Gdańsk, 2014
Małgorzata Targan
KSE, 131420

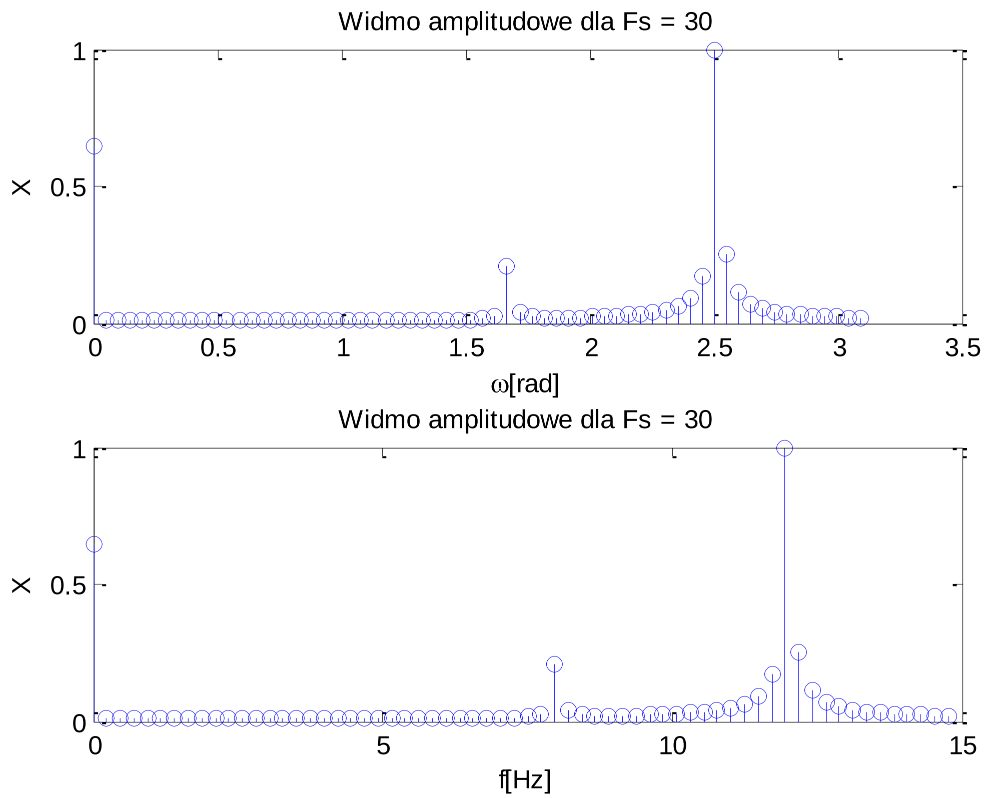
Laboratorium Metrologicznych Zastosowań Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów

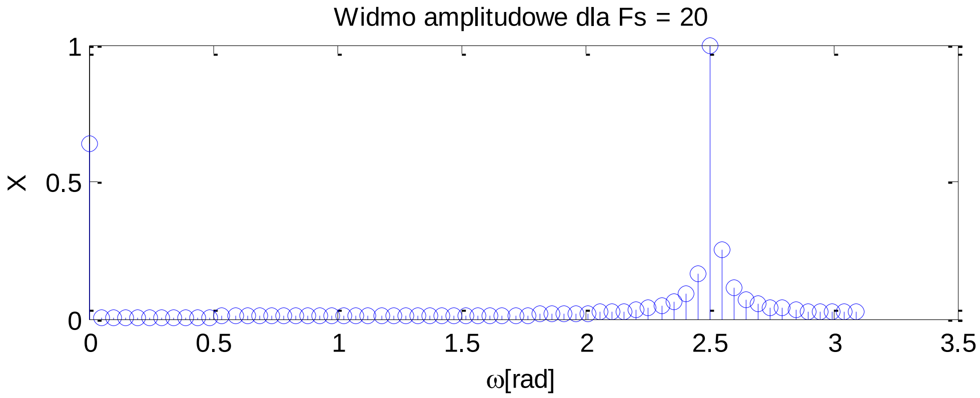
Laboratorium 2

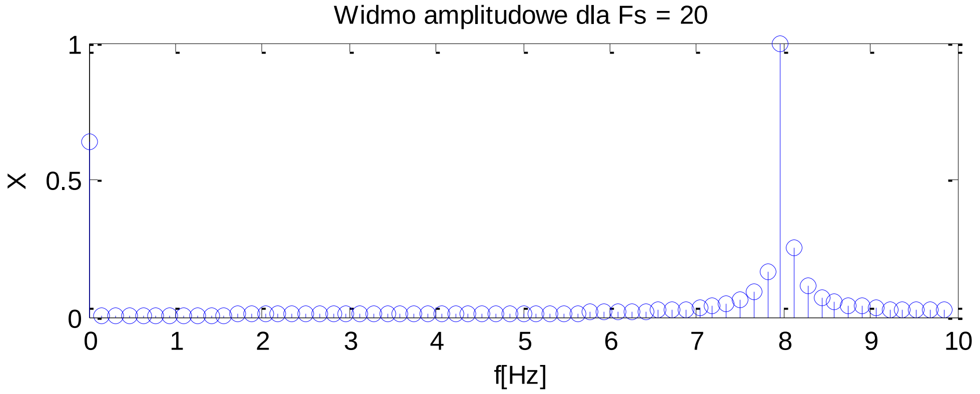
1. Sygnał ciągły $x_c(t) = 3 + 2\,sin(16\pi t) + 10cos(24\pi t)$ jest próbkowany z częstotliwością F_s w celu uzyskania sygnału dyskretnego w czasie x[n]. Dla każdej z podanych częstotliwości próbkowania:

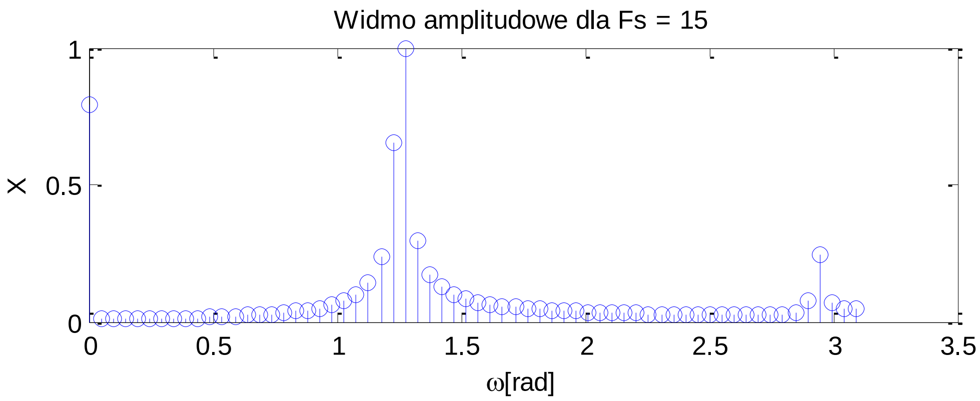
a. Wyznaczyć widmo $X(e^{j\omega})$ sygnału x[n]
b. Wykreślić amplitudę widma w funkcji ω w radianach oraz jako funkcję częstotliwości F w Hz
c. Wyjaśnić, czy sygnał $x_c(t)$ może być zrekonstruowany z przebiegu x[n] jeśli:
   (i) $F_S = 30\ Hz$
   (ii) $F_S = 20\ Hz$
   (iii) $F_S = 15\ Hz$

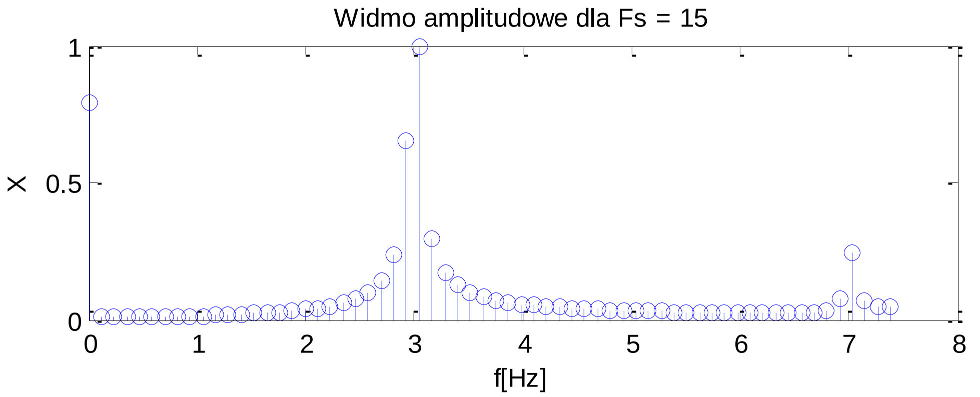
Widmo sygnału zostało wyznaczone za pomocą funkcji fft().
Częstotliwości poszczególnych składowych sygnału wynoszą 8 Hz i 12 Hz. Aby wiernie zrekonstruować sygnał z przebiegu x[n] częstotliwość próbkowania musi być przynajmniej 2 razy większa od najwyższej częstotliwości występującej w próbkowanym sygnale. Częstotliwość ta wynosi 12 Hz, co oznacza, że minimalna częstotliwość próbkowania, przy której sygnał zostanie poprawnie zrekonstruowany wynosi 24 Hz. Umieszczone poniżej charakterystyki widma amplitudowego pokazują, że tylko dla 30 Hz zauważalne są prążki obu składowych (sinusa i cosinusa).




Widmo amplitudowe dla Fs = 20
X
ω[rad]

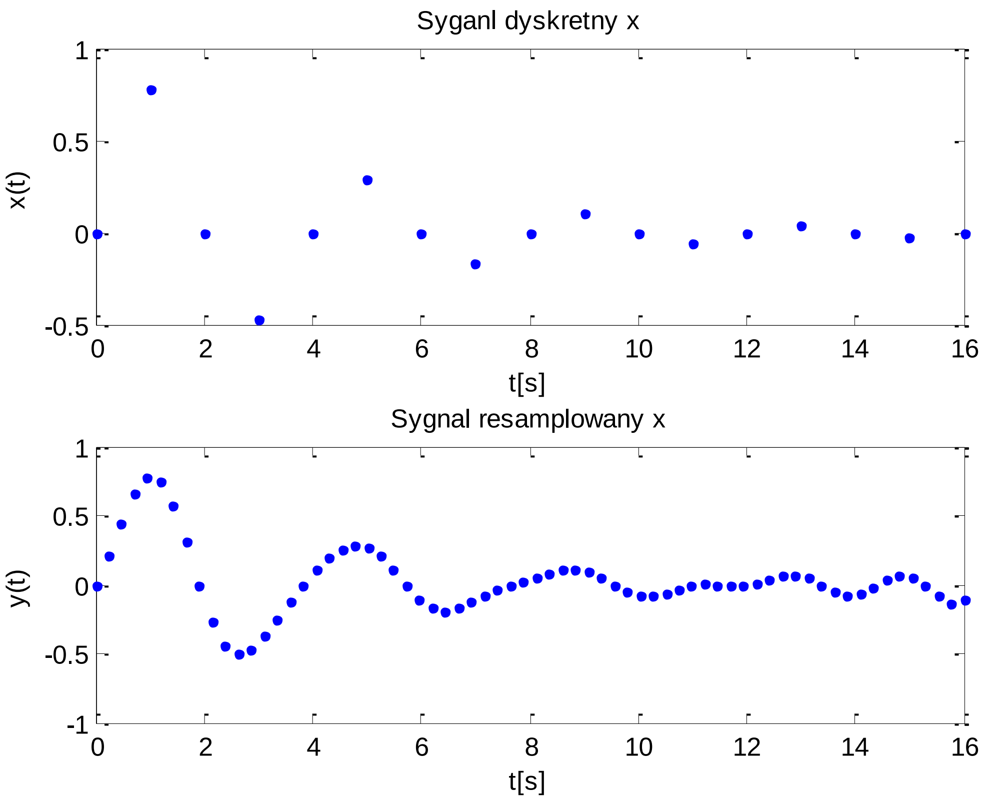

Widmo amplitudowe dla Fs = 20
X
f[Hz]


Widmo amplitudowe dla Fs = 15
X
ω[rad]


Widmo amplitudowe dla Fs = 15
X
f[Hz]

2. Sygnał mierzony $x(t) = e^{-\frac{t}{4}} \sin\frac{2\pi}{4}$ gdzie $t \geq 0$ jest próbkowany z częstotliwością 1Hz przez okres t = 16 s. W górnym z dwóch okien (subplots) sporządzić należy wykres dyskretny wektora sygnału x. W dolnym okienku natomiast należy stworzyć wykres dyskretny ponownie próbkowanej wersji sygnału x z trzema próbkami pomiędzy każdą parą próbek sygnału oryginalnego.

W tym punkcie zaimplementowano funkcję reconst(x, t), zwracającą sygnał zrekonstruowany na podstawie obliczonego widma sygnału. Parametr t jest wektorem punktów czasowych. Do funkcji podano sygnał wejściowy oraz wektor czasu czterokrotnie dłuższy od wektora czasu, z którym próbkowano sygnał x(t) – oznacza to, że w sygnale wyjściowym na 1 próbkę sygnału wejściowego będą przypadać 4 próbki sygnału wyjściowego. W funkcji realizowany jest zabieg wstawiania dodatkowych zer do widma sygnału, które powodują zwiększenie liczby próbek wyjściowego sygnału, a co za tym idzie, interpolację wartości sygnału pomiędzy pierwotnymi próbkami.

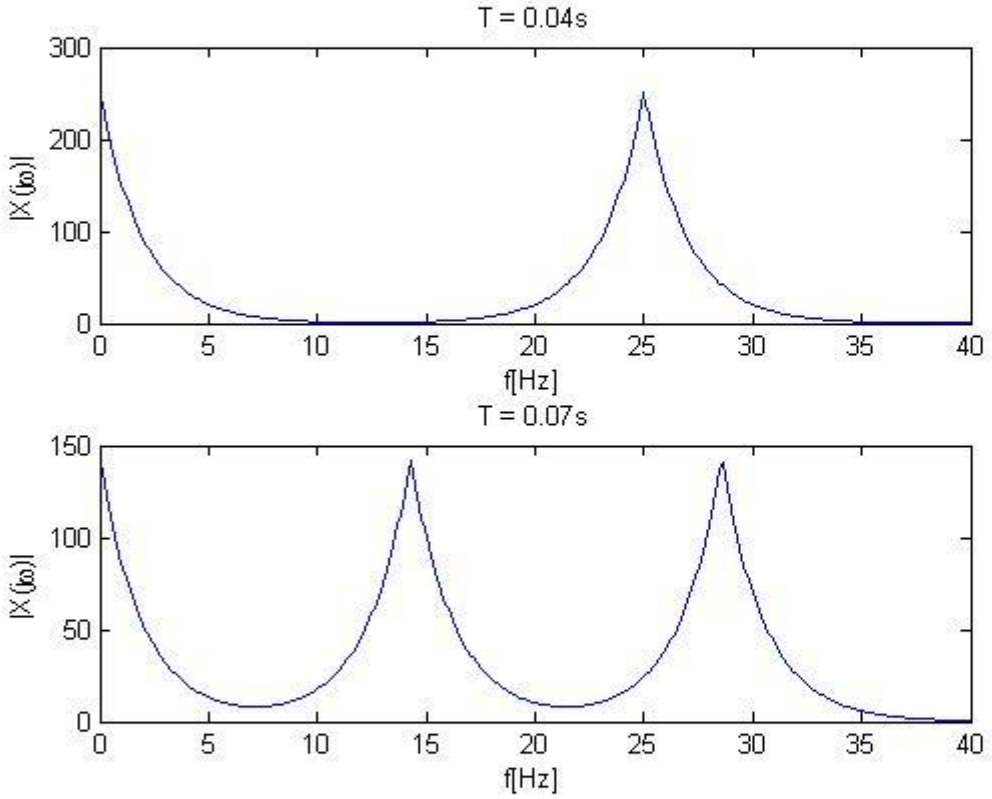


3. Widmo sygnału pomiarowego x(t) opisane jest zależnością $X(j\omega) = X(j2\pi f) = 10e^{-\frac{|f|}{2}}$, gdzie częstotliwość f określona jest w Hz (należy zauważyć, że widmo w tym przykładzie jest rzeczywiste). W każdym z dwóch okienek (subplots) sporządzić wykres połączonej linią ciągłą transformaty DFT sygnału x(t), tj. transformaty $\bar{X}(j\omega)$ sygnału $\bar{x}(j\omega)$, w zakresie częstotliwości [0, 40] Hz. Zastosuj przedziały próbkowania T = 0.04 s oraz 0.07 dla wykresów w okienku górnym i dolnym, odpowiednio.

W celu obliczenia transformaty $\bar{X}(j\omega)$ potrzebne było wyznaczenie sumy wartości funkcji $X(j\omega)$ dla odpowiednich $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$. Wykorzystując fakt, że $\omega = 2\pi f$ oraz, że $X(j\omega)$ jest funkcją częstotliwości odpowiednio przekształcono poniższą zależność:

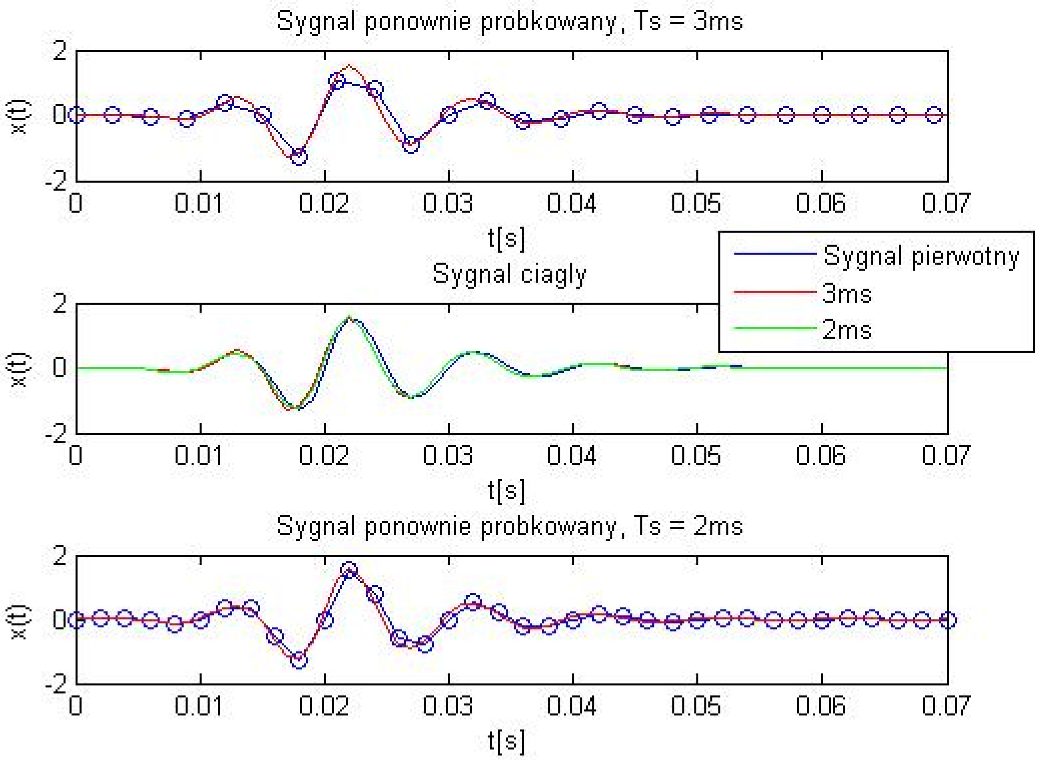
$$\bar{X}(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{0}^{N-1} X\left(j\left(\omega - 2\pi\frac{m}{T}\right)\right) = \frac{1}{T}\sum_{0}^{N-1} X\left(j\left(2\pi(f - \frac{m}{T})\right)\right) = \frac{1}{T}\sum_{0}^{N-1} 10e^{-\frac{\left|f-\frac{m}{T}\right|}{2}}$$

Przedział częstotliwości, dla którego miało zostać wyznaczone widmo do [0, 40] Hz. Potrzebne były przynajmniej 3 rekordy (N = 3), aby dla obu przedziałów próbkowania transformata $\bar{X}(j\omega)$ została poprawnie wyznaczona – dla mniejszej liczby rekordów „piki" widmowe były przeniesione na inne częstotliwości.



4. Ćwiczenie to dotyczy rekonstrukcji sygnału przy zastosowaniu metody ponownego próbkowania. W środkowym z trzech okien (*subplots*) wykreślić należy wektor próbek sygnału ciągłego, który dla opisany jest następującą zależnością: 0 ⍰ t $x(t) = 100t\, e^{-150|t-0{,}02|} \sin 200\pi t$. W górnym oknie utworzyć wektor próbek w tym samym przedziale czasu równym 70 ms oraz przy odstępie między próbkami *T* = 3.0 ms i wykreślić zrekonstruowany sygnał ciągły *x*(*t*) po zastosowaniu metody ponownego próbkowania. Wreszcie w dolnym oknie wykreślić ten sam sygnał przy *T* = 2.0 ms.

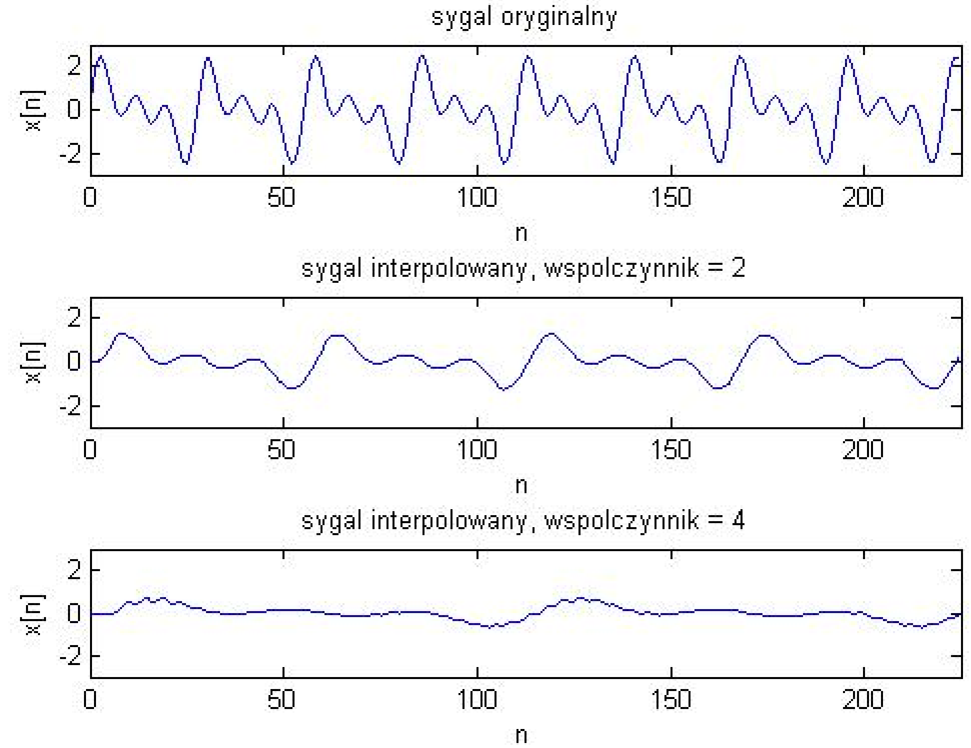
   Dodatkowo do środkowego wykresu dodano zrekonstruowane sygnały dla odstępu próbkowania 3 ms oraz 2 ms. Sygnały zostały zrekonstruowane z użyciem zaimplementowanej wcześniej funkcji, poprzez wstawianie dodatkowych zer w obliczonym widmie sygnału spróbkowanego. Zrekonstruowany sygnał z odstępem próbkowania 2 ms jest bliższy przebiegowi pierwotnemu niż ten z odstępem 3ms. Im mniej mamy próbek sygnału pierwotnego tym trudniej wiernie go odtworzyć.

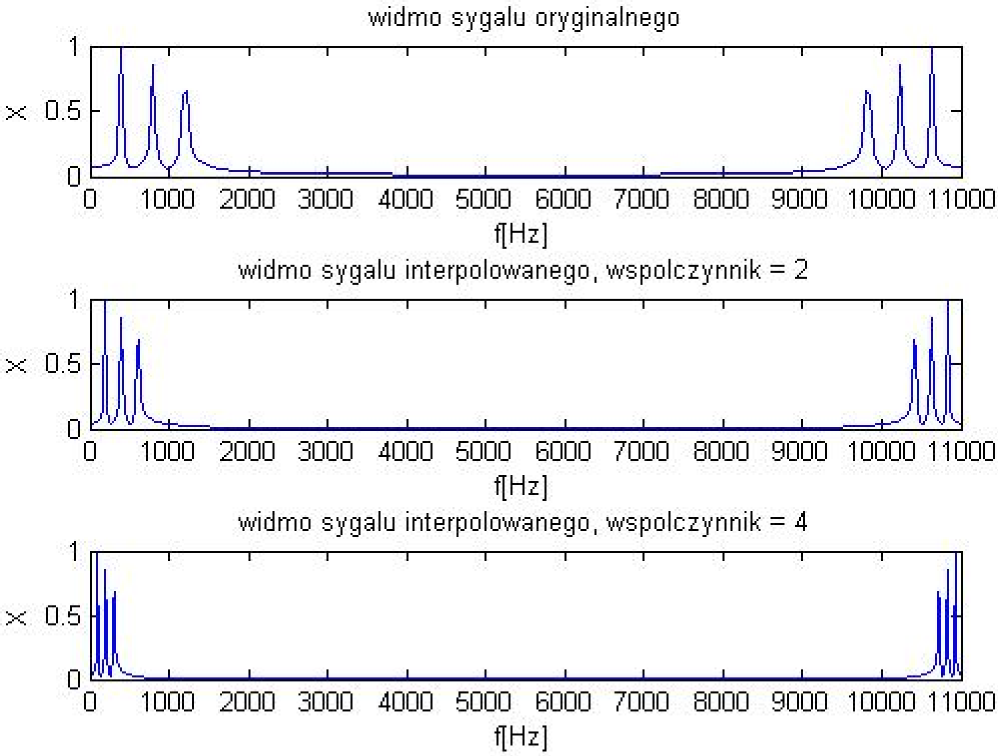


5. Wykreślić pierwszych 225 próbek sygnału zmierzonego (około ośmiu kolejnych okresów sygnału złożonego), którego najmniejsza częstotliwość wynosi 400 Hz, a następnie pierwszych 225 próbek sygnału interpolowanego (około 4 okresów sygnału złożonego o zredukowanych częstotliwościach – teraz najmniejsza częstotliwość wynosi 200 Hz). Wykreślić widmo obu sygnałów.

Interpolacja sygnałów polegała na wstawieniu pomiędzy oryginalne próbki sygnału dodatkowe próbki o zerowej wartości. W zależności od współczynnika, co druga lub co czwarta próbka była dodatkową próbką zerową. Następnie sygnał ten został poddany filtracji dolnoprzepustowej z częstotliwością odcięcia równą odwrotności współczynnika interpolacji. W zadaniu zastosowano dolnoprzepustowy filtr Czebyszewa.

Jak widać, dodanie próbek zerowych w rekordzie spowodowało zmniejszenie częstotliwości składowych sygnału. Zmalały one tylokrotnie ile wynosił współczynnik interpolacji – 2 i 4.


sygal oryginalny
sygal interpolowany, wspolczynnik = 2
sygal interpolowany, wspolczynnik = 4
x[n]
n


widmo sygalu oryginalnego
widmo sygalu interpolowanego, wspolczynnik = 2
widmo sygalu interpolowanego, wspolczynnik = 4
X
f[Hz]