ТРИГОНОМЕТРИЯ

П.В. Леонов

Содержание

1 Тригонометрические функции

1.1 Функция в математике

Ключевым понятием в математике является функция, давайте освежим его.

Определение. Функция - это правило, по которому элементу одного множества ставится в соответствие элемент другого множества.

Это правило можно задавать на любых множествах. Рассмотрим несколько примеров.

- Пусть в некоторой школе пятый класс пишет контрольную работу по математике, в которой 10 номеров. В классе, например, 25 учеников, каждый из них как-то решил эту контрольную, получилось множество из решений контрольных работ. Также введем множество чисел от двух до пяти (оценки). Тогда зададим следующее правило $f(\text{тетрадь}) = \text{оценка}$:

$$f(\text{тетрадь}) = \begin{cases} 5, & \text{если в тетради 8, 9 или 10 правильных номеров} \\ 4, & \text{если в тетради 6 или 7 правильных номеров} \\ 3, & \text{если в тетради 4 или 5 правильных номеров} \\ 2, & \text{если в тетради меньше 4 правильных номеров} \end{cases}$$

  То есть у нас получилось правило, которое каждой тетради одного из 25 учеников ставит в соответствие элемент из множества оценок - мы задали функцию.

рис. 1.1

- Рассмотрим более классический пример. Пусть имеется два множества: $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ - целые числа и $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ - неотрицательные целые числа. Зададим правило $f(x) = x^2$, то есть каждому целому числу поставим в соответствие его квадрат (≥ 0), получили до боли знакомую квадратичную функцию.

1.2 Измерение углов

Если выпустить из одной точки два луча, то получится угол. Каждому углу сопоставляется некоторое число, которое называется *величиной угла* (мерой угла).

рис. 1.2

Существует много способов поставить в соответствие некоторому углу число (то есть построить функцию из множества углов в множество чисел), рассмотрим два из них:

- *Градусная мера угла.*

  Пусть имеется прямоугольный треугольник (треугольник, для которого выполнена теорема Пифагора). Возьмем в нем угол, лежащий напротив наибольшей стороны (гипотенузы). Разобъем этот угол на 90 равных частей, назовем каждый из 90 маленьких углов *единичным* и сопоставим ему число один.

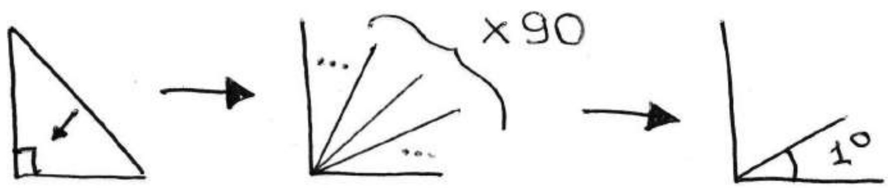
  

  рис. 1.3

  Теперь для произвольного угла будем смотреть, сколько раз в него входит единичный и это число и ставить в соответствие. Получили знакомую всем нам градусную меру угла.

  Например, в каждый угол в равностороннем треугольнике входит ровно 60 единичных углов, поэтому его величина равна 60 градусам.

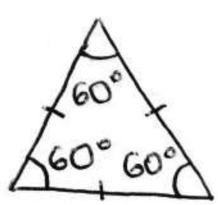
  

  рис. 1.4

- *Радианная мера угла.*

  Пусть задана некоторая окружность радиуса R. Построим такой центральный угол внутри этой окружности, чтобы длина дуги l равнялась R. Поставим в соответствие этому углу число один.

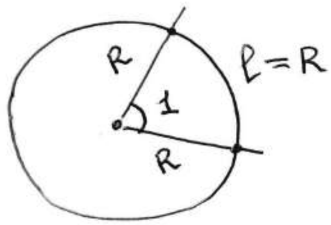


рис. 1.5

  Для всех остальныъ углов будем смотреть, сколько раз в него входит единичный и ставить в соответствие это число. Итак, мы построили радианную меру угла.

  Например, в прямой угол входит $\pi/2$ единичных углов, где число $\pi \approx 3.1416$. В угол в 180 градусов входит ровно π единичных углов радианной меры.

рис. 1.6

Замечание. С этого момента будем измерять углы в радианах.

До сих пор мы рассматривали углы от 0 до 2π (0° до 360°). Сразу встает вопрос: а что с числами больше 2π или меньшими 0? Возожно ли построить такие углы, величины которых будут соответствовать этим числам?

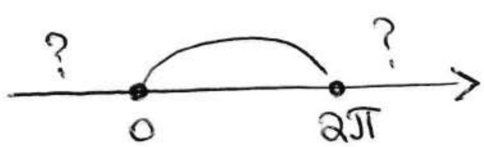


рис. 1.7

Да, можно придумать много способов, как это сделать, но в математике сложился следующий подход: пусть есть угол β, величина которого больше $2\pi = 360^\circ$ или меньше $0 = 0^\circ$.

Возьмем некоторую окружность и проведем к какой-либо ее точке радиус - это будет *начало отсчета* углов.

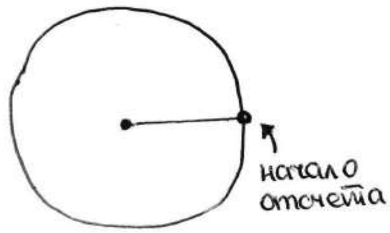


Рис. 1.8

Если величина угла β положительная, то движемся против часовой стрелки, отрицательная, - по часовой стрелке. Если двигаясь прошли полный оборот, то просто продолжаем движение.

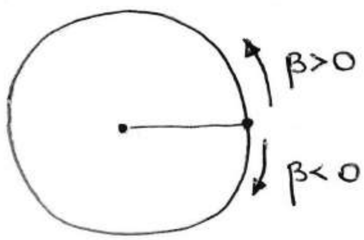


Рис. 1.9

Например, пусть $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$, тогда просто идем по часовой стрелке на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

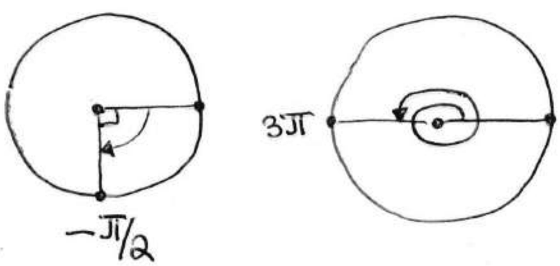


Рис. 1.10

Или пусть $\beta = 3\pi$, тогда движемся против часовой стрелки, проходим первый оборот 2π, продолжаем движение еще на величину π.

1.3 Функция синус

Давайте сейчас зададим еще одну функцию, обозначим ее f.

Пусть имеется окружность радиуса R. В центре окружности отметим начало системы координат xOy. Возьмем произвольное число β, оно будет означать величину угла в радианах. Отметим угол величины β на нашей окружности. Начало отсчета углов положим в точке $(R, 0)$.

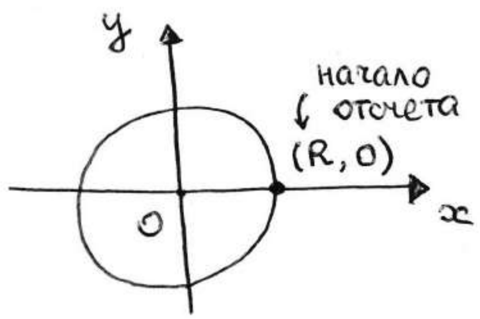


РИС. 1.11

Углу β соответсвует некоторая точка окружности (x_β, y_β), возьмем координату y_β этой точки.

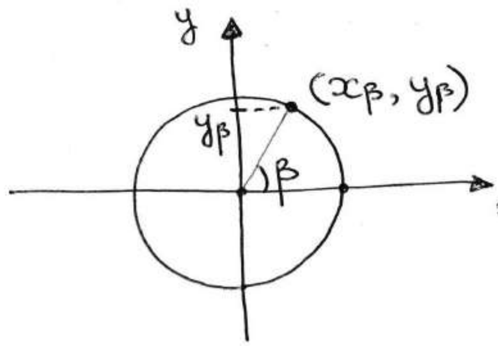


РИС. 1.12

Тогда функцию f определим следующим образом:

$$f(\beta) = \frac{y_\beta}{R}$$

То есть любому числу β поставим в соответствие число $\dfrac{y_\beta}{R}$, где R - это радиус произвольной окружности, относительной которой мы считаем углы.

Например, пусть $\beta = \pi/2$, а окружность радиуса $R = 10$. Тогда $f(\pi/2) = 10/10 = 1$

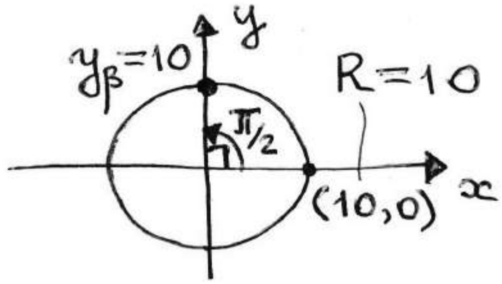


РИС. 1.13

Или $\beta = 3\pi$, окружность с радиусом $R = 4$. Тогда $f(3\pi) = 0/4 = 0$

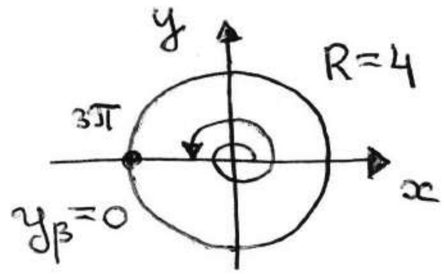


РИС. 1.14

Только что мы определили функцию, которая в математике традиционно называется *синусом*. Поскольку она очень часто встречается и используется, для нее придумали специальное обозначение $\sin(\beta)$.

При введении функции $\sin(\beta)$ мы рассматривали произвольную окружность радиуса R. Но очень часто рассматривают частный случай $R = 1$, то есть *единичную окружность*, поскольку это упрощает формулы, а определение все равно верно. Мы тоже с этого момента и далее будем рассматривать только единичную окружность. Тогда с учетом всего выше сказанного определение синуса можно переписать следующим образом:

Определение.

$$\sin(\beta) = y_\beta$$

1.4 Свойства синуса

Давайте рассмотрим основные свойства функции *синус.*

- Синус принимает значения от -1 до 1:

$$-1 \le \sin(\beta) \le 1$$

Действительно, $\sin(\beta) = y_\beta$ - координата радиус вектора единичной окружности (с центром в начале координат), повернутого на угол β, а y_β не может лежать выше прямой $y = 1$ и ниже $y = -1$, значит и синус ограничен этими прямыми.

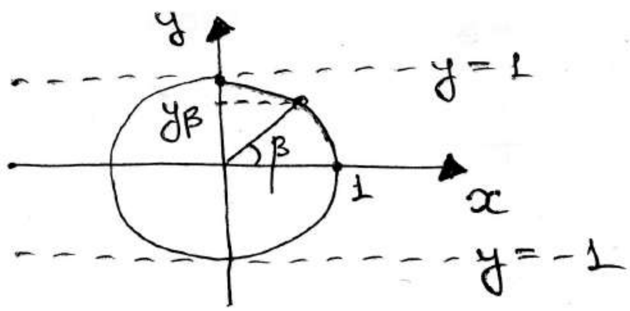


рис. 1.15

- В зависимости от того, в какую четверть единичной окружности попал угол β, знак синуса выглядить следующим образом:

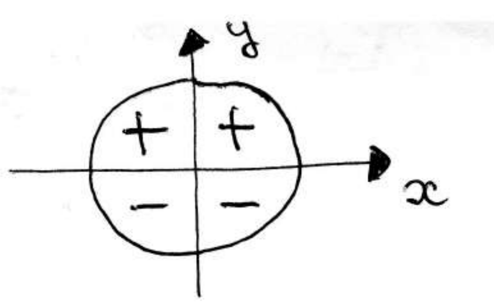


рис. 1.16

Так как $\sin(\beta) = y_\beta$, то знак у синуса совпадает со знаком координаты y_β. Например, $\sin(\frac{4\pi}{3}) < 0$

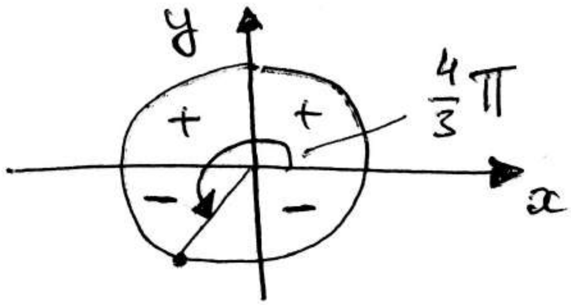


рис. 1.17

- Давайте обратим внимание, что функция синус ставит в соответствие некоторое число из $[-1, 1]$ для очень многих разных углов. Например, рассмотрим три угла $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$, все они соответсвтуют одной и той же точке на окружности, а значит и синус во всех них одинаковый и равен 1.

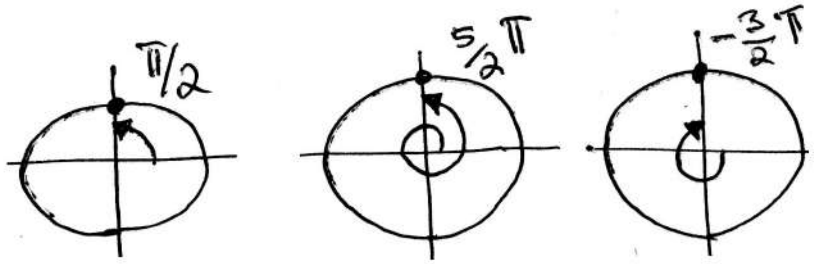


рис. 1.18

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 1$$

Эти три угла не случайны, они отличаются на величину 2π (полный оборот). Для произвольного угла β имеем:

$$\sin(\beta + 2\pi) = \sin(\beta)$$

Это означает, что функция синус *периодична* с периодом 2π. В общем случае можно записать так:

$$\sin(\beta + 2\pi k) = \sin(\beta), k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Сколько бы раз ни прибавляли или вычитали 2π, все равно получим значение в β.

- Давайте покажем связь между значением синуса в точке β и значением синуса в противоположной точке $-\beta$. Оказывается, что для любого угла выполняется:

$$\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$$

То есть синус *нечетная* функция.

Пусть есть некоторый положительный угол β, тогда $-\beta$ находится зеркально напротив β (относительно оси x), то есть $x_\beta = x_{-\beta}$, а координата по оси y меняет знак $y_\beta = -y_{-\beta}$, значит и синус от $-\beta$ меняет знак, но по величине такой же.

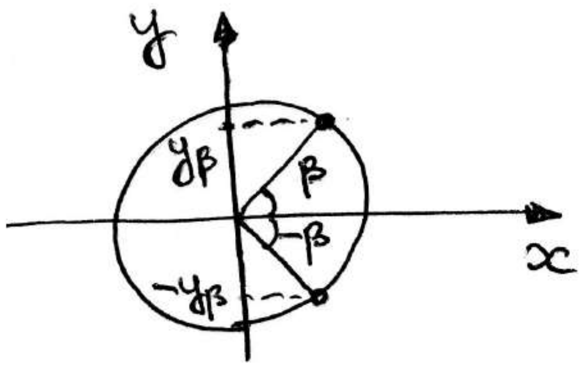


рис. 1.19

Давайте теперь построим график синуса, на котором еще раз проиллюстрируем перечисленные выше свойства.

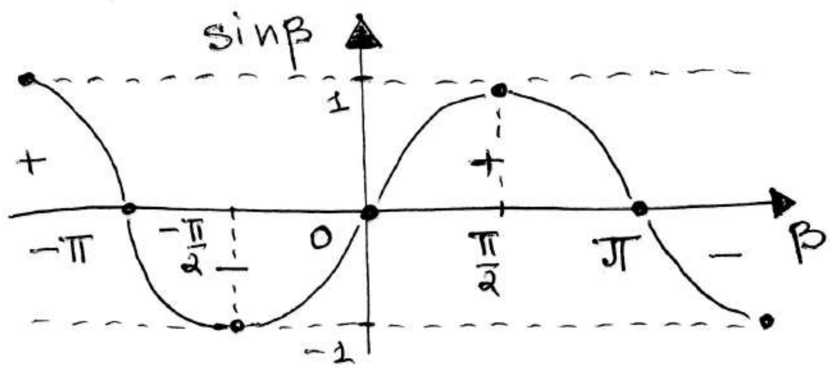


рис. 1.20

Отдельно сакцентируем внимание на нечетности, которая геометрически означает симметричность точек график относительно точки $(0, 0)$.

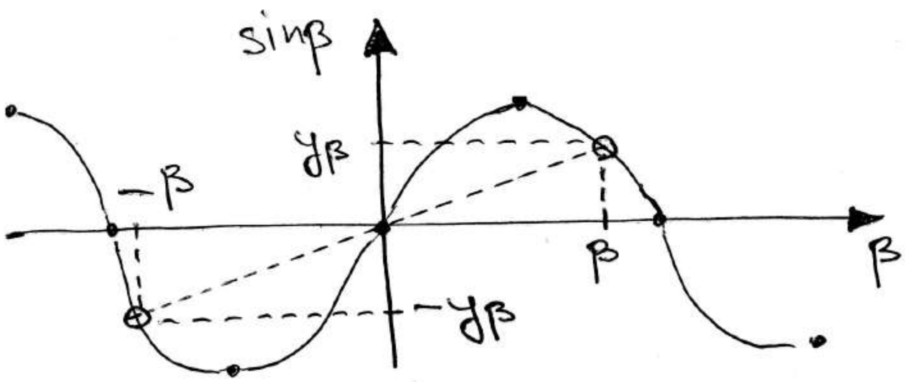


рис.1.21

1.5 Функция косинус

Давайте введем еще одну тригонометрическую функцию. Рассмотрим уже нам привычную единичную окружность, помещенную в центр некоторой системы координат.

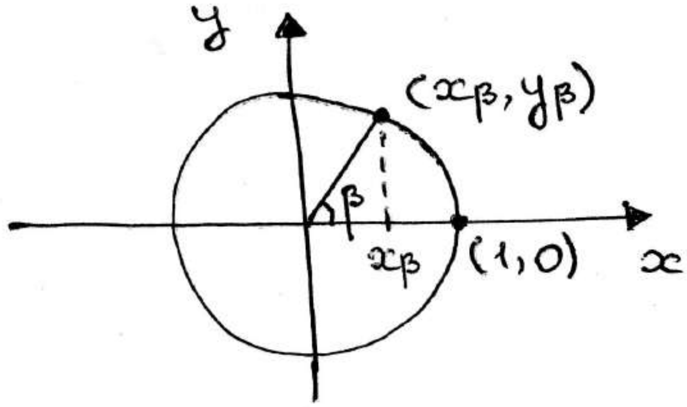


рис. 1.22

Пусть имеется число $\beta \in (-\infty, \infty)$, которое является величиной угла в радианах. Отметим β на нашей окружности, как обычно отсчитываем углы от точки $(1, 0)$. Получили некоторую точку (x_β, y_β), возьмем ее первую координату, это число и есть значение косинуса.

> *Определение.*
> $$\cos(\beta) = x_\beta$$

Например, угол $\beta = \pi/2$ имеет координату $(0, 1)$, значит $\cos(\pi/2) = 0$.

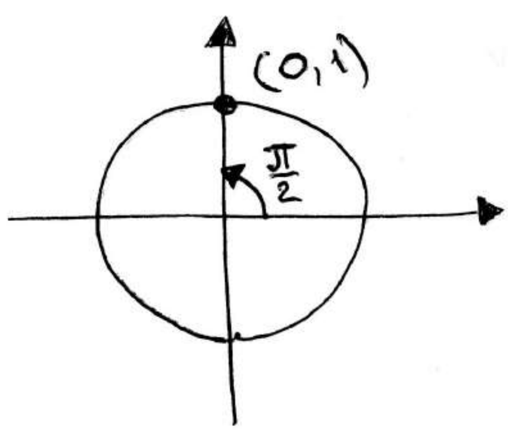


рис. 1.23

1.6 Свойства косинуса

Функции синус и *косинус* определяются практически идентично, поэтому их свойства тоже очень схожи.

- Косинус принимает значения от -1 до 1:

$$-1 \leq \cos(\beta) \leq 1$$

Действительно, если $\cos(\beta)$ - это координата точки единичной окружности, то значит и его значения лежат в пределах единицы и минус единицы.

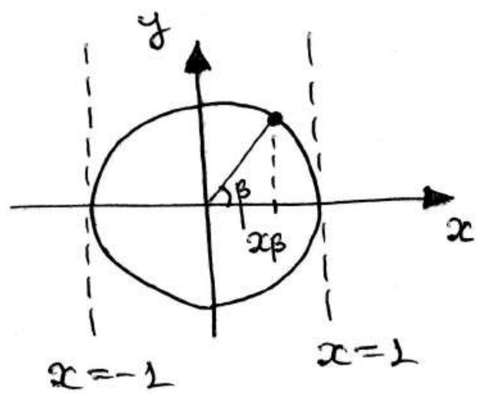


рис. 1.24

- Схема знаков косинуса имеет следующий вид:

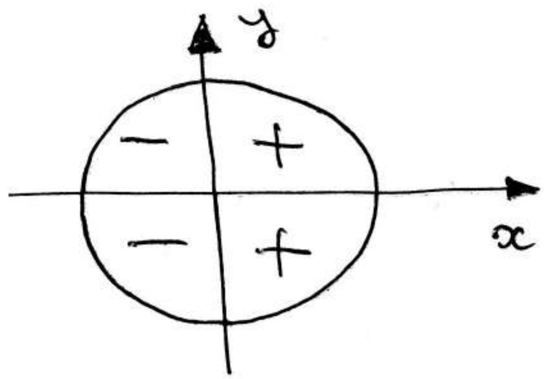


рис. 1.25

- Функция косинус, как и синус, является *периодической* с периодом 2π:

$$\cos(\beta + 2\pi k) = \cos(2\pi), k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- Функция косинус является *четной* (симметрической относительно оси y), то есть

$$\cos(-\beta) = \cos(\beta)$$

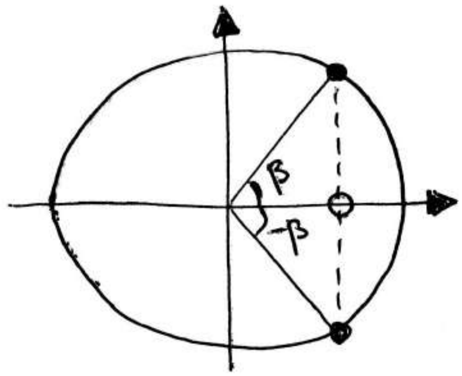


рис. 1.26

Теперь построим график косинуса, где по оси x будут все возможные углы β, а по оси y - значения косинуса.

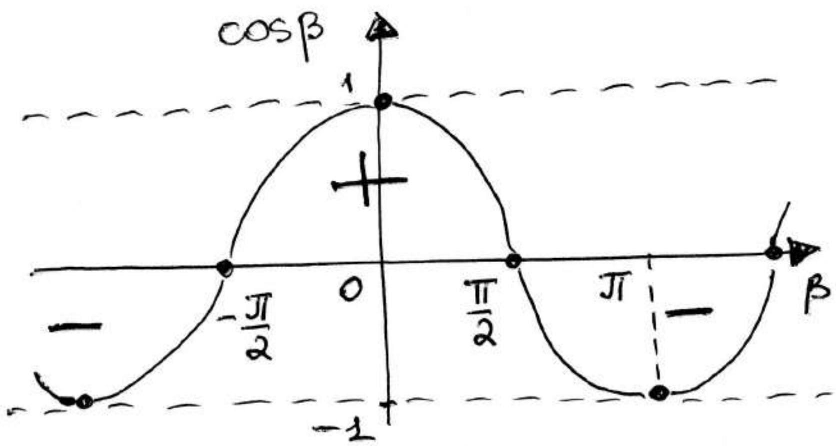


рис. 1.27

Отдельно рассотрим свойство четности, которое означает симметричность относительно оси y.

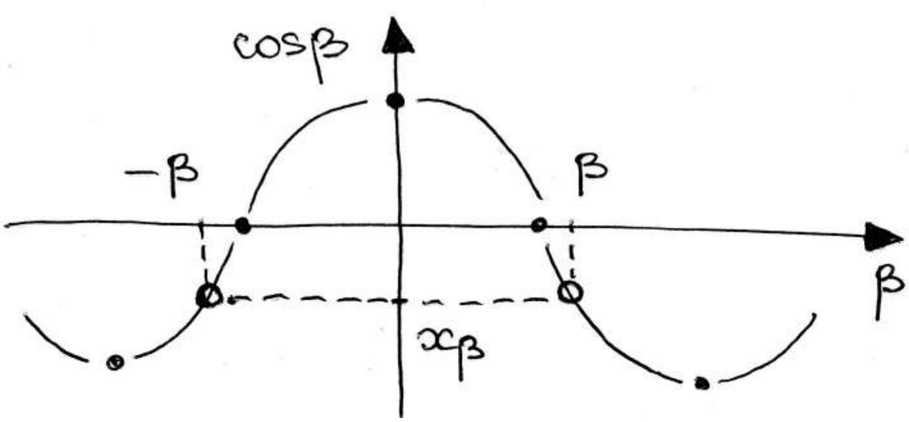


рис. 1.28

1.7 Прямоугольный треугольник

Рассмотрим некоторый прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, положим $\angle B = \pi/2, \angle A = \beta, \angle C = \pi/2 - \beta$. Угол β *острый*: $0 < \beta < \pi/2$.

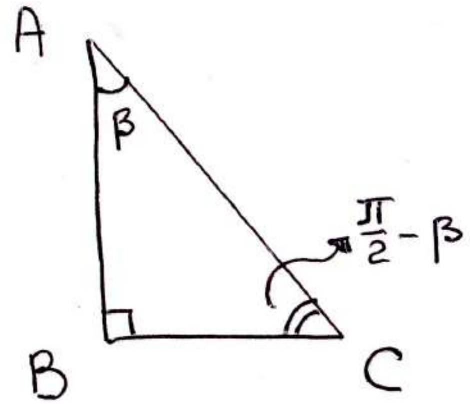


рис. 1.29

Синус и косинус острых углов часто определяют с помощью прямоугольного треугольника, в котором этот угол имеется:

Определение.
Синус острого угла β - это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin(\beta) = \frac{BC}{AC}$$

Косинус острого угла β - это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos(\beta) = \frac{AB}{AC}$$

Это определения на прямую следует из тех, которые мы дали ранее, а именно: пусть имеется окружность радиуса R с центром в начале координат некоторой системы координат.

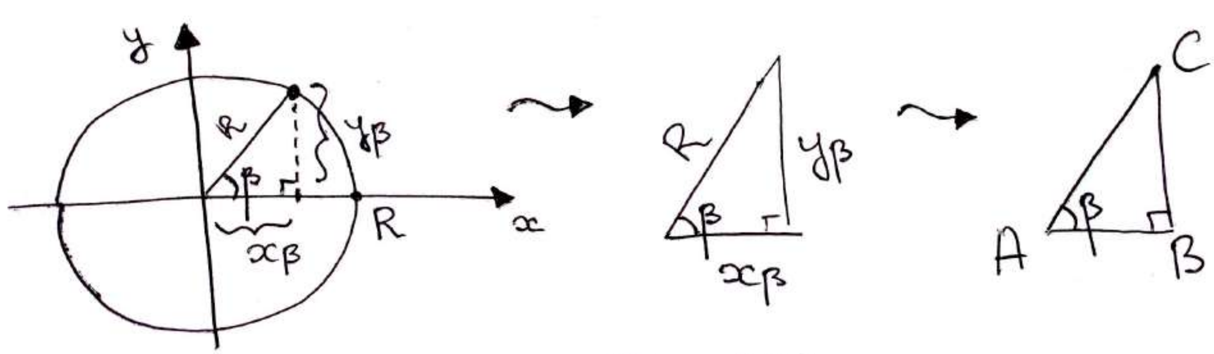


рис. 1.30

Отметим угол β, тогда $\sin(\beta) = \dfrac{y_\beta}{R}$, $\cos(\beta) = \dfrac{x_\beta}{R}$. Но, если угол β острый, то ему соответствует прямоугольный треугольник с гипотенузой R и катетами x_β, y_β. Если обозначить вершины буквами A, B, C, тогда $AB = x_\beta, BC = y_\beta$ и $AC = R$. В точности получаем указанное выше определение: $\sin(\beta) = \dfrac{y_\beta}{R} = \dfrac{BC}{AC}$, $\cos(\beta) = \dfrac{x_\beta}{R} = \dfrac{AB}{AC}$

Мы рассматриваем этот частный случай (острые углы) для того, чтобы получить некоторые табличные значения синуса и косинуса. В этом нам помогут некоторые геометрические соображения про прямоугольные треугольники.

☐ *Вспомогательная задача.* Рассмотрим прямоугольный треугольник, у которого один угол равен 30°, а другой 60°.

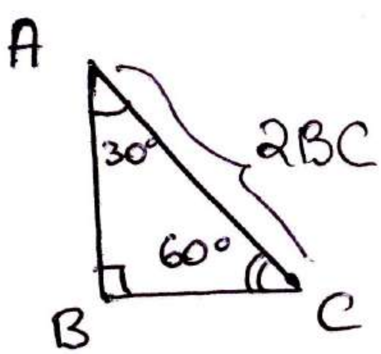


рис. 1.31

Про него известно, что гипотенуза вдвое меньше катета BC: $AC = 2BC$. Это можно показать, если описать вокруг треугольника окружность.

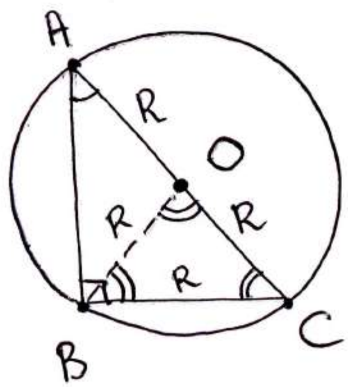


рис. 1.32

Сторона AC будет совпадать с диаметром окружности (потому что $\angle ABC = 90°$), отрезок OB - в точности радиус окружности, значит $\triangle OBC$ равнобедренный ($OB = OC$). Но $\angle OCB = 60°$ по условию, значит $\angle OBC$ тоже $60°$, выходит $\triangle OBC$ является равносторонним. Значить сторона $BC = R$, сторона $AC = 2R \Rightarrow AC = 2BC$.

Возьмем следующий набор углов: $\beta = \dfrac{\pi}{3} = 60°, \beta = \dfrac{\pi}{4} = 45°$ и $\beta = \dfrac{\pi}{6} = 30°$. Вычислим в них значение синуса и косинуса.

- $\boxed{\beta = \dfrac{\pi}{6}}$

  Пусть сторона $BC = a$ (введем обозначение для длины стороны).

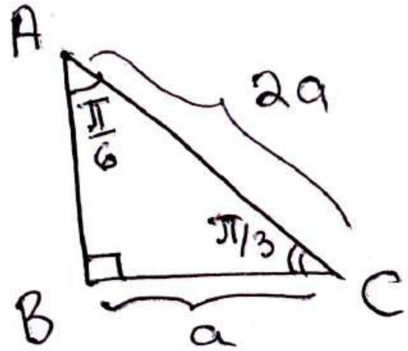


РИС. 1.33

  Согласно вспомогательной задаче $\sin(\pi/6) = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

  Чтобы найти косинус, нужно знать AB, найдем ее по теорема Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

  Тогда $\cos(\pi/6) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\boxed{\beta = \dfrac{\pi}{3}}$

  Этот угол находится в том же самом прямоугольном треугольнике, что и $\pi/6$.

  $\sin(\pi/3) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(\pi/3) = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

- $\boxed{\beta = \dfrac{\pi}{4}}$

  В этом случае треугольник $\triangle ABC$ является равнобедренным, потому что, если $\angle BAC = \pi/4 = 45°$, то $\angle BCA = 180° - 90° - 45° = 45°$.

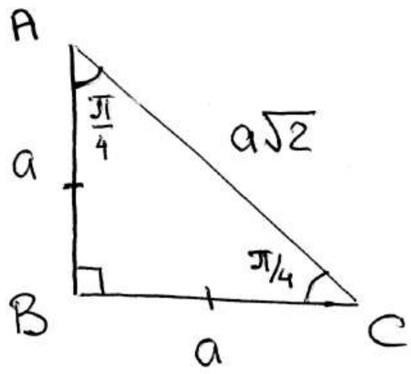


РИС. 1.34

Пусть $AB = BC = a$, тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Поэтому $\sin(\pi/4) = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(\pi/4) = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Иногда вместо $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ пишут $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, это одно и то же, домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Давайте поместим полученную информацию в таблицу, добавим туда еще значения для 0 и $\pi/2$.

β	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\beta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\beta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

1.8 Связь между синусом и косинусом

Рассмотрим некоторые формулы, которые связывают функции синус и косинус.

- *Основное тригонометрическое тождество*

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 \tag{1}$$

Давайте выведем это равенство. Пусть имеется произвольный угол β, в общем случае, если отметим его на единичной окружности, он может находится в четырех качественно разных положениях.

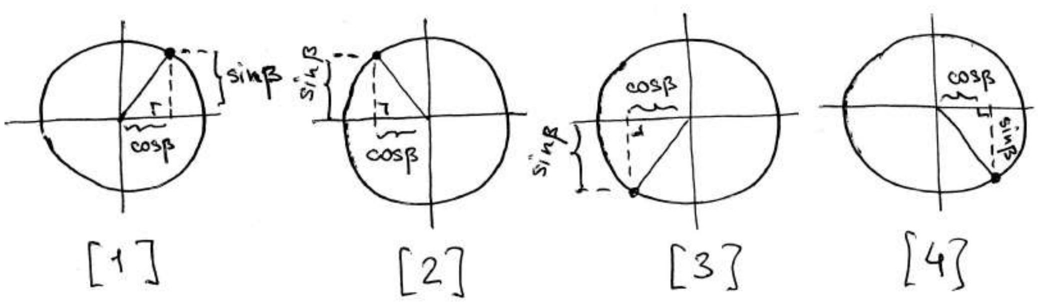


РИС. 1,35

Для каждого случая синус и косинус β - это катеты прямоугольного треугольника, а гипотенуза равна 1, так как это единичная окружность. Поэтому по теореме Пифагора $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1^2$.

- *Формулы сложения*

Пусть имеются два произвольных угла β и γ, тогда верны следующие формулы:

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma) \tag{2}$$

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma) \tag{3}$$

Чтобы доказать эти выражения, нужно вспомнить некоторые факты про векторы, сделаем это чуть позже (в следующем пункте).

- *Формулы приведения*

Указанные ниже формулы напрямую следуют из формул сложение. Также существует красивая геометрическая интерпретация, которую продемонстрируем для одной из формул.

•• $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos(\beta)$

Вывод: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\left\langle \text{по формуле сложения (2)}\right\rangle = \sin(\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\beta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\beta)\cdot 0+\cos(\beta)\cdot 1=\cos(\beta)$

Теперь проиллюстрируем эту формулу.

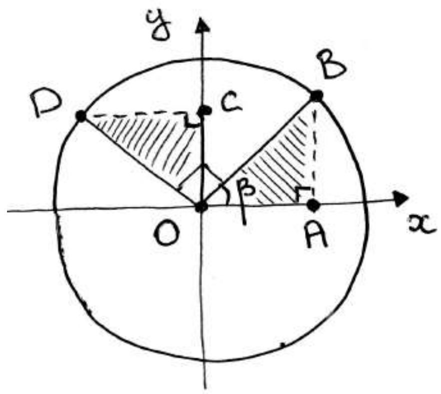


РИС. 1.36

Отметим некоторый угол β на единичной окружности. Ему соответствует прямоугольный треугольник $\triangle OAB$. При повороте на $\frac{\pi}{2}$ (прибавляем к β угол $\frac{\pi}{2}$) получаем угол, которому соответствует треугольник $\triangle OCD$, сторона которого OC совпадает с осью Oy. Треугольник $\triangle OAB$ при повороте не изменился, то есть $OC=OA, CD=AB$, поэтому $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=OC=OA=\cos(\beta)$.

•• $\cos(\frac{\pi}{2}+\beta)=-\sin(\beta)$

•• $\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos(\beta)$

•• $\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin(\beta)$

Вывод остальных формул оставим в качестве упражнения.

1.9 Скалярное произведение

Этот раздел посвящен доказательству формул сложения (2) и (3). Для этого нам нужно вспомнить некоторые факты про векторы.

Пусть задана система координат xOy. Отметим в ней произвольную точку с координатами (x_0, y_0). Если провести из начала координат в точку (x_0, y_0) линию, то получим *вектор*.

Определение. Вектор - это направленный отрезок.

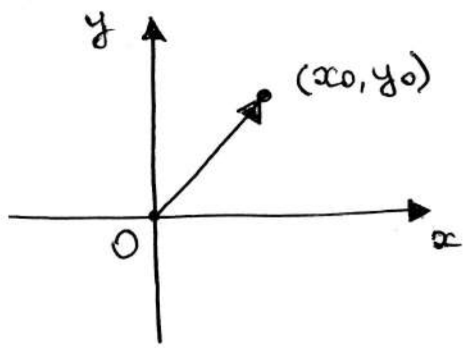


рис. 1.37

То есть вектор - это математический объект, который задается величиной и направлением. Если задана некоторая система координат, то любую точку (x_0, y_0) в ней можно рассматривать как вектор [1] (величина вектора равна $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, а направление от $(0,0)$ к (x_0, y_0)).

Теперь введем некоторую функцию f от векторов.

Раньше, когда речь заходила о функция, мы брали некоторое множество и ставили в соответствие его объектам элементы другого множества. Чаще всего речь была о числах, но в общем случае множества могут быть произвольной природы (смотри *1.1 Функции в математике*).

Также рассматривали функции от одного аргумента, то есть правила сопостовляли одному объекту, некоторый другой объект, сейчас же наша функция будет от зависеть от двух аргументов. На самом деле мы уже очень много работали с такими функциями, которые в математике принято называть *операциями*. Например, операция сложения или умножения. Действительно, что такое сложение? Это правило, которое двум числам сопоставляет третье, равное сумме двух других: $f_{\text{сложение}}(5, 6) = 5 + 6 = 11$.

Пусть имеется два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначим через φ угол между

[1]https://math.stackexchange.com/questions/645672/what-is-the-difference-between-a-point-and-a-vector

ними. Зададим функцию f на этих двух векторах следующим образом:

$$f\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

То есть для двух заданных векторов берется длина первого, умножается на длину второго и на косинус угла между векторами.

Например, для векторов $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (2, 0)$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, для которых $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 0} = 2$, получаем $f\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

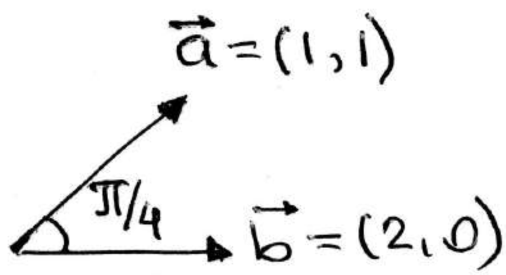


Рис. 1.38

Эту функцию (операцию) в математике принято называть *скалярным произведением*. У нее есть специальное обозначение $f\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ - то есть, когда два вектора написаны в треугольных скобочках через запятую, то имеется в виду скалярное произведение (еще иногда пишут так $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$).

Путем некоторых геометрических преобразований [2] или с помощью свойств скалярного произведения [3] можно вывести следующее утверждение (сам вывод опустим):

Утверждение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты (x_a, y_a) и (x_b, y_b) соответственно, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно записать в виде:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Удобство этой формулы очевидно: теперь не нужно знать угол между векторами или вычислять их длины, достаточно просто перемножить координаты. Например, для указанной выше задачи имеем $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2$.

☐ Наконец, перейдем к *доказательству* формул (2) и (3). В этом, как вы уже догадались, нам поможет скалярное произведение.

[2] http://www.cleverstudents.ru/vectors/scalar_product_of_vectors.html
[3] И.М.Гельфанд, С.М.Львовский, А.Л.Тоом. Тригонометрия. стр.96

Пусть имеется два произвольных угла β и γ, отметим их на единичной окружности, получатся точки A и B. Проведем к ним радиус векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$. Угол между векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ равен $\varphi = |\gamma - \beta|$ (в общем случае не знаем какой угол больше γ или β, поэтому ставим модуль).

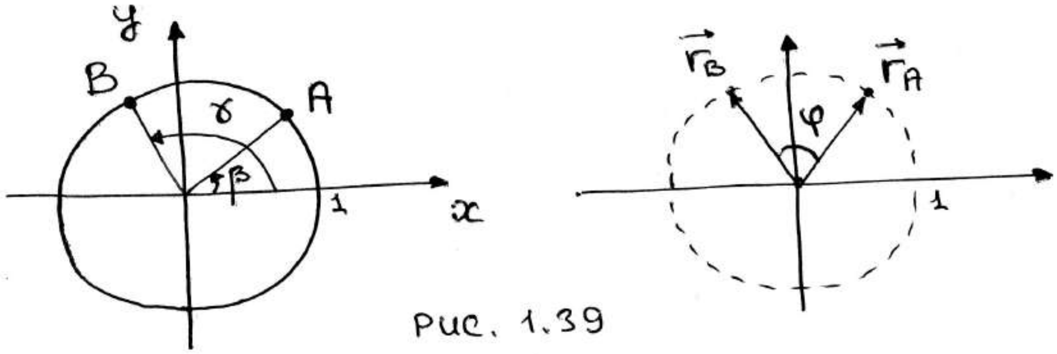


рис. 1.39

Выразим косинус φ (он нам понадобится чуть позже): $\cos(\varphi) = \cos(|\gamma - \beta|) = \left\langle \text{косинус - четная функция, поэтому: } \cos(|x|) = \begin{cases} \cos(x), & x > 0 \\ \cos(-x) = \cos(x), & x \leq 0 \end{cases} = \cos(x) \right\rangle = \cos(\gamma - \beta)$

Теперь запишем скалярное произведение векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$, по определению это: $\langle \vec{r}_A, \vec{r}_B \rangle = |\vec{r}_A| \cdot |\vec{r}_B| \cdot \cos(\varphi) = \left\langle \begin{matrix} \text{векторы с единичной окружности,} \\ \text{значит единичной длины} \end{matrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\gamma - \beta) = \cos(\gamma - \beta)$.

Чему равны координаты векторов $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$?

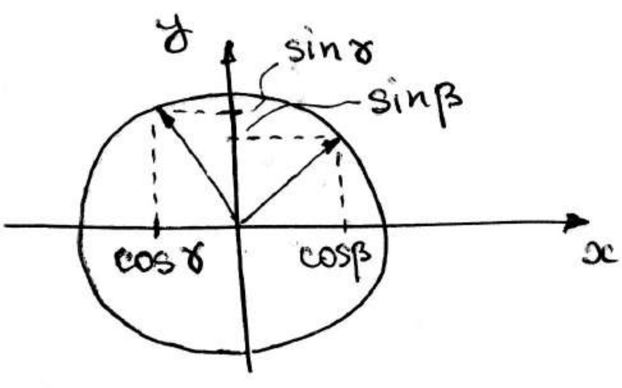


рис. 1.40

В точности косинусу и синусу (из определния этих функций):

$$\vec{r}_A = [\cos(\beta), \sin(\beta)], \vec{r}_B = [\cos(\gamma), \sin(\gamma)]$$

Тогда, с другой стороны, согласно утверждению из этого параграфа скалярное произведение можно записать как: $\langle \vec{r}_A, \vec{r}_B \rangle = \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\beta)$.

Компонуя две записи, получаем:

$$\cos(\gamma - \beta) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\beta)$$

Подставим вместо β угол $-\beta$:

$$\cos(\gamma - (-\beta)) = \cos(\gamma) \cdot \cos(-\beta) + \sin(\gamma) \cdot \sin(-\beta)$$

Используя четность косинуса и нечетность синуса выходит формула (3):

$$\cos(\gamma + \beta) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\beta) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\beta)$$

Чтобы отсюда получить формулу (2), воспользуемся формулами приведения:

$$\cos\left(\gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\gamma + \beta) \tag{$\triangle$}$$

Введем новую букву $\theta = \beta - \dfrac{\pi}{2}$. По формуле (3) (которую мы доказали) распишем $\cos(\gamma + \theta)$:

$$\cos(\gamma + \theta) = \cos(\gamma) \cdot \cos(\theta) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\theta)$$

Опять же по формулам приведения:

$$\cos(\theta) = \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\beta)$$

$$\sin(\theta) = \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\beta)$$

Тогда получаем формулу (2):

$$\cos(\gamma + \theta) = \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) = \left\langle \text{По формуле } (\triangle) \right\rangle = \sin(\gamma + \beta)$$

1.10 Функция тангенс

Введем еще одну тригонометрическую функцию. Пусть имеется некоторый угол β. Посчитаем в нем величину синуса: $\sin(\beta) = A$, а также косинуса: $\cos(\beta) = B$.

Зададим следующую функцию f: каждому углу $\beta \in \mathbb{R}$ поставим в соответсвтие число $\dfrac{A}{B}$.

Например, для угла $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ получим $A = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $B = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$

Только что мы задали функцию тангенс, у которой есть специальное обозначение $f(x) = \operatorname{tg}(x)$

Определение.
Тангес угла β - это отношение синуса β к косинусу β:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$$

1.11 Свойства тангенса

Давайте рассмотрим основные свойства $\operatorname{tg}(\beta)$

1. Тангенс принимает значения от $-\infty$ до ∞.

   Действительно, поскольку $\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$, а синус и косинус от β - это числа из отрезка $[-1, 1]$, то отношение этих чисел может быть сколь угодно малым или сколь угодно большим.

2. В математике деление на ноль не определено, поэтому при тех углах β, когда $\cos(\beta) = 0$ значение $\operatorname{tg}(\beta)$ не определено.

   Косинус обращается в ноль, когда радиус-вектор, соответствующий углу, равен $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Эти значения достигаются при углах $\beta = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

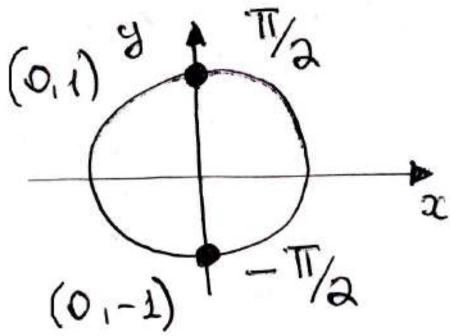
   

   рис. 1.41

   Итак, $\operatorname{tg}(\beta)$ не определен при $\beta = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Нарисуем на графике единичной окружности тангенс.

   Известно, что $\sin(\beta)$ - это координата по оси y радиус-вектора, соответствующего углу β, отмеченному на единичной окружности. По аналогии косинус - это координата по оси x.

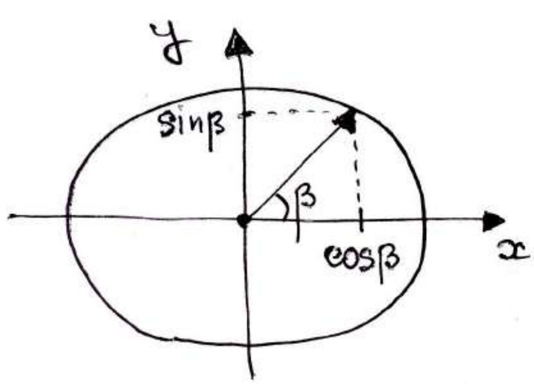
   

   рис. 1.42

Рассмотрим прямоугольные треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$. Они подобные, поэтому $\dfrac{AB}{AO} = \dfrac{CD}{CO}$

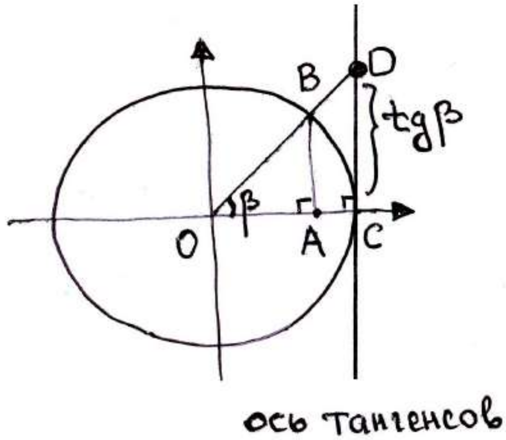


рис. 1.43

Но отношение $\dfrac{AB}{AO} = \text{tg}(\beta)$, потому что $AB = \sin(\beta)$, $AO = \cos(\beta)$. Тогда $\text{tg}(\beta) = \dfrac{CD}{CO} = \Big\langle CO = R = 1 \Big\rangle = CD$. То есть отрезок CD - это и есть величина тангенса β.

4. Построим диаграмму знаков тангенса для различных углов. Она будет определяться знаком синуса и косинуса. Достаточно посмотреть на их значения, чтобы получить следующую картинку:

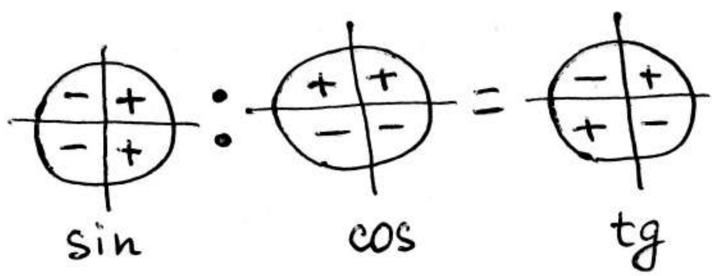


рис. 1.44

Там, где два два одинаковых знака, будет плюс (происходит деление синуса на косинус), во всех остальных случаях - минус.

5. Вспомним, что произвольная функция $f(x)$ имеет период T, если $f(x+T) \equiv f(x)$.

В случае с синусом и косинусом $T = 2\pi$. У тангенса же период равен π.

$$\text{tg}(\beta + \pi) = \text{tg}(\beta)$$

6. Тангенс - нечетная функция: $\operatorname{tg}(-\beta) = \operatorname{tg}(\beta)$.

   Действительно, косинус "проглотит" минус, а синус его "выплюнет"(четность косинуса, нечетность синуса): $\operatorname{tg}(-\beta) = \dfrac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)} = -\dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = -\operatorname{tg}(\beta)$

7. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$.

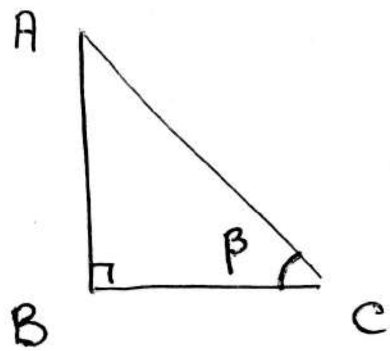


рис. 1.45

   Пусть $\angle BCA = \beta$ (острый угол), тогда $\operatorname{tg}(\beta) = \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{BA/AC}{BC/AC} = \frac{BA}{BC}$, то есть тангенс острого угла β в прямогульном треугольнике $\triangle ABC$ - это отношение противолежащего катета AB к прилежащему катету BC.

   Теперь получим значения тангенса для некоторых острых углов. Не будем прибегать к геометрическим соображениям (как мы это делали с синусом и косинусом), а просто воспользуемся значениями синуса и косинуса в этих углах.

$$\operatorname{tg}(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

8. Построим график функции тангенс, то есть множество всех точек $(\beta, \operatorname{tg}(\beta))$, $\beta \in \mathbb{R}$. Отметим, что нечетность тангенса означает симметричность точек относительно точки $(0, 0)$.

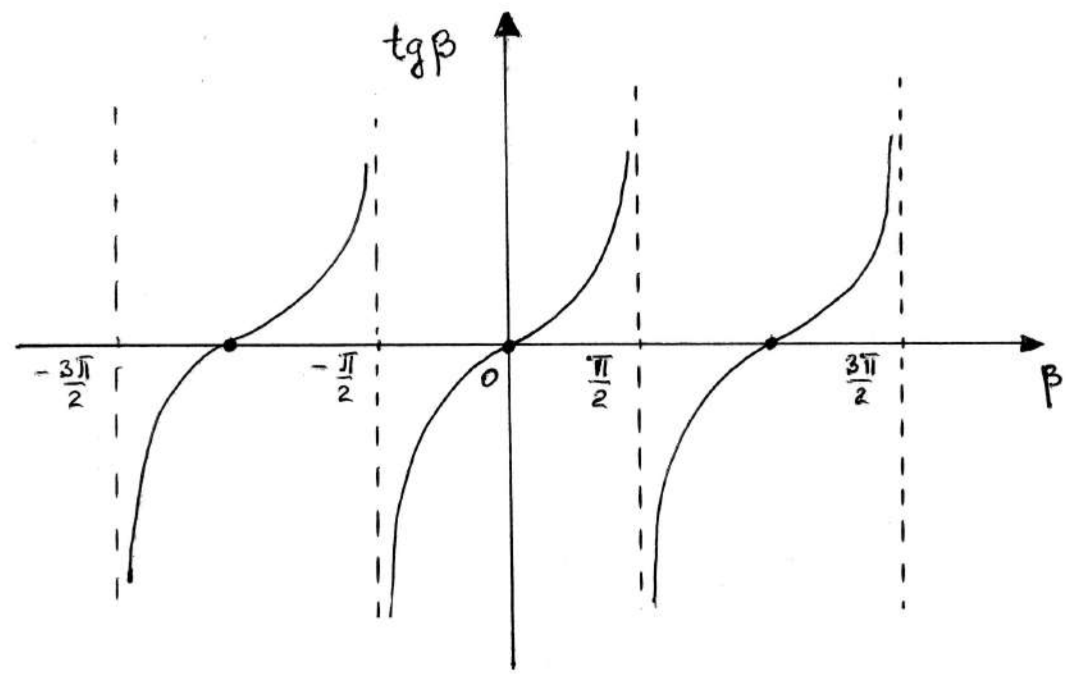


Рис. 1.46

1.12 Функция котангенс

Определим функцию f как отношение косинуса к синусу, то есть любому углу β поставим в соответствие число $\dfrac{\cos(\beta)}{\sin\beta}$.

Например, для угла $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ имеем: $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$

Функцию f в математике принято называть котангенс, у нее есть специальное обозначение: $f(\beta) = \operatorname{ctg}(\beta)$.

Определение.
Котангенс угла β - это отношение косинуса β к синусу β:

$$\operatorname{ctg}(\beta) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}$$

1.13 Свойства котангенса

Если приглядеться, то можно заметить, что функции $\mathrm{tg}(\beta)$ и $\mathrm{ctg}(\beta)$ очень похожи, фактически "братья"(как и синус с косинусом), поэтому и свойства их тоже похожи. Тем не менее перечислим эти свойства.

1. Котангенс принимает значения от $-\infty$ до ∞.

2. Поскольку $\mathrm{ctg}(\beta) = \dfrac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}$, то при значениях $\beta = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (там, где синус обращается в нуль) котангенс не определен.

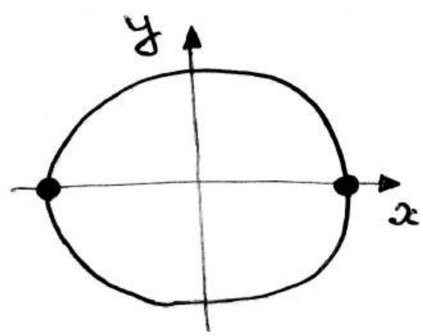
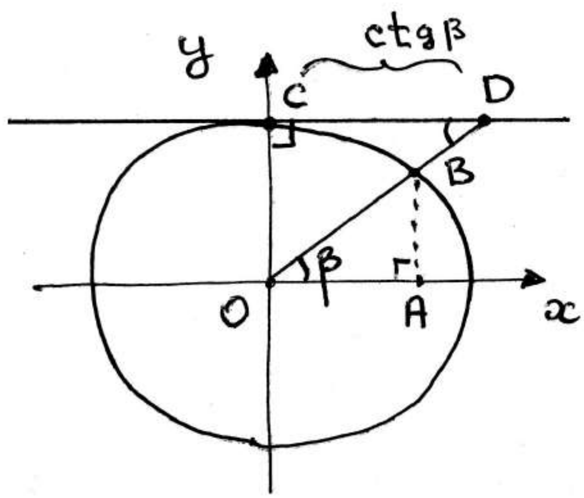


РИС. 1.47

3. Построим ось котангенсов на единичной окружности. Пусть имеется произвольный угол β, отметим его на окружности.



ось котангенсов

РИС. 1.48

По определению $\mathrm{ctg}(\beta) = \dfrac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \dfrac{OA/1}{AB/1} = \dfrac{OA}{OB}$.

Углы $\angle BOA = \angle ODC = \beta$, треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$ подобные, поэтому $\mathrm{ctg}(\beta) = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{CD}{CO} = \dfrac{CD}{1} = CD$

То есть величина котангенса угла β равна длине отрезка CD.

4. Диаграмма знаков котангенса

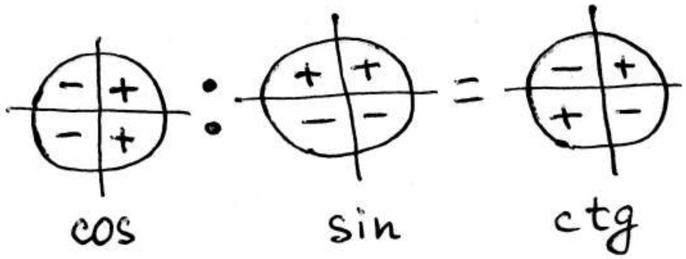


рис. 1.49

5. Котангенс имеет период π

$$\operatorname{ctg}(\beta + \pi k) = \operatorname{ctg}(\beta),\ k \in \mathbb{Z}$$

6. Котангенс является нечетной функцией

$$\operatorname{ctg}(-\beta) = -\operatorname{ctg}(\beta)$$

7. Из определения котангеса следует, что

$$\operatorname{ctg}(\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\beta)}$$

Воспользуемся этим соотношением, чтобы получить значения котангенса в острых углах:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

8. Приведем график котангенса

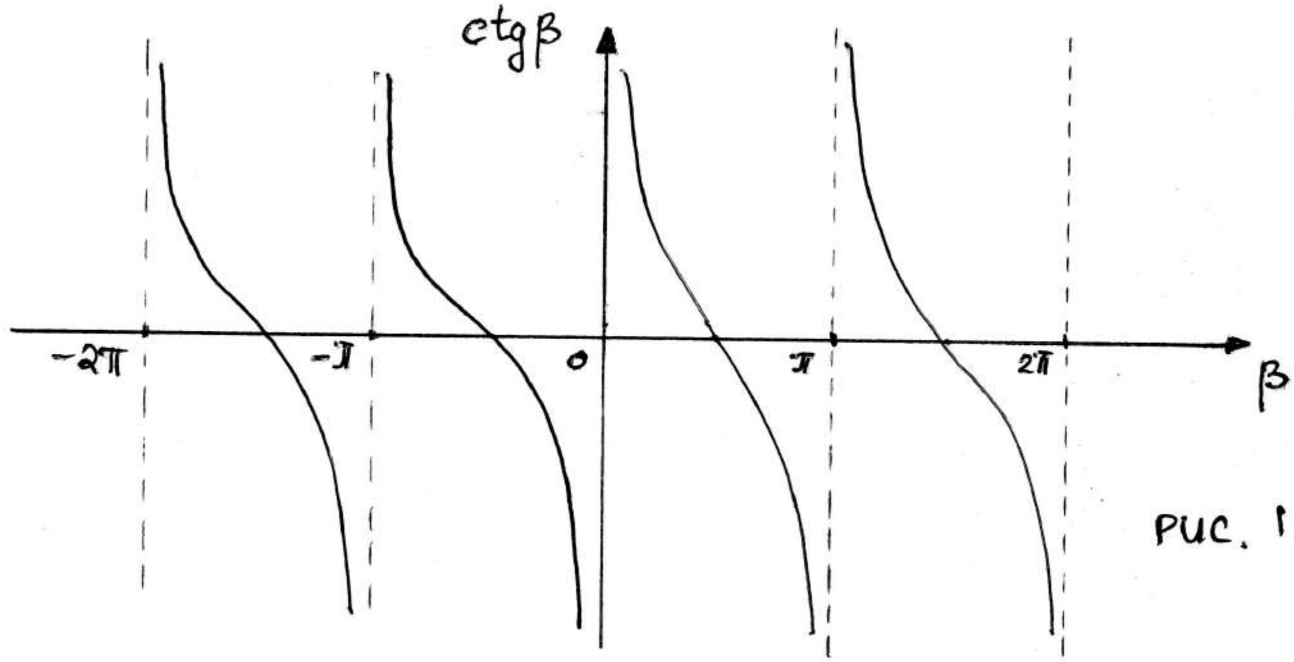


Рис. 1.50

1.14 Соотношения для тангенса и котангенса

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\beta)} \tag{4}$$

- Следствие основного тригонометрического тождества (1):

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 \Big| : \cos^2(\beta) \Rightarrow \operatorname{tg}^2(\beta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\beta)} \tag{5}$$

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1 \Big| : \sin^2(\beta) \Rightarrow 1 + \operatorname{ctg}^2(\beta) = \frac{1}{\sin^2(\beta)} \tag{6}$$

- Следствие формул сложения (2) и (3):

$$\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma)}{\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma)} \Bigg| \cdot \frac{\cos(\beta)\cos(\gamma)}{\cos(\beta)\cos(\gamma)}$$

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}(\beta) + \operatorname{tg}(\gamma)}{1 - \operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\gamma)} \tag{7}$$

$$\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma)}{\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma)} \Bigg| \cdot \frac{\sin(\beta)\sin(\gamma)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)}$$

$$\operatorname{ctg}(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{ctg}(\beta)\operatorname{ctg}(\gamma) - 1}{\operatorname{ctg}(\gamma) + \operatorname{ctg}(\beta)} \tag{8}$$

- Следствие формул приведения:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} = -\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\operatorname{ctg}(\beta)$$

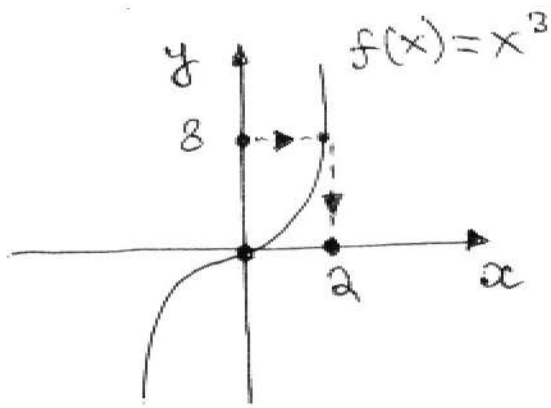
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \operatorname{ctg}(\beta)$$

2 Тригонометрические уравнения

2.1 Обратная функция

Пусть имеется функция $f(x) = x^3$, рассмотрим ее на интервале $(-\infty, \infty)$. Задано некоторое ее значение, например, $y_0 = 8$. При каком аргументе x_0 это значение вышло?

Рис. 2.1



Чтобы ответить на этот вопрос, нужно просто решить уравнение $x^3 = 8$, значит $x_0 = 2$. В общем случае, чтобы узнать при каком x получается тот или иной y, нужно решить уравнение $x^3 = y$. Или, если выразить x, то получим: $x = \sqrt[3]{y}$.

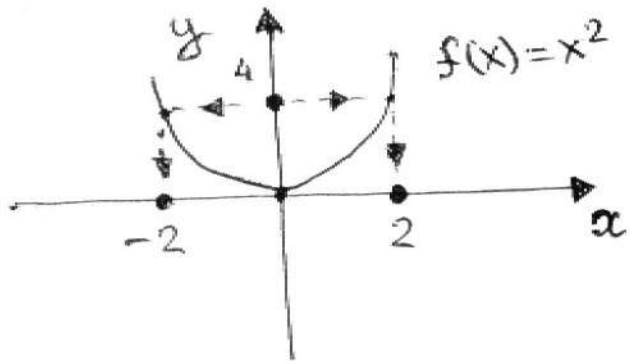
Только что мы построили обратную функция для функции $f(x) = x^3$. Для обратных функций придумали специальное обозначение: $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ — минус единица рядом с исходной f.

> *Определение.*
> Пусть задана функция $y = f(x)$. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется *обратной* для данной.

Неужели все так просто? Не совсем. Рассмотрим еще один пример.

На $(-\infty, \infty)$ имеется функция $f(x) = x^2$. Возьмем значение $y_0 = 4$ и найдем аргумент, при котором оно достигнулось, то есть посчитаем $f^{-1}(4)$.

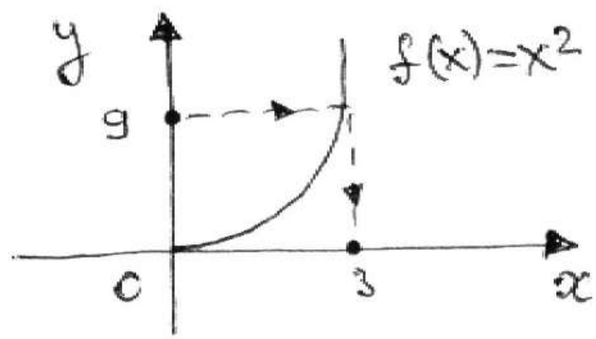
рис. 2.2



Для этого решим уравнение $x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$. Получились два значения. Но любая функция (в том числе и обратная) должна некоторому аргументу ставить в соответствие только одно значение. А в нашем случае получилась неопределенность: что выбрать x_1 или x_2? Поэтому у функции $f(x) = x^2$ не существует обратной на $(-\infty, \infty)$.

Получается, про функцию x^2 нужно забыть? Она безнадежна? Совсем нет, сделаем следующее ухищрение: будем рассматривать $f(x) = x^2$ на полуинтервале $[0, +\infty)$.

рис. 2.3



Что измениться по сравнению со случаем, когда мы рассматривали на всей вещественной прямой $(-\infty, \infty)$? Получится *взаимнооднозначное соответствие (биекция)*, то есть разным x будут соответствовать разные y. Раньше значениям 3 и -3 соответствовало одинаковое $y = 9$, но теперь отрицательные числа мы просто не рассматриваем.

Утверждение.
Функция $y = f(x)$ обратима на интервале $(a, b) \Leftrightarrow$ на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ взаимнооднозначная.

2.2 Арксинус

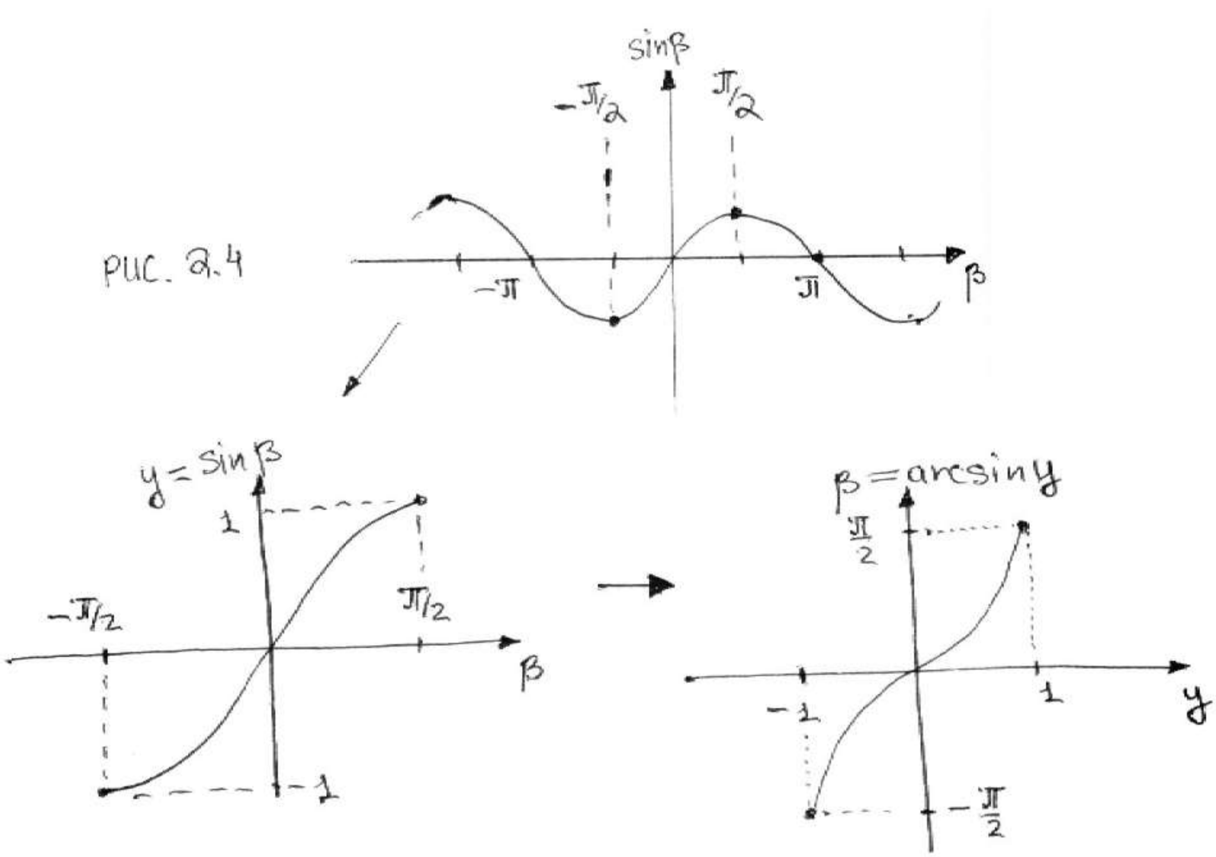
Давайте построим обратную функцию для синуса. Сразу отметим, что синус на интервале $(-\infty, \infty)$ — это не взаимнооднозначное соответствие, поэтому нужно выбрать какой-то интервал, на котором бы это свойство выполнялось.

Так сложилось, что рассматривают отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть имеется некоторое значение $y \in [-1, 1]$, найдем угол $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, такой, что $\sin(\beta) = y$ - мы построили функцию арксинус:

Определение.
Арксинусом числа $y \in [-1, 1]$ называется такой угол β из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, что $\sin(\beta) = y$

$$\arcsin(y) = \beta$$

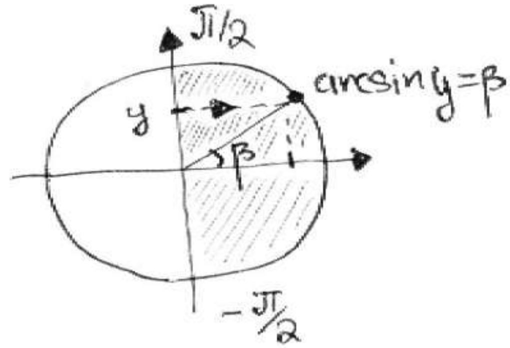
Построим график арксинуса. Для этого сначала возьмем график синуса, выделим участок от $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и перевернем оси таким образом, чтобы абсциссой стал y, а ординатой - угол β. Получили график арксинуса.



Еще раз отметим, что областью определения арксинуса являются значения из отрезка $[-1, 1]$, а областью значений — углы из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Также обратим внимание на расположение арксинуса на единичной окружности. Арксинус лежит в правом секторе круга.

рис. 2.5



Из нечетности синуса, а также из построения (выбрали интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$) следует, что арксинус тоже нечетная функция:

$$\arcsin(-y) = -\arcsin(y)$$

2.3 Арккосинус

Построим обратную функцию для косинуса. Опять же нужно выбрать некоторый интервал, на котором косинус взаимнооднозначен. Принято брать $[0, \pi]$.

Определение.
Арккосинусом числа $y \in [-1, 1]$ называется такой угол β из отрезка $[0, \pi]$, что $\cos(\beta) = y$

$$\arccos(y) = \beta$$

Построим график арккосинуса. Возьмем график косинуса, выделим там область $[0, \pi]$, перевернем оси.

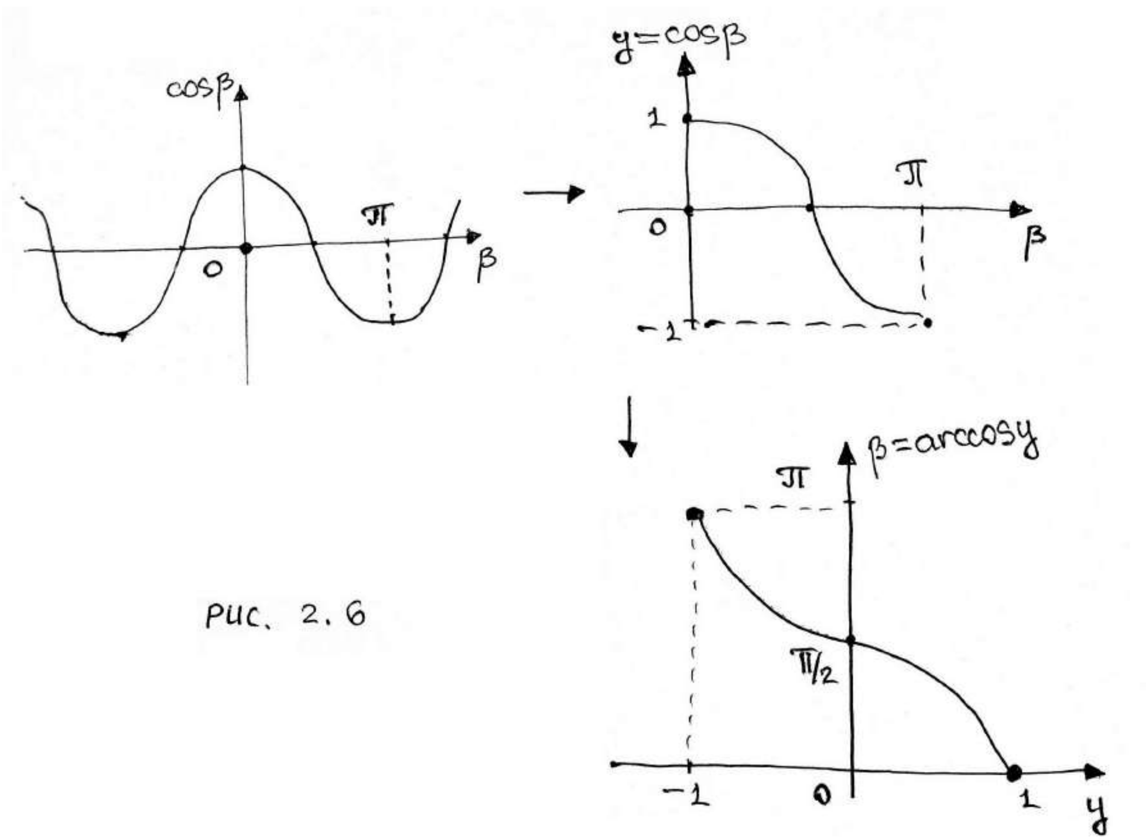
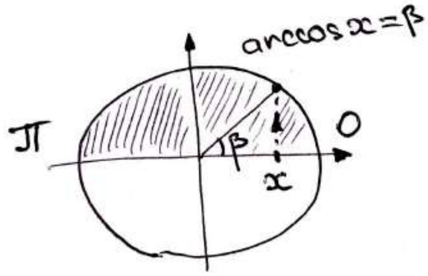


рис. 2.6

На тригонометричесой окружности арккосинус лежит в верхнем секторе круга.

рис. 2.7



Арккосинус - ни четная, ни нечетная функция, тем не менее кое-что можно записать про связь двух противоположных аргументов:

$$\arccos(-y) = \pi - \arccos(y)$$

Связь между арксинусом и арккосинусом

$$\arcsin(y) + \arccos(y) = \frac{\pi}{2}$$

Действительно, положим $\beta = \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\gamma = \arccos(y) \in [0, \pi] \Rightarrow$ $y = \sin(\beta) = \cos(\gamma) \Rightarrow \sin(\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$

$$\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \frac{\pi}{2} - \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

2.4 Арктангенс

Рассмотрим обратную функцию для тангенса. На всей числовой прямой тангенс не является взаимнооднозначным соответствием, принято рассматривать интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пусть имеется некоторое значение тангенса $y \in (-\infty, \infty)$, найдем такой угол β из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, что $\operatorname{tg}(\beta) = y$.

Определение.
Арктангенсом числа $y \in (-\infty, \infty)$ называется такой угол β из отрезка $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, что $\operatorname{tg}(\beta) = y$:

$$\operatorname{arctg}(y) = \beta$$

Построим график арктангенса. Возьмем график тангенса, выделим там область $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, перевернем оси.

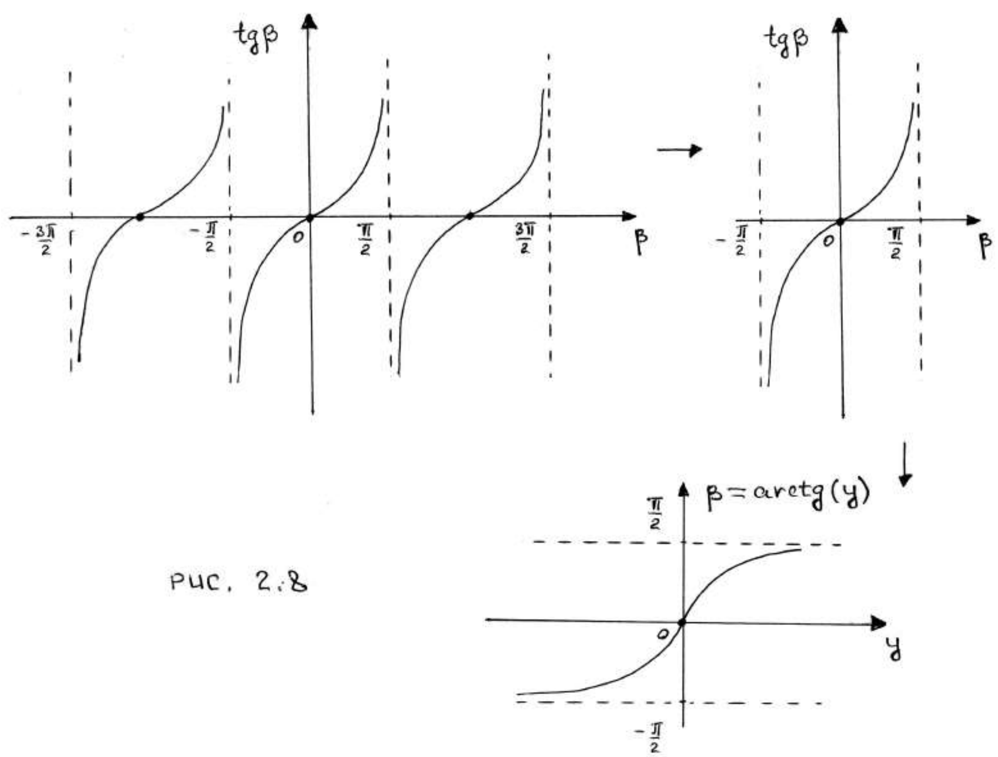
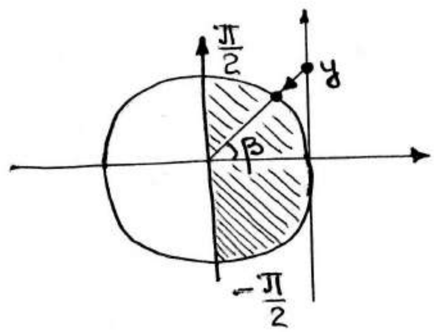


рис. 2.8

На тригонометричесой окружности арктангенс живет в правой полуокружности.

РИС. 2.9



Арктангенс является нечетной функцией:

$$\operatorname{arctg}(-y) = -\operatorname{arctg}(y)$$

2.5 Простейшие уравнения с синусом

Пусть имеется следующее уравнение (*уравнение 1*):

$$\sin(\beta) = 0$$

При каких углах синус обращается в нуль? Мы получили в пункте **1.7**, что в точке $\beta = 0$ такое действительно происходит:

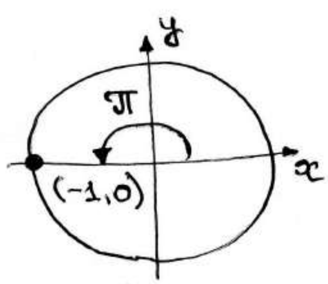
$$\sin(0) = 0$$

Отлично, нашли одну точку, но нам хочется множество всех решений данного уравнения. Вспомним, что синус - периодическая функция с периодом 2π. Это означает, что если подходит в качестве решения точка $\beta = 0$, то годится и $\beta_1 = 0 + 2\pi$, $\beta_2 = 0 - 4\pi$ и так далее. В общем виде это можно записать так:

$$\beta = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Все, мы решили уравнение? Нет, потеряли еще точку π. Действительно, координатой по оси y угла $\beta = \pi$ на единичной окружности является 0.

РИС. 2.10



Соответственно, также как и с углом $\beta = 0$, здесь подходят любые точки с разницой, кратной 2π:

$$\beta = \pi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Теперь мы нашли все точки. В короткой форме ответ можно записать так

$$\beta = \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

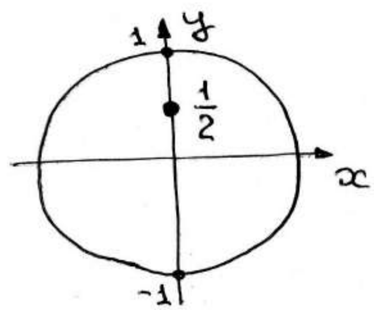
Как сделать так, чтобы ничего не терять при решении уравнений данного типа? Для этого нужно использовать тригонометрическую окружность (метод **"рисуй-смотри"**).

Решим такую задачу: найти все углы, при которых синус равен 0.5, то есть (*уравнение 2*)

$$\sin(\beta) = \frac{1}{2}, \quad \beta -?$$

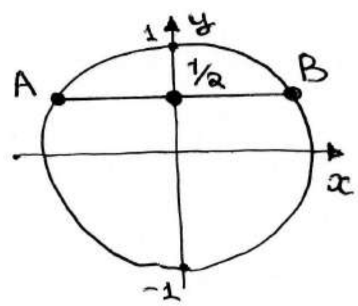
Для этого схематически отметим на единичной окружности значение синуса, равное 0.5 (вспомним, что синус откладывается по оси y):

рис. 2.11



Далее проведем горизонтальную линию параллельно оси x, которая проходит через только что отмеченную точку. Точки пересечения с единичной окружностью обзовем A и B.

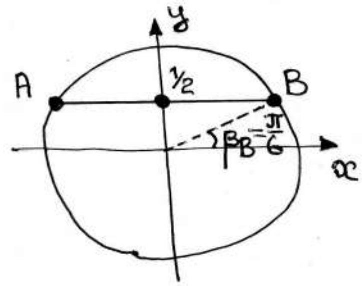
рис. 2.12



Что можно заключить из данного рисунка? Получается, что если какой-то угол β попал в точку A или B, то он является решением уравнения $\sin(\beta) = 0.5$, потому что координатой по оси y будет как-раз величина 0.5.

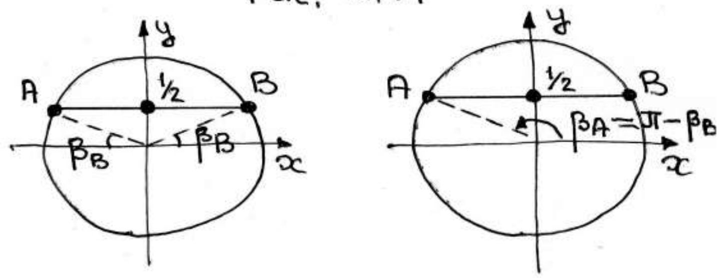
Хорошо, но как записать решение в виде формулы? Для этого выберем какие-нибудь два простых угла, один из которых попадает в точку A, а другой оказывается в точке B. Начнем с точки B: при каком остром угле синус обращается в 0.5? Вспоминаем таблицу из пункта **1.7**, правильно, при угле $\beta_B = \dfrac{\pi}{6}$.

рис. 2.13



Заметим, что точки A и B расположенs симметрично относительно оси y, поэтому для нахождения простого угла β_A, который плюхнется в A, нужно из π вычесть β_B: $\beta_A = \pi - \beta_B = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

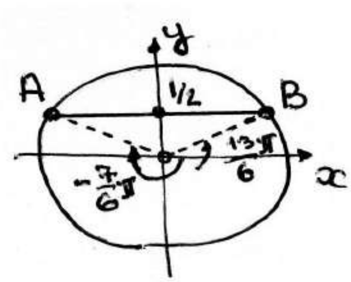
рис. 2.14



Хорошо, есть два угла $\beta_B = \dfrac{\pi}{6}$ и $\beta_A = \dfrac{5\pi}{6}$, которые являются решением уравнения $\sin(\beta) = 0.5$, назовем их базовыми.

Для нахождения всех остальных корней воспользуемся периодичностью синуса. Действительно, любой другой корень уравнения опять же попадет либо в A, либо B, то есть совершаем один или несколько полных оборотов 2π стартуя из базовых корней. Например, подходит $\beta_3 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6}$ или $\beta_4 = \dfrac{5\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{6}$.

рис. 2.15



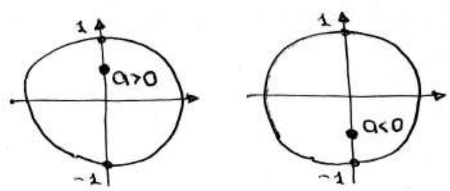
Кратко это можно записать так:

$$\beta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad \beta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

«Рисуй-смотри». Алгоритм решения $\sin(\beta) = a$.

1. Отметим значение синуса a на единичной окружности (будет лежать на оси y).

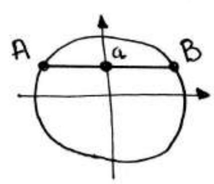
рис. 2.16



Если a > 1 или
a < -1, то решения нет!

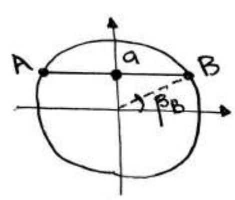
2. Провели горизонтальную линию через точку a параллельно оси x. Она пересекает единичную окружность в точках A и B. В этих точках будут находится все углы, удовлетворяющие уравнению.

рис. 2.17



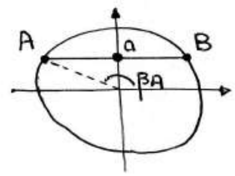
3. Найдем базовый острый угол β_B, который попадет в точку B.

рис. 2.18



4. Через угол β_B выразим угол из отрезка $[0, \pi]$, который попадает в точку A: $\beta_A = \pi - \beta_B$

РИС. 2.19



5. Все остальные решения выразим через базовые используя 2π-периодичность синуса.

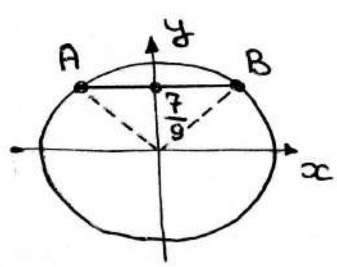
Ответ: $\beta = \beta_A + 2\pi k$ или $\beta = \beta_B + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ну, вроде, все: теперь знаем, как подойти к простейшему уравнению синусом? Пока что рано радоваться, рассмотрим такую задачу (*уравнение 3*):

$$\sin(\beta) = \frac{7}{9}$$

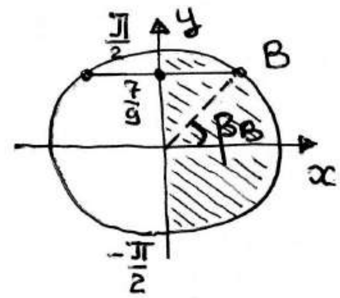
Хорошо, отметили на единичной окружности значение синуса, в точках A и B находятся все искомые углы.

РИС. 2,20



Но как найти базовые значения углов? В нашей тригонометрической таблице не указаны значения угла β, при котором синус обращается в $\frac{7}{9}$. Как исхитриться, чтобы все равно найти ответ? В этом нам поможет фукнция arcsin, которую мы рассмотрели в пункте **2.2**!

РИС. 2.21



Какой острый угол β_B при подстановке в синус дает $\dfrac{7}{9}$? На отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ синус - взаимнооднозначное соответствие, поэтому нужно взять обратную к синусу функцию и просто подставить туда $\dfrac{7}{9}$! А обратной к синусу функцией является арксинус, то есть

$$\beta_B = \arcsin\left(\frac{7}{9}\right)$$

Тогда базовый угол, попадающий в точку A, будет равен:

$$\beta_A = \pi - \beta_B = \pi - \arcsin\left(\frac{7}{9}\right)$$

Дальше используем периодичность синуса и получаем ответ:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + 2\pi k \text{ или } \beta = \pi - \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Не должно смущать присутствие в ответе арксинуса. В каких-то случаях (как в *уравнении 1* и *уравнении 2*) его можно посчитать точно по таблице, например $\arcsin(0) = 0$ или $\arcsin(0.5) = \dfrac{\pi}{6}$, а в данном примере оставляем так. Если задача из жизни и нужно какое-то число, а не формула, то можно посчитать приближенное значение (как и во многих случаях, когда речь идет о сложных реальных задачах).

Замечание 1.

Запись $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ часто заменяют эквивалентной: $k \in \mathbb{Z}$, где причудливой буквой $\mathbb{Z}$ обозначают множество целых чисел, то есть $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

Замечание 2.

Длинную запись $\left[\beta = \arcsin\left(\dfrac{7}{9}\right) + 2\pi k \text{ или } \beta = \pi - \arcsin\left(\dfrac{7}{9}\right) + 2\pi k\right]$ принято сокращать следующим образом: $\beta = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\dfrac{7}{9}\right) + \pi k$. Давайте убедимся, что это две одинаковые формулы, для этого поколдуем с первым выражением:

заметим, что $2k$ - это всегда четное число, а $2k+1$ - нечетное при любых k.

$$\beta = \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + \pi \cdot (2k)$$

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + 2\pi k = -\arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + \pi \cdot (2k+1)$$

То есть в первой строчке стоит выражение для четных чисел, в во второй для нечетных. Еще есть -1 во второй строке перед арксинусом, но в первой -1 тоже как-будто есть, только мы как-бы возводим ее в четную степень и получается просто один или пустое место. Итак, получаем

$$\beta = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решение уравнения $\sin(\beta) = a, a \in [-1, 1]$ задается формулой

$$\beta = (-1)^k \cdot \arcsin(a) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Формулу помнить не нужно, гораздо эффективнее решать с помощью единичной окружности.

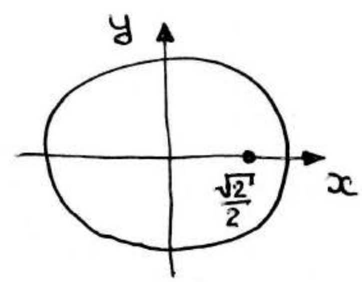
2.6 Другие простейшие тригонометрические уравнения

Решение уравнений с другими тригонометрическими функциями очень похоже на решение уравнений с синусом, поэтому не будем очень подробно рассматривать, лишь разберем по одному ключевому примеру на каждый раздел.

$$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

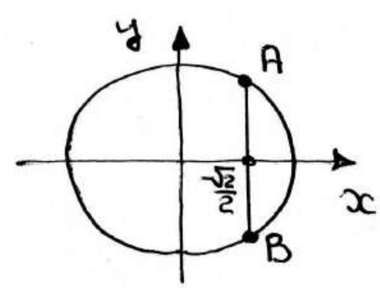
Отметим на единичной окружности величину косинуса (на оси x).

Рис. 2.22



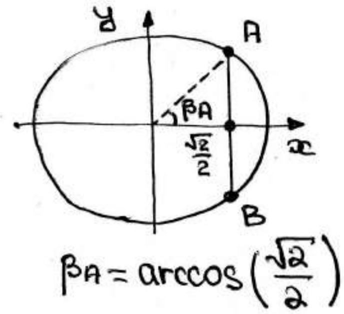
Проведем вертикальную линию, параллельную оси y. Отметим точки пересечения с единичной окружностью: A и B.

Рис. 2.23



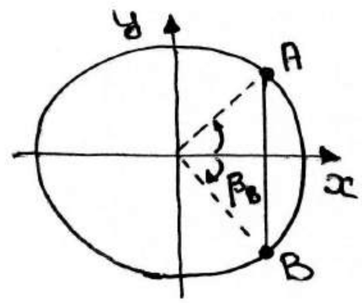
Найдем базовые углы, которые попадают в эти точки. Сначала найдем острый угол, который попадет в точку A: $\beta_A = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

РИС. 2.24



Затем выразим β_B через β_A: $\beta_B = -\beta_A$ (точки A и B симметричны относительно оси x).

РИС. 2.25



Все остальные углы найдем используя 2π-периодичность косинуса.

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ или } \beta = -\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Кратко обычно записывают так

$$\beta = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

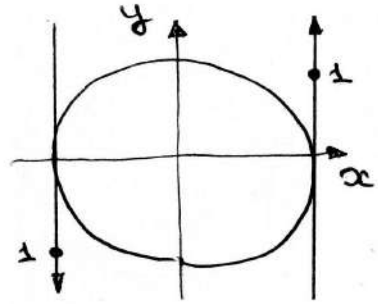
Еще вспомним, что $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, тогда окончательный ответ

$$\beta = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = 1$$

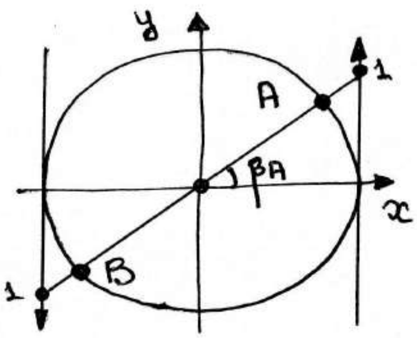
Отметим на единичной окружности значение тангенса (если забыли, почему так хитро изображается тангенс, повторите пункт **1.11** подпункт 3).

РИС. 2.26



Проведем линию сквозь начало координат, которая проходит через найденные точки. Обозначим точки пересечения с единичной окружностью A и B.

РИС. 2.27



Найдем базовые углы, которые приземляются в точки A и B. Сначала $\beta_A = \operatorname{arctg}(1)$, затем $\beta_B = \pi + \operatorname{arctg}(1)$. Действительно, точки отстоят друг от друга на полный оборот.

В конце как обычно используем периодичность тригонометрических функций, только у тангенса период π (то есть, на самом деле в этом случае рассматривать точку B несколько излишне, потому что из периодичности следует ее наличие). Получается следующий ответ

$$\beta = \operatorname{arctg}(1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Если учесть, что $\operatorname{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$, получаем окончательный ответ

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}(\beta) = a, \quad a \neq 0$$

Этот случай сводится к предыдущему, ведь

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\beta)}$$

Поэтому получается
$$\mathrm{ctg}(\beta) = a \Leftrightarrow \mathrm{tg}(\beta) = \frac{1}{a}$$

Решение любых тригонометрических уравнений в конечном счете сводится путем некоторых ухищрений и преобразований к решению указанных выше четырех уравнений.

Источники

[1] И. М. Гельфанд, С. М. Львовский, А. Л. Тоом. Тригонометрия

[2] И. К. Андронов, А. К. Окунев. Курс тригонометрии

[3] В. В. Ткачук. Математика абитуриенту

[4] http://mathus.ru/

[5] https://math.stackexchange.com/