Def (EEKDE-re vonatkozó kezdetiérték probléma ($\boxed{\text{kép}}$)):
U, f, y mint fent, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in U$

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

ER ~~az~~ EEKDE-re vonatkozó $\boxed{\text{kép}}$

2025.09.25

A $\boxed{\text{kép}}$ megoldásának $\exists$-se és !-sége

|| $a_n \to a$ (metr. térben) $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N: d(a_n, a) < \varepsilon$.

Def a_n sorozat metr. térben **Cauchy-sorozat**, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, $n, m > N$
$d(a_n, a_m) < \varepsilon$

|| Cauchy $\mathbb{Q}$-ban $\not\Rightarrow$ konvergens, például $1, 1.4, 1.44, \ldots$ s.i.t. $\sqrt{2}$ tizedestört alakja

Def (H, d) **teljes**, ha $\forall$ Cauchy sorozat konvergens is

Def $k: H \to H$ **kontrakció**, ha $\exists q < 1$, hogy $\forall (x, y) \in H^2$-re
$d(k(x), k(y)) \leq q\, d(x, y)$

Tétel (Banach vagy kontrakciós fixponttétel)
(H, d) teljes metrikus tér, k kontrakció: $\exists!\, \hat{x}_0 \in \mathrm{Dom}(k)$, $k(\hat{x}_0) = \hat{x}_0$

Tétel (Fixpont-keresés)
A fenti fixpontra $\hat{x}_0 = \lim_{n \in \mathbb{N}} \{x_n = k(x_{n-1})\}$ $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in H$

Biz $x_1 \in H$ $\quad x_2 = k(x_1), \ldots, x_{n+1} = x(k_n)$

$d(x_2, x_1) \leq q\, d(x_1, x_0)$, mert k kontr., innen

$d(x_{n+1}, x_n) \leq q\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots < q^{n-1} d(x_2, x_1)$