Diffegyenletek 1

2025.09.12.

math.bme.hu/~mhiss

ZH + vizsga

$2\cdot 20\% + 60\%$ (min 40% külön-külön)

határok: 40, 55, 70, 85

70 ponttól lehet szóbelizni

Közönséges differenciálegyenletek (KDE)

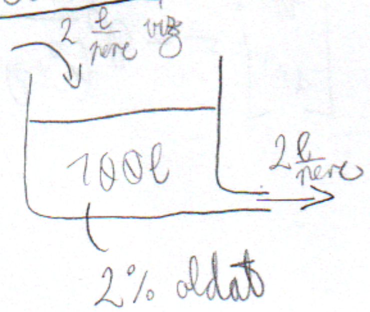
1 független változó

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$y(x) \in \mathbb{R}^n$

|| parciális diffegyenleteknél lehet több független megoldás

Példák

1. 

A só mennyisége a tartályban az idő függvényében.

Mo: $y(t) \xrightarrow[0]{\Delta t} 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{y(t)}{100} = y(t) - y(t+\Delta t)$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{50} y(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t) = -\frac{1}{50} y(t)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{50} \quad \Big/ \int \dots dt$$

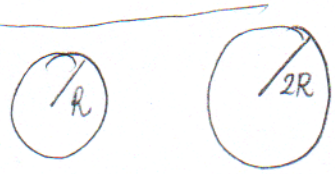
$$\log(y(t)) = -\frac{1}{50} t + c_1 \quad \Big/ \exp(\dots)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\frac{1}{50}t} \cdot c_2$$

és $y(0) = 2 \rightarrow c_2 = 2$

$y(t) \xrightarrow[\infty]{t} 0$

|| homogén, lineáris DE

(2) 

Mekkora lesz a nagyobbik, mire a kisebbik elolvad

$$V(t+\Delta t) - V(t) \approx -k A(t)\cdot \Delta t$$

$$\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} \approx -k A(t) \quad \Big/ \ \Delta t \to 0$$

$$V'(t) = -k A(t)$$

$$\cancel{4} r^2 \cancel{\pi} r' = -k \cancel{4} r^2 \cancel{\pi}$$

$$r' = -k$$

$\Rightarrow r = -kt + c$

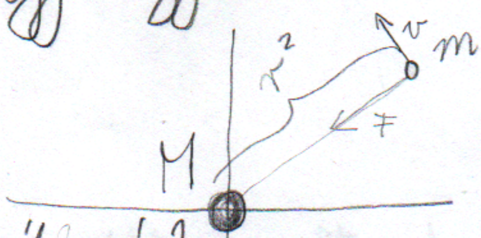
$r(0) = c = R$ és

$r(t) = -kt + R = 0$

$t = \frac{R}{k}$ ekkor olvad

$$r\left(\frac{R}{k}\right) = -k\frac{R}{k} + 2R = \underline{\underline{R}}$$

(3.) Bolygómozgás



$M >> m$

$$F = -\gamma \frac{M m r}{|r|^2} = \cancel{m} r''$$

$$-\gamma \frac{M}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

Miért síkmozgás?

$$(r \times r')' = \underbrace{r' \times r'}_{0} + \underbrace{r \times r''}_{0} = 0$$

ha $u = x'$, $v = y'$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = -\gamma \frac{M}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ezt nem tudjuk megoldani

Def (Explicit elsőrendű KDE, (EEKDE)):
Legyen $U \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : U \to \mathbb{R}^n$ folyt.
Az $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ismeretlen függvényre felírt egyenletet EEKDE-nek nevezzük.

Deff (EEKDE-re vonatkozó kezdetiérték probléma ($\boxed{\text{kép}}$)):
U, f, y mint fenn, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in U$

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

ER az EEKDE-re vonatkozó $\boxed{\text{kép}}$

2025.09.25

A $\boxed{\text{kép}}$ megoldásának $\exists$-se és $!$-sége

|| $a_n \to a$ (metr. térben) $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N: d(a_n, a) < \varepsilon$.

Deff a_n sorozat metr. térben **Cauchy-sorozat**, ha $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$, $n, m > N$
$d(a_n, a_m) < \varepsilon$

|| Cauchy $\mathbb{Q}$-ban $\not\Rightarrow$ konvergens, például $1, 1.4, 1.44, \ldots$ s.i.t. $\sqrt{2}$ tizedestört alakja

Deff (H, d) **teljes**, ha $\forall$ Cauchy sorozat konvergens is

Deff $k: H \to H$ **kontrakció**, ha $\exists q < 1$, hogy $\forall (x, y) \in H^2$-re
$d(k(x), k(y)) \leq q \, d(x, y)$

Tétel (Banach vagy kontrakciós fixponttétel)
(H, d) teljes metrikus tér, k kontrakció: $\exists! \hat{x}_0 \in Dom(k)$, $k(\hat{x}_0) = \hat{x}_0$

Tétel (Fixpont-keresés)
A fenti fixpontra $\hat{x}_0 = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x_n = k(x_{n-1})\}$ $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in H$

Biz $x_1 \in H$ $\quad x_2 = k(x_1), \ldots, x_{n+1} = x(k_n)$

$d(x_2, x_1) \leq q \, d(x_1, x_0)$, mert k kontr., innen

$d(x_{n+1}, x_n) \leq q \, d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots < q^{n-1} d(x_2, x_1)$ Diff 1

$$d(x_n, x_m) \overset{\triangle\neq}{\leq} \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} q^k d(x_2, x_1) \leq \sum_{k=\underset{\leq m}{N}}^{\infty} q^k d(x_2, x_1) = \frac{q^N}{1-q} d(x_2, x_1) \xrightarrow[\infty]{N} 0$$

Tehát (x_n) $\{x_n = h(x_{n-1})\}$ Cauchy-sorozat, így mivel (H, d) teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $(x_n) \to \hat{x}$, h folytonos, ezért triviális

$$x_{n+1} = h(x_n) \to h(\hat{x}) \to \hat{x} = h(\hat{x})$$

Más fixpont nem lehet, mert ha $\hat{\hat{x}}$ is fixpont, akkor

$$d(\hat{x}, \hat{\hat{x}}) \underset{\text{fixp.}}{=} d(h(\hat{x}), h(\hat{\hat{x}})) \leq q\, d(h(\hat{x}), h(\hat{\hat{x}})) \to d(\hat{x}, \hat{\hat{x}}) = 0 \to$$

$$\to \hat{x} = \hat{\hat{x}} \quad \square$$

|| kontrakció folytonos mert $\triangle$

Áll Teljes metrikus tér zárt részhalmaza teljes

Biz $K \subset H$ zárt, x_n K-beli Cauchy sorozat. Mivel X teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $x_n \to \hat{x} \in H$. Mivel K zárt, $\hat{x} \in K$

szerintem trivi

$C([a,b], \mathbb{R}) \triangleq C[a,b]$ vektortér, normált tér és $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ normával

$$\|f+g\| \overset{?}{\leq} \|f\| + \|g\|$$ előadó szer. trivi

sőt $C[a,b]$ teljes is (amit most elhiszünk)

Def $D \subset \mathbb{R}^n$, nyílt ~~hz~~ $f: D \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz, ha $\exists L > 0, \forall x, y \in D$:

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$$

Ha $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ és $|f'| \le L$, akkor f Lipschitz az L konstanssal:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'\right| \le L|x - y|$$

általánosítása annak, hogy deriválható és e der. korlátos (tehát itt azt mondjuk, hogy deriválható ~~tulajdons~~ darabokból áll)

Deff (második változójában lokálisan Lipschitz MVLL)

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}^n$, MVLL, ha $(t_0, y_0) \in U$ $\exists V$ környezete és azon egy (V-től függő) $L > 0$ konstans úgy, hogy $\forall (t, y_1)$ és $(t, y_2) \in V$-re igaz, hogy:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

ez kell ahhoz, hogy tudjunk találni megoldást

Deff $f: D \to \mathbb{R}^m$ lokálisan Lipsch. $\Big\}\Uparrow$

Deff $f: U \to \mathbb{R}^n$ MVL

A $\boxed{\text{kép}}$ megoldásáról

All $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}^n$ folyt., $(t_0, y_0) \in U$,

$y(t)$ mo. $\left.\begin{matrix} y'(t) f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{matrix}\right\}$ $\boxed{\text{kép}}$-nek $\Longleftrightarrow$ $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$

a biztonság kedvéért folyt. legyen

Picard-integrálegyenletnek megoldása

Biz

$\boxed{\Rightarrow}$ kicseréljük t vált. s-re, integrálunk t_0-tól t-ig

$\boxed{\Leftarrow}$ t szerinti deriváltból kapjuk vissza az egyenletet

$t=t_0$ esetén visszakapjuk a kezdeti feltételt

$\| y(t)$ folytonossága a deriválásnál kellett

Áll Ha f globálisan Lipschitz MVL az $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ kz-on az L konstanssal, $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, kk $\exists \delta>0$, hogy az

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \boxed{\text{kép}}\text{-nek}$$

$\exists!$ mo-a a $(t_0-\delta, t+\delta)$ intervallumon

Biz ha $F(y)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))$ (t függvénye) és $F \in C[t_0-\delta, t_0+\delta]$, ahol $\delta < \frac{1}{L}$, akkor be kell látni, hogy F-nek $\exists!$ fixpontja $\Leftrightarrow$ kontrakció

$$d(F(y), F(z)) = \max_{t\in[t_0+\delta, t_0-\delta]} \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,ds\right)\right| = \max_{|t-t_0|<\delta} \left| \int_{t_0}^{t} \big(f(s, y(s)) - f(s, z(s))\big)\,ds \right| \le$$

$$\le \max_{|t-t_0|<\delta} \left| \int_{t_0}^{t} \big| f(s, y(s)) - f(s, z(s)) \big|\,ds \right| \overset{L\text{-tul.}}{\le}$$

$$\le \max_{|t-t_0|\le\delta} \left| \int_{t_0}^{t} L \underbrace{|y(s) - z(s)|}_{\le d(y,z)}\,ds \right| \le \max_{|t-t_0|\le\delta} \left| \int_{t_0}^{t} L\, d(y,z)\,ds \right| \le$$

$$\le \underbrace{L\delta}_{<1}\, d(y,z) \le d(y,z) \xrightarrow{\text{Banach-fp}} \exists$$

2025.09.26.

Tétel (Picard – Lindelöf)

$U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \xrightarrow{C} \mathbb{R}^n$ folyt., $(t_0, y_0) \in U$.

$a>0,\ r>0\ (\underbrace{H = [t_0-a, t_0+a] \times B(y_0, r)}_{\text{henger-szerű}} \subset U)$

$\exists L > 0\ \forall (t, y_1), (t, y_2) \in H\ \left(|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|\right)$

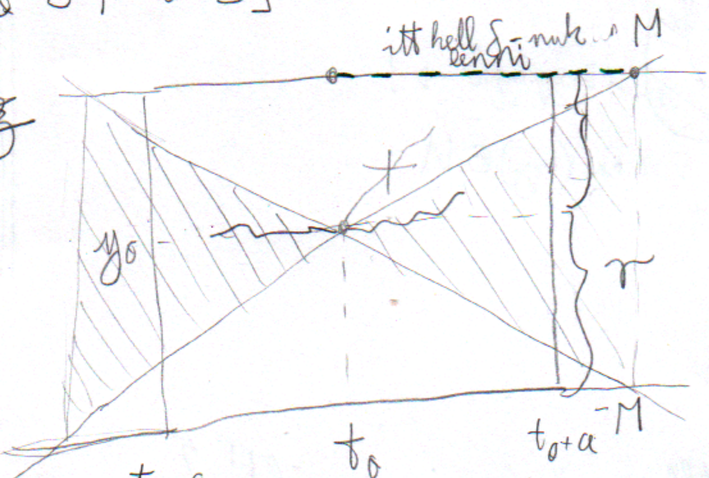
|| Cauchy tulajdonság ⇝ gyanús, hogy kompaktokon teljesül és viszont

|| A fenti következne, ha f MVLL lenne U-n

Ekkor $\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$ $\boxed{\text{kép}}$-nek $\exists!$ mo-sa a

$[t_0-\delta, t_0+\delta]$ int-on, ha $\delta < \min\left(a, \frac{r}{M}, \frac{1}{L}\right)$, ahol $M = \max\limits_{H} |f|$

Biz



▨-ben lesz a megoldás

$\subset H$

$Y = \underbrace{\{y \in C[t_0-\delta, t_0+\delta] \mid |y(t) - y_0| \le M|t-t_0|\}}_{\text{pillangóban menő fvek}}$

Minden megoldás az Y-ban kell lennie az érintő meredekségei miatt (itt ezt elhisszük)

$$F(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds \qquad F: Y \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \text{ operátor,}$$

P-féle mo-sa $\updownarrow$ $\boxed{\text{kép}}$ mo-sa

mert $\left|F(y(t)) - y_0\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds\right| \le M|t-t_0|$, tehát F Y-ba képez(?)

Y teljes metr. tér mert a $C[t_0-\delta, t_0+\delta]$ teljes metrikus tér zárt részhz-a. F kontrakció, mert

$$d(F(y),F(z)) = \max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]} |f(y(t)) - F(z(t))| = \max_{|t-t_0|<\delta} \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s)) -\right.$$

$$\left. - f(s,z(s))\,ds\right| \le \underbrace{\ldots}_{\text{mint előző biz}} \le \underbrace{L\delta}_{<1}\, d(y,z) \Rightarrow \text{kontrakció}$$

a Banach-fixpont szerint F-nek pontosan egy fixpontja van $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ a Picard-féle egyenletnek pontosan egy megoldása van $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{kép}}$-nek $\exists!$ $\blacksquare$

nem öf $\to$ nem !

$n = 1$ $\quad U:$  összefüggő $\to$!

$1\!\!1_U$ U karakterisztikus fv

$1\!\!1_U(t,y) = \begin{cases} 1 & (t,y)\in U \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

$$y'(t) = \frac{1}{1\!\!1_U} = \begin{cases} 1 \text{ ha } (t,y)\in U \end{cases}$$

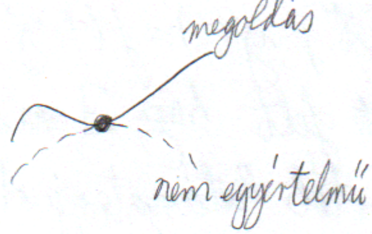
$$y(t_0) = y_0$$

Kezdeti feltételtől függően mi a megoldás?

$\forall$ bal oldalhoz i ~~zahungh~~ bármely jobb oldali tartozhat, $\nexists$ ha az ért. tart. nem öf, akkor nem lesz öf-ség

Deff $\varphi(t)$ mo-sa $\boxed{\text{kép}}$-nek, ha $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ $\forall t \in \mathrm{Dom}(\varphi)$-re és $\mathrm{Dom}(\varphi)$ öf (intervallum)

Def A $\boxed{\text{kép}}$ megoldása lokálisan $\boxed{!}$, ha $\varphi_1(t)$ és $\varphi_2(t)$ is megoldás, akkor $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ $(t_0-\delta, t_0+\delta)\cap Dom(\varphi_1)\cap Dom(\varphi_2)$ halmazon



(az érintők $=-k$), de van egy pont a kis környezet, ahol nem egyenlők

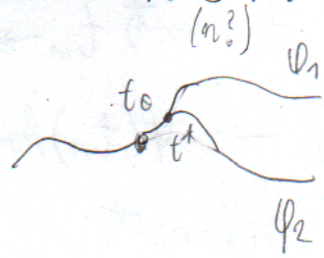
Áll $y'(t)=f(t,y(t))$ DE-hez tart. $\forall$ $\boxed{\text{kép}}$ mo-sa lok. $\boxed{!}$, akkor globálisan is $\boxed{!}$

Biz $y(t_0)=y_0$ $\overbrace{\exists\varphi_1\exists\varphi_2}^{\text{megoldások}}(\varphi_1\neq\varphi_2)\wedge\exists t>t_0\ \ \varphi_1(t)\neq\varphi_2(t)$

($t<t_0$ hasonló)

$t^*=\inf\limits_{t>t_0}\{t\mid\varphi_1(t)\neq\varphi_2(t)\}$. φ_1,φ_2 folyt. (balról is) $:\ \varphi_1(t^*)=\varphi_2(t^*)$

Ezért $y(t^*)=\varphi_1(t^*)$ kezdeti feltételhez tartozó megoldás lokálisan sem egyértelmű



kis intervallum $\to$ végén van kis intervallum $\to$ . . .

$\to$ lefedjük-e ~~ezekkel~~ ~~az~~ int-okkal az egészet (mit?)

Def A $\varphi_1(t)$ megoldás <u>bővebb</u>, mint $\varphi_2(t)$, ha $Dom(\varphi_1)\supset Dom(\varphi_2)$ és $Dom(\varphi_2)$-n $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$

Def A $\varphi_1(t)$ <u>megoldás max.</u>, ha φ_2 bővebb, mint $\varphi_1\to\varphi_2=\varphi_1$

Ha nem max, akkor φ_1 folytatható

|| a fenti reláció nem dichotóm
|| Ha ∀ $\boxed{\text{hép}}$ van mo, akkor van max megoldás is
|| megoldások részben rendezett hzok (Zorn-lemma)

Lemma nyílt $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ folyt., $y'(t)=f(t,y(t))$
DE-nek ∀ kezdeti ~~érték mellett~~ felt.-hez ∃ mo →
→ egy. max mo. határtól határig terjed, azaz
minden $K \subset U$ kompakt halmazt mindkét irányban
($t<t_0$-ra és kas.) elhagy.

Biz $\exists K \subset U$ kompakt, $\varphi(t)$ max mo. $\varphi(t)$ $t>t_0$ nem hagyja el a K-t ($t<t_0$ hasonló), azaz $(t,\varphi(t)) \in K$
K-n $|f|$ maximuma M, kk $|\varphi(t_1)-\varphi_2(t_2)| =$

$$= \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \leq M|t_1-t_2| \to \varphi \text{ egyenletesen is folytonos}$$

b $Dom(\varphi)$ felső végpontja, $b \notin Dom(\varphi)$ →

$\to \varphi(b) = \lim_{t\to b-}\varphi(t)$ ∃ (mert $t_n \to b \to t_n$ Cauchy →
→ $\varphi(t_n)$ is Cauchy → $\varphi(t_n)$ konvergens)

φ balról diffható b-ben (mert:

$$\lim_{t\to b-}\frac{\varphi(b)-\varphi(t)}{b-t} = \lim_{t\to b-}\varphi'(c) =$$

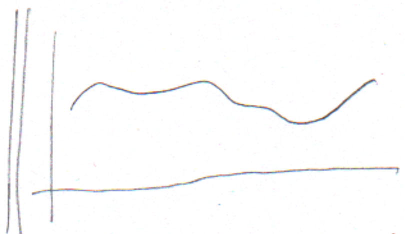
Lagrange: $\exists c \in (t,b)$

$$= \lim_{t\to b-} f(c,\varphi(c)) = f(b,\varphi(b)) \,)$$

↯ φ folytatható

$b \in Dom(\varphi)$ ↯

$b \in \mathrm{Dom}(\varphi)$, kk φ folytatható az $y(b)=\varphi(b)$ kezdeti feltételhez tartozó bármely megoldással $\to$ φ nem volt maximális ■



vagy

lokális Lips. $\to$ lokálisan $\exists$ mo $\to$ $\forall$ kezdeti feltételre igaz $\to$
$\to$ összeuniózom + kell még, hogy összefüggő legyen

Tétel (Picard–Lindelöf, globális változat)

$U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \xrightarrow{D} \mathbb{R}^n$ folyt., MVLL, $(t_0, y_0) \in U$, akkor az

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \boxed{\text{kép}}\text{-nek}$$

létezik max. megoldása, ez a megoldás globálisan egyértelmű és határtól határig terjed.

Biz $\forall (t_0, y_0) \in U$, $\exists V \subset U$ (f MVL V-n). A lokális változat szerint $\exists \delta > 0$, hogy $[t_0-\delta, t_0+\delta]$-n $\boxed{!}$ megoldása van az $y(t_0)=y_0$ kezdeti feltétellel felírt $\boxed{\text{kép}}$-nek. Legyen $\mathrm{Dom}(\Phi) = \bigcup_{\substack{\varphi \text{ mo} \\ \text{a } \boxed{\text{kép}}\text{-nek}}} \mathrm{Dom}(\varphi)$

Ez értelmes, mert a megoldás lokálisan $\boxed{!}$ $\to$ globálisan $\boxed{!}$:

$$\Phi(t) = \varphi(t) \text{ jóldeff.}$$

Ez ~~global~~ max megoldás és határtól határig terjed

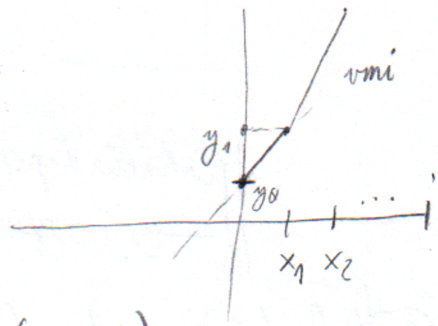
2025.10.03.

A megoldás létezése

// Lipschitz-tulajdonság megakadályozza, hogy a mo elágazzon

Euler-módszer

pl $y' = y$ (// $f(x,y)$) $y(0) = 1$



explicit Euler-módszerrel

$x_0 = 0, x_1, \dots, x_n = 1$ felosztás, akkor

az y-ok képzési szabálya: $\dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y_k) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k)$$

implicit Euler

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_n} = f(x_{k+1}, y_{k+1}) \Longleftrightarrow y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k)(f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Def (Euler-féle törött vonal)

$I \to \varphi(t)$ az $y'(t) = f(t, y(t))$ DE-re von. ~, ha minden szakaszán $\exists P = (t^*, y^*)$ pont, ahol a szakasz meredeksége épp $f(t^*, y^*)$ a (P-re illeszkedő megoldást érinti)

$x_n = \frac{h}{n}$ legyen

$$y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k) = y_k + \frac{1}{n} y_k = \left(1+\frac{1}{n}\right) y_k \rightarrow$$

$$\rightarrow y(1) \approx y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{y_0}_{=1} \longrightarrow e$$, ami a pontos megoldás

Def. $\varphi : I \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ az $y'(t) = f(t, y(t))$ DE-hez tartozó epszilon-hoz. mo., ha:

1. of.
2. véges $S \subset I$-re $(I-S)$-en diffható
3. $|\varphi' - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon \quad \forall t \in (I-S)$.

A véges sok kivétel azért kell, hogy a törött vonal is jó legyen

Ha f egyenl. folyt. és egy Euler-féle törött vonal szakaszai kisebbek, mint az ε-hoz f egyenletes folytonossága alapján tartozó δ, akkor a törött vonal ε-hoz mo lesz, mivel

$t_k < t < t_{k+1}$ $\quad \varphi'(t) = m$ = áll $\quad \exists t^* \in [t_k, t_{k+1}], m = f(t^*, \varphi(t^*))$

a szakasz rövidebb, mint $\delta \rightarrow |(t, \varphi(t)) - (t^*, \varphi(t^*))| < \delta \rightarrow$

$$\rightarrow |f(t, \varphi(t)) - \underbrace{f(t^*, \varphi(t^*))}_{m = \varphi'(t^*) = \varphi'(t)}| < \varepsilon$$

Tétel (ε-közelítő megoldás létezése)

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt, $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ folyt., $t_0, y_0 \in U$

$a > 0$, $r > 0$ $(H = [t_0 - a, t_0 + a] \times B(y_0, r) \subset U$

akkor $\forall \varepsilon > 0$ az $\{y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0\}$ $\boxed{\text{kin}} \Rightarrow$

(kép)-nek van ε-közelítő megoldása a $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ int-on,
ha $\delta < \min\left(a, \frac{r}{M}\right)$, ahol $M = \max_H |f|$

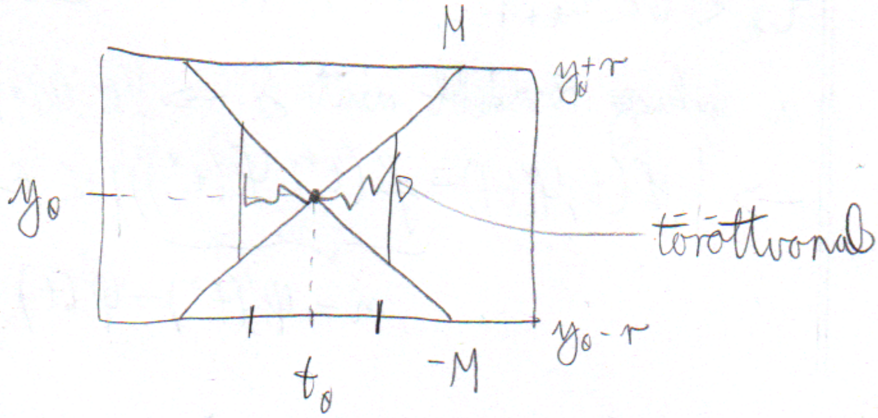
‖ M ahhoz kell, hogy a szakasz hosszát tudjuk korlátozni

Biz: H kompakt $\Rightarrow$ f egyenletesen folyt. H-n. Készítünk egy Euler-töröttvonalat (t_0, y_0)-ból indulva mindkét irányba, úgy hogy a lépéshossz legyen kisebb, mint az ε-hoz f egy. folyt. alapján tartozó $\delta(\varepsilon)$ osztva $\sqrt{M^2+1}$-gyel. $\Rightarrow$

(itt $tg(\varphi)$ a meredekség)

$$h < \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{M^2+1}}$$

$\Rightarrow$ a szakaszok hossza $< \delta(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ a töröttvonal ε-közelítő megoldás (mert $\delta < \left(a, \frac{r}{M}\right)$ miatt nem megy ki H-ból)



■

Lemma (ε-köz. mo. konvergenciája)

$\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ és $\varphi_n(t): I \to \mathbb{R}^n$
ε-közelítő megoldása $y'(t) = f(t, y(t))$-nek
Ha $\varphi_n(t)$ egyenletesen tart $\varphi(t)$-hez I-n, akkor
$\varphi(t)$ pontos megoldás, feltéve, hogy $(t, \varphi(t)) \in Dom(f)$,
ha $t \in I$

Biz Véges sok pontot kivéve

$$\left| \varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t)) \right| < \varepsilon$$

Cseréljük ki (t)-t s-re és integráljunk t_0-tól t-ig

$$\left| \varphi_n(t) - \varphi_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds \right| < \varepsilon_n |t - t_0|$$

|| itt nem eq. lépést végeztünk, hanem lehet látni becsléssel

$$n \to \infty \quad \left| \varphi_n(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) \right| \le 0 \to \varphi \text{ megoldás}$$

|| miért konvergálna egyenletesen?

Def függvények $\mathcal{F}$ halmaza egyenlő mértékben folytonos
$t \in I$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta \to |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$
$\forall f \in \mathcal{F}$-re

Def $\mathcal{F}$ equifolytonos/egyenlő mértékben egyenletesen
folyt. I-n, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, $t_1, t_2 \in I$-re $|t_1 - t_2| < \delta \to$
$\to |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$-re

Tétel (két ember) I korlátos int-on, $\mathcal{F}$ equifolytonos és korlátos I-n. Ekkor $\forall \mathcal{F}$-beli sorozatból kiválasztható egyenletesen folyt. részsorozat

Biz. $\varepsilon > 0$ adott, $\delta = \frac{\varepsilon}{2+1}$ $\mathcal{F}$ equifolyt alapján

Osszuk az I int. fel δ-nál rövidebb szakaszokra, az osztópontokat jelölje $r_1, \dots, r_k$

jelölje f_n a sorozatunkat, $f_n(r_1)$ korl. pontsorozat $\to$ $\to$ kiválasztható konv. részsorozat, jelöljük a megmaradó fv-ek sorozatát f_n-nel. Kiválasztható olyan részsorozat is, amire $f_n(r_j)$ konvergens $\forall\, 1 \leq j \leq k$-ra

$\exists N$ küszöbindex, hogy $n, m > N$-re $|f_n(r_j) - f_m(r_j)| < \frac{\varepsilon}{2+1}$ $\forall\, 1 \leq j \leq k$-ra

|| konv $\to$ Cauchy

Ha $t \in I$, akkor $\exists j$ $(|t - r_j| < \delta)$. Ezzel az r_j-vel

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t) - f_n(r_j)| + $$
$$+ |f_n(r_j) - f_m(r_j)| + |f_m(r_j) - f_m(t)| < (2+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2+1} < \varepsilon \to$$

$\to f_n$ egyenletesen Cauchy

továbbra is rögzített t-re $f_n(t)$ Cauchy $\to$ konvergens határértékét jelölje $f(t)$, $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$-ban n-et rögzítjük, $m \to \infty$ $\to |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$ $n > N$

$\to f_n(t)$ egyenletesen tart $f(t)$-hez ■