Valszám gyak 2025.09.09.

pontos feladatok megoldása

1.1

$\underbrace{\frac{11!}{4!\,4!\,2!}}_{m}, \quad \underbrace{\frac{11!}{5!\,2!\,2!}}_{a} \qquad \frac{2\cdot m\cdot a}{22!}$

$m = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11$

1.14

20	db család	db gyerek	esély, hogy db gyerek van /20	esély, hogy gyerek /48 (hány gyerekes családból szárm.)
5	5	1	5	5
14	7	2	7	14
12	4	3	4	12
12	3	4	3	12
5	1	5	1	5

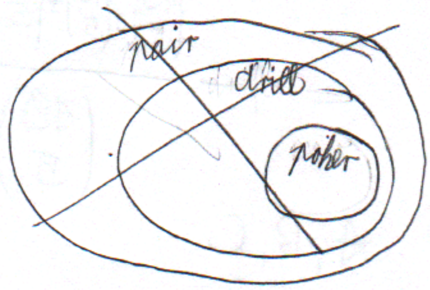
1.15 18 őz, 5 megj

$$\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{13}{2}}{\binom{18}{4}}$$

eseménytér: 18 őz közül 4 befogása

események: 0, 1, 2, 3, 4 jelöletlen őz lesz.

1.16 egy pár, de csak egy pár



full house: $\underbrace{13\cdot\binom{4}{3}}_{\text{drill}}\cdot\underbrace{12\binom{4}{2}}_{\text{pár}}$

póker: $13\cdot\binom{48}{1}$

drill: $13\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{49}{2}$ − (full house) − (póker)

2 pairs: $\binom{13}{2}\binom{13}{2}\cdot\binom{48}{1}$ − (póker) − (full house)

royal-flush: 4

színsor: $4\cdot 9$ − (r. flush)

flush: $\binom{13}{5}\cdot 4$ − (színsor) − (royal-flush)

pair: $13\cdot\binom{50}{3}$ − (f. h) − (drill) − (póker)

1.12

1.20. $6\overset{1}{p}, 6\overset{2}{f}, 7\overset{3}{k}$ $\mathbb{P}$(mind a három szín előfordul) =

$= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \cancel{\mathbb{P}(\bigcup_{i\in 3} C_i)} = \mathbb{P}(A)$

$A_1 = \{$piros szerepel 5-ből$\}$

$A_2 = \{$fehér szerepel —"—$\}$

$A_3 = \{$kék szerepel —"—$\}$

$C_i = \{$i-edik színt nem húzzuk ki$\}$

$$P(A) = 1 - \mathbb{P}(C_p \cup C_f \cup C_k) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(C_p) - \mathbb{P}(C_f) - \mathbb{P}(C_k) + \mathbb{P}(C_p \cap C_k) + \mathbb{P}(C_p \cap C_F) +$$

$$+ \mathbb{P}(C_f \cap C_K) - \underbrace{\mathbb{P}(C_p \cap C_f \cap C_k)}_{0} =$$

$$= 1 - \frac{\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{12}{5} - \binom{6}{5} - \binom{7}{5} - \binom{6}{5}}{\binom{19}{5}}$$

1.21. A, B, C

$$\Omega = \{(i, n) : i = A, B, n \geq 2\}$$

$$\Omega = \{AA, ACC, ACBB, ACBAA, \dots, BB, BCC, BCAA, \dots\}$$

$$\tilde{A} = \{\text{Anna nyer}\} = \{\overset{(A,2)}{AA}, \overset{(A,5)}{ACBAA}, \overset{(A,8)}{ACBACBAA}, \overset{(B,4)}{BCAA}, \underset{(B,7)}{BCABCAA}, \dots\}$$

$E_i := \{$i nyer először$\}$

$$\mathbb{P}(\tilde{A} \cap E_A) = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-8} + \dots = 2^{-2} \cdot \frac{1}{1-2^{-3}} = \frac{2}{7}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{A} \cap E_B) = 2^{-4} + 2^{-7} + \dots = 2^{-4} \cdot \frac{1}{1-2^{-3}} = \frac{1}{14}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{A}) = \mathbb{P}(\tilde{A} \cap E_A) + \mathbb{P}(\tilde{A} \cap E_B) = \frac{5}{14}$$

$\mathbb{P}(\tilde{B}) = \frac{5}{14}$, $\mathbb{P}(\tilde{C}) = \frac{2}{7}$

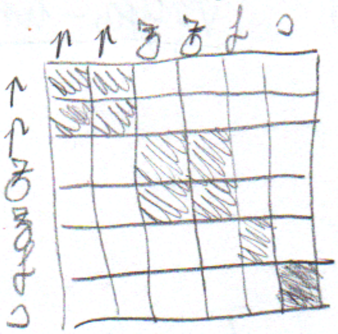
$$2\cdot 2^{-2} + 2\cdot 2^{-3} + \dots = 2\cdot 2^{-2}\cdot \frac{1}{1-2^{-1}} = 1$$

~~az~~, hogy mi a vszínűsége hogy n hosszú meccset játszanak

1.25. 2 kocka
↳ 2 p, 2 z, 1 o, 1 f oldal

$\Omega = \{(p,p), (p,k), \dots, (f,f)\}$

$\mathbb{P}((p,p)) = \frac{2^2}{6^2}$ $\qquad$ $\mathbb{P}((f,f)) = \frac{1}{6^2}$



$$\mathbb{P}(A) = \frac{2^2+2^2+1+1}{6^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b) $\mathbb{P}(\text{különbözőek}) = \frac{26}{36} = \frac{13}{36}$

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = \frac{26\cdot 26\cdot 16}{(6^2)^3}$$

2025. 09. 22.

2.3 a) $1 - \mathbb{P}(\text{nincs zöldje}) = 1 - \binom{15}{5} \Big/ \binom{20}{5}$

b) $\mathbb{P}$(nekem 2 piros ~~nem zöld~~ és 3 zöldem van és a másiknak van zöldje) = *

|| de $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B)$

$$\mathbb{P}(\text{nekem 2 piros és 3 zöldem van}) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{20}{5}}$$

$* = \binom{5}{2} \Big/ \binom{20}{5}\binom{15}{5}$

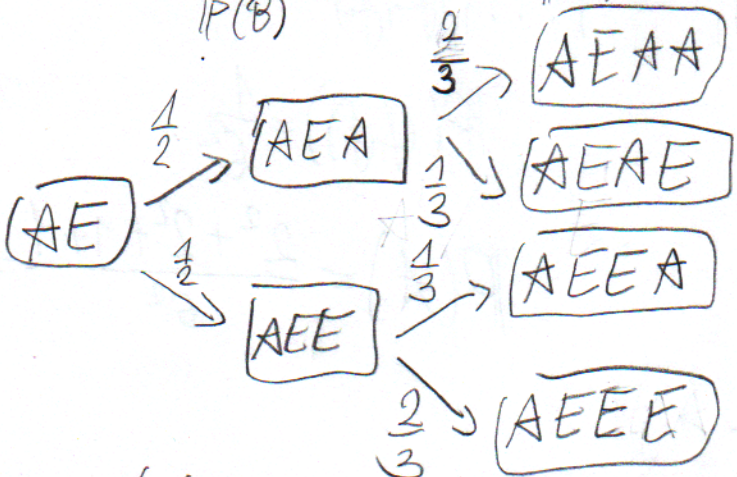
Áll $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B)$

$\cancel{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$

$\cancel{\mathbb{P}(A^c|B) = \frac{\mathbb{P}(A^c\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$

$$\mathbb{P}(\overbrace{A\cup A^c}^{\Omega}|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cup A^c\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cup A^c\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B)+\mathbb{P}(A^c|B) = 1$$

2.6



Pólya-urna

$A_i = \{$Ádám here i főből, ha 4 fő van$\}$

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(AEEE) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(AEAE) + \mathbb{P}(AEEA) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(AEAA) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2.8. $A,B,C = \{A,B,C$ sütötte$\}$ $\quad \mathbb{P}(R|A,B,C) = (0.02, 0.03, 0.05)$

$R = \{$rossz a süti$\}$ $\quad \mathbb{P}(A,B,C) = (0.5, 0.3, 0.2)$

$$\mathbb{P}(A|R) = \frac{\mathbb{P}(A\cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R|A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(R|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C)} =$$

$$= \frac{0.02\cdot 0.5}{0.5\cdot 0.2 + 0.03\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.5} = \frac{0.01}{1.13} = \frac{1}{113}$$

2.10

	F	L
1	12	8
2	6	n

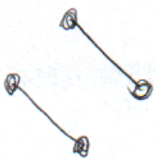
$$\mathbb{P}(F)\cdot\mathbb{P}(1)=\mathbb{P}(F\cap 1)$$
$$\mathbb{P}(L)\cdot\mathbb{P}(1)=\mathbb{P}(L\cap 1)$$
$$\mathbb{P}(F)\cdot\mathbb{P}(2)=\mathbb{P}(F\cap 2)$$
$$\mathbb{P}(L)\cdot\mathbb{P}(2)=\mathbb{P}(F\cap 2)$$

$\mathbb{P}(n)=$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(A\cap B)=\\ &=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ &\mathbb{P}(A)\neq 0\neq \mathbb{P}(B)\end{aligned}}$$

2.15.

n fő $\quad A_{i,j} \quad i,j\in \underline{n} \quad i<j \quad A_{i,j}$

páros mert  e kettő kapcsolat ftlen, de

teljes nem mert már 3 embernél 

$$B_{i,x}=\{\text{i-nek x-edikén van a szülinapja}\} \qquad x\in\underline{365}$$

$$\mathbb{P}(A_{i,j})=\sum_{x\in\underline{365}}\mathbb{P}(B_{i,x}\cap B_{j,x})\overset{\text{ftlenség}}{=}$$

$$=\sum_{x\in\underline{365}}\mathbb{P}(B_{i,x})\cdot\mathbb{P}(B_{j,x})=\sum_{x\in\underline{365}}\frac{1}{(365)^2}=\frac{1}{365}$$

hallgatólagosan, hogy teljesen ftlenek

$$\mathbb{P}(A_{i,j}\cap A_{k,l})=\sum_{x,y\in 365}\mathbb{P}(B_{i,x}\cap B_{j,x}\cap B_{k,y}\cap B_{l,y})=$$

$$=\sum_{x,y\in 365}\frac{1}{(365)^4}=365^2\cdot\frac{1}{365^4}=\frac{1}{(365)^2}$$

$$\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{ik}) = \sum_{x \in \underline{365}} \mathbb{P}(B_{ix} \cap B_{jx} \cap B_{kx}) = \sum_{x \in \underline{365}} \frac{1}{(365)^3} =$$

$$= \frac{1}{365^2} = \mathbb{P}(A_{ij})\,\mathbb{P}(A_{ik})$$

Tehát az $\binom{n}{2}$ esemény ~~páratlanul~~ páronként ftlenek

b) már ~~megmutattuk~~ megmondtuk, hogy nem

$$\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{jk} \cap A_{ki}) = \sum_{x \in \underline{365}} \mathbb{P}(B_{ix} \cap B_{jx} \cap B_{kx}) =$$

$$= \frac{1}{365^2} \neq \frac{1}{365^3} = \mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{jk} \cap A_{ki})$$

2.17.

$A_i \quad i \in \mathbb{N} \qquad A_i = \{\text{i-edik vizsgán átmegy}\}$

$$\mathbb{P}(A_i \mid A_{i-1}^c \cap \ldots \cap A_1^c) = \frac{1}{1+i} \qquad \frac{1+k-1}{1+k}$$

$$1 - \mathbb{P}(\text{soha nem megy át}) = 1 - \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1+k}\right) = 1 - 0$$

$$\cancel{= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n} + \ldots \neq}$$

$$\cancel{= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n}\right.}$$

$$\cancel{\frac{n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n} = \frac{(n-2)n + (n-1)^2}{(n-1)n} =}$$

$$\cancel{= \frac{n^2 - 2n + n^2 - 2n + 1}{n^2 - n} = \frac{2n^2 - 4n + 1}{n^2 - n}}$$

2.26.

$A = \{$elsőre jót választottam$\}$

$B = \{$

3.8.

2025. 09. 30.

$A = \{\alpha$ korhát használjuk$\}$

$B = \{\beta$ —— " —— $\}$

$A \cap B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

$C_k = \{k$-adik korhadobás eredménye piros$\}$ események nem függetlenek, de feltételesen függetlenek, ha tudjuk a korhadobás eredményét

a) $\mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}(C_k \cap A) + \mathbb{P}(C_k \cap B) =$

$$= \mathbb{P}(C_k | A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C_k | B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

b) $$\mathbb{P}\left(C_k \,\middle|\, \bigcap_{i \in k-1} C_i\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in k} C_i\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in k-1} C_i\right)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bigcap_k C_i) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\bigcap_k C_i)}{\mathbb{P}(A)\underbrace{\mathbb{P}(\bigcap_{k-1} C_i)}_{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}} + \mathbb{P}(B)\underbrace{\mathbb{P}(\bigcap_{k-1} C_i)}_{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} = r_k$$

$a^k + b^k =$
$= (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \dots + b^{k-1})$

$r_k > \frac{1}{2}$ ha $k \geq 2$

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} r_k = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} =$$

(3.4) A, B, C, D, E

X ÷ ahány mérkőzést A megnyer $\rightsquigarrow$ 0 – 4

$\mathbb{P}(X=k)$

$k \in \underline{4}_0$

__trükk__ Könnyebb kiszámolni mást:

$\mathbb{P}(X \geq k)$ értékét $k \in \underline{4}_0$

$\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}($az első k meccset A nyeri$) =$

$= \mathbb{P}($A nyeri és a másik k másik játékosközül ő a legjobb$) = \frac{1}{k+1}$, hisz ezen $k+1$ játékos ~~közül~~ bármely relatív sorrendje ugyanolyan valószínű

$p_k = \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) =$

$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ $\quad k \in \underline{3}_0$

$k=4 \quad \mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{5}$

$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot \frac{1}{5}$

Túlélési valószínűség

ez a 0-s

	p_1			
	2	2		
soronként Σ	3	3	3	
ez a várható érték	4	4	4	4

oszloponként $\sum_{k=1} \mathbb{P}(X \geq k) =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

3.19. X = ahányszor kockával 6-ost dobtunk

$X \sim Binom\left(3, \frac{1}{6}\right)$

$p_k = \mathbb{P}(X = k) \quad k \in \underline{3}_0$

$p_k = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k} \qquad \mathbb{E}(X) = np = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2p_2 + 3 \cdot p_3$

nettó nyereményem: Z petákban

$$Z = \begin{cases} X, & \text{ha } X \geq 1 \\ -1, & \text{ha } X = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Z) = \boxed{-1}\, p_0 + \boxed{1}\, p_1 + \boxed{2}\, p_2 + \boxed{3}\, p_3 =$$

$$= \mathbb{E}(X) - p_0 = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = -\frac{17}{216}$$

3.20. A ma meghibásodó alkatrészek számát jelöljük X-szel

$X \sim Binom(n, p)$ túlélési valószínűség ha

$\mathbb{P}(\text{ma leáll}) = \mathbb{P}(X \geq k) =$

$$= \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n-l} = q$$

már látom az integrál-jeleket, ahogy szállnak felénk dörgelemmel

Ha Y-adik napon áll le először a rendszer, akkor

$Y \sim Geom(q)$ (Független q valségű kísérleteket végzek és Y a próbálkozások száma ~~az~~ első sikerig)

$$\mathbb{P}(Y=t) = (1-q)^{t-1} q$$

3.14. π-edik feladat (ez +2 pont)

$A = \{\text{Anna nyer}\}$ $B = \{\text{Bori nyer}\}$

$C = \{\text{Döntetlen}\}$

A, B, C teljes eseményrendszer

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c)\,\mathbb{P}(\text{Bori legalább egy 6-ost dob} \mid A^c) =$

$= \frac{55}{216}$

$$\mathbb{P}(C) = \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)}_{\mathbb{P}(A^c)} \cdot \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^2}_{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{125}{216}$$

a) $X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{91}{216}\right)$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{216}{91}$$

b) $\mathbb{P}(\text{Anna győz})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{a } k. \text{ körben győz}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(C)^{k-1}\,\mathbb{P}(A) =$$

$$= \mathbb{P}(A) \frac{1}{1-\mathbb{P}(C)} = \frac{36}{91}$$

$$\mathbb{P}(\text{Anna győz}) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A\cup B)} =$$

$= \mathbb{P}(A \mid A\cup B)$ ez elméletileg