Részcsoport

Def Egy G csoport $H\neq\emptyset$ részhz-t G egy részcsoportjának nevezzük, ha H is csop. a G-n értelmezett műveletre nézve

Tétel Egy G csoport részhz-a részcsoport $\Leftrightarrow H^2\subset H \wedge H^{-1}\subset H$
(ahol $HH=H^2=\{h_1h_2 \mid h_1,h_2\in H\}$
és $H^{-1}=\{h^{-1}\mid h\in H\}$)

Biz H részcsoport $\boxed{\Rightarrow}$ $H^2\subset H$ (művelet tulajdonsága)

$\hookrightarrow \exists f\in H$ egység $\to f^2=f \to f$ idempotens

$\to f=\underbrace{e}_{\in G}$ mivel 1db idempotens elem van, ez az e

$h\in H \to \exists h_H^{-1}\in H: hh_H^{-1}=h_H^{-1}h=e$

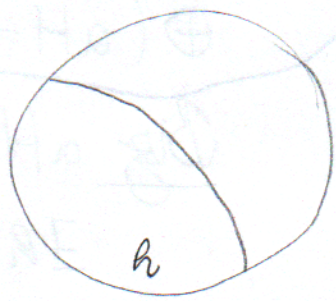
$\to h\in G: \exists h_G^{-1}\in G: hh_G^{-1}=h_G^{-1}h=e \to$

$\to hh_H^{-1}=hh_G^{-1}\to h_H^{-1}=h_G^{-1}$ $\boxed{\Rightarrow}$ $H^{-1}\subset H$

$H\neq\emptyset, H^2\subset H, H^{-1}\subset H$

$\forall h\in H: h^{-1}\in H$ (mert $H^{-1}\subset H$)

így $\underbrace{hh^{-1}}_{e}\in H^2\subset H \to e\in H \to$



$\to$ H olyan részfélcsop, amelyben e egységelem
$H^{-1}\subset H$ miatt H minden elemének
van inverze $\to$ H részcsoport

H részcsop, akkor $H^2=H$, $H^{-1}=H$

$$\left.\begin{array}{l} H^{-1}\subset H \to (H^{-1})^{-1}=\{(h^{-1})^{-1}=h \mid h\in H\}=H \\ (H^{-1})^{-1}\subset H^{-1}\to H\subset H^{-1} \end{array}\right\} H=H^{-1}$$