

## Capítulo 10 - Somatórios

Os somatórios, que se encontram naturalmente associados às relações de recorrência, são bastante importantes para a resolução de problemas de matemática do discreto (análise de eficiência de algoritmos, etc.). Justifica-se, assim, que nos debrucemos um pouco sobre os somatórios, *recordando* alguns factos elementares sobre estes e algumas das suas propriedades essenciais, bem como alguns dos somatórios mais importantes. Tal é objecto deste capítulo.

### Secção 1: Somatórios e relações de recorrência.

Como observámos no capítulo anterior (e vimos exemplos), a aplicação do método iterativo na resolução de relações de recorrência conduz-nos em geral a somatórios.

Por outro lado, associado a um somatório, como

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

temos sempre uma relação de recorrência:

$$S_1 = a_1$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n, \text{ para } n > 1$$

pelo que também podemos usar técnicas de resolução de relações de recorrência para calcular somatórios<sup>1</sup>.

Os somatórios aparecem assim naturalmente associados às relações de recorrência. Deste modo, surge também natural que, na sequência do capítulo anterior, efectuemos uma breve *revisão* dos somatórios (que constituem um instrumento indispensável na resolução de alguns problemas de matemática do discreto).

Começaremos por recordar, na próxima secção, alguns factos elementares sobre os somatórios e algumas das suas propriedades essenciais.

### Secção 2: Somatórios: notação e propriedades genéricas essenciais.

#### Notação do somatório

Suponha-se que  $a$  é uma sucessão de números<sup>2</sup>. Então, podemos recorrer à letra maiúscula grega "sigma" (símbolo do somatório)<sup>3</sup> para designar, de forma condensada, a soma de um número especificado de termos consecutivos da sucessão.

Por exemplo, a soma dos primeiros  $n$  termos de uma sucessão,  $a$  é representada como se segue:

---

<sup>1</sup> No entanto, o método, referido na secção 4 do último capítulo, para a resolução de relações de recorrência lineares, de coeficientes constantes, não homogéneas, não servirá em princípio, pois esta relação de recorrência é da forma  $S_n = c_1 S_{n-1} + a_n$ , com  $c_1 \neq 1$  (veja-se a nota de rodapé 29 do último capítulo).

<sup>2</sup> Mais geralmente, na notação do somatório a seguir pode considerar-se que  $a$  é uma sucessão de elementos de um conjunto  $E$  qualquer, sobre o qual esteja definida uma operação de adição, com as propriedades usuais. Mas, nos casos que iremos considerar,  $a$  é sempre uma sucessão de números, inteiros ou reais.

<sup>3</sup> Esta notação do somatório foi introduzida em 1820 por Joseph Fourier.

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n \quad (\text{para } ^4 n \geq 1)$$

notação que representa "a soma dos termos  $a_i$ , com  $i$  a percorrer, de um em um, todos os valores entre o índice inferior (ou limite inferior) 1 e o índice superior (ou limite superior)  $n$ ". A variável  $i$  que aparece no índice inferior do somatório está "muda", podendo ser substituída por qualquer outra variável<sup>5</sup>.

Saliente-se que o índice inferior do somatório não tem de ser 1. Aliás, se  $a$  for uma família indexada pelo conjunto dos inteiros<sup>6</sup>, podemos mesmo considerar que os índices (inferior e superior) do somatório podem ser quaisquer inteiros, e não apenas inteiros positivos, tendo-se:

$$\sum_{i=k}^n a_i = a_k + a_{k+1} + \dots + a_n , \quad \text{para } k \leq n \quad (\text{e } k \text{ e } n \text{ inteiros})$$

assumindo-se, naturalmente, que  $n = k$ , então:

$$\sum_{i=n}^n a_i = a_n$$

A notação do somatório pode “generalizar-se” permitindo que o índice do termo “somando” não tenha de ser a variável do somatório, mas possa ser uma função desta. Mais precisamente, sendo  $\varphi$  uma aplicação do conjunto dos índices de  $a$  em si próprio, então:

$$\sum_{i=k}^n a_{\varphi(i)} = a_{\varphi(k)} + a_{\varphi(k+1)} + \dots + a_{\varphi(n)} , \quad \text{para } k \leq n$$

somatório que pode ser descrito na forma atrás, como sendo igual a

$$\sum_{i=k}^n b_i$$

com  $b$  a família definida, sobre o mesmo conjunto de índices que a família  $a$ , como se segue:  $b_i = a_{\varphi(i)}$ .

Por exemplo, sendo  $\varphi$  é a aplicação que aplica cada inteiro no seu dobro, tem-se:

$$\sum_{i=1}^4 a_{2i} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

e, se  $\varphi$  for a aplicação constantemente igual a 1, tem-se:

$$\sum_{i=1}^4 a_{\varphi(i)} = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 = 4a_1$$

Como a ordem por que descrevemos as parcelas numa soma é irrelevante, podemos ainda considerar outras generalizações, não problemáticas, da notação do somatório. Nomeadamente, podemos (omitir o índice superior e) descrever no índice inferior a propriedade que caracteriza os valores que se considera que a

<sup>4</sup> Assume-se em geral que  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ , se  $n=0$ .

<sup>5</sup> Que não ocorra na expressão que  $a_i$  denota.

<sup>6</sup> Ou uma família indexada apenas pelo conjunto dos inteiros maiores ou iguais que um certo inteiro  $q$  (i.e. uma sucessão<sub>q</sub>). com  $q$  menor ou igual que o índice inferior do somatório.

"variável do somatório" deverá percorrer (*assumindo-se sempre que a "variável do somatório" é uma variável inteira*).

Assim, por exemplo, o somatório

$$\sum_{i=k}^n a_i , \text{ com } k \leq n$$

pode ser representado na forma

$$\sum_{k \leq i \leq n} a_i$$

Mais geralmente:

$$\sum_{P(i)} a_i \text{ (ou, se se quiser salientar qual a variável do somatório<sup>7</sup>: } \sum_{i:P(i)} a_i)$$

designará a soma dos termos da sucessão  $a$  cujos índices satisfazem a propriedade  $P$ , assumindo-se que estes são em número finito<sup>8</sup>. Caso nenhum inteiro  $i$  satisfaça a propriedade  $P$ , assume-se que a soma anterior é zero (o elemento neutro para a adição).

Mais alguns exemplos:

$$\sum_{\substack{i \text{ é par} \\ 0 \leq i \leq 10}} a_i = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$$

$$\sum_{i \in \{1,3,5\}} a_i = a_1 + a_3 + a_5$$

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$$

Por outro lado, como podemos representar qualquer propriedade  $P$  por um conjunto (o conjunto  $\{x:P(x)\}$  dos elementos que satisfazem essa propriedade), e vice-versa (qualquer conjunto pode ser descrito pela propriedade de lhe pertencer), podemos dizer que os somatórios com que iremos trabalhar podem ser representados na forma genérica

$$\sum_{i \in K} a_i$$

com  $K$  um qualquer conjunto *finito* de inteiros. De qualquer forma, no que se segue iremos em geral concentrar-nos em somatórios da forma

$$\sum_{i=k}^n a_i , \text{ com } k, n \in \mathbb{Z} \text{ e } k \leq n$$

### Propriedades gerais dos somatórios

No que se segue (ao longo desta secção)  $K$  designa um qualquer conjunto *finito* de inteiros e, salvo menção em contrário,  $n$  e  $k$  designam inteiros tais que  $k \leq n$ .

<sup>7</sup> O que em geral não é necessário, embora possa haver casos em que tal se justifique, nomeadamente se, quer na condição  $P(i)$ , quer na expressão do termo geral  $a_i$ , ocorrerem outras variáveis (funcionando como parâmetros).

<sup>8</sup> Caso contrário já não estaremos em presença propriamente de um somatório, mas sim de uma soma infinita, dita uma *série*, cuja abordagem sai fora desta breve revisão

### Lei distributiva:

Tem-se  $ca+cb = c(a+b)$ . Generalizando obtém-se (com  $c$  uma qualquer expressão que não dependa de  $i$ ):

$$\sum_{i=k}^n ca_i = c \sum_{i=k}^n a_i$$

$$\text{e } \sum_{i \in K} ca_i = c \sum_{i \in K} a_i$$

▽

### Leis associativas<sup>9</sup>:

1) Sendo  $K_1$  e  $K_2$  dois conjuntos finitos de inteiros, tem-se:

$$\sum_{i \in K_1} a_i + \sum_{i \in K_2} a_i = \sum_{i \in K_1 \cap K_2} a_i + \sum_{i \in K_1 \cup K_2} a_i$$

Casos particulares

$$\sum_{i \in K_1 \cup K_2} a_i = \sum_{i \in K_1} a_i + \sum_{i \in K_2} a_i, \text{ se } K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k}^j a_i + \sum_{i=j+1}^n b_i \quad (\text{com } k \leq j < n)$$

$$2) \quad \sum_{i=k}^n (a_i + b_i) = a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n = a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + b_n = \sum_{i=k}^n a_i + \sum_{i=k}^n b_i$$

Mais geralmente:

$$\sum_{i \in K} (a_i + b_i) = \sum_{i \in K} a_i + \sum_{i \in K} b_i$$

▽

### Lei comutativa:

Sendo  $\varphi$  uma qualquer *permutação* do conjunto dos inteiros, tem-se:

$$\sum_{i \in K} a_i = \sum_{\varphi(i) \in K} a_{\varphi(i)}$$

Casos particulares de interesse (com  $k, n \in \mathbb{Z}$  e  $k \leq n$ ):

- Considerando a transformação  $\varphi(i) = i + c$  (com  $c$  uma constante inteira), obtém-se:

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{k \leq i \leq n} a_i = \sum_{k \leq \varphi(i) \leq n} a_{\varphi(i)} = \sum_{k \leq i+c \leq n} a_{i+c} = \sum_{k-c \leq i \leq n-c} a_{i+c} = \sum_{i=k-c}^{n-c} a_{i+c}$$

$$\text{i.e. } \sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k-c}^{n-c} a_{i+c} \quad (= \sum_{i=\varphi^{-1}(k)}^{\varphi^{-1}(n)} a_{\varphi(i)})$$

- E considerando a transformação  $\varphi(i) = c - i$  (com  $c$  uma constante inteira), obtém-se:

<sup>9</sup> Apesar de designarmos as igualdades a seguir genericamente de leis associativas, para a obtenção de algumas destas propriedades é relevante não só a propriedade associativa da adição, mas também a propriedade comutativa.

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=c-n}^{c-k} a_{c-i} \quad (= \sum_{i=\varphi^{-1}(n)}^{\varphi^{-1}(k)} a_{\varphi(i)})$$

▽

A lei distributiva permite-nos mover constantes para dentro e fora de um somatório. As leis associativas permitem-nos partir um somatório em dois, ou combinar dois somatórios num só. E a lei comutativa diz-nos que podemos reordenar os termos a somar por qualquer ordem.

Saliente-se que *na lei comutativa podemos enfraquecer um pouco* a condição de  $\varphi$  ser uma permutação do conjunto dos inteiros (i.e. de  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ser uma bijecção), e exigir apenas que para cada  $j$  pertencente a  $K$  exista um e um só inteiro  $i$  tal que  $\varphi(i)=j$ .

### Mudanças de variável

Por outro lado, podemos reformular a lei comutativa de um modo que traduz melhor a forma como normalmente aplicamos a (*chamada*) *técnica da mudança de variável*.

De facto, sendo  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  uma bijecção, e atendendo a que

$$\sum_{\varphi(i) \in K} a_{\varphi(i)} = \sum_{i \in \varphi^{-1}[K]} a_{\varphi(i)}$$

podemos reformular a lei comutativa como se segue

$$\sum_{i \in K} a_i = \sum_{i \in \varphi^{-1}[K]} a_{\varphi(i)}, \text{ isto é, } \sum_{i \in \varphi^{-1}[K]} a_{\varphi(i)} = \sum_{i \in K} a_i$$

Assim, sendo  $B$  um qualquer conjunto finito de inteiros, e designando por  $K$  o conjunto  $\varphi[B]$ , chega-se a

$$\sum_{i \in B} a_{\varphi(i)} = \sum_{i \in \varphi[B]} a_i$$

E, como o nome que se usa para a variável do somatório é irrelevante, podemos escrever

$$\sum_{i \in B} a_{\varphi(i)} = \sum_{j \in \varphi[B]} a_j$$

salientando assim que se pode passar do somatório da esquerda para o da direita, fazendo a *mudança de variável*  $j = \varphi(i)$ .

Por outro lado, pelo que se observou acima, não é necessário exigir que se tenha uma bijecção  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , mas apenas que  $\varphi$  seja injectiva no conjunto  $B$  (i.e., mais rigorosamente, que a restrição de  $\varphi$  a  $B$  seja injectiva).

#### Técnica da mudança de variável:

Seja  $B$  um conjunto finito de inteiros e  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  bijectiva (ou, pelo menos, injectiva em  $B$ ). Então:

$$\sum_{i \in B} a_{\varphi(i)} = \sum_{j \in \varphi[B]} a_j \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = \varphi(i)$$

▽

Como casos particulares de interesse refira-se:

### Mudanças de variável típicas<sup>10</sup> (motivadas por queremos alterar o “termo somando”)

(Com  $k, n \in \mathbb{Z}$  e  $k \leq n$ , e com  $c$  uma constante inteira):

- Considerando a transformação  $\varphi(i) = i + c$ , obtém-se:

$$\sum_{i=k}^n a_{\varphi(i)} = \sum_{j=\varphi(k)}^{\varphi(n)} a_j, \text{ isto é, } \sum_{i=k}^n a_{i+c} = \sum_{j=k+c}^{n+c} a_j \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = i + c$$

- Considerando a transformação  $\varphi(i) = c - i$ , obtém-se:

$$\sum_{i=k}^n a_{\varphi(i)} = \sum_{j=\varphi(n)}^{\varphi(k)} a_j, \text{ isto é, } \sum_{i=k}^n a_{c-i} = \sum_{j=c-n}^{c-k} a_j \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = c - i$$

E, considerando ainda a situação em que a função de  $i$  – denotada por  $a_i$  – é o próprio  $i$  (isto é, o caso em que a família  $a$  é a função identidade no seu conjunto de índices), os casos anteriores reduzem-se aos casos (em que talvez esta técnica de mudança de variável seja mais aplicada):

- $\sum_{i=k}^n (i + c) = \sum_{j=k+c}^{n+c} j \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = i + c$
- $\sum_{i=k}^n (c - i) = \sum_{j=c-n}^{c-k} j \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = c - i$

▽

Os casos anteriores referem-se a situações em que optamos (ou podemos querer optar) por efectuar uma mudança de variável por o “somando” se encontrar expresso à custa de uma transformação  $\varphi$ .

Uma outra situação típica em que podemos querer optar por efectuar uma mudança de varável ocorre quando um dos índices do somatório é descrito por uma expressão da forma  $k+c$ , com  $c$  uma constante inteira (normalmente quando optamos, nestes casos, por uma mudança de variável, o outro índice também é descrito por uma expressão do mesmo tipo, como  $n+c$ , mas tal não é obrigatório).

Suponha-se por exemplo, que se tem um somatório da forma

$$\sum_{i=k+c}^n a_i$$

e se quer transformar este somatório, num somatório (equivalente) da forma

$$\sum_{j=k}^{??} a_{??}$$

Informalmente, procede-se assim:

Quando  $i = k+c$ , deve ter-se  $j=k$ , logo  $j$  deve estar relacionado com  $i$  como se segue:  $j=i-c$ . Tal conduz às seguintes outras transformações do somatório:

- índice superior:  $i = n \Rightarrow j = i-c = n-c$
- índice do termo somando:  $j = i-c \Rightarrow i = j+c$

---

<sup>10</sup> O nome escolhido para a nova variável é irrelevante, desde que não ocorra na expressão  $\varphi(i)$ .

### Outras mudanças de variável típicas (motivadas por queremos alterar os índices/limites do somatório)

(Com  $k, n \in \mathbb{Z}$  e  $k \leq n$ , e  $c$  uma constante inteira):

- $\sum_{i=k+c}^n a_i = \sum_{j=k}^{n-c} a_{j+c} \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = i - c \quad (\text{está implícito que } k+c \leq n)$
- $\sum_{i=k}^{n+c} a_i = \sum_{j=k-c}^n a_{j+c} \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = i - c \quad (\text{está implícito que } k \leq n+c)$
- $\sum_{i=k+c}^{n+c} a_i = \sum_{j=k}^n a_{j+c} \quad \leftarrow \text{mudança de variável } j = i - c$

▽

Saliente-se que as igualdades anteriores se podem obter da expressão geral dada atrás para a técnica da mudança de variável. A título basicamente ilustrativo, vejamos como tal pode ser obtido (por exemplo) para a primeira igualdade:

Seja  $\varphi(i) = i - c$  (pelo que  $\varphi^{-1}(i) = i + c$ ), e seja  $b_i$  a sucessão dada por  $b_i = a_{\varphi^{-1}(i)}$ . Então  $a_i = b_{\varphi(i)}$  e tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+c}^n a_i &= \sum_{i=k+c}^n b_{\varphi(i)} = (\leftarrow \text{mudança de variável } j = \varphi(i)) \\ &= \sum_{j=\varphi(k+c)}^{\varphi(n)} b_j = \sum_{j=k}^{n-c} b_j = \sum_{j=k}^{n-c} a_{\varphi^{-1}(j)} = \sum_{j=k}^{n-c} a_{j+c} \end{aligned}$$

(como pretendíamos obter).

### **Secção 3: Cálculo<sup>11</sup> (fórmulas explícitas) de alguns somatórios.**

As propriedades e técnicas anteriores permitem-nos manipular somatórios, podendo ser usadas para transformar um somatório noutro somatório mais simples, ou de que já se conhece o resultado, como ilustraremos à frente. Mas, até para isso, convém dispor de fórmulas explícitas para vários tipos de somatórios e, nomeadamente, para os que ocorrem mais frequentemente. Sobre este aspecto nos debruçaremos a seguir.

Até que ponto é simples encontrar uma fórmula explícita para um somatório? A resposta é que depende: às vezes é simples, outras vezes não.

E (como se refere no livro já citado de Graham, Knuth e Patashnik – texto [27]) a primeira coisa que se pode fazer quando nos deparamos com um somatório que nos parece que (provavelmente) já deve ter sido

<sup>11</sup> O significado de *calcular* (ou *resolver*) um somatório é entendido por todos e deixado aqui implícito. Neste texto, em vez de “calcular um somatório” também dizemos, com o mesmo sentido, “encontrar uma fórmula explícita para o somatório”. A ideia é transformar um somatório numa expressão equivalente que possa ser facilmente calculada computacionalmente através das operações usuais, sem necessidade de recursão nem de utilização de ciclos (i.e., de comandos tipo “While”). A tais formas chama-se por vezes de *closed forms* (formas fechadas). Podemos descrever informalmente uma *closed form* como uma expressão que pode ser calculada aplicando um número fixo de operações familiares aos argumentos (o facto de o número de operações a aplicar ser fixo implica que tal forma não pode envolver “...”; assim p.ex.  $a_1 + \dots + a_n$  não é uma *closed form*).

estudado é ir a um livro de tabelas e fórmulas matemáticas, como “William H. Beyer (ed.), *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 29<sup>a</sup> ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, 1991”, e ver se lá ocorre o somatório procurado. Refira-se, a propósito, que a principal referência para fórmulas matemáticas é o livro “M. Abramowitz e I.A. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1965”.

Uma outra alternativa é recorrer a um sistema computacional que suporte computação simbólica, como p.ex. o *Mathematica*, e procurar avaliar nesse sistema o somatório em causa. Por exemplo, se no *Mathematica* mandarmos avaliar a expressão

$$\sum_{i=1}^n i^2 \quad (\text{ou } \text{Sum}[i^2, \{i, 1, n\}])$$

obtemos

$$\frac{1}{6} n(1+n)(1+2n)$$

Convém, no entanto, conhecer o resultado dos somatórios mais importantes, para não termos de estar sempre a recorrer a tais ferramentas auxiliares (livros/tabelas ou ferramentas computacionais), que podemos até “não ter à mão” no momento em que precisamos de calcular um somatório simples (para além de que o somatório em que estamos interessados pode ser uma versão simples de um somatório “tabelado” num manual, e por isso mesmo não estar aí “tabelado”).

Assim, no que se segue iremos recordar alguns dos somatórios mais importantes, aproveitando para recordar e exercitar algumas técnicas que podem ser usadas para calcular somatórios (mostrando também como uns somatórios se podem reduzir a outros para os quais já sabemos o resultado, por utilização das propriedades genéricas referidas atrás).

O somatório mais simples de resolver, é o somatório

$$\sum_{i \in K} a_i$$

com  $(a_i)_{i \in K}$  a família constantemente igual a 1, uma vez que nesse caso apenas estamos a somar 1 por cada elemento do conjunto  $K$ . Obtém-se assim, trivialmente:

Fórmula 1:

$$\sum_{i \in K} 1 = \# K$$

Caso particular:

$$\sum_{i=k}^n 1 = n - k + 1$$

▽

E desta fórmula sai imediatamente, por aplicação da lei distributiva, a fórmula seguinte<sup>12</sup>:

---

<sup>12</sup> Não necessitamos de saber “de cor” fórmulas, como a que se segue, que saem trivialmente de outra fórmula. Daí que nos exemplos a seguir se evite aplicar directamente a fórmula 2 a seguir (“deduzindo-a” para os casos concretos em causa).

Fórmula 2 – “soma” de uma constante:

Sendo  $c$  uma qualquer expressão que não dependa de  $i$ , tem-se:

$$\sum_{i=k}^n c = c \sum_{i=k}^n 1 = c(n - k + 1)$$

▽

Passemos agora à análise da soma de certas sequências de números que ocorrem em muitos problemas.

Definição 1 – Progressão aritmética:

Uma *progressão aritmética* é uma qualquer sequência de números em que qualquer termo (com exceção do primeiro) pode ser obtido do anterior adicionando-lhe uma certa constante  $r$  (dita a *razão* da progressão).

Isto é, podemos dizer que uma sequência de ( $n$ ) números  $a_1, \dots, a_n$  constituí uma (ou está em) progressão aritmética sse existe um real  $r$  (dito a razão da progressão) tal que  $a_i = a_{i-1} + r$ , para qualquer (inteiro)  $1 < i \leq n$ .

Este conceito generaliza-se trivialmente a sucessões de números e podemos dizer que uma sucessão  $a_1, \dots, a_n, \dots$  é uma progressão aritmética de razão<sup>13</sup>  $r$  sse  $a_i = a_{i-1} + r$ , para qualquer (inteiro)  $i > 1$ . E nada se altera se os índices da família  $a$  puderem ser quaisquer inteiros maiores ou iguais a um inteiro  $k$ :

Uma sequência <sub>$k$</sub>   $(a_i)_{i \geq k}$  constitui uma progressão aritmética de razão  $r$  sse  $\forall_{i \geq k} a_i = a_{i-1} + r$ .

*Termo geral de uma progressão aritmética:*

É fácil obter uma forma explícita para o termo geral de uma progressão aritmética (por exemplo aplicando o método iterativo).

É aliás fácil de demonstrar por indução (o que se deixa como exercício) que quaisquer dois termos de uma progressão aritmética,  $a_j$  e  $a_i$ , com  $j \leq i$ , estão relacionados pela fórmula:

$$a_i = a_j + (i-j)r$$

pelo que o termo geral  $a_i$  de uma progressão aritmética ( $a$ ), de razão  $r$ , é igual ao valor do primeiro termo (da sucessão  $a$ ) mais ( $a$  razão)  $r$  vezes a diferença entre  $i$  e o índice do primeiro termo (da sucessão  $a$ ), *reciprocamente*, é também imediato mostrar que sempre que o termo geral de uma sucessão satisfaz uma relação deste tipo, se está perante uma progressão aritmética de razão  $r$ .

▽

Vejamos então como calcular a soma de um certo número de termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Soma da progressão aritmética de razão 1, começando em 1:

Comecemos por considerar o caso mais simples, em que queremos calcular a soma dos primeiros  $n$  termos da progressão aritmética 1, 2, 3, 4, .... (progressão aritmética de razão 1 e cujo primeiro termo é 1):

---

<sup>13</sup> Quando a razão  $r$  é 0, obtém-se uma sucessão contante. Assim, normalmente não se considera a razão zero no conceito de progressão aritmética. Mas nada do que se segue deixa de ser válido para esse caso (“degenerado”).

$$\sum_{i=1}^n i$$

Vejamos como Gauss calculou este somatório em 1786, quando tinha 9 anos:

Designe-se por  $S_n$  o somatório  $\sum_{i=1}^n i$ . Tem-se:

$$\begin{array}{rcl} S_n = & 1 & + \quad 2 \quad + \dots + \quad (n-1) \quad + \quad n \\ + \quad S_n = & n & + \quad (n-1) \quad + \dots + \quad 2 \quad + \quad 1 \end{array} \quad \text{(S}_n \text{ escrito na forma inversa)}$$


---


$$2 S_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \quad \text{(n parcelas)}$$

$$\text{Logo } 2 S_n = n(n+1) \text{ e, portanto, } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

O “truque” usado por Gauss pode ser formalizado como se segue:

Considerando a bijecção entre inteiros dada por  $\varphi(i) = n-i+1$  (que, em particular, satisfaz  $\varphi(n)=1$  e  $\varphi(1)=n$ ), tem-se, pela lei comutativa<sup>14</sup>, que:

$$(S_n =) \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n (n - i + 1)$$

Assim, aplicando a lei associativa (e a fórmula 2), obtém-se:

$$2S_n = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n (n - i + 1) = \sum_{i=1}^n (i + n - i + 1) = \sum_{i=1}^n (n + 1) = (n+1)n$$

onde sai que

$$(S_n =) \sum_{i=1}^n i = \frac{1+n}{2}n$$

### Soma de uma progressão aritmética de razão r:

Passando agora ao caso geral, seja  $a$  uma progressão aritmética e suponha-se que se quer calcular a soma de um certo número de termos consecutivos dessa progressão. Isto é, de uma forma mais simples, suponha-se que  $k$  e  $n$  são dois índices da sucessão  $a$ , com  $k \leq n$ , e que se quer calcular:

$$(S_n =) \sum_{i=k}^n a_i$$

Iremos, em seguida, ilustrar dois modos de calcular a soma em causa.

#### *Hipótese 1:*

Uma primeira hipótese, para o cálculo deste somatório, é usar exactamente a mesma estratégia que no caso anterior (i.e., de algum modo, a estratégia que Gauss usou):

---

<sup>14</sup> Que a igualdade a seguir sai da formulação atrás descrita para a lei comutativa pode ver-se, em pormenor, como se segue (notando que a sucessão em causa é dada por  $a_i = i$  e que  $\varphi(i) = n+1-i$ ):

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=n+1-n}^{n+1-1} a_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n a_{n-i+1} = \sum_{i=1}^n (n - i + 1)$$

Considerando a bijecção entre inteiros dada por  $\varphi(i) = n-i+k$  (que, em particular, satisfaz  $\varphi(n)=k$  e  $\varphi(k)=n$ ), tem-se, pela lei comutativa, que:

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k}^n a_{n-i+k}$$

Mas (como observámos atrás)  $a_i=a_k+(i-k)r$ , para  $i \geq r$ , e  $a_{n-i+k}=a_k+((n-i+k)-k)r=a_k+(n-i)r$ , para  $n-i+k \geq r$ . Logo:

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{i=k}^n a_i + \sum_{i=k}^n a_{n-i+k} \\ &= \sum_{i=k}^n (a_i + a_{n-i+k}) \\ &= \sum_{i=k}^n (a_k + (i-k)r + a_k + (n-i)r) \\ &= \sum_{i=k}^n (2a_k + (n-k)r) \end{aligned}$$

E, como  $2a_k+(n-k)r$  não depende da variável do somatório  $i$ , obtém-se (usando a lei distributiva e a fórmula 1)<sup>15</sup>:

$$2S_n = \sum_{i=k}^n (2a_k + (n-k)r) = (2a_k + (n-k)r) \sum_{i=k}^n 1 = (2a_k + (n-k)r)(n-k+1)$$

E, notando que  $2a_k+(n-k)r = a_k+a_k+(n-k)r = a_k+a_n$ , chega-se a

$$(S_n =) \sum_{i=k}^n a_i = \frac{a_k + a_n}{2} (n - k + 1)$$

Saliente-se que a fórmula da soma em causa não envolve explicitamente a razão  $r$ , sendo dada pela soma do primeiro e do último termo do somatório a dividir por 2 (i.e. pela média do primeiro e do último termo do somatório) vezes o número de termos do somatório.

*Hipótese 2:*

Uma segunda hipótese, para o cálculo do somatório em causa, consiste em usar as propriedades gerais dos somatórios para reduzir este somatório ao somatório da progressão aritmética de razão 1 que já calculámos atrás.

Como  $a_i=a_k+(i-k)r$ , para  $i \geq r$ , tem-se (aplicando as leis associativa e distributiva, e a fórmula 1):

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k}^n (a_k + (i-k)r) = \sum_{i=k}^n a_k + \sum_{i=k}^n (i-k)r = a_k \sum_{i=k}^n 1 + r \sum_{i=k}^n (i-k) = a_k(n-k+1) + r \sum_{i=k}^n (i-k)$$

e, fazendo a mudança de variável  $j=i-k$ , neste último somatório, obtém-se:

$$= a_k(n-k+1) + r \sum_{j=0}^{n-k} j = a_k(n-k+1) + r \sum_{j=1}^{n-k} j$$

onde sai, pelo fórmula anteriormente calculada para a soma de uma progressão aritmética de razão 1 e com primeiro termo igual a 1:

<sup>15</sup> Ou usando directamente a fórmula 2.

$$= a_k(n-k+1) + r \frac{1+(n-k)}{2}(n-k) = (n-k+1)(a_k + \frac{r(n-k)}{2}) = (n-k+1) \frac{a_k + a_k + r(n-k)}{2}$$

chegando-se finalmente (atendendo a que  $a_n = a_k + (n-k)r$ ) a:

$$= \frac{a_k + a_n}{2} (n-k+1)$$

Fórmula 3 – “soma” de uma progressão aritmética de razão r:

Se  $\forall_{i>k} a_i = a_{i-1} + r$  (ou de forma equivalente, se  $\forall_{i>k} a_i = a_k + (i-k)r$ ), então (com k e n inteiros tais que  $k \leq n$ ):

$$\sum_{i=k}^n a_i = \frac{a_k + a_n}{2} (n-k+1)$$

Caso particular ( $a_i = i$ , razão  $r=1$ ):

$$\sum_{i=k}^n i = \frac{k+n}{2} (n-k+1)$$

▽

Antes de passarmos a outras somas importantes, vejamos um exemplo simples de aplicação da fórmula anterior.

Exemplo 1:

Suponha-se que se pretende calcular  $1+3+5+\dots+(2n+1)$ , com  $n \geq 0$  (i.e. pretende-se calcular a soma dos primeiros  $n+1$  ímpares).

Se repararmos que estamos em presença da soma dos primeiros  $n+1$  termos de uma progressão aritmética de razão 2, o resultado sai imediatamente por aplicação da fórmula 3 anterior.

De facto, a sequência  $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ , dada por  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ , ... é uma progressão aritmética de razão 2 (pois  $a_i = a_{i-1} + 2$ , para  $i > 1$ ). Logo, pela fórmula 3:

$$1+3+5+\dots+(2n+1) = \left( \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} (n+1) \right) = \frac{1+2n+1}{2} (n+1) = (n+1)^2$$

Se não reparámos logo que estamos em presença da soma de uma progressão aritmética de razão 2, o cálculo é igualmente simples, codificando o somatório em causa e manipulando-o recorrendo às propriedades elementares dos somatórios:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\dots+(2n+1) &= \sum_{i=0}^n (2i+1) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 1 \quad (\text{estes somatórios já são evidentes}) \\ &= 2 \frac{0+n}{2} (n+1) + (n+1) = n(n+1) + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

▽

Passemos agora à soma de progressões geométricas.

### Definição 2 – Progressão geométrica:

Numa progressão aritmética qualquer termo (distinto do primeiro) pode ser obtido do anterior adicionando-lhe uma certa constante  $r$  (dita a *razão* da progressão). Numa progressão geométrica qualquer termo (distinto do primeiro) pode ser obtido do anterior multiplicando-o por uma certa constante  $r$  (dita a *razão* da progressão):

$$(a_i)_{i \geq 1} \text{ é uma progressão geométrica de razão } r$$

sse

$$a_i = r a_{i-1}, \text{ para qualquer índice } i \text{ distinto do primeiro índice da sucessão } a.$$

É fácil de demonstrar que:

$$(a_i)_{i \geq 1} \text{ é uma progressão geométrica de razão } r$$

sse<sup>16</sup>

$$\text{quaisquer que sejam os índices da sucessão, } j \text{ e } i, \text{ com } j \leq i, a_i = a_j r^{i-j}$$

O caso em que a razão  $r$  é 0 é obviamente um caso sem interesse (trata-se de uma sucessão em que todos os termos, com exceção do primeiro são nulos), pelo que o iremos excluir (embora algumas das fórmulas à frente também permaneçam válidas para esse caso).

O caso em que a razão  $r$  é 1, é um outro caso que podemos considerar “degenerado” (como progressão geométrica). Se  $r=1$ , estamos em presença de uma sucessão em que todos os termos são iguais ao primeiro (que também podemos ver como uma progressão aritmética de razão 0). A fórmula da soma de  $n$  termos consecutivos de uma progressão geométrica, a deduzir a seguir, só é válida para  $r \neq 1$ . No caso de  $r$  ser igual a 1, é imediato (fórmula 2) que a soma de  $n$  termos consecutivos é dado pelo primeiro termo vezes  $n$  (o número de termos a somar).

▽

Vejamos então como calcular a soma de um certo número de termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão  $r$ , com  $r \neq 0$  e  $r \neq 1$ , aproveitando para ilustrar uma outra técnica que se pode tentar usar para calcular somatórios.

Comecemos por considerar o caso em que o primeiro termo da sucessão é o de índice 0 e é igual a 1. Mais concretamente vejamos como podemos calcular (com  $n \geq 0$ ):

$$S_n = \sum_{i=0}^n r^i$$

Tem-se (adicionando  $r^{n+1}$  a ambos os membros da igualdade anterior):

$$(S_{n+1} =) S_n + r^{n+1} = \sum_{i=0}^n r^i + r^{n+1} = 1 + r + \dots + r^n + r^{n+1} = 1 + r (1 + r + \dots + r^n) = 1 + r S_n$$

Logo (resolvendo a equação anterior em ordem a  $S_n$ ):

$$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

<sup>16</sup> Se permitirmos que a razão  $r$  possa ser zero, então no que se segue terá de se substituir  $j \leq i$  por  $j < i$  (para evitar  $0^0$ ).

E a partir daqui facilmente se calcula a soma de um certo número de termos consecutivos de uma qualquer progressão geométrica de razão  $r$ , utilizando as propriedades gerais dos somatórios para reduzir tal soma ao caso anterior.

Seja  $a$  uma qualquer progressão geométrica de razão  $r$ , com  $r \neq 0$  e  $r \neq 1$  e sejam  $k$  e  $n$  quaisquer dois índices da sucessão  $a$ , com  $k \leq n$ . Então (recordar que  $a_i = a_k r^{i-k}$ , para qualquer  $i \geq k$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^n a_i &= \sum_{i=k}^n a_k r^{i-k} = \\ a_k \sum_{i=k}^n r^{i-k} &= \text{(mudança de variável } j = i-k) \\ a_k \sum_{j=0}^{n-k} r^j &= \text{(usando a fórmula que acabámos deduzir)} \\ a_k \frac{r^{n-k+1} - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Logo:

$$\sum_{i=k}^n a_i r^{i-k} = a_k \frac{r^{n-k+1} - 1}{r - 1}$$

Donde sai também que:

$$\sum_{i=k}^n a_k r^i = r^k \sum_{i=k}^n a_k r^{i-k} = a_k \frac{r^{n+1} - r^k}{r - 1}$$

E em vez de estarmos a fixar estas duas fórmulas, basta concentrar-nos na seguinte (a partir das quais as duas fórmulas anteriores saem trivialmente usando a propriedade distributiva).

#### Fórmula 4 – progressão geométrica de razão $r \neq 0$ e $r \neq 1$ (soma relevante):

Sejam  $k$  e  $n$  quaisquer inteiros tais que  $k \leq n$ . Então:

$$\sum_{i=k}^n r^i = \frac{r^{n+1} - r^k}{r - 1}$$

Caso particular:

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

▽

A forma como calculámos atrás

$$S_n = \sum_{i=0}^n r^i$$

ilustra uma outra técnica que se pode tentar usar para calcular somatórios, que a seguir descrevemos.

Possível estratégia para o cálculo de  $S_n = \sum_{i=k}^n a_i$ : encontrar uma equação em  $S_n$

Para o cálculo de um somatório:

$$S_n = \sum_{i=k}^n a_i$$

uma estratégia, que por vezes funciona, consiste em procurar encontrar uma equação em que  $S_n$  ocorra nos dois membros<sup>17</sup>, mas com coeficientes diferentes, de modo a que a possamos resolver em ordem a  $S_n$ .

▽

Naturalmente, põe-se a questão de como levar à prática a estratégia acabada de referir, isto é, como obter tal equação em  $S_n$ ?

Ora, por uma das leis associativas, nós sabemos que podemos “partir” um somatório (envolvendo mais que uma parcela) em dois somatórios, como se segue (com  $k \leq j < n$ ):

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k}^j a_i + \sum_{i=j+1}^n a_i$$

E, em particular, podemos usar este facto para extrair (retirar) de um somatório uma sua parcela, e nomeadamente a primeira ou a última:

$$\sum_{i=k-1}^n a_i = a_{k-1} + \sum_{i=k}^n a_i \quad (\text{com } k \leq n)$$

$$\sum_{i=k}^{n+1} a_i = \sum_{i=k}^n a_i + a_{n+1} \quad (\text{com } k \leq n)$$

Ora, esta operação de “separação de um termo” é a base de um método (às vezes designado por *perturbation method*) que muitas vezes nos permite obter tal equação em  $S_n$  e assim resolver o somatório.

#### Técnica: extracção de um elemento do somatório

Seja  $S_n = \sum_{i=k}^n a_i$  o somatório que queremos calcular.

Então reescrivemos  $S_{n+1}$  de duas maneiras, através da separação do seu primeiro e do seu último termo:

$$S_{n+1} = \sum_{i=k}^n a_i + a_{n+1}$$

e

$$S_{n+1} = a_k + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_i \quad (\text{mudança de variável } j = i-1)$$

$$= a_k + \sum_{j=k}^n a_{j+1}$$

obtendo-se<sup>18</sup>

$$S_n + a_{n+1} = a_k + \sum_{j=k}^n a_{j+1}$$

<sup>17</sup> Logo não se trata de uma equação de recorrência.

<sup>18</sup> Onde estar, como variável do somatório,  $i$  ou  $j$ , é, como sabemos, irrelevante.

e procura-se em seguida “trabalhar” (manipular) a última soma, tentando expressá-la em termos de  $S_n$ . Se o conseguirmos obtemos uma equação cuja solução é o resultado do somatório que procuramos.

▽

Foi esta a técnica que utilizámos atrás para o cálculo do somatório

$$S_n = \sum_{i=0}^n r^i$$

Vejamos um outro exemplo de aplicação desta técnica.

Seja

$$S_n = \sum_{i=1}^n ix^i$$

com ( $n \geq 1$  e)  $x \neq 1$ . (Caso  $x$  seja igual a 1, estamos perante a soma de uma progressão aritmética, que já sabemos calcular.) Tem-se:

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)x^{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} ix^i = \\ x + \sum_{i=2}^{n+1} ix^i &= \quad (\text{mudança de variável } j=i-1) \\ x + \sum_{j=1}^n (j+1)x^{j+1} &= \\ x + x \left( \sum_{j=1}^n jx^j - \sum_{j=1}^n x^j \right) &= \quad (\text{o último somatório é dado pela fórmula 4}) \\ x + xS_n + x \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} &= \\ xS_n + \frac{x^{n+2} - x}{x - 1} & \end{aligned}$$

E resolvendo a equação

$$S_n + (n+1)x^{n+1} = xS_n + \frac{x^{n+2} - x}{x - 1}$$

em ordem a  $S_n$ , chega-se facilmente à fórmula a seguir.

Fórmula 5 (com  $n$  inteiro e  $x$  real):

$$\sum_{i=1}^n ix^i = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(x-1)^2} \quad (\text{com } n \geq 1 \text{ e } x \neq 1)$$

▽

Refira-se que existem outras variantes desta técnica que podem ser usadas para obter a equação desejada em  $S_n$ . Por exemplo, para o cálculo do somatório anterior também poderíamos ter procedido (de modo ligeiramente diferente) como se segue:

$$S_n + (n+1)x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} ix^i \quad (\text{mudança de variável } j=i-1)$$

$$\sum_{j=0}^n (j+1)x^{j+1} = x \left( \sum_{j=0}^n jx^j + \sum_{j=0}^n x^j \right) = x \left( \sum_{j=1}^n jx^j + \sum_{j=0}^n x^j \right) = \quad (\text{fórmula 4})$$

$$x(S_n + \frac{x^{n+1}-1}{x-1}) = xS_n + \frac{x^{n+2}-x}{x-1}$$

Um outra técnica que às vezes funciona é:

#### Técnica: substituir varável por expressão

Para encontrar uma equação em  $S_n$ , com  $S_n = \sum_{i=k}^n a_i$ , substituir alguma ocorrência da variável  $i$ , em  $a_i$ , por uma expressão (equivalente) mais complicada.

▽

Ilustremos esta técnica, ainda a propósito do mesmo exemplo:

$$S_n = \sum_{i=1}^n ix^i = \quad (\text{substituição do } i, \text{ que não é expoente de } x, \text{ por } i-1+1)$$

$$\sum_{i=1}^n (i-1+1)x^i =$$

$$\sum_{i=1}^n (i-1)x^i + \sum_{i=1}^n x^i = \quad (\text{mudança de variável } j=i-1 \text{ no } 1^{\circ} \text{ somatório e fórmula 4})$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} jx^{j+1} + \frac{x^{n+1}-x}{x-1} =$$

$$x(\sum_{i=1}^{n-1} jx^i) + \frac{x^{n+1}-x}{x-1} =$$

$$x(S_n - nx^n) + \frac{x^{n+1}-x}{x-1} =$$

$$xS_n - nx^{n+1} + \frac{x^{n+1}-x}{x-1} =$$

$$xS_n + \frac{-nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - x}{x-1}$$

e resolvendo esta equação em ordem a  $S_n$ , chega-se imediatamente à fórmula 5 acima.

Refira-se ainda que a fórmula 5 para o cálculo do somatório

$$\sum_{i=1}^n ix^i$$

poderia também ser obtida de um modo completamente diferente, recorrendo a técnicas elementares do Cálculo Diferencial, como se ilustra a seguir.

Pela fórmula 4

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

e, derivando ambos os membros em ordem a x, obtém-se

$$\sum_{i=0}^n ix^{i-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

onde sai facilmente (verifique!) a fórmula 5 que a seguir se recorda

$$\sum_{i=1}^n ix^i = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(x-1)^2}$$

Vejamos, por último, como calcular o somatório<sup>19</sup>

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^2$$

procurando, primeiro, usar o método, referido atrás, da separação de uma parcela:

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} i^2 \\ &= 1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^2 \quad (\text{mudança de variável } j=i-1) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n (j+1)^2 \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n 2j + \sum_{j=1}^n 1 \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^n j + n \\ &= S_n + 2 \sum_{j=1}^n j + n + 1 \end{aligned}$$

A estratégia não resultou pois  $S_n$  tem os mesmos coeficientes nos dois membros da equação !

Mas é interessante notar (para o que se deixou propositadamente ficar o último somatório) que se resolvemos a equação anterior se obtém a fórmula da soma da progressão aritmética

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$$

Isto é, procurando resolver  $\sum_{i=1}^n i^2$  encontrou-se a fórmula do somatório  $\sum_{i=1}^n i$ .

Será que procurando resolver (pelo mesmo método)  $\sum_{i=1}^n i^3$  se encontra a fórmula do somatório  $\sum_{i=1}^n i^2$  ?

Tentar não custa ! Experimentemos:

$$S_n + (n+1)^3 = \sum_{i=1}^{n+1} i^3$$

<sup>19</sup> Outras técnicas para o cálculo deste somatório são ilustradas no livro [27] (páginas 41 a 46).

$$1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^3 = \quad \text{(mudança de variável } j=i-1)$$

$$1 + \sum_{j=1}^n (j+1)^3 =$$

$$1 + \sum_{j=1}^n (j^3 + 3j^2 + 3j + 1) =$$

$$1 + \sum_{j=1}^n j^3 + 3 \sum_{j=1}^n j^2 + 3 \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 =$$

$$1 + S_n + 3 \sum_{j=1}^n j^2 + 3 \frac{(n+1)n}{2} + n =$$

$$S_n + 3 \sum_{j=1}^n j^2 + 3 \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)$$

E resolvendo esta equação obtém-se:

$$3 \sum_{j=1}^n j^2 = (n+1)^3 - 3 \frac{(n+1)n}{2} - (n+1) = (n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1) = (n+1)n(n + \frac{1}{2})$$

Isto é:

#### Fórmula 6:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ou, de forma equivalente (mas talvez mais fácil de memorizar)

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$$

▽

Refira-se ainda que uma estratégia análoga pode ser utilizada para calcular

$$\sum_{i=1}^n i^3$$

à custa dos somatórios

$$\sum_{i=1}^n i^2, \sum_{i=1}^n i \text{ e } \sum_{i=1}^n 1$$

estratégia que se pode generalizar para o cálculo de qualquer somatório

$$\sum_{i=1}^n i^k, \text{ com } k \geq 1$$

E, para terminar esta nossa breve incursão/revisão pelos somatórios simples, apenas uma referência às chamadas *somas “telescópicas”*.

Fórmula 7 (soma telescópica):

Uma “soma telescópica” é uma soma da forma

$$\sum_{i=k}^n (a_i - a_{i-1})$$

Como cada um dos termos  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}$  é adicionado e subtraído uma vez, é imediato que:

$$\sum_{i=k}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_{k-1}$$

▽

Apesar da fórmula 7 ser óbvia, ela permite-nos calcular alguns somatórios, que podem ser reformulados como uma soma telescópica. Vejamos (apenas) um exemplo.

Exemplo 2:

Suponha-se que se pretende calcular  $\sum_{i=k}^n \frac{1}{i(i+1)}$  (com  $k < n$ ).

Ora  $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ , pelo que, definindo  $a_i = \frac{1}{i+1}$ , se obtém

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{i(i+1)} = - \sum_{i=k}^n \left( \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right) = - \sum_{i=k}^n (a_i - a_{i-1}) = a_{k-1} - a_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}$$

Caso particular:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

▽

Exercícios:

1. Determine:

a)  $\sum_{i=1}^n (2^i + 5)$  (para  $n \geq 1$ )

b)  $\sum_{i=1}^{50} (3^i + 2i + 1)$

c)  $\sum_{i=1}^{20} 2(3^i + i)$

2. Determine:  $\sum_{i=1}^n i2^i$  (para  $n \geq 0$ )

3. Verifique que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{-1 - (-1)^{n+1}}{2} \quad (\text{para } n \geq 1)$$

aplicando, por exemplo, a técnica da extracção de um elemento do somatório.

4. Verifique que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{-1 + (2n+1)(-1)^n}{4} \text{ (para } n \geq 1\text{)}$$

aplicando, por exemplo, a técnica da extracção de um elemento do somatório.

5. Determine:  $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^2$  (para  $n \geq 1$ )

(Sugestão: aplique, por exemplo, a técnica da extracção de um elemento do somatório e use o resultado da alínea anterior.)

▽

#### **Secção 4: Somas múltiplas e, em particular, os somatórios duplos.**

Consideremos agora uma família (de elementos num conjunto<sup>20</sup> E) duplamente indexada por naturais<sup>21</sup>

$$a : |\mathbb{N}_0|^2 \rightarrow E$$

e designe-se por  $a_{i,j}$ , ou mesmo por  $a_{ij}$ , o valor  $a(i,j)$ .

Então pode escrever-se

$$\sum_{P(i,j)} a_{i,j}$$

para designar a soma de todos os  $a(i,j)$  em que o par  $(i,j)$  satisfaz a propriedade  $P$  (assumindo-se que são em número finito), bem como (com uma interpretação análoga)

$$\sum_{(i,j) \in K} a_{i,j}$$

com  $K$  um subconjunto *finito* de  $|\mathbb{N}_0|^2$ .

Os casos mais simples, sobre os quais nos debruçaremos a seguir, são os somatórios, da forma anterior, em que existem conjuntos (finitos) I e J, *independentes um do outro*, tais que

$$(i, j) \in K \Leftrightarrow i \in I \wedge j \in J$$

isto é, em que os conjuntos de variação das variáveis do somatório são independentes um do outro. (No que se segue assumiremos sempre que as variáveis dos somatórios são variáveis inteiras.)

Vejamos um exemplo:

##### Exemplo 1:

$$\sum_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2} a_{i,j} = \sum_{i \in \{1,2,3\} \wedge j \in \{1,2,3\}} a_{i,j} (= \sum_{1 \leq i \leq 3 \wedge 1 \leq j \leq 3} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{i,j})$$

(a ordem por que enumeramos os  $a_{i,j}$  a adicionar é irrelevante, em virtude da adição ser comutativa e associativa)

<sup>20</sup> Sobre o qual está definida uma operação de adição com as propriedades usuais. Aqui tipicamente E será o conjunto dos inteiros ou dos reais.

<sup>21</sup> O que se segue pode generalizar-se facilmente a famílias indexadas em  $|\mathbb{N}_0|^k$ , para  $k \geq 2$ . Por outro lado, em vez de estarmos a considerar  $|\mathbb{N}_0$  no conjunto dos índices, podíamos também considerar o conjunto  $\mathcal{Z}_q$  dos inteiros maiores ou iguais a um inteiro q.

$$a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = \\ (\text{podemos agrupar os termos } a_{i,j} \text{ como quisermos})$$

$(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3}) + (a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3})$   
*(os parênteses a seguir não são essenciais, mas, pelo menos no início, são convenientes, para evitar confusões)*

$$\sum_{j=1}^3 a_{1,j} + \sum_{j=1}^3 a_{2,j} + \sum_{j=1}^3 a_{3,j} = \sum_{i=1}^3 (\sum_{j=1}^3 a_{i,j})$$

e analogamente se pode obter

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq 3 \wedge 1 \leq j \leq 3} a_{i,j} = \sum_{j=1}^3 (\sum_{i=1}^3 a_{i,j})$$

▽

Este exemplo ilustra um primeiro resultado importante:

Troca dos somatórios:

$$\sum_{i \in I \wedge j \in J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} (\sum_{j \in J} a_{i,j}) = \sum_{j \in J} (\sum_{i \in I} a_{i,j})$$

isto é, podemos trocar sem problema a ordem dos somatórios, quando os conjuntos de variação dos dois índices (i.e. das variáveis dos somatórios) são independentes um do outro.

▽

O resultado anterior é importante, em virtude de por vezes ser mais fácil somar primeiro em relação a uma variável, do que em relação à outra. Pelo resultado anterior, podemos escolher a ordem que for mais conveniente.

Outros casos particulares de interesse obtêm-se quando

o termo somando  $a_{i,j}$  pode ser expresso como uma função de um  $b_i$  e de um  $c_j$   
 (com  $b : \mathbb{N}_0 \rightarrow E$  e  $c : \mathbb{N}_0 \rightarrow E$ )

Vejamos um primeiro exemplo, em que  $a_{i,j} = b_i c_j$  (e onde se assume que a expressão que  $b_i$  denota não envolve a variável  $j$  e que a expressão que  $c_j$  denota não envolve a variável  $i$ ).

Exemplo 2:

$$(\sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_{i,j} =) \sum_{1 \leq i, j \leq 3} b_i c_j =$$

$$\sum_{i=1}^3 (\sum_{j=1}^3 b_i c_j) =$$

(lei distributiva: como  $b_i$  é independente de  $j$ ,  $b_i$  pode passar para fora do somatório de dentro)

$$\sum_{i=1}^3 b_i (\sum_{j=1}^3 c_j) =$$

(lei distributiva: o somatório de dentro é independente de i)

$$(\sum_{j=1}^3 c_j)(\sum_{i=1}^3 b_i) =$$

(a ordem dos factores de um produto é irrelevante, pela comutatividade do produto)

$$(\sum_{i=1}^3 b_i)(\sum_{j=1}^3 c_j)$$

▽

Como se viu ao longo deste exemplo, continuam a poder aplicar-se as leis gerais dos somatórios, atrás referidas (devidamente adaptadas, quando necessário), podendo algumas delas ser generalizadas.

O exemplo anterior pode generalizar-se, podendo provar-se a seguinte propriedade:

Lei distributiva generalizada:

$$\sum_{i \in I \wedge j \in J} b_i c_j = (\sum_{i \in I} b_i)(\sum_{j \in J} c_j)$$

▽

Vejamos um exemplo (concreto) de aplicação destes resultados:

Exemplo 3:

Pretende-se calcular  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2$ . Tem-se:

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2 = (\sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} (i + j)^2 =)$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i^2 + 2ij + j^2) =$$

(podemos já decompor este somatório em dois somatórios, um em  $i$  e o outro em  $j$ , ou adiar isso para mais tarde)

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2ij + \sum_{1 \leq i, j \leq n} j^2 =$$

(em cada um dos casos podemos escolher sobre que variável queremos somar primeiro)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n j^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 \sum_{j=1}^n 1 + 2 \left( \sum_{i=1}^n i \right) \left( \sum_{j=1}^n j \right) + \sum_{j=1}^n j^2 \sum_{i=1}^n 1 =$$

$$n \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \frac{(1+n)n}{2} \frac{(1+n)n}{2} + n \sum_{j=1}^n j^2 =$$

(como as variáveis dos somatórios são variáveis mudas, o primeiro e o último somatório são iguais)

$$2n \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \quad (\text{fórmula 6 da secção anterior})$$

$$2n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} =$$

$$\frac{2n^2(n+1)(2n+1) + 3n^2(n+1)^2}{6} = \quad (\text{simplificando})$$

$$\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$$

▽

Como referimos atrás, quando os conjuntos de variação ( $I$  e  $J$ ) das variáveis dos dois somatórios são independentes um do outro, podemos trocar à vontade a ordem dos somatórios:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}$$

Quando os conjuntos de variação em causa estão interrelacionados, a ordem dos somatórios continua a poder ser trocada, mas tal troca exige alterações adequadas nesses conjuntos de variação e tem de ser feita com cuidado.

Suponha-se, por exemplo, que estamos perante um duplo somatório, como

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} a_{i,j}$$

e que se pretende trocar a ordem dos dois somatórios.

(Note-se, antes de prosseguir, que o conjunto de variação  $I$  do somatório de fora nunca poderá depender do de dentro; qualquer variável que ocorra na descrição de  $I$  funciona como um parâmetro; uma eventual ocorrência de um  $j$  na descrição de  $I$  nada terá a ver com a variável  $j$  do somatório de dentro, que está aí muda e pode ser substituída, nesse somatório, por uma outra variável.)

O somatório anterior pode ser transformado num somatório da forma

$$\sum_{j \in J^*} \sum_{i \in I^*(j)} a_{i,j}$$

desde que sejam iguais os conjuntos:

$$\{(i, j): i \in I \wedge j \in J(i)\} = \{(i, j): j \in J^* \wedge i \in I^*(j)\}$$

uma vez que o conjunto dos termos a somar tem de ser o mesmo nos dois casos.

Refira-se, contudo, que existem algumas situações simples, em que essa troca de somatórios se faz sem grande dificuldade, e que são importantes por ocorrerem frequentemente em várias aplicações.

Considere-se, por exemplo, o duplo somatório

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}$$

O conjunto dos termos  $a_{i,j}$  a somar é formado por aqueles termos cujos índices satisfazem a propriedade “ $1 \leq i \leq n$  e  $i \leq j \leq n$ ”, somatório que podemos descrever na forma:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$$

e facilmente se vê que tal conjunto dos termos a somar pode ser expresso, somando primeiro em i, como se segue:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

Vejamos, agora de forma sintética, uma outra ilustração análoga:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$$

(Não esquecer que o limite inferior de cada somatório deve ser menor ou igual que o respectivo limite superior<sup>22</sup>.)

Naturalmente, a generalidade do que se disse até aqui sobre somatórios duplos, aplica-se a somatórios triplos, etc., isto é, a somatórios múltiplos em que a soma em causa envolve duas, três ou mais variáveis (inteiros) percorrendo certos conjuntos de valores (inteiros).

Para terminar esta breve revisão dos somatórios, vejamos dois exemplos (concretos), de cálculo de somatórios múltiplos, em que os conjunto de variação de alguns dos somatórios podem ter dependências entre si (e em que poderemos, ou não, estar interessados em trocar a ordem desses somatórios).

#### Exemplo 4:

Pretende-se calcular  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^i k e^{2+j}$ . Tem-se:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^i k e^{2+j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e^{2+j} \sum_{k=1}^i k =$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n e^{2+j} \frac{(1+i)i}{2} = e^2 \sum_{i=0}^n \frac{(1+i)i}{2} \left( \sum_{j=0}^n e^j \right) =$$

$$e^2 \left( \sum_{j=0}^n e^j \right) \left( \sum_{i=0}^n \frac{(1+i)i}{2} \right) = \quad (\text{Fórmula 4 – progressão geométrica de razão } e)$$

$$e^2 \left( \frac{e^{n+1}-1}{e-1} \right) \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n i^2 \right) = \quad (\text{fórmula 6})$$

$$e^2 \left( \frac{e^{n+1}-1}{e-1} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \quad (\text{simplificando})$$

$$\frac{e^2(e^{n+1}-1)n(n+1)(n+2)}{6(e-1)}$$

▽

#### Exemplo 5:

Pretende-se calcular  $\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} i e^{j-i}$ . Tem-se:

---

<sup>22</sup> Há quem considere que quando tal não é o caso, o valor do somatório é sempre zero, mas não estamos aqui impor essa assumpção genérica (embora se assuma que  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ , se  $n=0$ ). Sobre isto veja-se p.ex. [27], pág. 501 (exercício resolvido 2.1).

$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} ie^{j-i}$  = (embora não seja necessário, suponha-se, para ilustrar, que se quer somar primeiro em j)

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ie^{j-i} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n ie^{j-i} = \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^n e^{j-i} = \quad (\text{optando por fazer a mudança de variável: } k=j-i-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{k=0}^{n-i-1} e^{k+1} = e \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{k=0}^{n-i-1} e^k = \quad (\text{Fórmula 4 - progressão geométrica de razão } e)$$

$$e \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{e^{n-i}-1}{e-1} = \frac{e}{e-1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} ie^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} i \right) = \frac{e}{e-1} \left( e^n \sum_{i=1}^{n-1} i (e^{-1})^i - \frac{n(n-1)}{2} \right) = \quad (\text{Fórmula 5})$$

$$\frac{e}{e-1} \left( e^n \frac{e^{-1} - n(e^{-1})^n + (n-1)(e^{-1})^{n+1}}{(e^{-1}-1)^2} - \frac{n(n-1)}{2} \right) = \quad (\text{simplificando})$$

$$e^{n+3} \frac{e^{-1} - ne^{-n} + (n-1)e^{-n-1}}{(e-1)^3} - \frac{en(n-1)}{2(e-1)} = \quad (\text{simplificando})$$

$$\frac{e^{n+2} - ne^3 + (n-1)e^2}{(e-1)^3} - \frac{en(n-1)}{2(e-1)}$$

(resultado que ainda poderá ser simplificado, o que se deixa ao cuidado do leitor)

▽

### Exercícios:

Determine:

$$1. \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{i+j}$$

$$2. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (j^2 + i)$$

$$3. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m e^{i+j} \quad (\text{para } n, m \geq 1)$$

$$4. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (2ij^2 + 1) \quad (\text{para } n \geq 1)$$

$$5. \sum_{i=1}^7 \sum_{j=5}^{10} (2j - 3ij)$$

$$6. \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^j \frac{2k}{j}$$

$$7. \sum_{i=5}^{10} \sum_{k=0}^{20} (ik - 5k)$$

$$8. \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^n k(2^i + 1)$$

▽