем вычислять как $a \cdot b$ и обозначать буквой S.

$$S_{\text{прямоуг}} = a \cdot b$$

Теперь рассмотрим некоторый треугольник $\triangle ABC$, обозначим любую его сторону d, а высоту, опущенную на эту сторону буквой h.

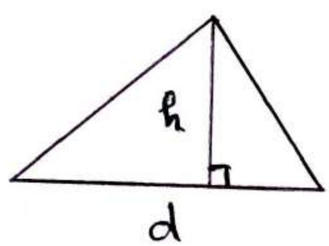


РИС. 21

Достроим треугольник до прямоугольника таким образом, как показано на рисунке.

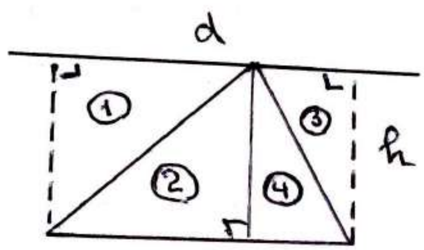


РИС. 22

Одна сторона прямоугольника равна высоте треугольника h, другая — основанию d.

Треугольники 1 и 2 равны по двум сторонам и углу между ними, то же самое и с треугольниками 3 и 4 — они равны по тем же причинам.

Получается, что имеем следующую связь площадей прямоугольника $S_{\text{прям}}$ и треугольника $S_{\text{треуг}}$:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{\text{прям}}$$

$$S_1 = S_2, S_3 = S_4 \Rightarrow 2S_2 + 2S_4 = S_{\text{прям}}$$

$$S_{\text{треуг}} = S_2 + S_4 \Rightarrow S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot S_{\text{прям}}$$

То есть площадь треугольника равна половине площади прямоугольника со сторонам h и d:

Площадь треугольника

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot d \tag{5}$$

С помощью тригонометрии[2] эту формулу можно чуть-чуть трансформировать.

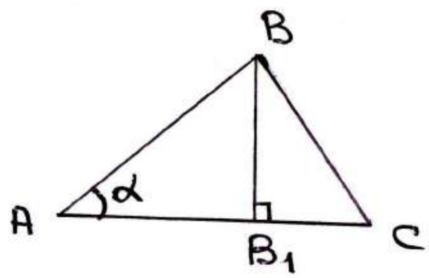


РИС. 23

Проведем высоту из любой вершины, например, из точки B. Внутри исходного треугольника $\triangle ABC$ получился прямоугольный $\triangle ABB_1$. Запишем в нем синус угла $\angle A$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BB_1 \cdot AC}{2}; \quad \sin\angle A = \frac{BB_1}{AB}$$

Теперь выразим высоту BB_1 через синус.

Площадь треугольника через синус

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle A \tag{6}$$

Также отметим без вывода удобную соотношение для площади — формулу Герона. Пусть извсетны длины всех сторон треугольника a, b и c. Обозначим через p полупериметр:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Тогда площадь равна

[2] В дальнейшем мы очень часто будем применять тригонометрию для изменения некоторых формул.

Формула Герона

$$S_\triangle = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \tag{7}$$

С помощью этой формулы удобно находить не только саму площадь, но и, например, все высоты треугольника. Действительно, пусть известны все стороны, хотим найти высоту, опущенную к стороне a, то есть h_a.

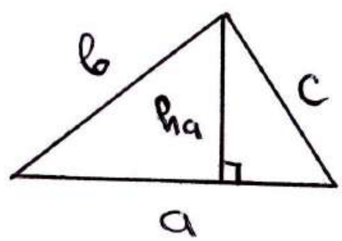


РИС. 24

$$\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

Также заметим интересный факт о площадях. Возьмем любой треугольник, выберем вершину и проведем линию из этой вершины на противолежащую сторону.

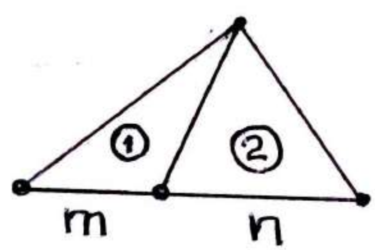


РИС. 25

Пусть прямая разбивает сторону на два отрезка длиной m и n. Тогда площади полувшихся треугольников 1 и 2 относятся как m и n.

Отношение площадей

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n} \tag{8}$$

Действительно, заметим, что у этих треугольников общая высота h.

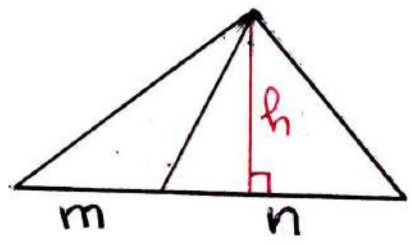


рис. 26

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot m; \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot n \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot m}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot n} = \frac{m}{n}$$

1.5 Подобные треугольники

Пусть имеются два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Все углы у них равны:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1$$

Пусть также любую сторону $\triangle ABC$ можно растянуть в k раз и получить соответствующую сторону в $\triangle A_1B_1C_1$:

$$k \cdot AB = A_1B_1,\ k \cdot BC = B_1C_1,\ k \cdot AC = A_1C_1$$

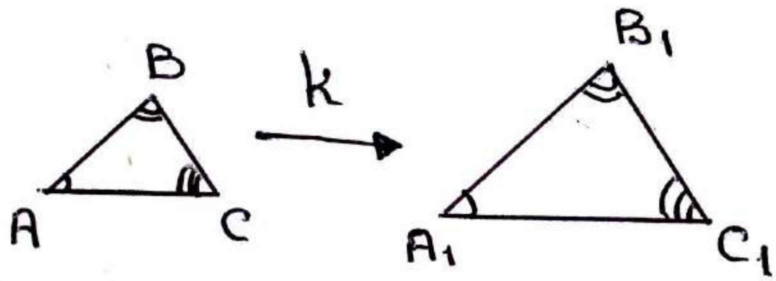


рис. 27

Тогда треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ называются **подобными** с коэффициентом подобия k. Кратко записывают так:

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Резюмируя, получается, что если заданы два треугольника $(\angle A, \angle B, \angle C, a, b, c)$ и $(\angle A, \angle B, \angle C, k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$, то это подобные треугольники.

Может быть, как и в случае с равенством треугольников, о подобии можно заключить по менее чем шести параметрам? Действительно, возможны три упрощенные ситуации:

1. Если $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$ (два угла равны), то треугольники подобные. Покажем это.

   Из равенства двух углов следует равенство трех углов.

   $$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1 = \angle C_1$$

   Теперь покажем пропорциональность длин всех сторон.

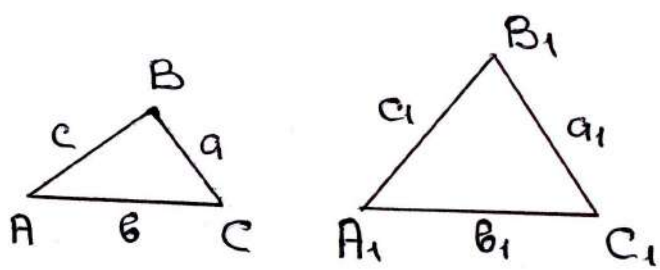


рис. 28

Для этого по формуле (6) (площадь треугольника через синус) запишем несколько раз выражения для площадей:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\angle A; \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot \sin\angle A_1$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\angle C; \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \sin\angle C_1$$

Отношение площадей постоянно независимо от того, как его выражаем:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot \sin\angle A_1}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\angle A} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \sin\angle C_1}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\angle C}$$

Синусы, а также $\dfrac{b_1}{b}$ сокращаются, остается одинаковое отношение, обозначим его k:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{b_1 \cdot c_1}{b \cdot c} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a \cdot b} \Rightarrow \frac{c_1}{c} = \frac{a_1}{a} = k \Rightarrow c_1 = k \cdot c, \ a_1 = k \cdot a$$

Таким же образом получаем следующую пропорцию:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

Но мы уже обозначили $\dfrac{a_1}{a} = k$, значит $\dfrac{b_1}{b}$ тоже равен k. Итак, получили, что все стороны пропорциональны с одним коэффициентом k:

$$a_1 = k \cdot a, \ b_1 = k \cdot b, \ c_1 = k \cdot c$$

При этом все углы равны, значит треугольники подобные.

2. Если $\angle A = \angle A_1$ и две стороны пропорциональные $\dfrac{c_1}{c} = \dfrac{b_1}{b} = k$, то треугольники подобные. Покажем это.

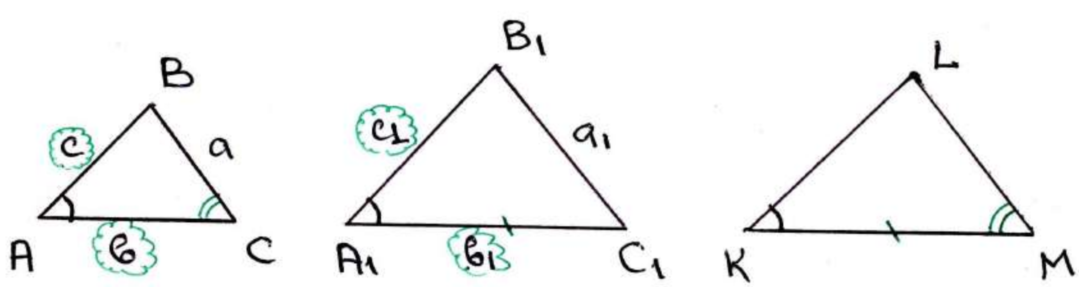


рис. 29

Для этого построим вспомогательный треугольник $\triangle KLM$. В этом треугольнике два угла будут из первого треугольника ($\angle A$ и $\angle C$), а сторона из второго треугольника (возьмем A_1C_1). То есть $\angle K = \angle A, \angle M = \angle C$ и $KM = A_1C_1$.

Но получается, что $\triangle ABC$ подобен $\triangle KLM$ по двум углам. При этом известно, что

$$\frac{b_1}{b} = k, \text{ где } b_1 = A_1C_1 = KM,\ b = AC$$

Значит

$$KM = k \cdot AC \Rightarrow KL = k \cdot AB,\ LM = k \cdot BC$$

Выходит, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle KLM$, ведь у них совпадают две стороны и угол между ними:

$$\angle K = \angle A = \angle A_1; \quad KL = k \cdot AB = A_1B_1,\ KM = A_1C_1$$

Значит, если $\triangle KLM \sim \triangle ABC$ и $\triangle KLM = \triangle A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

3. Если три стороны пропорциональные $c_1 = k \cdot c,\ b_1 = k \cdot b,\ a_1 = k \cdot a$, то треугольники подобные. Покажем это.

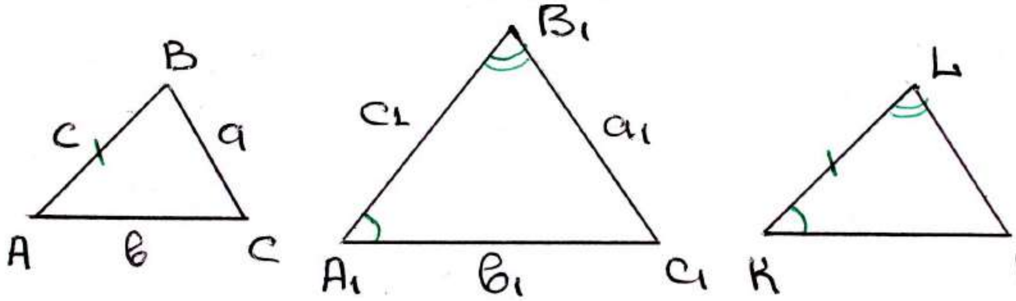


рис.30

Сделаем вспомогательный чертеж. Идея совпадает с предыдущим случаем. Строим треугольник $\triangle KLM$. Показываем, что $\triangle KLM \sim A_1B_1C_1$ и что $\triangle KLM = ABC$. Из этого следует подобие $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Треугольник $\triangle KLM$ такой, что $\angle K = \angle A_1,\ \angle L = \angle B_1$ и $KL = AB$.

$\triangle KLM \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам, а $\triangle KLM = \triangle ABC$ по трем сторонам:

$$KL = AB,\ KM = \frac{b_1}{k} = b = AC,\ LM = \frac{a_1}{k} = a = BC$$

1.6 Средняя линия треугольника

В произвольном треугольнике $\triangle ABC$ отметим середины любых его двух сторон, например, AB и BC. Обзовем их точками K и M.

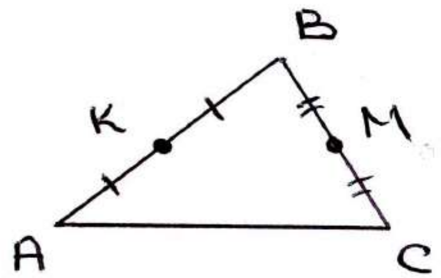


Рис. 31

Соединим точки K и M, отрезок KM называется **средней линией** $\triangle ABC$.

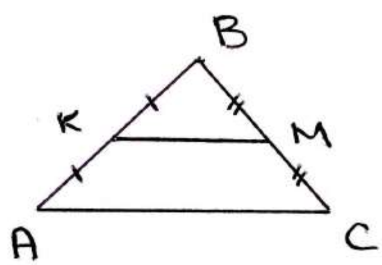


Рис. 32

Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle KBM$ (общий угол $\angle B$ и две пропорциональные стороны $\dfrac{AB}{KB} = \dfrac{BC}{MB} = 2$), коэффициент подобия $k = 2$.

При этом из подобия следует, что $\angle BKM = \angle BAC$, значит $KM \parallel AC$.

1.7 Площадь подобных треугольников

Имеется $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, коэффициент подобия k.

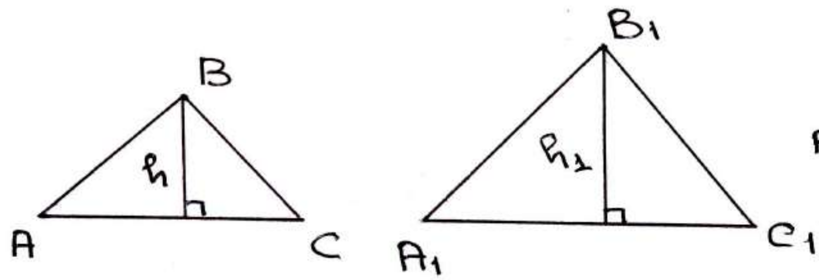


РИС. 33

Значит все соответствующие элементы масштабируются в k раз. В том числе высоты $h_1 = k \cdot h$ и основания (к которым опущены эти высоты) $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Площадь треугольника — это половина основания на высоту к этому основанию.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AC, \; S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot A_1C_1$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot A_1C_1}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot AC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot h \cdot k \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot AC} = k^2$$

Площади подобных треугольников относятся как коэффициент подобия в квадрате.

Площади подобных треугольников

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2 \tag{9}$$

1.8 Теорема Менелая

С помощью подобия можно вывести забавный факт про треугольники.

Пусть имеется произвольный треугольник $\triangle ABC$. Проведем линию через две его любые стороны, а также продолжим оставшуюся сторону так, чтобы прямая с ней пересекалась.

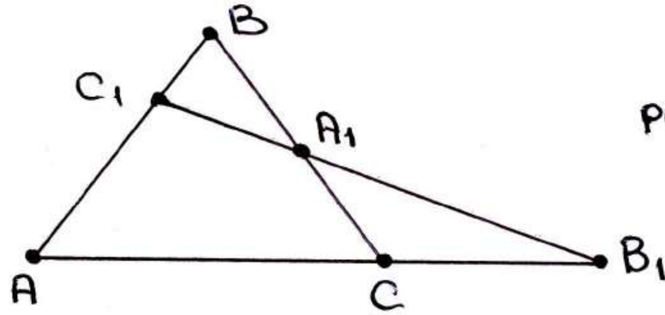


РИС. 34

Точки пересечения прямой и треугольника обозначим буквами A_1, B_1 и C_1.

Проведем еще одну прямую таким образом, чтобы она проходила через вершину C параллельно стороне AB. Она пересечет отрезок A_1B_1 в некоторой точке, назовем ее K.

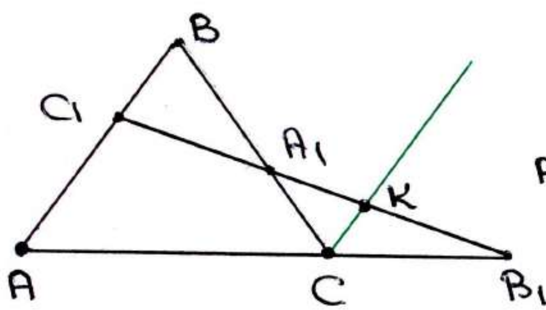


РИС. 35

Имеются подобные треугольники: $\triangle A_1C_1B \sim \triangle A_1CK$ (по двум углам: $\angle A_1$ — общий, $\angle BC_1A_1 = \angle A_1KC$ потому что $C_1B \parallel CK$). Отсюда следует пропорция

$$\frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

Есть еще одни подобные треугольники: $\triangle CKB_1 \sim \triangle AC_1B_1$ (по двум углам: $\angle B_1$ — общий, $\angle C_1AC = \angle B_1CK$ потому что $AC_1 \parallel CK$). Отсюда следует пропорция

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CK}{AC_1}$$

Выразим из первой и второй пропорции отрезок CK:

$$CK = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}, \ CK = \frac{CB_1 \cdot AC_1}{AB_1}$$

Разделим одно выражение на другое

$$\frac{CK}{CK} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \cdot \frac{AB_1}{CB_1 \cdot AC_1}$$

Немного упростим и получим интересную формулу, которая называется теоремой Менелая.

$$1 = \frac{C_1B \cdot A_1C \cdot AB_1}{BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1}$$

Для наглядности введем чуть более простые обозначения.

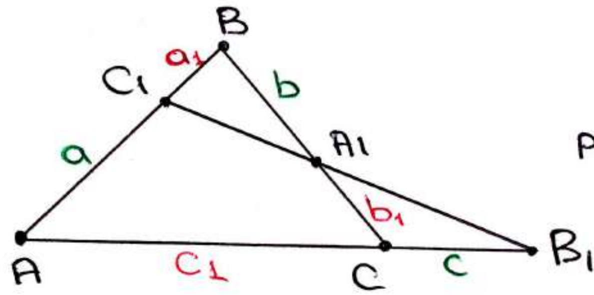


РИС.36

Теорема Менелая

$$\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot (c_1 + c)}{a \cdot b \cdot c} = 1 \qquad (10)$$

Из теоремы Менелая следует любопытный факт. Пусть имеется произвольный треугольник. В нем из каждой вершины проведены отрезки на противоположные стороны таким образом, что все эти отрезки пересекаются в одной точке.

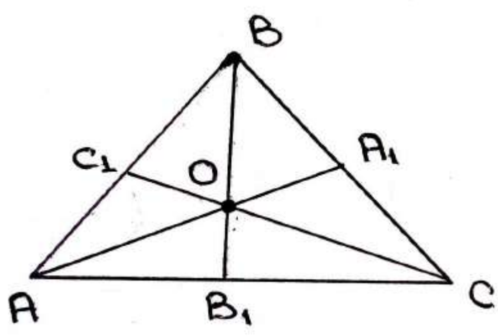


РИС.37

Для треугольника $\triangle ABB_1$ и секущей C_1C применим теорему Менелая.

$$\frac{AC_1 \cdot BO \cdot B_1C}{C_1B \cdot B_1O \cdot AC} = 1$$

Для треугольника $\triangle B_1BC$ и секущей A_1A применим теорему Менелая.

$$\frac{A_1C \cdot BO \cdot AB_1}{BA_1 \cdot OB_1 \cdot AC} = 1$$

Теперь разделим первой выражение на второе:

$$\frac{AC_1 \cdot BO \cdot B_1C}{C_1B \cdot B_1O \cdot AC} \cdot \frac{BA_1 \cdot OB_1 \cdot AC}{A_1C \cdot BO \cdot AB_1} = 1$$

Для удобства введем менее громоздкие обозначения

$$a = AC_1,\ a_1 = C_1B,\ b = BA_1,\ b_1 = A_1C,\ c = B_1C,\ c_1 = AB_1$$

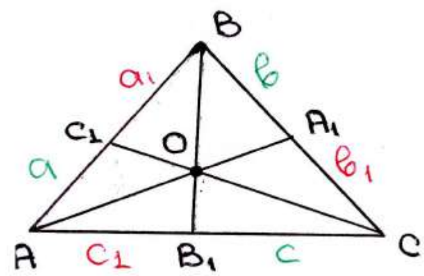


рис. 38

Тогда последнее выражение перепишется в виде

$$\frac{a \cdot BO \cdot c}{a_1 \cdot B_1O \cdot (c_1 + c)} \cdot \frac{b \cdot B_1O \cdot (c_1 + c)}{b_1 \cdot BO \cdot c_1} = 1$$

Сократим все возможное и получим теорему Чевы

Теорема Чевы

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1} = 1 \tag{11}$$

1.9 Высота и подобие

Возьмем произвольный прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, проведем из прямого угла высоту CC_1.

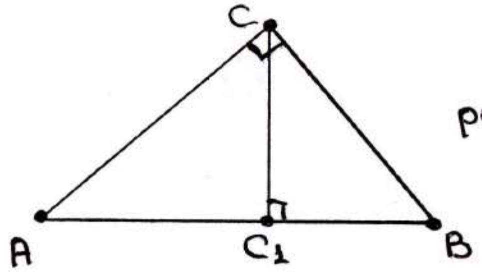


рис. 39

Заметим кое-что про углы полученных трех треугольника $\triangle ABC, \triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$. Для этого обозначим $\angle CAC_1$ греческой буквой α, а угол $\angle CBC_1$ греческой буквой β (исключительно ради удобства).

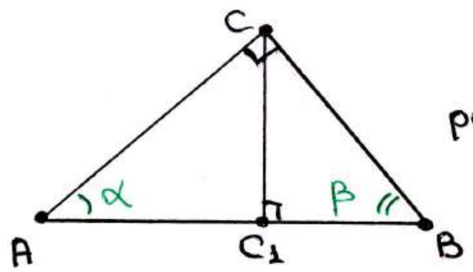


рис. 40

Тогда можно заметить следующее

$$\angle ACC_1 = 90^\circ - \alpha \text{ (из прямоугольного } \triangle ACC_1)$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \text{ (из прямоугольного } \triangle ABC) \Rightarrow \angle ACC_1 = \beta$$

$$\angle C_1CB = 90^\circ - \beta \text{ (из прямоугольного } \triangle C_1CB)$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta \text{ (из прямоугольного } \triangle ABC) \Rightarrow \angle C_1CB = \alpha$$

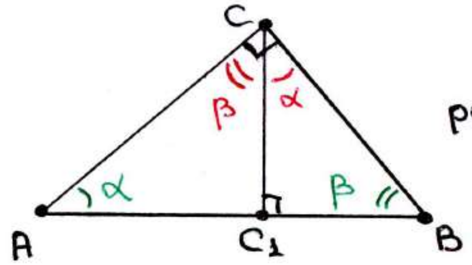


рис. 41

Получается, что у всех трех треугольников $\triangle ABC, \triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ все углы совпадают, значит они все подобны друг-другу.

Для нас сейчас ключевым является $\triangle ACC_1 \sim \triangle C_1CB$, то есть верна пропорция

$$\frac{C_1C}{C_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$$

Или, если умножить крест-накрест получается следующий забавный факт

Высота в прямоугольном треугольнике

$$CC_1^2 = AC_1 \cdot C_1B \tag{12}$$

1.10 Теорема синусов

Возьмем произвольный треугольник $\triangle ABC$. Проведем, например, из вершины B высоту BB_1. Обозначим для удобства греческими буквми углы $\angle BAB_1 = \alpha$ и $\angle BCB_1 = \gamma$.

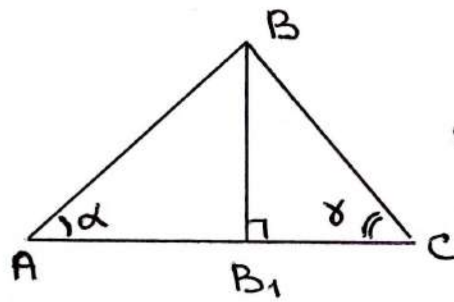


рис.42

Теперь поиграемся с тригонометрией. Имеется два прямоугольных треугольника $\triangle ABB_1$ и $\triangle B_1BC$.

$$\sin\alpha = \frac{BB_1}{AB},\ \sin\gamma = \frac{BB_1}{BC}$$

Выразим из обоих выражений высоту BB_1:

$$BB_1 = AB\cdot\sin\alpha = BC\cdot\sin\gamma$$

Немного преобразуем выражение и получим

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha}$$

Если провести высоту из вершины C и повторить все операции, то получится аналогичное выражение (а еще обозначить угол $\angle B$ греческой буквой β)

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$$

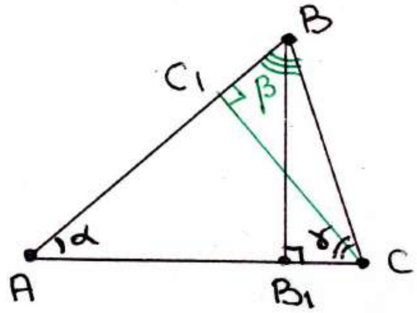


рис.43

Объединим полученные выражения и обозначим для удобства стороны буквами a, b и c

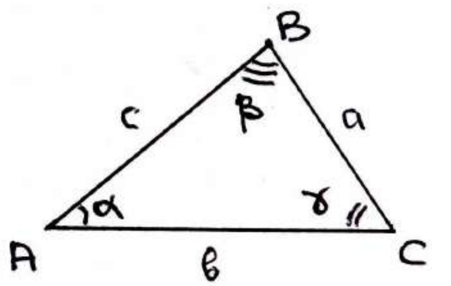


рис. 44

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Славный факт, называется теоремой синусов, но его можно еще усилить! Мы пока не говорили про окружности, тем не менее приведем здесь рассуждение, содержащее чуть-чуть информацию про окружности.

Опишем вокруг треугольника окружность (это всегда можно сделать), обозначим радиус за R. В ту же окружность впишем прямоугольный треугольник (угол прямой, потому что опирается на диаметр) с гипотенузой, равной $2R$ ($KM = 2R$), а один из катетов совпадет со стороной исходного треугольника ($BC = LM$).

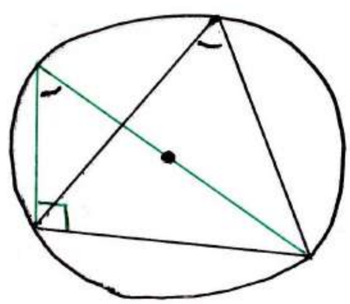


рис. 45

Углы $\angle LKM$ и $\angle BAC$ опираются на одну дугу, поэтому они равны (об этом еще подробнее поговорим в разделах про окружность).

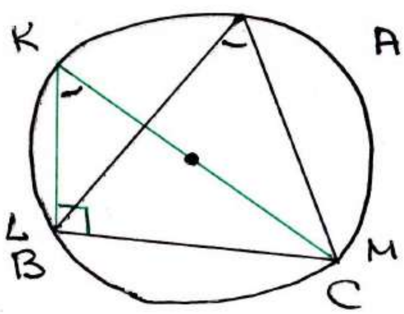


рис. 46

Запишем синус угла $\angle LKM = \angle A = \alpha$ из прямоугольного треугольника $\triangle LKM$:

$$\sin\alpha = \frac{LM}{KM} = \frac{BC}{KM} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

То есть окончательно вид теоремы синусов

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \tag{13}$$

1.11 Теорема косинусов

Рассмотрим произвольный треугольник, обозначим длины его сторон a, b и c. Проведем высотку h, она делит сторону b на отрезки x и $b - x$ (введем обозначение x для левого отрезка). Также обозначим угол, лежащий против стороны a, греческой буквой α.

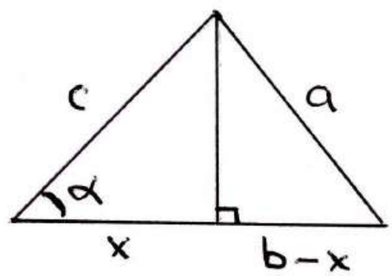


рис. 47

Для прямоугольного треугольника (c, x, h) запишем косинус угла α. Также выпишем теорему Пифагора для прямоугольных треугольников (c, x, h) и $(a, b - x, h)$.

$$\cos\alpha = \frac{x}{c},\ h^2 + x^2 = c^2,\ h^2 + (b-x)^2 = a^2$$

Вычтем третье выражение из второго (избавимся от h):

$$\left[h^2 + x^2 = c^2\right] - \left[h^2 + (b-x)^2 = a^2\right]$$

$$x^2 - (b-x)^2 = c^2 - a^2$$

Теперь раскроем скобки

$$x^2 - b^2 + 2bx - x^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow 2bx - b^2 = c^2 - a^2$$

Из косинуса выразим сторону x:

$$x = c \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx,\ a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

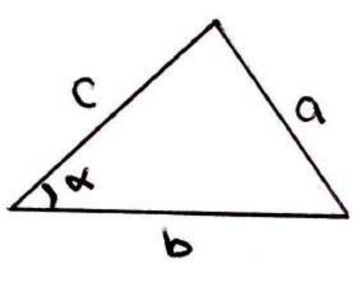


рис. 48

Теорема косинусов

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \qquad (14)$$

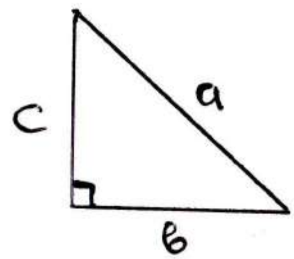


Рис. 49

Обратим внимание, что будет, когда $\alpha = 90^\circ$: в этом случае косинус зануляется ($\cos 90^\circ = 0$) и получается теорема Пифагора (a — гипотенуза)

$$a^2 = c^2 + b^2$$

То есть теорема косинусов — это обобщение теоремы Пифагора.

1.12 Площадь и вписанная/описанная окружность

Коснемся еще чуть-чуть загодя окружностей. Сначала отметим еще раз, что в любой треугольник можно как вписать, так и описать вокруг него окружность.

Впишем в некоторый треугольник $\triangle ABC$ окружность с центром в точке O. Отметим факт, который докажем позже: радиус окружности, проведенный к точке касания со стороной, перпендикулярен стороне. То есть, например, одна из высот треугольника $\triangle AOB$ совпадает с радиусом r вписанной окружности.

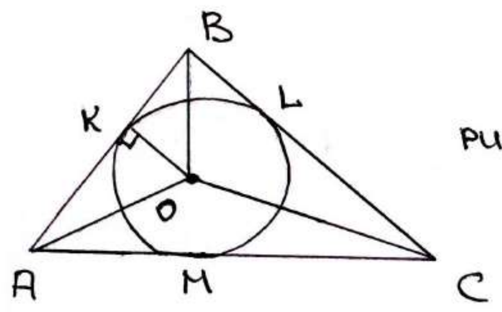


РИС. 50

Площадь треугольника $\triangle AOB$ равна $\frac{1}{2} \cdot r \cdot AB$. Проведем остальные два радиуса OL и OM, получили еще два треугольника $\triangle BOC$ и $\triangle AOC$.

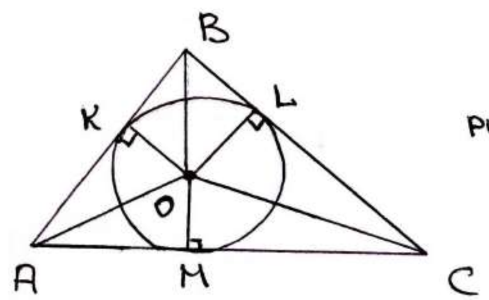


РИС. 51

Радиусы опять будут высотами этих треугольников, поэтому их площади $\frac{1}{2} \cdot r \cdot BC$ и $\frac{1}{2} \cdot r \cdot AC$. Заметим, что три рассмотренных треугольника в сумме дают $\triangle ABC$, поэтому

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot r \cdot AC$$

Несколько упростим полученное выражение, также введем обозначение $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ — полупериметр.

$$S_{ABC} = r \cdot \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + AC) = p \cdot r$$

Площадь треугольника через радиус вписанной окружности

$$S_{ABC} = p \cdot r, \quad p = \frac{a+b+c}{2} \tag{15}$$

Теперь рассмотрим описанную окружность с радиусом R.

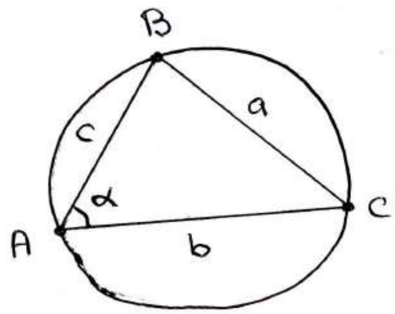


РИС. 52

По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

Площадь треугольника тоже вычисляется через синус

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

Теперь выразим синус из первой формулы и подставим его во вторую

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$$

Площадь треугольника через радиус описанной окружности

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \tag{16}$$

1.13 Про медиану

Отметим несколько забавных фактов про медиану треугольника. Во-первых, медианы треугольника делятся в отношении $2:1$ считая от вершины. Покажем это.

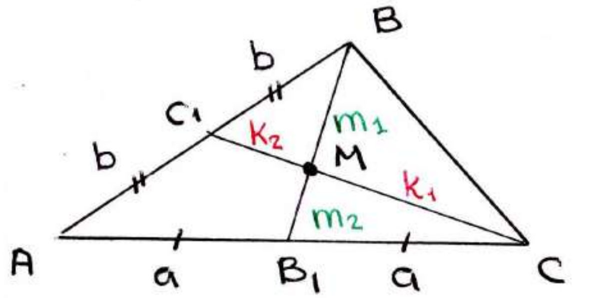


РИС. 53

Применим теорему Менелая к треугольнику $\triangle ABB_1$ и секущей C_1C.

$$\frac{b \cdot m_1 \cdot a}{b \cdot m_2 \cdot 2a} = 1$$

Сократим возможное и получим

$$\frac{m_1}{m_2} = 2$$

Ту же процедуру можно повторить для любой медианы.

Получим формулу для медианы, в которой присутствуют только длины стороны треугольника a, b и c.

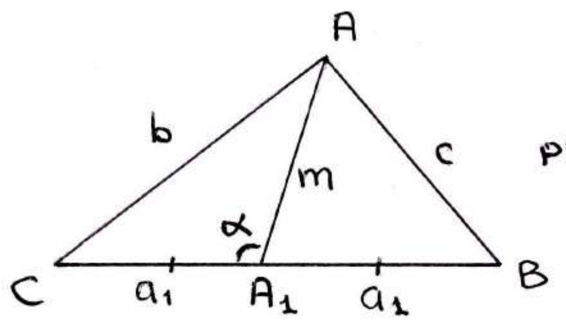


РИС. 54

Угол $\angle CA_1A$ обозначим за α, тогда $\angle BA_1A = 180° - \alpha$.

Для треугольников $\triangle CAA_1$ и $\triangle A_1AB$ напишем теорему косинусов.

$$b^2 = a_1^2 + m^2 - 2 \cdot a_1 \cdot m \cdot \cos\alpha$$

$$c^2 = a_1^2 + m^2 - 2 \cdot a_1 \cdot m \cdot \cos(180° - \alpha)$$

По формулам приведения из тригонометрии $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, значит второе выражение примет вид

$$c^2 = a_1^2 + m^2 + 2 \cdot a_1 \cdot m \cdot \cos\alpha$$

Сложим первое и второе выражения (член с косинусом убъется)

$$b^2 + c^2 = 2 \cdot a_1^2 + 2 \cdot m^2$$

Заменим $a_1 = \dfrac{a}{2}$ и выразим m

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - a_1^2} = \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Формула для медианы

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \tag{17}$$

1.14 Про биссектрису

Получим выражение для биссектрисы через длины сторон треугольника.

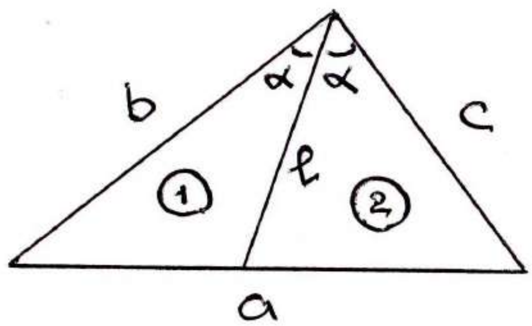


рис. 55

Биссектриса разделила исходный треугольник на два. Запишем площади этих треугольников (в сумме эти площади дадут площадь исходного).

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot l \cdot \sin\alpha$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$S_{abc} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin 2\alpha = S_1 + S_2$$

Из тригонометрии известно, что $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, тогда

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot b \cdot l \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot l \cdot c \cdot \sin\alpha$$

Сократим $\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha$ и выразим l:

$$b \cdot c \cdot 2\cos\alpha = b \cdot l + l \cdot c \Rightarrow l = \frac{2bc\cos\alpha}{b+c}$$

Формула для биссектрисы

$$l = \frac{2bc\cos\alpha}{b+c} \tag{18}$$

2 Окружность

2.1 Окружность. Общее

Пусть имеется число $R > 0$ и некоторая точка O на плоскости. Найдем все другие точки плоскости, которые отстоят от O на величину R.

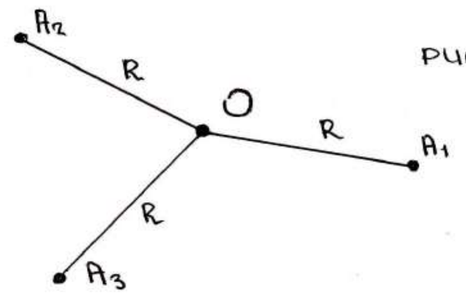


рис. 56

Полученное множество точек называется окружностью.

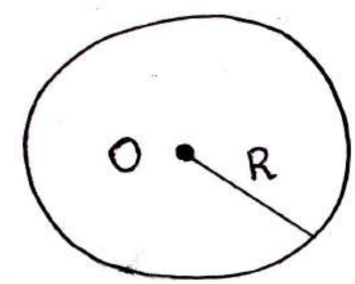


рис. 57

Проведем рядом с нашей окружностью прямую l. Обозначим расстояние от центра окружности до прямой через d (перпендикуляр из O на прямую). Как могут располагаться друг по отношению к другу прямая и окружность? Возможны три ситуации.

1. Прямая и окружность не пересекаются, то есть $d > R$.

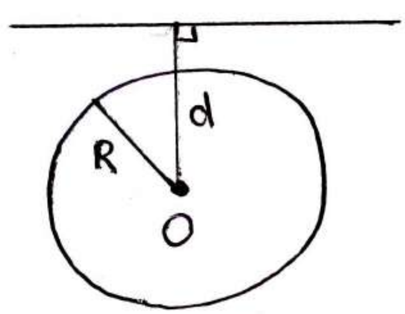


рис. 58

2. Прямая касается окружности, то есть одна точка пересечения или $d = R$.

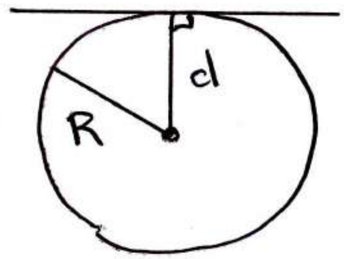


рис. 59

3. Прямая пересекает окружность в двух точках или $d < R$.

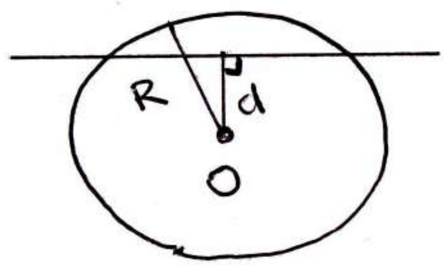


рис. 60

Здесь стоит отметить любопытный факт: касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, который проходит черех точку касания.

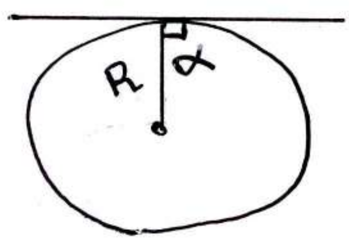


рис. 61

Для доказательства воспользуемся методом от противного: пусть это не так и угол $\alpha < 90^\circ$.

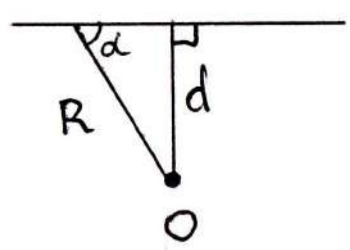


рис. 62

Тогда расстояние от O до прямой меньше радиуса $d < R$. Но это означает, что у прямой и окружности две точки пересечения, а мы изначально сказали про касание — противоречие, значит $\alpha = 90^\circ$.

2.2 Углы в окружности

Если поставить на окружности две точки A и B, то она разделится на две дуги (кусочки окружности).

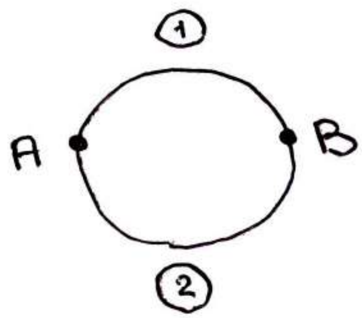


рис. 63

Чтобы различать дуги, отметим еще по одной точке на каждой из них.

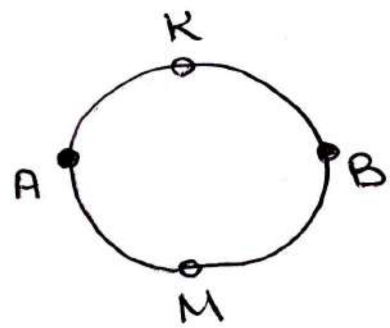


рис. 64

Итак, получили две дуги $\overset{\frown}{\mathrm{AKB}}$ и $\overset{\frown}{\mathrm{AMB}}$.

Из центра окружности выпустим два радиуса, получим угол α, который называется **центральным**.

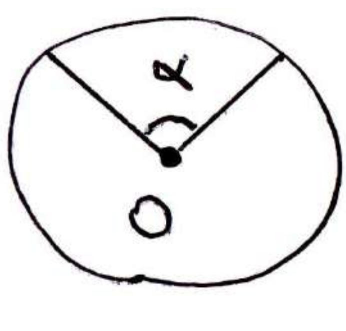


рис. 65

Естественно, хочется сопоставить дуги и центральные углы, то есть дуги измерять в градусах.

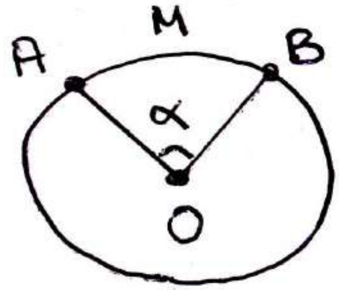


РИС. 66

То есть для рисунка выше градусная мера дуги $\overset{\frown}{\mathrm{AMB}} = \alpha$

Если отметить на окружности точку и выпустить из нее произвольно две прямые, пересекающие окружность, получится угол β, который называется **вписанным**.

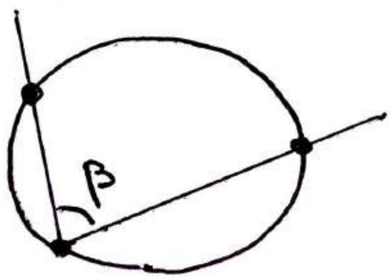


РИС. 67

Любопытно, что вписанный угол равен половине центрального угла, который опирается на ту же дугу. Покажем это.

Рассмотрим сначала частный случай, когда одна сторона вписанного угла — это диаметр окружности.

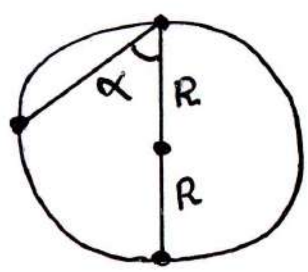
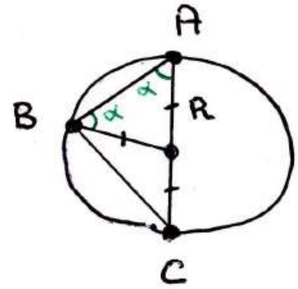


РИС. 68

Три точки пересечения A, B, C с окружностью образуют треугольник. Опустим радиус к точке B. Треугольник $\triangle AOB$ получился равнобедренным (стороны — радиусы), поэтому $\angle BAO = \angle OBA = \alpha$. Обозначим $\angle BOC$ за β.



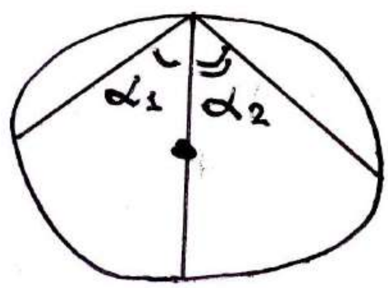
рис, 69

Тогда $\angle AOB = 180^\circ - \beta$.

$$\angle ABO + \angle BOA + \angle BAO = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha + 180^\circ - \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 2 \cdot \alpha$$

Теперь общий случай, произвольный вписанный угол α.



рис, 70

Если провести диаметр из центра угла, то получится как раз два предыдущих случая для углов α_1 и α_2.

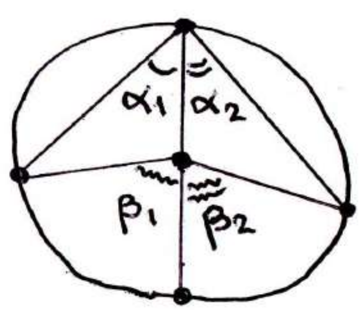


рис. 71

$$\beta_1 = 2 \cdot \alpha_1, \ \beta_2 = 2 \cdot \alpha_2 \Rightarrow$$
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot \beta_1 + \frac{1}{2} \cdot \beta_2 = \frac{1}{2} \cdot (\beta_1 + \beta_2) = \frac{\beta}{2}$$

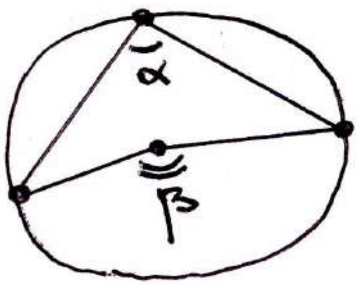


РИС. 72

Вписанный α и центральный β углы

$$\beta = 2 \cdot \alpha \tag{19}$$

Отметим еще три западных факта по данной теме.

1. Если вписанный угол опирается на диаметр, то он является прямым.

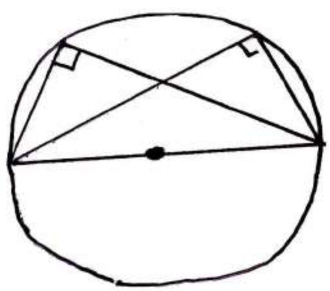


РИС. 73

   Действительно, ведь диаметр — это фактически центральный угол величиной в $180°$.

2. Проведем две пересекающиеся хорды. Обозначим точки пересечения с окружностью A, B, C и D, а пересечение хорд — K.

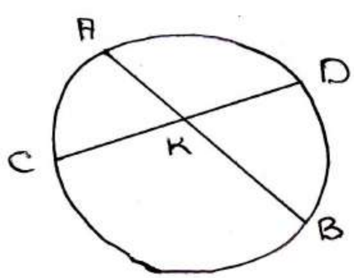


РИС. 74

   Рассмотрим полученные треугольники $\triangle AKC$ и $\triangle DKB$. Углы $\angle ACK = \angle ABD$ равны, потому что они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{\mathrm{AD}}$.

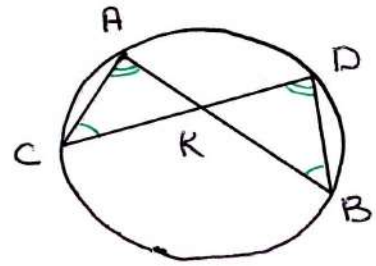


рис. 75

В свою очередь $\angle CAK = \angle CDB$, потому что они опираются на одну дугу $\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$. Выходит, треугольники $\triangle ACK$ и $\triangle KDB$ подобные по двум углам. Значит верна пропорция

$$\frac{AK}{KD} = \frac{CK}{KB} \Rightarrow AK \cdot KB = CK \cdot KD$$

Две хорды

$$AK \cdot KB = CK \cdot KD \tag{20}$$

3. Угол между хордой и касательной к окружности, проведенной через конец этой хорды, равен половине дуги, лежащей внутри этого угла.

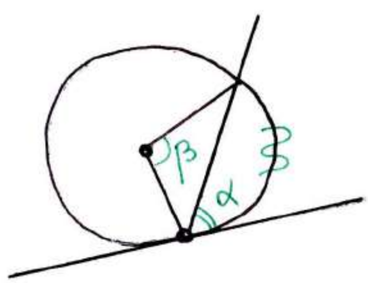


рис. 76

Дело в том, что $\beta = 180° - 2\gamma$, где γ — это углы в равнобедренном треугольнике $\triangle OAB$.

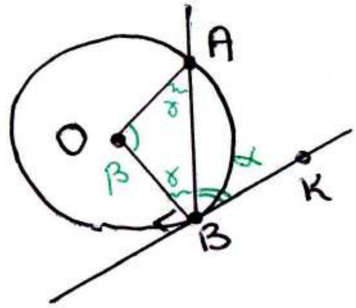


рис. 77

В свою очеред $\gamma = \angle OBK - \alpha = 90^\circ - \alpha$. Поэтому получаем

$$\beta = 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$$

2.3 Касательные и секущие

Возьмем окружность, из одной точки проведем к ней касательную и секущую.

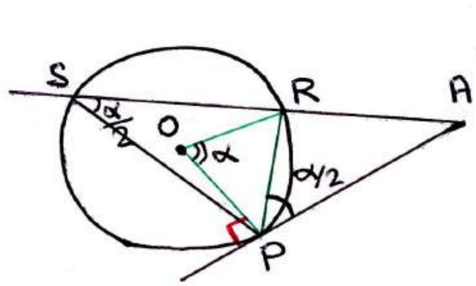


РИС. 78

Угол между касательной AP и хордой RP равен половине дуги $\overset{\frown}{\mathrm{RP}}$ или в точности углу $\angle RSP$. Выходит треугольники $\triangle RAP$ и $\triangle SAP$ подобны по двум углам ($\angle RAP$ — общий, $\angle RSP = \angle RPA$). Значит верна пропорция

$$\frac{AR}{AP} = \frac{AP}{AS} \Rightarrow AR \cdot AS = AP^2$$

Касательная и секущая

$$AR \cdot AS = AP^2 \tag{21}$$

Из этого утверждения следует, что, если возьмем просто две секущие из одной точки, то выполнится следующее соотношение.

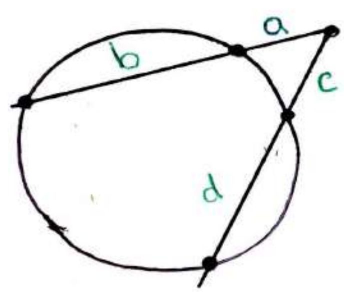


РИС. 79

$$a \cdot (a + b) = c \cdot (c + d)$$

2.4 Вписанная и описанная окружность

В любой треугольник можно вписать окружность, притом только одну. Центр вписанной окружности будет лежать на пересечении биссектрис (точки на биссектрисах равноудалены от соседних сторон).

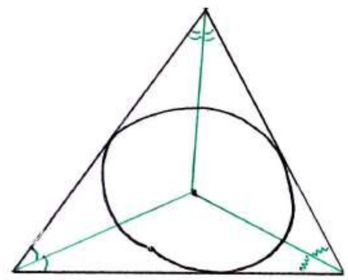


рис. 80

Около любого треугольника можно описать окружность, притом только одну. Центр окружности будет лежать в точке пересечения срединных перпендикуляров к сторонам.

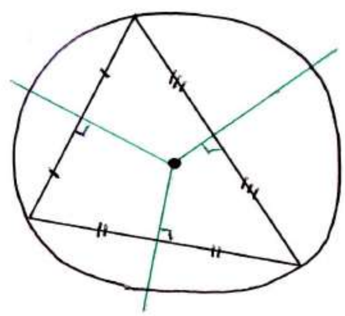


рис. 81

Четырехугольник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

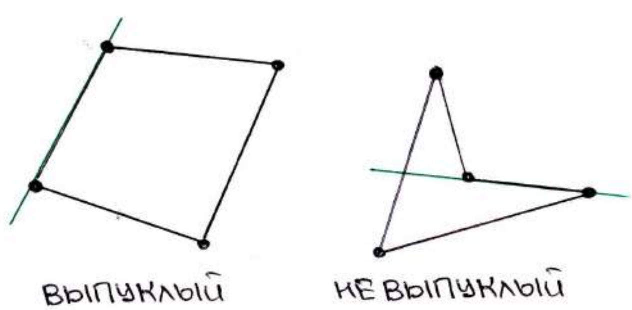


рис. 82

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $a + c = d + b$ (суммы протвоположных сторон равны).

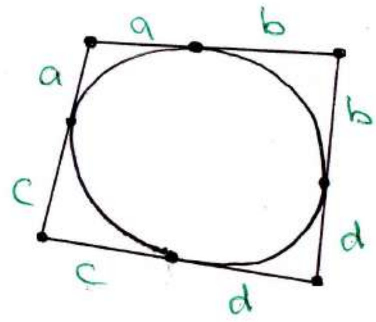


рис.83

Вокруг выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°: $\alpha + \beta = 180°$.

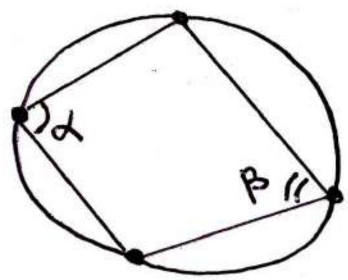


рис.84

2.5 Площадь круга

Площадь круга радиуса R равна $\pi \cdot R^2$.

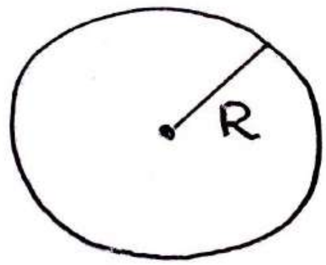


РИС.85

Длина окружности равна $2\pi R$.
Площадь сектора с углом α в радианах равна $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot R^2$.

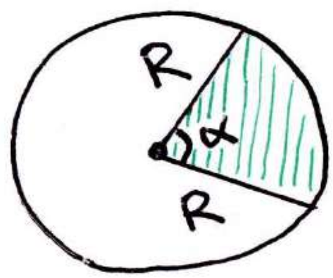


РИС.86

Длина дуги, соответствующей центральному углу α в радианах, равна $\alpha \cdot R$.
Площадь сегмента равна $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \alpha$

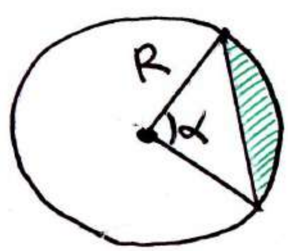


РИС. 87

3 Многоугольник

3.1 Четырехугольник

Пусть имеется четыре точки A, B, C и D. Пусть также отрезки AB, BC, CD и AD не лежат на одной прямой. Тогда полученная из отрезков фигура называется четырехугольником.

РИС. 88

Вспомним, что четырехугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержщей одну из его сторон.

Исследуем чуть глубже выпуклый четырехугольник. Рассмотрим его углы. Мы помним, что в треугольнике сумма углов равна $180°$. Любой выпуклый треугольник можно разбить на два треугольника, если провести диагональ. Получается, что сумма углов в нем будет $180° + 180° = 360°$.

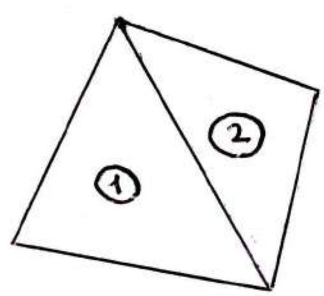


РИС. 89

3.2 Параллелограмм

Пусть имеется четырехугольник, у которого противополжные стороны попарно параллельны, тогда он называется параллелограммом.

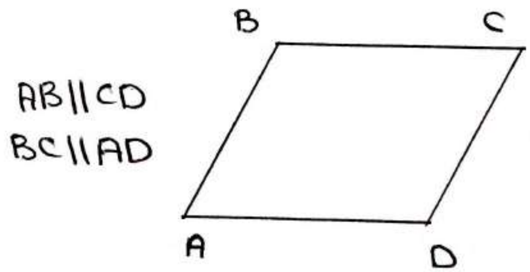


рис. 90

Рассмотрим свойства параллелограмма.

1. Проведем диагональ в параллелограмме. Получили два равных треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, которые равны по стороне (AC — диагональ, общая сторона) и двум прилежащим к ней углам ($\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle CAD$ в силу параллельности сторон).

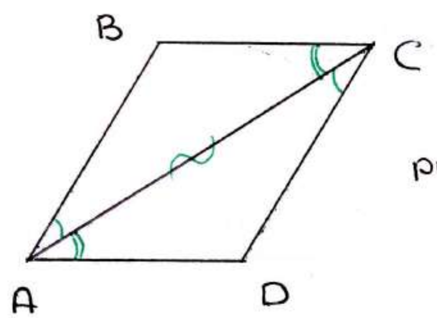


рис. 91

Значит у параллелограмма противоположные стороны и углы равны.

$$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D$$

$$AB = CD,\ BC = AD$$

2. Проведем вторую диагональ, обозначим пересечение диагоналей точкой O. Получили четыре треугольника. $\triangle ABO = \triangle COD$ по стороне $AB = CD$ и двум прилежащим к ней углам. $\triangle BOC = \triangle AOD$ равные по стороне $BC = AD$ и двум прилежащим к ней углам.

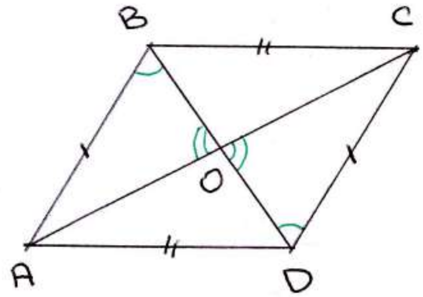


РИС. 92

Выходит $BO = OD$ и $AO = OC$, значит в параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Перечислим некоторые условия на четырехугольник, которых достаточно, чтоюы заключить: перед нами параллелограмм!

1. Если в некотором четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то перед нами параллелограмм.

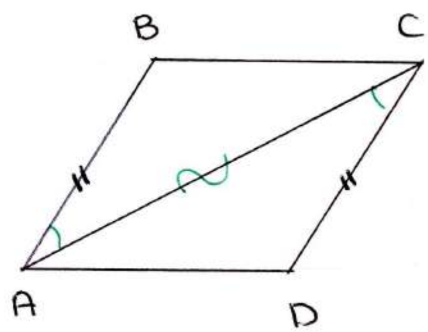


РИС. 93

Действительно, $\triangle ABC = \triangle ACD$ по двум сторонам ($AB = CD$, AC) и углу между ними ($\angle BAC = \angle ACD$ — в силу параллельности AB и CD).

Значит, $\angle BCA = \angle CAD$, но они накрест лежащие при пересечении прямых BC и AD секущей AC, значит прямые $BC \parallel AD$. В свою очередь этого и не хватало, чтобы заключить: $ABCD$ — параллелограмм!

2. Если в некотором четырехугольнике противоположные стороны равн $AB = CD$ и $BC = AD$, то этот четырехугольник — параллелограмм.

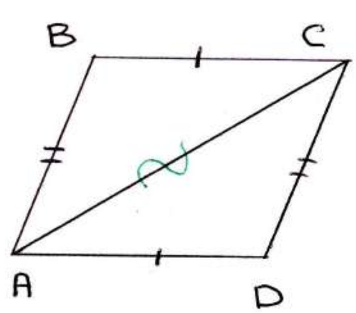


РИС. 94

Опять проведем диагональ и опять $\triangle ABC = \triangle ACD$ только уже по трем сторонам. Значит $AB \parallel DC$ и по предыдущему признаку получаем, что перед нами параллелограмм.

3. Если в некотором четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

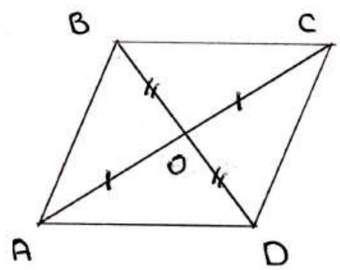


Рис. 95

$\triangle ABO = \triangle OCD$ по двум сторонам и углу между ними. Значит $AB = CD$ и $AB \parallel DC$ ($\angle ABO = \angle ODC$). Значит по первому признаку это $ABCD$ — параллелограмм.

3.3 Площадь параллелограмма

Имеется параллелограмм $ABCD$. Проведем в нем высоту, например, BB_1.

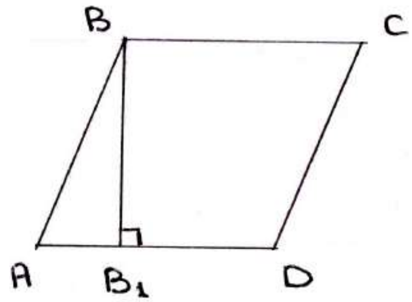


РИС. 96

Проведем высоту CC_1, заметим, что $\triangle DCC_1 = \triangle ABB_1$ по двум сторонам и углу между ними ($BB_1 = CC_1, CD = AB, \angle ABB_1 = \angle DCC_1$).

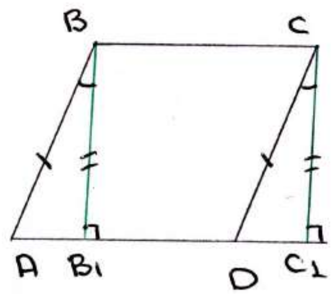


РИС. 97

Выходит, площадь прямоугольника B_1BCC_1 совпадает с площадью параллелограмма $ABCD$.

Но $S_{B_1BCC_1} = BB_1 \cdot BC$, а $BC = AD$, значит

$$S_{ABCD} = BB_1 \cdot AD$$

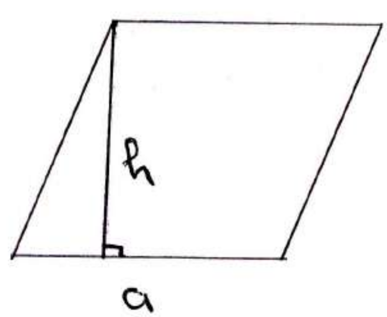


РИС. 98

Площадь параллелограмма

$$S = a \cdot h \tag{22}$$

Эту формулу можно чуть-чуть видоизменить с помощью тригонометрии. Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\sin\alpha = \dfrac{BB_1}{AB}$.

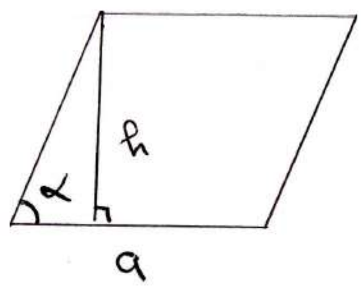


рис. 99

Выразим высоту $BB_1 = AB \cdot \sin\alpha$, подставим это в формулу площади

$$S = BB_1 \cdot AD = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha$$

3.4 Диагонали параллелограмма

Пусть в параллелограмме $ABCD$ проведены две диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$. Стороны для простоты тоже переобозначим $AB = a$, $AD = b$. Еще проведем высоту $BB_1 = h$, обозначим $AB_1 = x$.

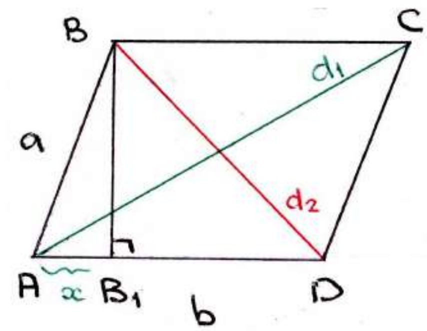


РИС. 100

Запишем теорему Пифагора для $\triangle B_1BD$ и $\triangle ACC_1$ (CC_1 — высота).

$$h^2 + (b - x)^2 = d_2^2 \ (*)$$
$$h^2 + (b + x)^2 = d_1^2 \ (**)$$

Отметим, что $h^2 = a^2 - x^2$ (теорема Пифагора для $\triangle ABB_1$).

$$a^2 - x^2 + (b - x)^2 = d_2^2 \ (*) \Rightarrow a^2 + b^2 - 2bx = d_2^2$$
$$a^2 - x^2 + (b + x)^2 = d_1^2 \ (**) \Rightarrow a^2 + b^2 + 2bx = d_1^2$$

Сложим $(*)$ и $(**)$:

$$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2$$

Получили связь между диагоналями и сторонами параллелограмма.

$$2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$$

3.5 Особые параллелограммы

Рассмотрим несколько замечательных параллелограммов.

1. Прямоугольник

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$
$$AC = BD$$

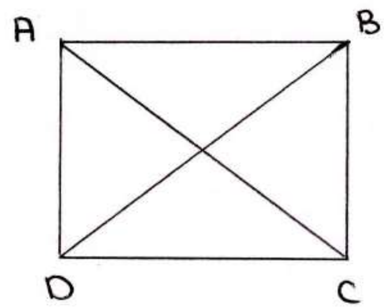


рис. 101

2. Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны.

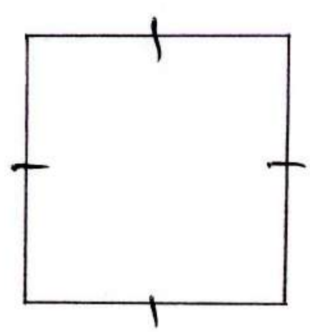


рис. 102

3. Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

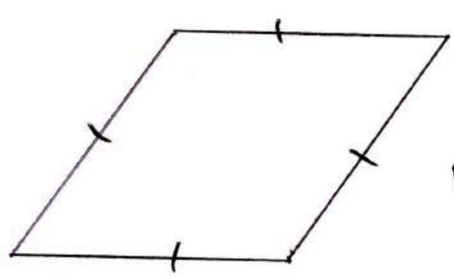


рис. 103

3.6 Трапеция

Пусть у четырехугольника две стороны параллельны, а две оставшиеся — нет. Тогда он называется трапецией.

Найдем площадь трапеции.

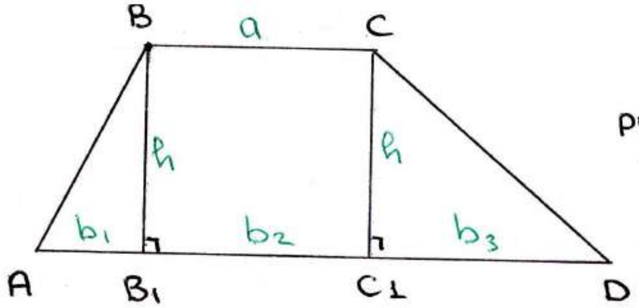


рис. 104

Для этого проведем две высоты, получились два прямоугольных трегольника $\triangle ABB_1, \triangle C_1CD$ и прямоугольник BB_1C_1C.

$$S_{ABCD} = S_{ABB_1} + S_{BB_1C_1C} + S_{C_1CD}$$

$$S_{ABB_1} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b_1,\ S_{C_1CD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b_3,\ b_1 + b_3 = b - b_2 = b - a$$

$$S_{BB_1C_1C} = h \cdot a \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b_1 + h \cdot a + \frac{1}{2} \cdot h \cdot b_3$$

$$S_{ABCD} = h \cdot \left(\frac{b_1 + b_3}{2} + a\right) = h \cdot \left(\frac{b - a}{2} + \frac{2a}{2}\right) = h \cdot \frac{a + b}{2}$$

Площадь трапеции

$$S = h \cdot \frac{a + b}{2} \tag{23}$$

3.7 Площадь выпуклого четырехугольника

Пусть имеется произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$. В нем проведены диагонали $AC = d_1 = a + c$ и $BD = d_2 = b + d$. Угол между диагоналями равне φ.

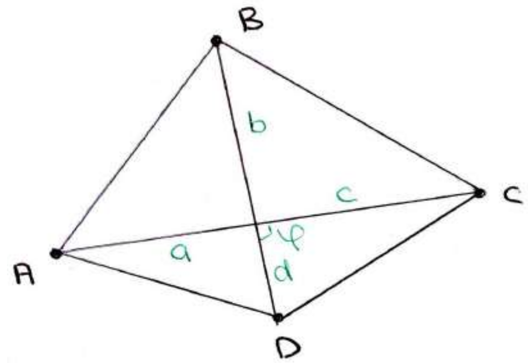


Рис.105

Площадь четырехугольника равна площади четырех полученных треугольников.

$$S_{ABCD} = S_{AKB} + S_{BKC} + S_{CKD} + S_{AKD}$$

$$S_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi, \; S_{CKD} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin\varphi$$

$$S_{BKC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(180^\circ - \varphi), \; S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(180^\circ - \varphi)$$

По формулам приведения $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$.

$$S_{AKB} + S_{BKC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\varphi = (a + c) \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin\varphi$$

$$S_{CKD} + S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin\varphi = (a + c) \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin\varphi$$

$$S_{AKB} + S_{BKC} + S_{CKD} + S_{AKD} = d_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin\varphi + d_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin\varphi =$$

$$(b + d) \cdot d_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$$

Площадь выпуклого четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi \tag{24}$$

Источники

[1] Л.С. Атанасян. Геометрия

[2] В. В. Ткачук. Математика абитуриенту

[3] М. Аксенова, В. Володин. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика (Аванта)