Algebra 1 gyakorlat
2025.09.10.

szabo.r.david@gmail.com

1.1. 1. asszoc. $b \pmod n$ inverze $n-b \pmod n$, neutr. $0 \pmod n$

2. asszoc., de nincs mindig inverz pl. $2 \pmod 6$-nak nincs inverze

3. PL mod 7, akkor $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 8 15 22 29 36 43
0 50 57 . 64

4. asszoc ? igen, inverz és neutr. van

5. $\{\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax+b : 0 \neq a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

f_1, f_2, f_3

$$f_1(f_2 f_3) = a_1(a_2 a_3 x + a_2 b_3 + b_2) + b_1 = a_1 a_2 a_3 x + a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 + b_1$$

$$a_2(a_3 x + b_3) + b_2 = a_2 a_3 x + a_2 b_3 + b_2$$

$$(f_1 f_2) f_3 = a_1 a_2 (a_3 x + b_3) + a_1 b_2 + b_1 = a_1 a_2 a_3 x + a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 + b_1$$

6. $\mathbb{R}^3$, $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$

nincs egység (neutr.

7.

8.

1.2 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$\forall q \in Q_8$ $1q = q1 = q$

$(-1)q = q(-1) = -q$

$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$

$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

$i^2 = (-1)$ $(-1)^2$

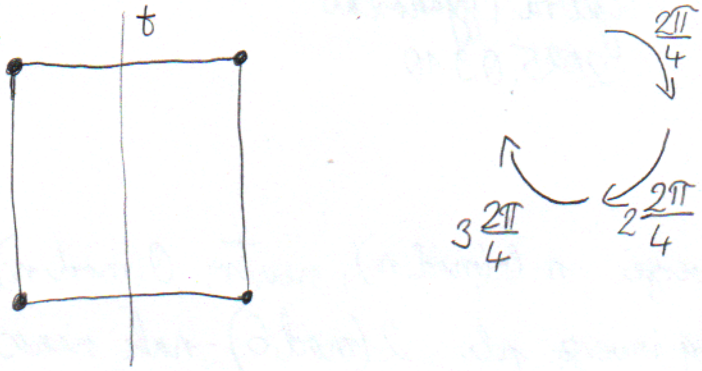
$o(1) = 1$ $o(i) = 4$ $o(-i) = 4$

$o(-1) = 2$ $o(j) = 4$ $o(-j) = 4$

$o(k) = 4$ $o(-k) = 4$

$(-i)^4 = \underbrace{-i \cdot -i}_{-1} \cdot -i \cdot -i = 1$

1.3. $D_{2\cdot 4}$



$$D_{2\cdot 4} = \{t, f, f^2, f^3, tf, tf^2, tf^3, id\}$$

rend $2, 4, 2, 4, 2, 2, 2, 1$

$$\begin{matrix}1&2\\4&3\end{matrix} \xrightarrow{t} \begin{matrix}2&1\\3&4\end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix}3&2\\4&1\end{matrix} \xrightarrow{t} \begin{matrix}2&3\\1&4\end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix}1&2\\4&3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&2\\4&3\end{matrix} \xrightarrow{t} \begin{matrix}2&1\\3&4\end{matrix} \xrightarrow{f^2} \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix} \xrightarrow{t} \begin{matrix}3&4\\2&1\end{matrix} \xrightarrow{f^2} \begin{matrix}1&2\\4&3\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&2\\4&3\end{matrix} \xrightarrow{t} \begin{matrix}2&1\\3&4\end{matrix} \xrightarrow{f^3} \begin{matrix}1&4\\2&3\end{matrix} \xrightarrow{t} \begin{matrix}4&1\\3&2\end{matrix} \xrightarrow{f^3} \begin{matrix}1&2\\4&3\end{matrix}$$

$$D_{2n} = \{id, t, f, \dots, f^{n-1}, tf, \dots, tf^{n-1}\}$$

rend: $1, 2, n, \quad n,$

f^k esetén ha $k \mid n$, akkor $r(f^k) = \frac{n}{k}$

ha $k \nmid n$, akkor $r(f^k) = n$

$tf^k tf^k \qquad r(tf^k) = 2$

megforgatja a forgatás irányát

(1.4) $|G| = 2n$

$G = \{\underset{\overset{\shortparallel}{e}}{g_1}, \ldots, g_{2n}\}$ $\quad \sigma(e)=1 \quad$ ha $i \in \underline{2n}$ $\quad g_i =: g$

$g \neq e \quad \exists g' \in G \quad gg' = e = gg'$

ha $g' = e \quad gg' = g \to g = e \; ↯ \to g' \neq e$

olyan elemet keresünk, ami nem e és inverze önmaga, ~~az inverz~~ így inverz-párok lesznek, így $2n-1$ ptlan számú elem, így

2025.09.17.

(2.1)/1. $g^m = e \to \sigma(g) | m$

ha $\sigma(g) \nmid m \Rightarrow m = q\,\sigma(g) + r \quad r < \sigma(g)$

$g^m = g^{q\sigma(g)} \cdot g^r \to g^r = e \; ↯$ ($\sigma(g)$ def-ja miatt)

(2.3)/1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1243)$

/2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (124)(365)$

/3. $(12345)^{-1}(123)(45)(12345) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} (123)(45)(12345) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} (123)(45)(12345) = (15)(234)$

/4. $(12)(13) = (123)$

$(12)(13)(14) = (1234)$ $\quad$ sít teljes indukció

(2.5)/1 $\sigma((123)(4567)(89)) = \text{lkkt}(3,4,2)$

/2. $\sigma((123)(234) = (13)(24)) = 2$

/3. $\sigma((123)(4567)(567) =$

$= (124657 3)) = 7$

Algebra 1 Gyak

2.4 /1.

	$(\ )^2$	$(\ )^3$	$(\ )^{-1}$
(12345678)	$(1357)(2468)$	(14725836)	(87654321)
$(1234)(567)$	$(13)(24)(576)$	(1432) id	$(4321)(765)$

$(1234)^2=(13)(24)$ $(567)^2=(576)$

$(1234)^3=(1432)$ $(567)^3=\cancel{(567)}$ id

2.5 /1.

$o((123)(4567)(89))=12$

/2. π_2 $(123)(234)=(13)(24)$ $o(\pi_2)=2$

/3. π_3 $(123)(34567)(567)=(1246573)$ $o(\pi_3)=7$

2.7 S_n összes permutációja (MO)

2.9. /1. Leggyen $H\subset\mathbb{Z}$

* $H\cap\mathbb{Z}^+=\emptyset \to H=\{0\}$

* $H\cap\mathbb{Z}^+\neq\emptyset$ ~~leghisebb~~ $n\in H\cap\mathbb{Z}^+$ a leghisebb ilyen $\xrightarrow{H \text{ csoport}}$ n $\forall$ többszöröse is benne van

$\exists k\in H-n\mathbb{Z} \to k=q\cdot n+r$ $r<n$

$k-qn=r \to r\in H$ $\lightning$ emiatt

Tehát csak $n\mathbb{Z}$-k részcsoportjai $(\mathbb{Z},+) \to \forall k\in n\mathbb{Z}$

vtlg1G

2025.09.24.

$|G| = |H| \cdot |H : G|$

(3.1) Lagrange alapján

$|H| \in \{1, 2, 4, 8\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Q_8 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle i \rangle \arrow[dr, dash] & \langle j \rangle \arrow[d, dash] & \langle k \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \{\pm 1\} \arrow[d, dash] & \\
 & \{1\} &
\end{tikzcd}$$

részben rendezett halmazrendszer

(3.2) /1 $G = \{\mathbb{Z}, +\}$, $H = n\mathbb{Z}$

H rés. $\Longleftrightarrow n\mathbb{Z}$

Bal mellékosztályok: $3 + H = \{3 + x \cdot n : x \in \mathbb{Z}\} =$

$= (2n+3) + H = \{2n+3+h : h \in H = n \cdot \mathbb{Z}\}$

/2 $G = Q_8$, $H = \langle -1 \rangle = \{1, -1\}$

$1H = \{1, -1\}$

$iH = \{i, -i\} = -iH$

$jH = \{j, -j\}$

$kH = \{k, -k\}$

/3 $G = S_3$, $H = \{(), (12)\}$ $|G| = 3! = 6$ $H = 2$

$|G : H| = \frac{|G|}{|H|} = 3$

$()H = \{(), (12)\}$

$(13)H = \{(13), (13)(12)\} = \{(13), (132)\}$

$(23)H = \{(23), (123)\}$

$H() = \{(), (12)\}$

$H(13) = \{(13), (123)\}$

$H(23) = \{(23), (132)\}$

(3.4) $n = |G| \in \mathbb{N} \to \forall g \in G : g^n = e$

$\exists g \in G : g^n \neq e \to |G| \neq n \in \mathbb{N}$

másik $|G| = n$ $\quad o(g) \mid |G|$ $\quad \exists k \in \mathbb{N} : k\,o(g) = |G| = n$

$$g^n = g^{k o(g)} = \left(g^{o(g)}\right)^k = e^k = e$$

(3.5) Ciklikus csoportban $\{\text{osztók}\} \leftrightarrow \{\text{részcsoportok}\}$

(3.7) első rész trivi

$a = 0 \to b = 0$

vtlen eset $\langle g^a \rangle = \langle g^b \rangle$ $\qquad \langle g^a \rangle = \{g^0, g^{-a}, g^{a}, g^{-2a}, g^{2a}, \dots\}$ $\quad a \neq 0$

$\langle g^a \rangle = \langle g^b \rangle \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}\ nb = ka \to$

$\to k = n\frac{b}{a} \to$

2025.10.01.

(3.9) 1. eset $H = gH \Longleftrightarrow g \in H \to g^2 \in H$

2. eset $H = g^2H \Longleftrightarrow g^2 \in H$

3. eset $gH = g^2H \Longleftrightarrow g^{-1}g^2 \in H \to g^2 \in H$

(3.10) $A_4 = \{g \in S_4 : g \text{ páros}\}$

$\updownarrow$

g ps sok csere szorzata

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$

$\nexists H \leq A_4 \quad (\Longleftrightarrow \nexists H \leq A_4 : |H| = 6)$

$|A_4 : H| = 2$

$\exists H \to \forall g \in A_4 \quad g^2 \in H$

$g = (12)(34) \quad g^2 = () \in H$

$g = (123) \quad g^2 = (132) \in H$

Lagrange fordított irányban nem igaz

$\#(3\text{-ciklus}) = 8 \ \lightning \to \nexists H \leq A_4$

<u>Normálosztó</u>

$H \leq G$ <u>normálosztó</u> $\Longleftrightarrow \forall g \in G \quad gH = Hg$

$\Longleftrightarrow \forall g \in G \quad g^{-1}Hg \subset H$

$\downarrow$

$g^{-1} \in G \ (gHg^{-1} \subset H) \to$

$\to H \subset g^{-1}Hg$

$=$-ség is áll

4.1. /1 $G = (\mathbb{Z}, +) \geq H = n\mathbb{Z}$

$$\underset{\in H}{-g + h} + \underset{\in G}{g} = (-g+g) + h = h$$

G ciklikus, H ciklikus → mindig működik
Abel , Abel ↗

Azért hívják Abel-csoportnak, mert azt rövidebb leírni, mint a kommutatívat (nincs pluszpont most*)

(bal)mellékosztályok

$$\left\{ \underbrace{\{\dots, -n, 0, n, \dots\}}_{H}, \underbrace{\{\dots, -n+1, 1, n+1, \dots\}}_{1+H}, \dots, \underbrace{\{\dots, -1, (n-1), 2n-1, \dots\}}_{(n-1)+H} \right\} = G:H$$

$$(1+H) \oplus (2+H) = (3+H)$$
$$(n+1+H) \oplus (-10n+2+H) = (-9n+3+H)$$

Veszünk 2 mellékosztályt, s szeretnénk ff-ni az összegüket. Ezt úgy tesszük meg, hogy veszünk 1-1 elemet belőlük, a csoportbeli művelettel összeadjuk őket, s megnézzük, hogy melyik mellékosztályban lesz benne az elem.

$(G, +_G)$ csoport $\quad \oplus : (G:H) \times (G:H) \xrightarrow{?} (G:H)$ én szüleményem

$c_1, c_2 \in H \ \forall x_1 \in c_1 \ \forall x_2 \in c_2 \quad x_1 +_G x_2 = x_3 \in c_3 \rightarrow$

$\rightarrow c_1 \oplus c_2 = c_3$

Faktorcsoport $\quad N \lhd G \quad (G, \cdot)$

$G/N = \{g \cdot N : g \in\}$ mellékosztályok hz-a

* de mégis van: ~ +1 pont a gilisztáért

$$g_1N \odot g_2N \stackrel{\text{def}}{=} (g_1 \cdot g_2)N$$

Tényleg csoport (mert $N \lhd G$) és ez a feltétel fontos

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ megegyezik a (mod n), összeadás csoportjával

---

egész számokon egyenletek megoldhatósága

$$x^2 + y^2 = 3k$$

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{} \to x \equiv 0 \equiv y$$

$N \lhd G$ G véges $|G/N| = |G:N| = \dfrac{|G|}{|N|}$

/2 $G = Q_8$ (nem Abel) $H = \{1, -1\}$ ez egy kérdés: túléli a csoportművelet azt, hogy a (+1)-et és (-1)-et ugyanannak tekintjük?

$$G:H = \left\{ \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j \\ -j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} \right\}$$

$gH = Hg$ előző héten

$$\begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

ez hasonlít az egységoldalú négyzet koordinátáinak (mod 2) szti összeadásához

$\pm 1 \to (0,0)$ $\quad \varphi(\pm i) + \varphi(\pm j) = \varphi(\pm k) = \varphi((\pm i)\cdot(\pm j))$

$\pm i \to (1,0)$ $\quad (1,0) + (0,1) = (1,1)$

$\pm j \to (0,1)$

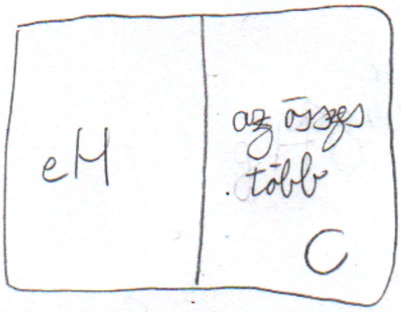
$\pm k \to (1,1)$

(4.2.) $|G:H| = 2 \to H \triangleleft G \Longleftrightarrow \cancel{\forall g \in G\; h \in H \quad g^{-1}hg \overset{?}{\in} H}$

$\Updownarrow$

$\forall g \in G \quad gH = Hg$

C mint
CO-SET



$gH = H \to g \in H \xrightarrow{H\text{csop}} Hg = H$

$gH = C \quad Hg \neq C \to Hg = H \to g \in H \; ↯ \to Hg = C$

(3.9) (4.2)-vel

$H \triangleleft G \to \exists\, G/H$

$|G/H| = |G:H| = 2$

$o(g) \mid |G:H|$, ha G véges

$(gH)^2 = H$

$g^2H \overset{df}{=} H$

Tehát $g^2 \in H$

tipp jön majd még a Drive-mappába