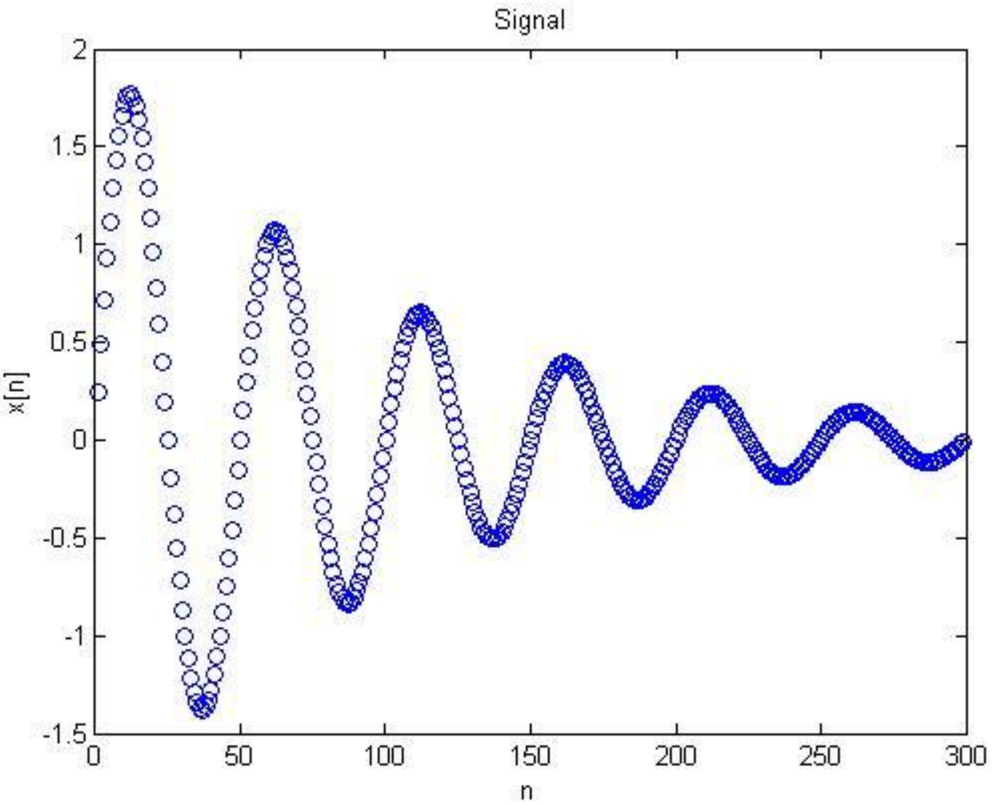
Gdańsk, 2014
Małgorzata Targan
KSE, 131420

Laboratorium Metrologicznych Zastosowań Cyfrowego Przetwarzania Sygnałów

Laboratorium 1

1. Napisać w środowisku MATLAB program -analogicznie jak w przykładzie (*)(1) - i na podstawie obliczeń sporządzić rysunek, podobnie jak rys. 1(1), ilustrujący sygnał opisany zależnością:

$$x_n = 2\sin\frac{2\pi n}{50}\mathrm{e}^{-\frac{n}{100}} \qquad n = 0,1,\dots,300$$



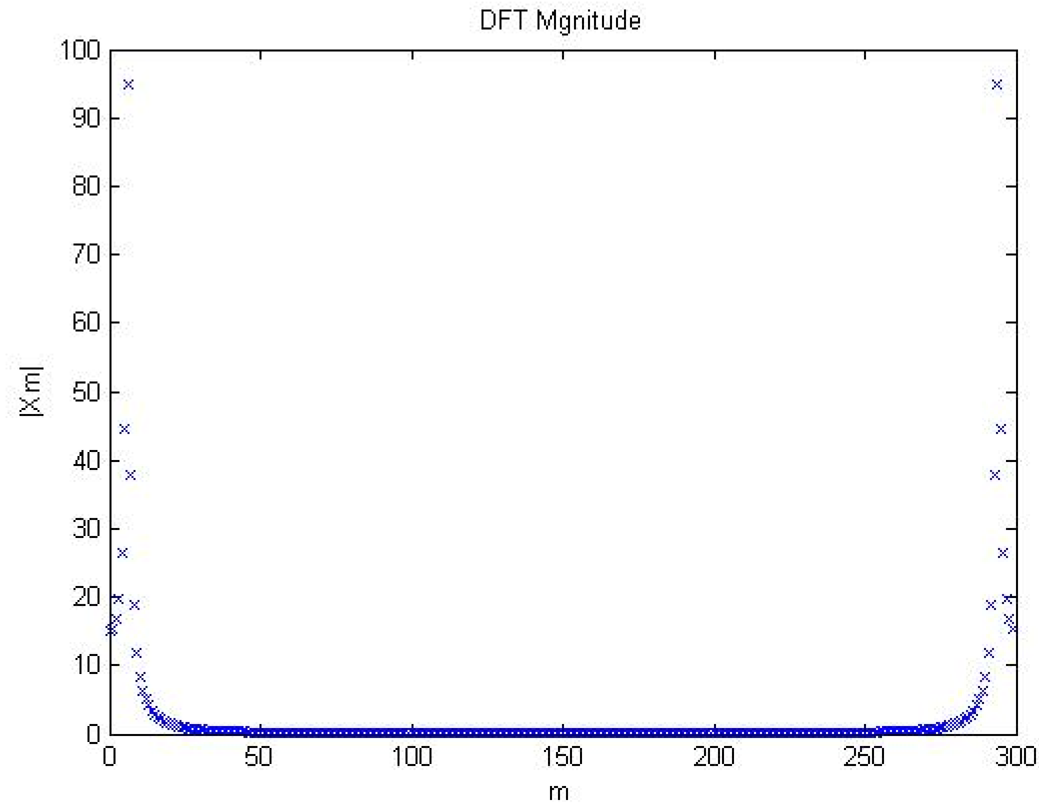
Widmo sygnału obliczono ze wzoru:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n\, e^{\frac{-j2\pi nk}{N}}$$

Dla sygnału rzeczywistego prawa i lewa połowa widma jest zwierciadlanym odbiciem. Wynika to z zależności:

$$|X_{N-m}| = |X'_m| = |X_m|$$

Widmo amplitudowe obliczane jest jako moduł wyniku DFT.



2. W środowisku MATLAB Należy utworzyć -plik generacji 10 okresów fali prostokątnej i piłokształtnej.

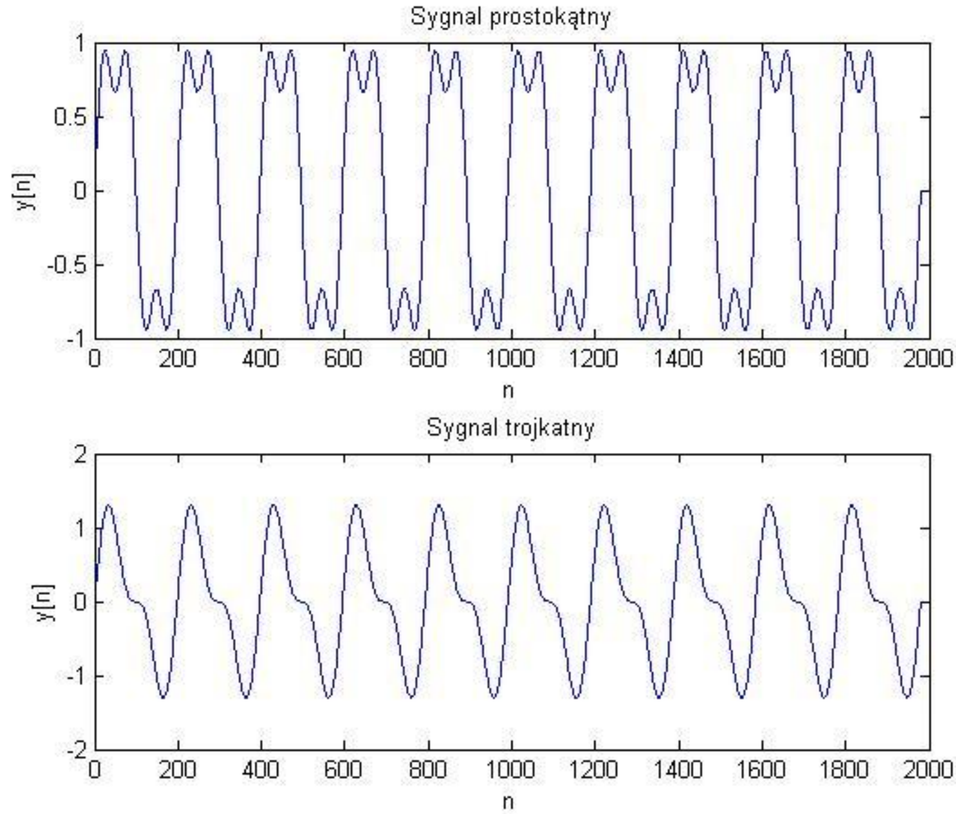
Sygnały okresowe otrzymywane są poprzez sumowanie odpowiednich sinusoid – harmonicznych częstotliwości podstawowej. Przebieg prostokątny jest sumą przebiegów sinusoidalnych będących jedynie nieparzystymi harmonicznymi składowej podstawowej i posiadających amplitudy o wartościach malejących odwrotnie do numeru harmonicznej. Równanie syntezy *p* okresów fali prostokątnej - sumowania dyskretnych nieparzystych składowych sinusoidalnych aż do *M*-tej harmonicznej w rekordzie o długości *N* próbek, ma postać:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\frac{M+1}{2}} (1/(2k-1)\sin\,(2\pi p(2k-1)(n/N)))$$

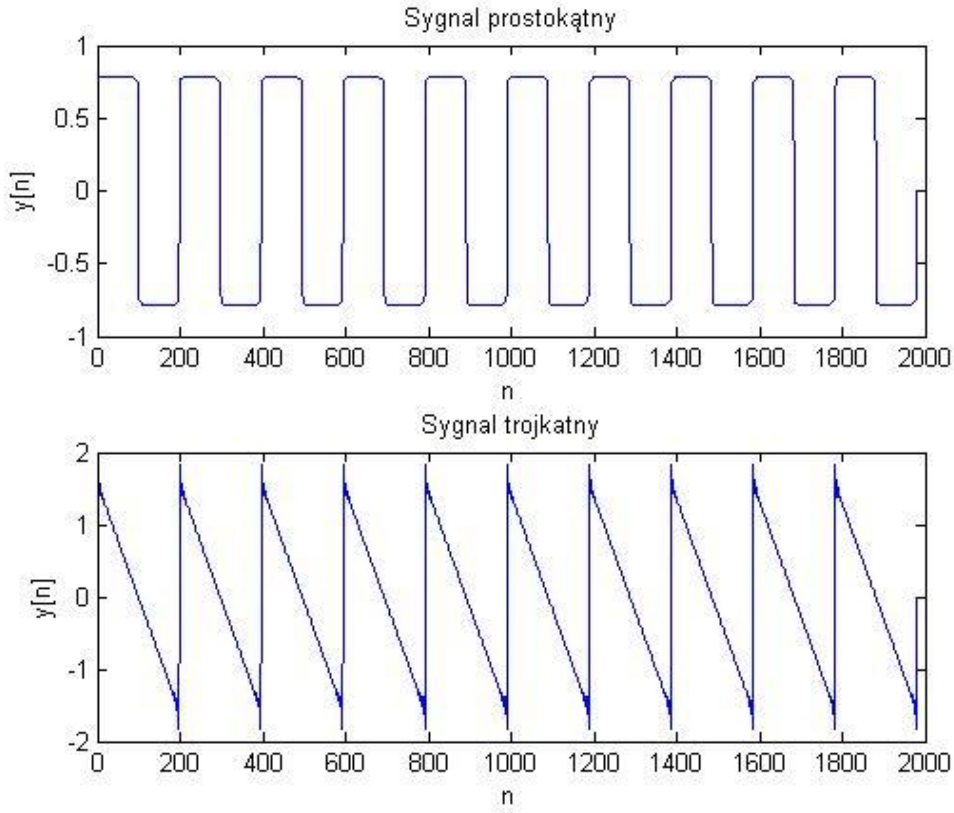
Przebieg piłokształtny jest sumą przebiegów sinusoidalnych będących kolejnymi harmonicznymi składowej podstawowej i posiadających amplitudy o wartościach malejących odwrotnie do numeru harmonicznej.
Równanie syntezy *p* okresów fali prostokątnej - sumowania dyskretnych składowych sinusoidalnych aż do *M*-tej harmonicznej w rekordzie o długości *N* próbek, ma postać:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{k}\right) \sin\,(2\pi pk \left(\frac{n}{N}\right)$$

Poniżej zamieszczono sygnał prostokątny oraz piłokształtny wygenerowany poprzez sumowanie dwóch kolejnych składowych.



Dla porównania zamieszczono również wygenerowane przebiegi dla 99 składowych sinusoidalnych.



Minimalna konieczna długość rekordu równa jest podwojonemu iloczynowi liczby okresó3. fali prostokątnej w rekordzie oraz wskaźnika najwyższej harmonicznej, co daje:

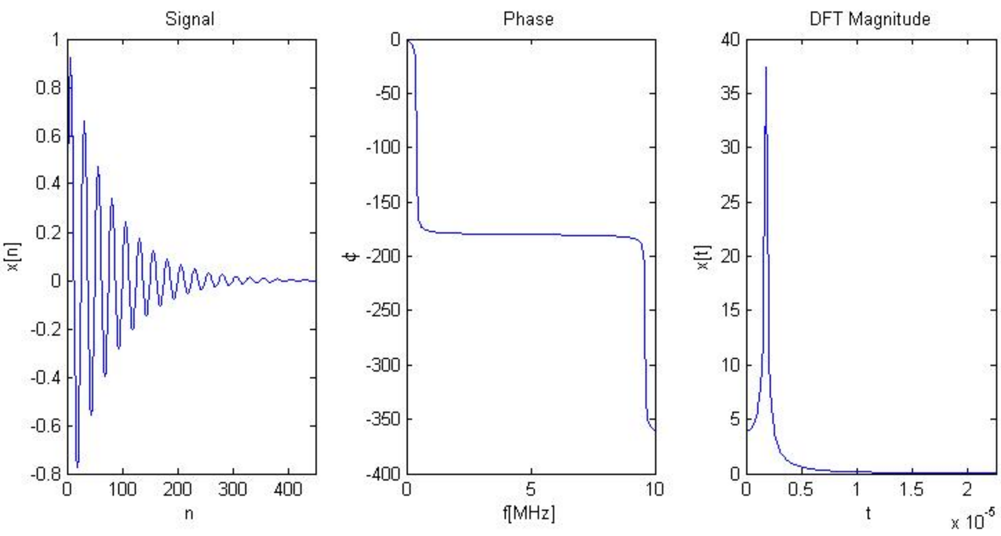
$$N = 2 * 10 * 99 = 1980$$

3. Za pomocą polecenia *subplot* sporządzić dwa wykresy obok siebie. Po lewej stronie wykreślić wektor sygnału x_n przy odstępnie pomiędzy próbkami wynoszącym . Po prawej stronie należy utworzyć połączony wykres dyskretny rozwiniętego widma fazowego (w stopniach) w funkcji częstotliwości w *MHz* s ⍰1.0

Sygnał $x_n$został podany wzorem:

$$x_n = sin\left(\frac{2\pi n}{25}\right)e^{-\frac{n}{75}}, \quad n = 0, 1, \dots, 450$$

Poniżej wykreślono sygnał x_n, jego fazę w stopniach w funkcji częstotliwości oraz dodatkowo widmo amplitudowe.



Wychodząc od wzoru na transformatę DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, e^{\frac{-j2\pi nk}{N}}$$

Oraz zakładając, że x_n jest wektorem liczb rzeczywistych, można stwierdzić, że dla $\omega T = \pi$ i $\omega T = 0$ wartość transformaty DFT będzie liczbą rzeczywistą (ergo faza będzie wynosiła 0 lub $\pm 180°$). Wynika to z zależności Eulera:

$$e^{jx} = \cos(x) + jsin(x)$$

Dla argumentu $x = \pi$oraz $x = 0$ $e^{jx} = 1$ lub $e^{jx} = -1$ więc wartość transformaty będzie wartością rzeczywistą.

4. Wyznaczyć parabole (dla *M* = 3), dopasowane metodą najmniejszych kwadratów do każdego zbioru próbek pomiarowych (a) - (d) podanych poniżej, przy czym założyć, że odstęp czasowy pomiędzy próbkami, *T,* wynosi 1, tak, że próbki w zbiorze *f* zostały pobrane dla *t* = 0, 1, ... , *N* - 1, gdzie *N* jest długością wektora *f.*

a. f1 = [1,3,2]
b. f2 = [1,3,4,2]
c. f3 = [1.1 2.5 3.2 3.8 3.7 3.1 2.0]
d. f4 = [8 6 4 2.5 10 -0.5 -0.5 -0.5 0 1.5 2.5 4 5 7 8]

Podane punkty w każdym zbiorze zostały zaproksymowane funkcją, będącą sumą wielomianów w postaci:

$$\hat{f}(a,t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

Zakładając, że dla każdej chwili czasu t sygnał jest przybliżany sumą M funkcji (m = 1, 2..M) oraz że sygnał jest próbkowany w chwilach nT gdzie n = 0, 1…N-1 funkcję tę możemy przedstawić:

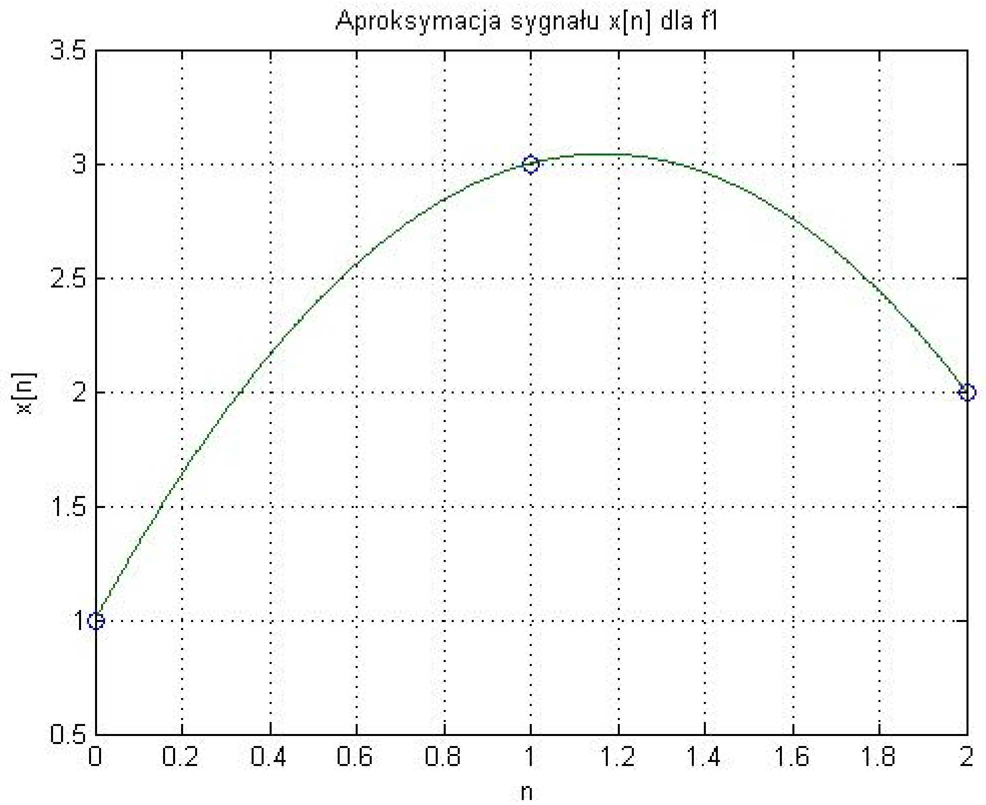
$$\hat{f}(a,nT) = a_1 g_{1n} + a_2 g_{2n} + .. + a_M g_{Mn}$$

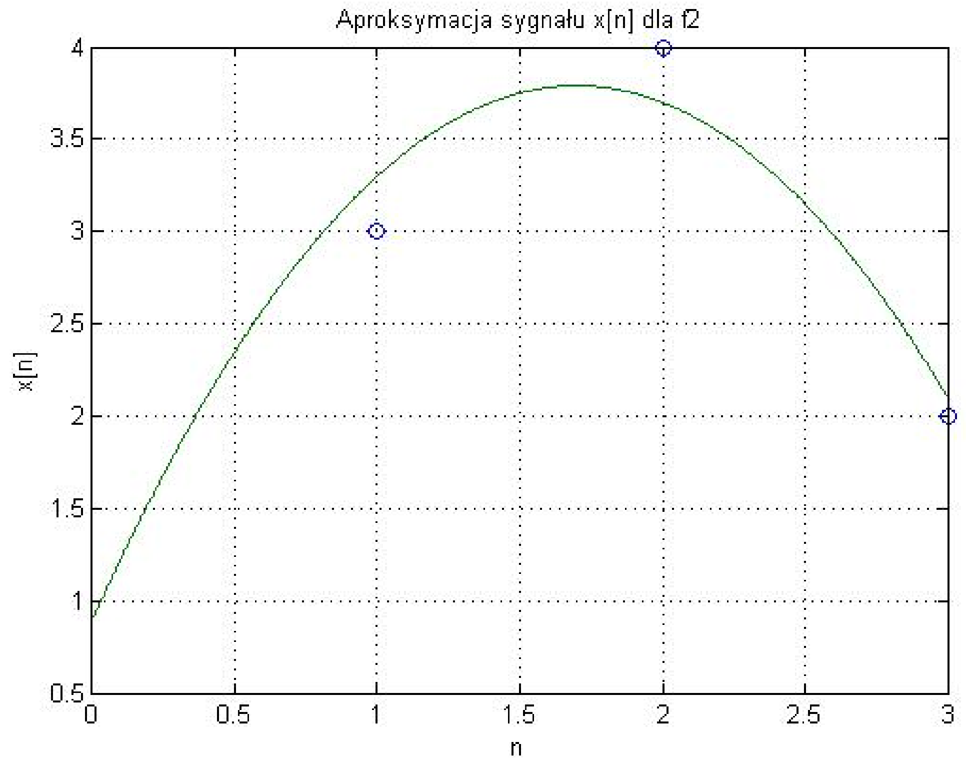
Elementy g_{mn}tworzą odpowiednio macierz G.
Poszukiwane współczynniki a_1, a_2, a_3, a_4 tworzą wektor a, który obliczany jest na podstawie macierzy G w sposób następujący:

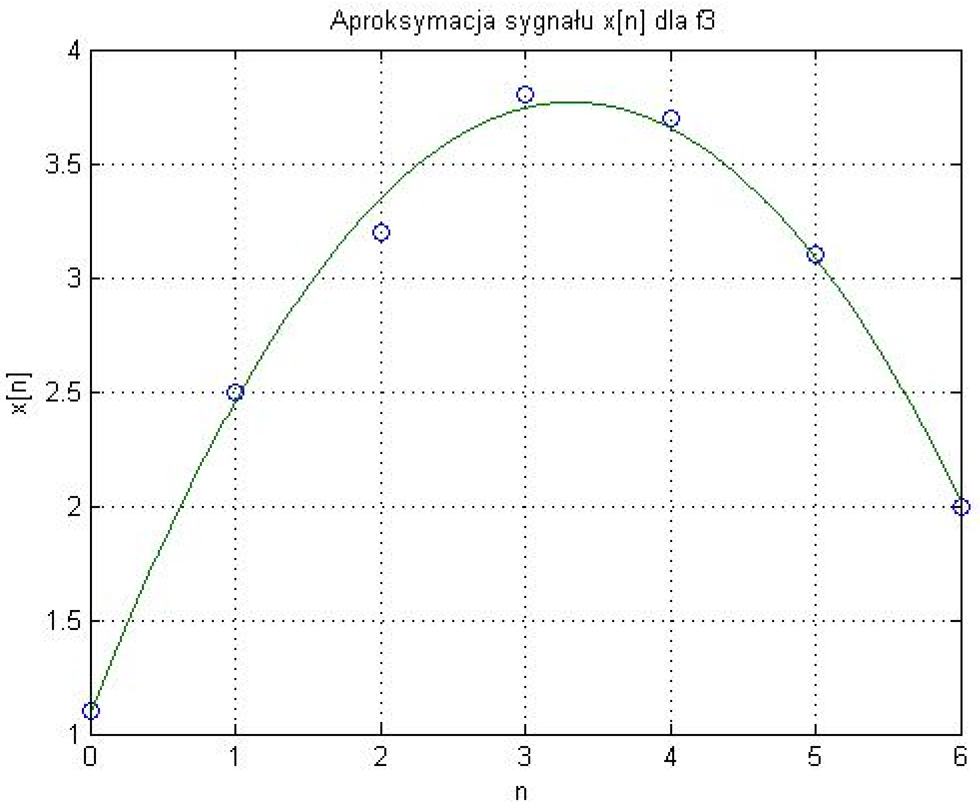
$$a = (G^T G)^{-1}(fG)^T$$

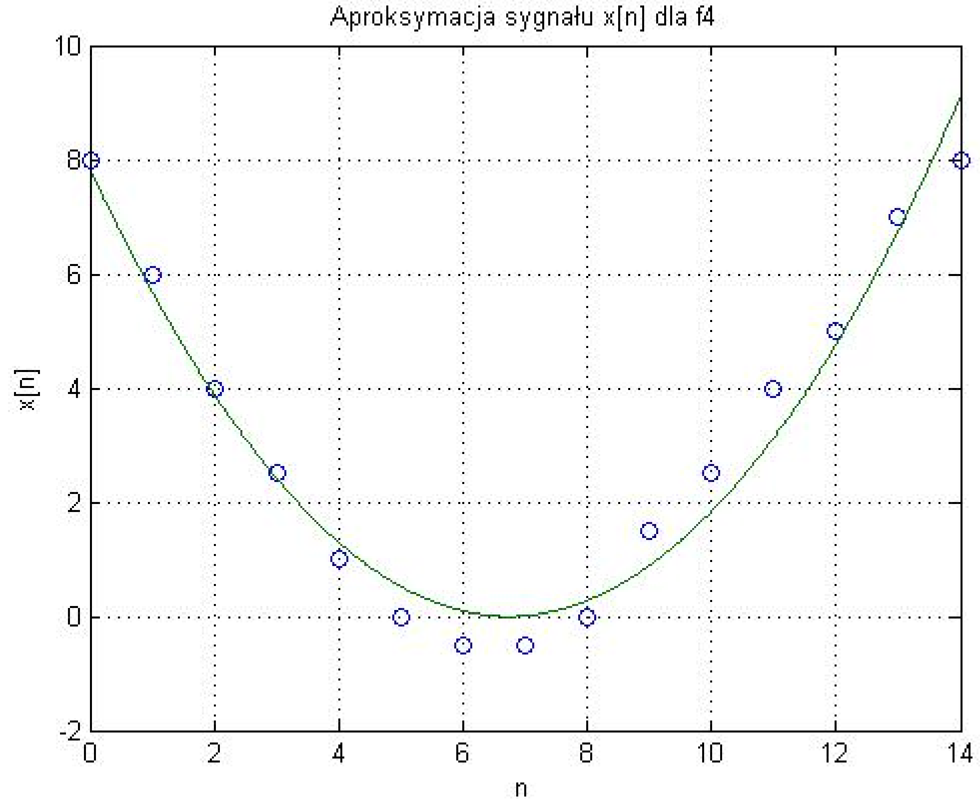
Poniżej zaprezentowano wartości wektora a dla wszystkich podpunktów oraz graficzny wynik aproksymacji. Na podstawie tego można stwierdzić, że metoda najmniejszych kwadratów okazała się najbardziej skuteczna dla 3 punktów pomiarowych. Wraz ze wzrostem punktów parabola aproksymująca przechodziła przez coraz mniej podanych próbek. Nie jest to spowodowane jedynie liczbą próbek ale również ich układem – im bliżej punktów rzeczywistych tworzących konkretną parabole tym aproksymacja dokładniejsza.

a. a = [1.0, 3.5, -1.5]
b. a = [0.9, 3.4, -1.0]
c. a = [1.0857, 1.6143, 0.2429]
d. a = [7.8485, -2.3293, 0.1728]


Aproksymacja sygnału x[n] dla f1
x[n]
n
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Aproksymacja sygnału x[n] dla f2
x[n]
n
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


Aproksymacja sygnału x[n] dla f3
x[n]
n
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
1
2
3
4
5
6


Aproksymacja sygnału x[n] dla f4
x[n]
n
10
8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
12
14