

Differenciálegyenletek 1

2025. 09. 12.

math. bme. hiv/ ~ műhiss

LZH + vizsga

2 · 20% + 60% (min 40% tüntetésre)

hatvánok: 40, 55, 70, 85

70 ponttól lehet szóbelizni

Közönséges differenciálegyenletek (KDE)

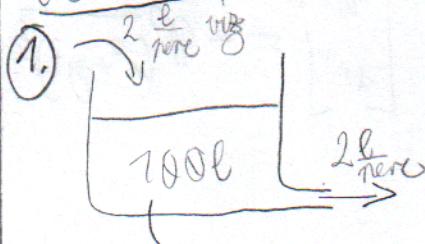
1 független változó

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$y(x) \in \mathbb{R}^n$

|| parciális differenciálegyenletenél lehet több független megoldás

Béldába



2% oldat

|| homogén, lineáris DE

A só mennyisége a tartályban az idő függvényében.

$$\text{Mivel } y(t) \underset{\Delta t}{\rightsquigarrow} 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{y(t)}{100} = y(t) - y(t + \Delta t)$$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{50} y(t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t) = -\frac{1}{50} y(t)$$

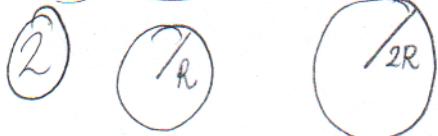
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{50} \quad / \int \dots dt$$

$$\log(y(t)) = -\frac{1}{50} t + C_1 \quad / \exp(\dots)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\frac{1}{50} t} \cdot C_2$$

$$\text{és } y(0) = 2 \rightarrow C_2 = 2$$

$$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$



Mehhova leg a nagyobbibb, mire a kisebbibb elvad

$$V(t + \Delta t) - V(t) \approx -h A(t) \cdot \Delta t$$

$$\text{D } r = -ht + c$$

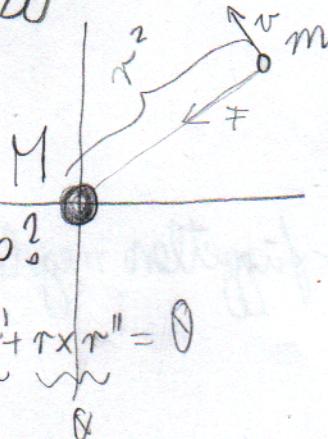
$$r(0) = c = R \text{ és } (1)$$

$$r(t) = -ht + R = 0$$

$$t = \frac{R}{h} \text{ . ekkor elvad}$$

$$r\left(\frac{R}{h}\right) = -h \frac{R}{h} + 2R = \underline{\underline{R}}$$

3. Bolygómozgás



Miért siklomozgás?

$$(r \times r')' = \underbrace{r' \times r'}_0 + \underbrace{r \times r''}_0 = 0$$

Ezt nem tudjuk megoldani

$$M > m$$

$$F = -\gamma \frac{M m r}{(r^2)^{3/2}} = m r^2 \ddot{r}$$

$$-\gamma \frac{M}{(x^2+y^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\text{ha. } u = x', v = y'$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = -\gamma \frac{M}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Deff (Explicit elsőrendű KDE, (EEKDE)):

Legyen $U \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ folyt.

$\forall y: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ismeretlen függvényre felírt egyenletet EEKDE-nak nevezzük.

Deff (EKKDE-re vonatkozó szövegbeni probléma (hely)):
 u, f, y mint függvények, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in U$

$$\left. \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

ER az EKKDE-re vonatkozó hely

2025.09.25

Itt (hely) megoldására a 3.-os rész! - sége

$\|a_n \rightarrow a$ (metr. térben) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N: d(a_n, a) < \varepsilon$.

Deff a_n sorozat metr. térben Cauchy-sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n > N: d(a_n, a_m) < \varepsilon$

$\|$ Cauchy Q.-ban \rightarrow konvergens, például $1, 1.4, 1.44, \dots$ s. i. t. \exists tizedestörök alakja

Deff (H, d) teljes, ha minden Cauchy-sorozat konvergens

Deff $h: H \rightarrow H$ kontrahens, ha $\exists q < 1$, hogy $\forall (x, y) \in H^2$ re

$$d(h(x), h(y)) \leq q d(x, y)$$

Tétel (Banach vagy kontraktív fixpont-tétel)

(H, d) teljes metrikus tér, h : kontraktív: $\exists ! \hat{x}_0 \in \text{Dom}(h)$, $h(\hat{x}_0) = \hat{x}_0$

Tétel (Fixpont-herezsé)

Ajánlott fixpontra: $\hat{x} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \{x_n = h(x_{n-1})\}$ $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in H$

Biz $x_1 \in H$ $x_2 = h(x_1), \dots, x_{n+1} = x(h_n)$

$d(x_2, x_1) \leq q d(x_1, x_0)$, mert h kontr., innen

$d(x_{n+1}, x_n) \leq q (d(x_n, x_{n-1})) \leq \dots \leq q^{n-1} d(x_2, x_1)$ Diff / 3

$$d(x_n, x_m) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \dots$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} q^k d(x_2, x_1) \leq \sum_{k=N}^{\infty} q^k d(x_2, x_1) = \frac{q^N}{1-q} d(x_2, x_1) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$$

Tehát $\{x_n = h(x_{n-1})\}$ Cauchy-sorozat, így mivel

(H, d) teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $(x_n) \rightarrow \hat{x}$, h folytonos, ezért
 $x_{n+1} = h(x_n) \rightarrow h(\hat{x}) \rightarrow \hat{x} = h(\hat{x})$ trivialis

Más fixpont nem lehet, mert ha \hat{x} is fixpont, akkor

$$d(\hat{x}, \hat{x}) = d(h(\hat{x}), h(\hat{x})) \leq q d(h(\hat{x}), h(\hat{x})) \rightarrow d(\hat{x}, \hat{x}) = 0 \rightarrow$$

~~fixp.~~

$$\rightarrow \hat{x} = \hat{x} \quad \square$$

|| kontinuális folytonos ment \Rightarrow

All Teljes metrikus tér zárt részhalmazai teljes

Biz $K \subset H$ zárt, $x_n \in K$ -beli Cauchy sorozat. Mivel X

teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $x_n \rightarrow \hat{x} \in H$. Mivel K zárt, $\hat{x} \in K$
 szerintem trivi

$C[a, b], \mathbb{R}) \cong C[a, b]$ vektortér, normált tér és $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ normával

$$\|f+g\| \stackrel{?}{\leq} \|f\| + \|g\| \text{ előző zr. trivi}$$

sof $C[a, b]$ teljes is (amit most elhizzunk)

Defn $D \subset \mathbb{R}^n$, nyílt, ha $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz, ha $\exists L > 0, \forall x, y \in D$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Ha $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és $|f'| \leq L$, akkor f Lipschitz az L konstansral:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f' \right| \leq L|x - y|$$

Általánosítása annak, hogy deriválható és e der. korlátos (that it's a monoton, hogy deriválható tulajdons darabokból áll)

Defn (masodik változójában lokálisan Lipschitz) MVLL

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, MVLL, ha $(t_0, y_0) \in U$

$\exists V$ környezete és azon egy $(V-töb függő)$ $L > 0$ konstansra, hogy $\forall (t, y_1) \text{ és } (t, y_2) \in V$ -re igaz, hogy:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Defn $f: D \subset \mathbb{R}^m$ lokálisan Lipschitz

Defn $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ MVL

Akép megoldásáról

All $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ nyílt, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ folyt., $(t_0, y_0) \in U$,

$$y(t) \text{ mo. } y'(t) f(t, y(t)) \quad \left. \begin{array}{l} \text{kep - nek} \Leftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

a beztörésig
redicent folyt.
legyen

Picard-integrálegyenletnek megoldása

Biz

- hisz erőjük t vált. s-re, integrálunk t₀-től t-ig
 → t szerinti deriváltból hajlik vissza az egyenletet
 t=t₀ esetén visszahajlik a kezdeti feltételt

$y(t)$ folytonossága a deriválásnál feltételezve Lipschitz

Vál Ha f MVL az ~~$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$~~ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ hz-on az L konstansval,

$(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, hh $\exists \delta > 0$, hogy az $y'(t) = f(t, y(t))$ {then} -nál $y(t_0) = y_0$

$\exists!$ mű - a $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ intervallumon

Biz Ha $F(y) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ és $F \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, ahol

$\delta < \frac{1}{L}$, ekkor be kell látni, hogy F-nél $\exists!$ fixpontja \Rightarrow kontraktív

$$\begin{aligned} d(F(y), F(z)) &= \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds - \right. \\ &\quad \left. - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds \right) \right| = \max_{|t - t_0| \leq \delta} \left| \int_{t_0}^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \max_{|t - t_0| \leq \delta} \left| \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \right| \stackrel{\text{L-tub.}}{\leq} \max_{|t - t_0| \leq \delta} \int_{t_0}^t L d(y, z) ds \leq \\ &\leq \max_{|t - t_0| \leq \delta} \left| \int_{t_0}^t L |y(s) - z(s)| ds \right| \leq \max_{|t - t_0| \leq \delta} \left| \int_{t_0}^t L d(y, z) ds \right| \leq \\ &\leq L \delta d(y, z) \leq d(y, z) \xrightarrow{\text{Banach-fn}} \exists \end{aligned}$$

plánálkozás
térbeli funkciók
egyed

2025. 09. 26.

Tetel (Picard - Lindelöf)

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyilt, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ folyt., $(t_0, y_0) \in U$.

$a > 0, r > 0$ ($H = [t_0 - a, t_0 + a] \times B(y_0, r) \subset U$)

henger-szűrő

$\exists L > 0 \forall (t, y_1), (t, y_2) \in H \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

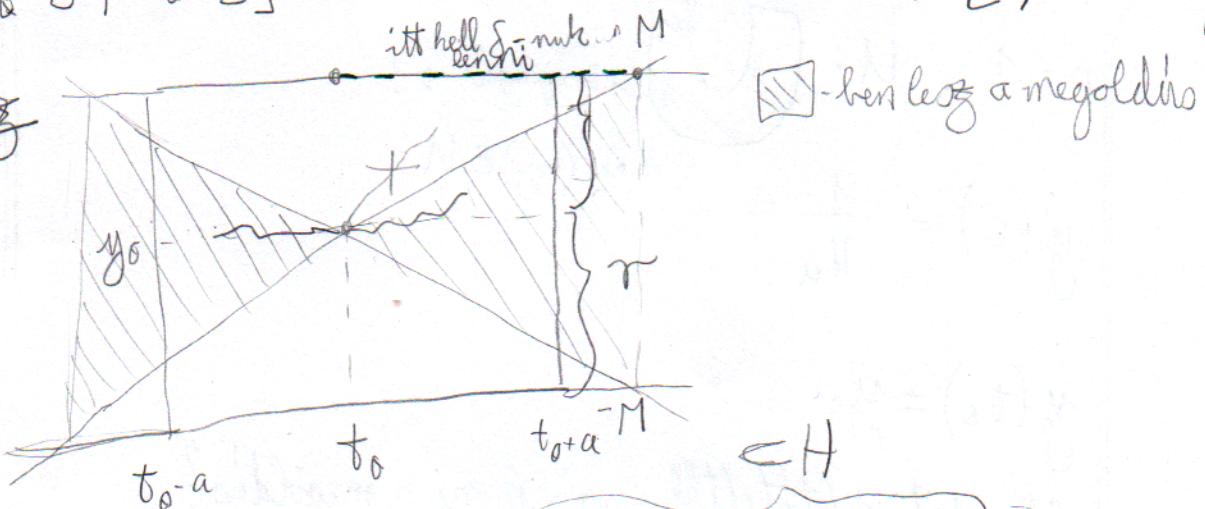
|| Cshális tulajdonság műgánius, hogy kompaktokon teljesül és vizsgázt

|| Tüfenti hővethetősége, ha f MVLL lenne U^n

akkor $y'(t) = f(t, y(t))$ {
 $y(t_0) = y_0$ } hely nek $\exists!$ mű-szűrő a

$[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ int-ón, ha $\delta < \min(\alpha, \frac{\tau}{M}, \frac{1}{L})$, ahol $M = \max_{H}$

Biz



$Y = \{y \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \mid |y(t) - y_0| \leq M|t - t_0|\}$

nillanóból menő füvek

Minden megoldás az Y -ban hosszabb lesz az érintő meredek-sége miatt (itt ezet elhiszük)

Diff 1

2

$$F(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad F: Y \hookrightarrow Y \text{ operator,}$$

P. fele
Y-ba h\'erez (?)
 \Rightarrow m\'o-sa

$$\text{mert } |F(y(t)) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \leq M|t - t_0|, \text{ teh\'at } F$$

$\boxed{\text{h\'ep}}$ m\'o-sa
Y teljes metr. t\'er m\'est a $C[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ teljes metrikus t\'er
z\'art r\'egisz-a. F kontrah\'cio, mert

$$d(F(y), F(z)) = \max_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} |f(y(t)) - f(z(t))| = \max_{|t - t_0| \leq \delta} \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) - f(s, z(s)) ds \right|$$

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds \right| \leq \dots \leq L \delta d(y, z) \quad \# \text{ kontrah\'cio}$$

mint előző
b\'iz

a Banach-fixpont szerint F -nek pontosan egy fixpontja van \Leftrightarrow
 \Leftrightarrow a Picard-f\'ele egyenletnek pontosan egy megoldása van \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow \boxed{\text{h\'ep}}\text{-neh } \exists!$

nem \'of \rightarrow nem !

$n=1 \quad U:$  összefoglaló $\rightarrow !$

$$y'(t) = \frac{1}{\|u\|} = \begin{cases} 1 & u(t, y) \in U \\ 0 & \text{t\'arthat\'o} \end{cases}$$

$\|u\|$ U-har\'ak
teljesit\'hus f\'or
 $\|u(t, y)\| = \begin{cases} 1 & \text{t\'arthat\'o} \\ 0 & \text{t\'arthat\'o} \end{cases}$

$$y(t_0) = y_0$$

K\'ezdeti feltetl\'etb\'ol f\"ugg\"en mi a megold\'as?

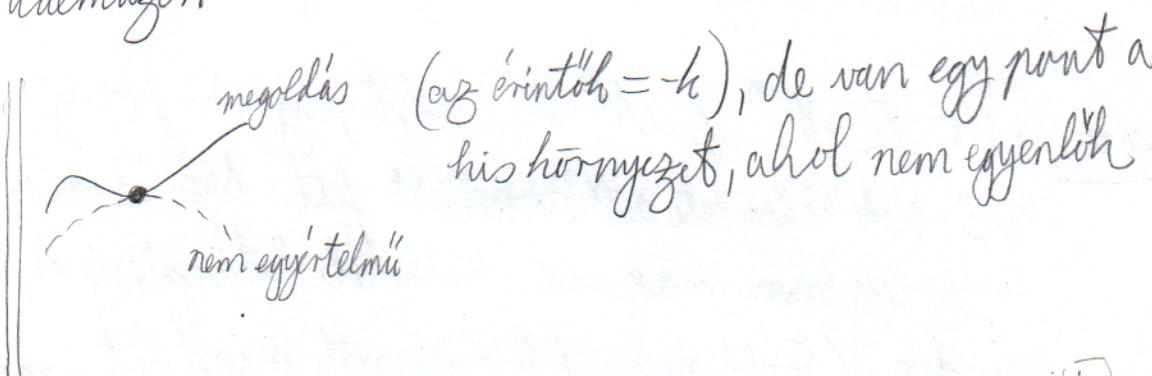
\checkmark bal oldalhoz i z\'alhat\'ig b\'armely jobb oldali
tartozhat, tt ha az \'eszt. tart. nem \'of, akkor nem

lesz \'of-s\'eg

$\varphi(t)$ m\'o-sa $\boxed{\text{h\'ep}}$ -neh, ha $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

Defn $t \in \text{Dom}(\varphi)$ -re φ Dom(φ) of (intervallum)

Diff A $\boxed{\text{hely}}$ megoldásra lóhálisan $!$, ha $\varphi_1(t)$ és $\varphi_2(t)$ is megoldás, akkor $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap \text{Dom}(\varphi_1) \cap \text{Dom}(\varphi_2)$ halmazon

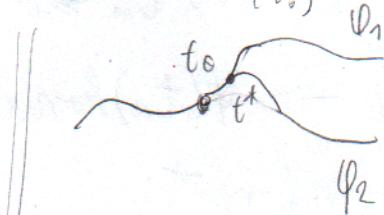


All $y'(t) = f(t, y(t))$ DE-hoz tart $\boxed{\text{hely}}$ más-sa lóh. $!$, ahol globalisan is $!$ megoldások

Biz $y(t_0) = y_0 \exists \varphi_1 \exists \varphi_2 (\varphi_1 \neq \varphi_2) \wedge \exists t > t_0 \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$
 $(t < t_0 \text{ hasonló})$

$$t^* = \inf_{t > t_0} \{t \mid \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}. \quad \varphi_1, \varphi_2 \text{ folyt.}: \varphi_1(t^*) = \varphi_2(t^*)$$

Ezért $y(t^*) = \varphi_1(t^*)$ kezdeti feltételezettet tartozó megoldás lóhálisan nem eggyételű



his intervallum \rightarrow végén van his intervallum $\rightarrow \dots$

\rightarrow lefedjük-e ezzel az int-ohhal az egészet (mit?)

Diff A $\varphi_1(t)$ megoldás bővebb, mint $\varphi_2(t)$, ha $\text{Dom}(\varphi_1) \supset \text{Dom}(\varphi_2)$ és $\text{Dom}(\varphi_2) \cap \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$

Diff A ~~$\varphi_1(t)$~~ megoldás max., ha φ_2 bővebb, mint $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 = \varphi_1$
 Ha nem max, akkor φ_1 folytatatható

|| a fenti reláció nem dichotóm
 || Ha + hely van mo, akkor van max megoldás is
 megoldásiok részben rendezett hozzá (Zorn-lemma)

Lemma

műlt
 $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ folyt., $y'(t) = f(t, y(t))$
 DE-nak ~~az~~ feltételek ~~az~~ felt. hely \exists mo \rightarrow
 \rightarrow egy ~~max~~ max mo. határától határig teljes, azaz
 minden $K \subset U$ kompakt halmazt minden ívályban
 $(t < t_0 - \text{ra és has.) elhagy.}$

Biz $\exists K \subset U$ kompakt, $f|_K$ max mo. $\varphi(t) \quad t > t_0$ nem
 hagyja el a K -t ($t < t_0$ hasonló), azaz $\varphi(t|f(t)) \in K$
 K -n $|f|$ maximuma M , hh $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| =$
 $= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M |t_1 - t_2| \rightarrow \varphi$ egycsatornás
 folytonos

b Dom(φ) felső végrontja, $b \notin \text{Dom}(\varphi) \rightarrow$
 $\rightarrow \varphi(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi(t) \quad \exists$ (mert $t_n \rightarrow b \rightarrow t_n$ Cauchy \rightarrow
 $\rightarrow \varphi(t_n)$ is Cauchy $\rightarrow \varphi(t_n)$ konvergens)
 φ valrók diffható b-ben (mert:

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{\varphi(b) - \varphi(t)}{b - t} = \lim_{t \rightarrow b^-} \varphi'(c) =$$

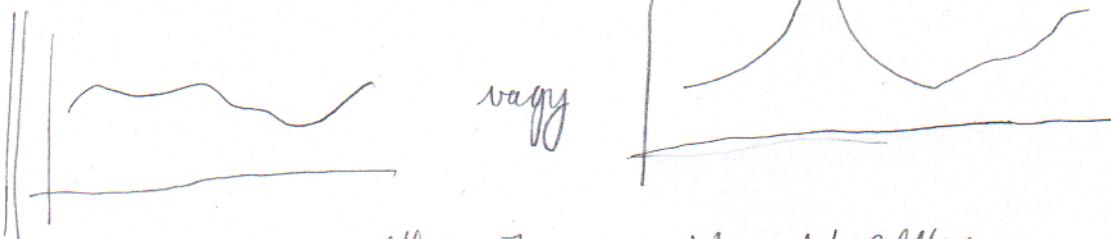
Lagrange: $\exists c \in (t, b)$

$$= \lim_{t \rightarrow b^-} f(c, \varphi(c)) = f(b, \varphi(b))$$

φ folytatatható!

$b \in \text{Dom}(\varphi)$ mib

$b \in \text{Dom}(\varphi)$, íh φ folytatható az $y(b) = \varphi(b)$ kezdeti feltételez tartozó bármely megoldással $\rightarrow \varphi$ nem volt maximális



lokalis Lips. \rightarrow lokalisan \exists mo \rightarrow kezdeti feltételez igaz \rightarrow
 \rightarrow összeműködő + kell még, hogy összefüggő legyen

Tetel (Picard-Lindelöf, globális változat)

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \xrightarrow{\text{D}} \mathbb{R}^n$ folyt., MVL,
 $(t_0, y_0) \in U$, ekkor az $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ } [kép]-nak

létezik max. megoldása, ez a megoldás globalisan egyetlen
 mű és határtól határig terjed.

Biz $\forall (t_0, y_0) \in U, \exists V \subset U (f \text{ MVL } V \cap \mathbb{R}^n)$. A lokalis
 változat szerint $\exists \delta > 0$, hogy $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap V \neq \emptyset$
 megoldása van az $y(t_0) = y_0$ kezdeti feltételel felé
 [kép]-nek. Legyen $\text{Dom}(\varphi) = \cup_{t \in V} \text{Dom}(\varphi)$

Ez értelmes, mert a megoldás $\varphi^{(t_0)}$ -nek [kép]-nek \rightarrow globalisan
 !:

$$\varphi(t) = \varphi(t) \text{ jóldef.}$$

Ez global max megoldás és határtól határig terjed