

Analízis 1.

Há zug-paradoxon, Curry-paradoxon: Ha ez a mondat igaz, akkor (feltétel) kijelentés oly mondat, mely egyértelműen igaz, vagy hamis, híjelentes változóval jelöljük (latin nagybetű).

Atomi híjelentes, ami nem bontható összetett híjelentesek összetövével jellehet von. logikai operátorokkal

$$\begin{array}{c} \neg \text{ unár} \\ \neg, V, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, \bar{\neg}, \bar{V} \end{array}$$

Összetett híjelentes

- ① ellentmondásmentesség
- ② harmadik hizárosa
- ③ \neg híjelentes igazságértéks csak az atomuktól függ

|| 4 fajta unár operátor

A	\neg	T	\perp	Δ
i	h	i	h	i
h	i	i	h	h

teljes

Deff

Egy unár és binár operátorból álló rendszer, melyből \neg unár és binár operátor hitelesíthető velük.

|| reláció: $R \subset H^2 \leftrightarrow R: H^2 \leftrightarrow \{i, h\}$

Deff

interpretáció
a logikai tábl.-ban
egy sor

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Deff

$P \equiv Q$, ha ugyanazokban az interpretációkban igaz

Deff

$P \models Q$

Deff

tautológia

1/1

Defn konttradikció

Küllőrendű logika

- Atom
- Kötőszó
- Összetett fiz. mondat
- Zárójelek

Elsőrendű logika

- Term: (objektumok⁽²⁾), típusok de nincs logikai értékesítés
- konstansok
- változók
- függvényértékek nem egészben a már ismert fr. (nem hz-akkor hozható)
- Függvények term \hookrightarrow term
- Predikatum olyan, mint a fr., csak lehet értéke logikai érték
- Kvantorok (csak változókról)
- Formulák atomok és összetett formulák

Kvantorok

univerzialis, egzistenciális

\forall

\exists

$\exists! x : \varphi(x)$

pont 1 db x létezik,
amire φ igaz

Másodrendű logika

nagyobb lefejezhetőség, de nem igaz

$\forall x : (\mathcal{L}(0) \wedge \forall n : (\mathcal{L}(n) \rightarrow \mathcal{L}(n+1))) \rightarrow \forall n : \mathcal{L}(n)$ teljes indukció
 emiatt másodrendű szelv
 még vannak magasabbrendű logikák

Hilbert & operator

$$\exists x : \varphi(x) \quad \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

$$\forall x : \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \forall y \varphi(y))$$

Kalmaz axiómáh ZFC

ax. rendszer legyen:
 csak egy állom

- ellentmondásmentes
- teljes (levezethetőség)
- függetlenek, egyszerűek (csak egységes)

→ az emberi értelmet segíti
 és matematikai értelmezés nem árt

Elemek ismétlődhetnek

\in predikátum

csak halmazok vannak (minden hz)

$$ACB \quad \forall x \in A : x \in B \quad \forall A \rightarrow \forall B$$

$$A=B \quad ACB \wedge BCA$$

Műveletek hozzávalóval

unió, metszet, hszeg

(halmazok, \cap , \cup) Boole-algebra

Lehet hz eleme hz?
 Lehet hz eleme önmagának?
 Lehet egy hz, ami hz-t tartalmaz?
 Hogyan konstruálhatunk halmazt?

Tetes (Russel antinomiája)

Nem létezik univerzális hz (ha A hz, akkor $A \in U$)

Biz U -nak nincs eleme, ahol $\in A = \{x \in U \mid x \notin x\}$ amik nem tartalmazzák magukat.

$$\left. \begin{array}{c} A \in A \rightarrow A \notin A \\ A \notin A \rightarrow A \in A \end{array} \right\}$$

$$A \in A \leftrightarrow A \notin A$$

ezt nem engedjük meg

A halmazaxiomákkal ZFC

csak halmazok vannak

váll.: halmazok, predikátum: \in

① Üres halmaz axióma

$$\exists A : \forall X : X \notin A$$

Jel: Ø

② Paraxióma

$$\forall X, Y : \exists \{X, Y\}$$

③ Meghatározottságú axióma

$$\forall X \forall Y : \forall Z : (Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \rightarrow X = Y$$

Jel: $\neg(X = Y) \equiv X \neq Y$

④ Regularitási axióma

$$\forall X \neq \emptyset : \exists Y \in X : Y \cap X = \emptyset \quad (\rightarrow \forall A : A \neq A)$$

|| $X \cap Y = \emptyset$ helyett: $\forall Z : Z \in X \rightarrow Z \notin Y$

④ $\rightarrow \forall A : A \notin A$

de A hz, aha ② alapján $\{A\}$ is \emptyset

$\exists Y \in \{A\} : \{A\} \cap Y = \emptyset$

$$A \in \{A\} \rightarrow A \notin Y$$

⑤ Rész halmaz axióma (Séma, elhagyható)

$$\{x \in A | \varphi(x)\} \text{ hz}$$

vagy másodrendű nyelvben $\forall A : \forall \varphi : \exists \{x \in A | \varphi(x)\}$

⑥ Unio axióma

Ø hz, hz

$$\forall A : \exists X : \forall A \in A : \forall x \in A : x \in X$$

⑦ Katványhalmoz axióma

$$\forall X : \exists \mathcal{E} : \forall A \in X : A \in \mathcal{E}$$

|| je bővebb $P(A)$ -nál

⑧ Végtelenségi hz

$$\exists A : \mathcal{E} \in A \wedge (x \in A \rightarrow x \in \{x\} \in A)$$

⑨ Relyettesítési axióma egértelműen

Ha egy hz elemet kieseréljük, akkor hz marad.

Kiválasztási axióma

⑩ $\mathcal{E} \notin A, X = U \mathcal{A}, \exists f : A \hookrightarrow X : \forall A \in \mathcal{A} : f(A) \in A$

Férfi

2025.09.23.

Riff rendezett pár : $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

Jeb (a, b)

Diff I hz, $\forall i \in I A_i$ hz

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i\}$$

$\forall i \in I A = A_i$

$$A^I = \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} A$$

$A_1 \times A_2$ hogyan mivel

$\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ létezik, mivel $a_1, a_2 \in A_1, \cup A_2 \rightarrow \{a_1^2, \{a_1, a_2\}\} \in \mathcal{P}(A_1 \cup A_2) \rightarrow (a_1, a_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A_1 \cup A_2))$

$$a: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$a \in I \times \bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^2(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i) \in \mathcal{P}^3(\dots)$$

$$a \in \prod_{i \in I} A_i \rightarrow a \in \mathcal{P}^s(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i)$$

$$\prod_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^3(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i) \quad \text{tehát } \prod_{i \in I} A_i \text{ is hogyan }$$

Defn R általánosított reláció, R általánosított reláció, értelmezési tartomány, értékhez közelítő, megfelelő X és Y hozzájárulás

$$R = \{(\emptyset, \emptyset), (\{\emptyset\}, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\})\} \subset X \times Y, \text{ ha } X = Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$R(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = Y$$

$$R[\emptyset] = \emptyset$$

Defn inverz

Tétel inverzhez közelítő involutív és monoton

Defn kompozíció

$$\text{Tétel } (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \quad R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

Defn reláció 1 hozzájárulás, id_H, Δ_H

Defn ekvivalenciareláció

Def osztályozás

Tétel R eg. rel. H-n, hh $\mathcal{I} = \{R(x) | x \in H\}$...

Def parciális rendezés,

|| antiszimmetria: "ha te szerető engem is értéged, akkor egymag vagyunk"

(H, \leq) rendszer

$$\times \in X : f(x) - \{a \in H | a \leq x\} \subset H \quad f : H \hookrightarrow P(H)$$

(H, \leq) izomorf $(\text{Ran}(f), \subset)$

$f : H \hookrightarrow \text{Ran}(f)$ bijektív

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subset f(y)$$

minden rendszerek megfelelhetően hrendszerek tartalmazással (\subseteq)

Def

Def (lineáris) rendszet

Def jólrendezés

Tétel (H, \leq) jólrendezett bz, akkor \leq lineáris rendszés

Def függvény

$$f : \text{Dom}(f) = X \hookrightarrow Y \triangleq f : X \overset{\text{D}}{\hookrightarrow} Y$$

Def max, min etc

Def monotonitás

Déf injektív, szürjektív, bijektív

Tétel a fenti tulajdonságokat a \circ megtartja

Biz 

Tétel $f \subset X \times Y, g \subset Y \times X$

$f: X \xrightarrow{\text{bij}} Y, g: Y \xrightarrow{\text{bij}} X$ és $f = g^{-1} \Leftrightarrow f \circ g = \Delta_Y$ és $g \circ f = \Delta_X$

Biz  trivi

$\Leftarrow \exists x \in X, f(x) = \emptyset \rightarrow g[f(x)] = g[\emptyset] = \emptyset$

$g[f(x)] = (g \circ f)(x) = \Delta_X(x) = \{x\} \quad \checkmark \rightarrow$

$\rightarrow \text{Dom}(f) = X \quad (\text{Dom}(g) = Y \text{ hasonlóan}$

$\forall x \in X \rightarrow \exists y \in f(x) \subset Y \text{ de } \emptyset \neq g(y) \subset g[f(x)] = \{x\}$

Kaptuk, hogy $\text{Ran}(g) = X$ (hasonlóan $\text{Ran}(f) = Y$)

$\emptyset \neq f(x) \subset f[g(y)] = \{y\} \rightarrow f(x) = \{y\}$

$\text{Itt } f: \text{függvény (hos. } g \text{ is)}$

$f: X \xrightarrow{\text{bij}} Y, g: Y \xrightarrow{\text{bij}} X$ szürjektívek

$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$

Kaptuk, h. f ~~szürjektív~~ injektív (g hasonlóan)

$y = f(x) \rightarrow g(y) = g(f(x)) = x \rightarrow g = f^{-1}$

Axióma (Peano-axiómák)

\mathbb{N}_0 egy hz, $0 \in \mathbb{N}_0$ és $s: \mathbb{N}_0 \xrightarrow{\text{?}} \mathbb{N}_0$ melyehre:

s injektív

$0 \notin s[\mathbb{N}_0]$

$\forall P \subset \mathbb{N}_0 : (s[P] \cup \{0\} \subset P) \rightarrow \mathbb{N}_0 = P$

Defn összegadás, szorzás, rendezés

Tétel $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ neutrális kommutatív félegyüttes // 0 mult. neutr.

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ nullosztómentes ($a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$) // 1 add. neutr.

biztos ez?

szorzás distributív az összegadásra nézve

$\{+, \cdot\}$ cancellativ $a+n=b+n \rightarrow b=a$
 $n \neq 0 \quad an=bn \rightarrow b=a$

Tétel Peano-axiómák izomorfia erejéig egyértelműek

Biz $(\mathbb{N}_0, 0, s) \cong (M, 0, t)$

$$\psi: \mathbb{N}_0 \rightarrow M \quad \psi(0) = 0, \psi(s(n)) = t(\psi(n))$$

$$\psi: M \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \psi(0) = 0, \psi(t(m)) = s(\psi(m))$$

$$\psi(\psi(\cdot 0)) = \psi(0) = 0$$

$$\psi(\psi(t(m))) = \psi(s(\psi(m))) = t(\underbrace{\psi(\psi(m))}) = t(m)$$

= m az indukciós feltétel
miatt

□

Defn (Neumann-modell)

9

Delf Egész számok

$$(a, b) \sim (c, d) : a+d = b+c$$

$(1, 2) \sim (2, 3)$ tehát a negatív számokat több jelölné, ha rendezett párak lennének, ezért a \sim reláció által kijelölt osztályok lesznek (egyenlőségszállyok)

$$\text{tehát } -1 = \{(0, 1), (1, 2), \dots\}$$

osztályon művek

$$-2 = \{(0, 2), (1, 3), \dots\}$$

$$\vdots$$

$$-h = \{(0, h), (1, 1+h), \dots\}$$

Tétel $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ integritási tartomány

$(\mathbb{N}_0, +, \leq)$ izomorf a $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ részhalmazával

* Ha helyt, azaz \sim egyenlőségszálly

Biz transitivitás

$$(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f)$$

$$\begin{aligned} a+b &= c+d \\ a+d &= e+f \\ \downarrow & \downarrow \\ a+d+f &= b+c+f \\ \downarrow & \downarrow \\ a+d+f &= d+e+f \end{aligned} \rightarrow a+f = e+b \equiv (a, b) \sim (e, f)$$

$$a+d = c+f$$

$$c+f = d+a$$

$$\downarrow$$

$$a+d+f = b+c+f$$

$$c+f = d+e+f$$

$$\downarrow$$

$$a+d+f = d+e+f$$

$$c+f = d+e+f$$

$$\downarrow$$

$$a+d+f = d+e+f$$

II. A cancelativitást is le lehet vezetni hivánás nélkül

A reprezentánsból független az összeg és szorzás (azaz ugyanabba az osztályba fog kerülni)

$$(c_1, d_1) \sim (c_2, d_2) \text{ akkor } (a_1, b_1) +_{\mathbb{Z}} (c_1, d_1) \sim (a_2, b_2) +_{\mathbb{Z}} (c_2, d_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (c_1, d_1) \sim (a_2, b_2) \cdot (c_2, d_2)$$

$$(a_1, b_1) \leq (c_1, d_1) \Leftrightarrow (a_2, b_2) \leq (c_2, d_2)$$

A testnél a mult. inverziből köv. a nullsztómentesség, de ha ezt hivessük, akkor a nullsztómentességet hozzá kell venni a gyűrűhöz

Delf racionális számok

a számrendszerek felépítésénél látjuk, hogy az analízis nennyire szoros kapcsolatban van a számelmélettel

~~Feltétel ($\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq$) Archimedész rendszert test~~

Tétel $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ trh. rend. test

Biz. $n, q \in \mathbb{Q}, n >_0 0_2$

$$\exists (a, b) = p \rightarrow a \geq 0_2, \exists (c, d) = q$$

ha $c \leq 0$ $n=1 \rightarrow 1p \geq q$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ izomorf $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ egy részhával

de bijektív van

$$c > 0 \quad n = b : c \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (a, b) + \dots + (a, b) &= (na, b) \sim \\ &\sim ((c+1)a, 1) > (ca, 1) \geq (c, 1) \geq \end{aligned}$$

Kor (hatványra vonatkozó Archimedész-tulajdonság) $\geq (c, d) \blacksquare$

Biz. $p^n \geq 1 + n(p-1) \geq q$

Bernoulli

Delf szeltek minden izben

2025. 09. 30.

legnagyobb, lezálló részhalmaz, végsözőszerlet, felzálló részhalmaz, maximumos / maximum nélküli legnagyobb

minimumos / minimum

(enthaupten)

legnagyobb lefejezése

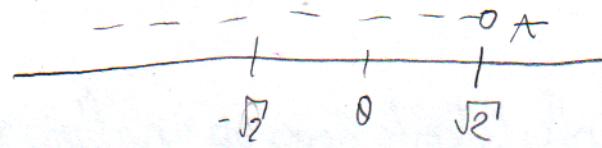
vegzsözőszerlet — II —

Tétel szeltek kötői viszony (min - max, komplementer)

Biz. $A \subset H$ legnagyobb szel, $a \in \bar{A}, x \in X, a \leq x$, Mm. hogy $x \in \bar{A}$
ha $x \notin \bar{A} \Leftrightarrow x \in A^c, a \leq x$ miatt ez azt jelenti, hogy
 $a \in A \Leftrightarrow x \in \bar{A}$

Megj. \mathbb{Q} -ra $+/-$ -ra specifikusan himondva

$$]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} = A$$



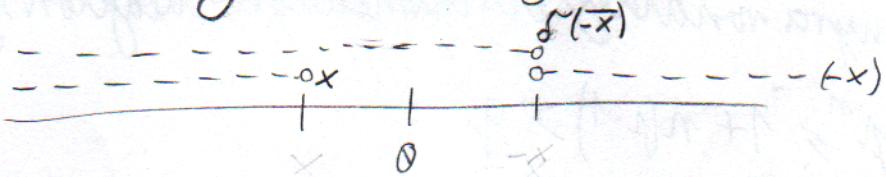
--- mint a csak \mathbb{Q} -beli
számok

Deff Dedekind-szeletek

Deff korrekt

Tétel $(\mathbb{R}, +, \leq)$ rendezett homm. csoport.

Biz. additív inverz: $x \in \mathbb{R}$ inverse



Def azt kell, hogy ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $-x$ ne legyen fejes
be kell látni, hogy $x +_{\mathbb{Q}} \delta(-x) = 0_{\mathbb{Q}}$ $x, y \in \mathbb{R}$

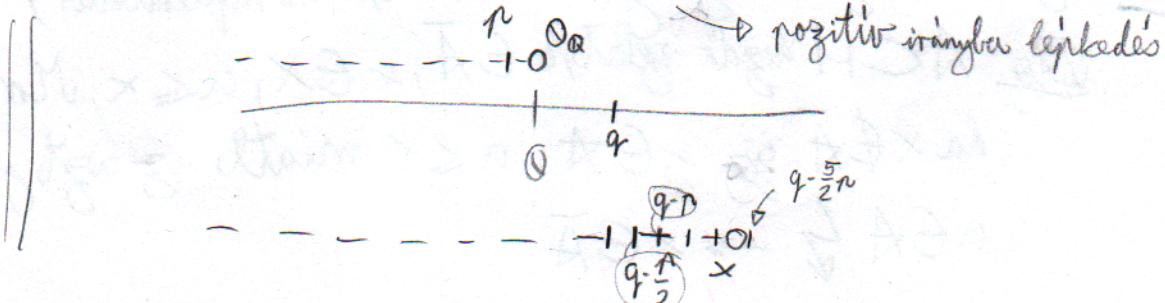
$x + \delta(-x) \subset 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, ahol $\exists q \in \mathbb{Q}$,

$$r \in \delta(-x): r = q + r$$

$$r \in \delta(-x) \subset -x \rightarrow r \notin -x \rightarrow -r \notin x$$

Mivel $q \in x$, ezt $-r > q \rightarrow 0 > q + r$. Kaptuk, hogy
 $q + r \subset 0_{\mathbb{Q}}$

$0_{\mathbb{Q}} \subset x +_{\mathbb{Q}} \delta(-x)$; ha $r < 0$, $q \in x$, $r \in -x$. \mathbb{Q} Arkhimédeszi
 tulajdonsága miatt $\exists n \in \mathbb{Z}^+ : q - n \frac{1}{2} \in -x$ mivel \Rightarrow



$$\frac{r}{2} > 0, r-q \in \mathbb{Q}: \exists n \in \mathbb{N}^+: n \cdot \frac{r}{2} > r-q \Leftrightarrow q - n \frac{r}{2} > r \in \mathbb{X}$$

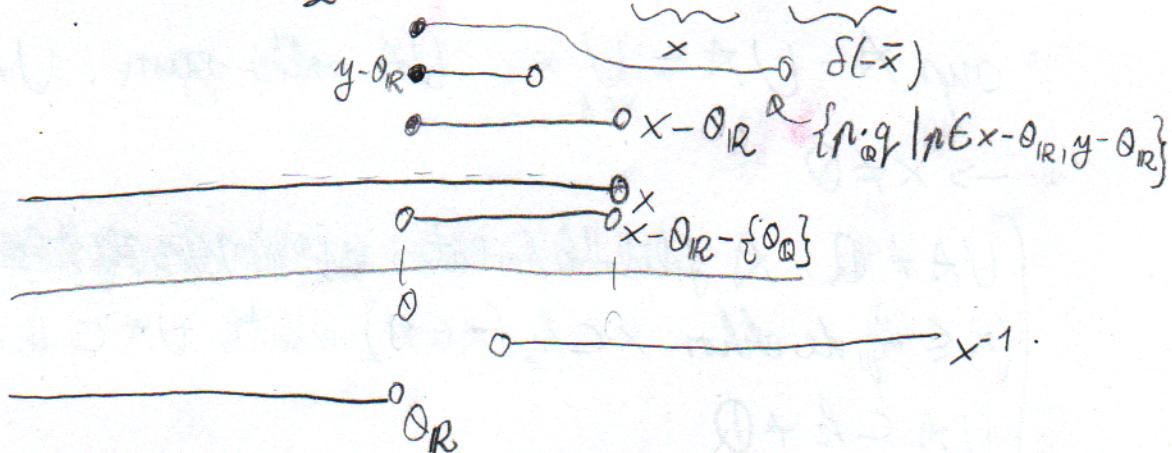
A leghisebb ilyen \mathbb{Z}^+ -beli elem n_0 , ekkor $s = q - n_0 \frac{r}{2} \in \mathbb{X}$, ekkor $s + \frac{r}{2} \in \mathbb{X}$ és $s - \frac{r}{2} \in \mathbb{X}$ is nem a minimuma \mathbb{X} -nek, mert $s < s - \frac{r}{2}$

$\frac{r}{2} - s \in \mathbb{X}$ és nem $\max \frac{r}{2} - s \in \delta(-x)$, $s + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} - s = r$

$$y - \partial_R \rightarrow \underbrace{x}_{\delta(-x)} \rightarrow s + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} - s = r$$

Defn $x \cdot_{IR} y$

itt szaggatott
töthetettsége
valna?



Pétfel Megj A f horricht

Biz

$\mathbb{I}_{IR} = \{q \in \mathbb{Q}, q < 1\}$, multipl. inverze ∂_{IR} -nak nincs

Ha x pozitív: $x^{-1} = \{r \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{r} \in X, 0 < \frac{1}{r}\}$. Az inverz $\delta(x^{-1})$

Ha x negatív:

$$\delta \left(- \left(\delta \left(\delta(-x)^{-1} \right) \right) \right)$$

nyilván (additív és multiplikatív
inverzök vételeivel jutunk
el ide)

Mi, hogy $x \cdot_{IR} \delta(x^{-1}) = 1_{IR}$

hasonlóan az előző tételehez

csakhogy a lépkedést szorosabban kell elvégezni

$0 < r < 1$ helyett $\frac{1+r}{2}$ -vel osztogatni a $q \in X$ számokat

strab. 1.

~~addig amíg~~ $s = \frac{q}{\left(\frac{1+r}{2}\right)^n} \in \mathbb{X}$ || mivel $\sqrt{n} \leq \frac{1+r}{2}$

Tétel $(R, +, \cdot, \leq)$ teljes rendszerteszt, sőt izomorfia erejéig egészben

Biz (R, \leq) Dedekind-teljes \Leftrightarrow ha $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, A felülről határos, akkor $\exists \sup A$

$$\sup A = \bigcup A = \bigcup_{x \in A} x, \quad \text{UA valós szám: } \bigcup A \neq \emptyset, \exists x \in A \rightarrow x \neq \emptyset$$

$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup A \neq \emptyset: A$ felülről határos ~~valós szám~~ $\exists b \in \mathbb{R} (\forall x \in A) (x \leq b)$, de ekkor $x < b (x \in A)$ miatt $\bigcup A < b \neq \emptyset$ $\bigcup A < b + \emptyset$

$\bigcup A$ hegzőszel: $a \in \bigcup A \Leftrightarrow b \in \mathbb{Q}, b \leq a \rightarrow b \in \bigcup A$
 $\exists x \in A: a \in x$ erre $b \in x$ is teljesül

$\bigcup A$ maximum nélküli: $a \in \bigcup A \rightarrow \exists x \in A: a \in x$, de ekköz
 $\exists b \in x: b > a, b \in \bigcup A$

$\bigcup A$ felső hatát $x \in A, x < \bigcup A$, azaz $x \leq_{\mathbb{R}} \bigcup A$

$\bigcup A$ legkisebb f. k. $y \in \mathbb{R}$ felső hatátja A -nak, akkor $x \leq_{\mathbb{R}} y$
 $(x \in A)$

$$x < y (\forall x \in A)$$

$$\bigcup A < y \leftarrow \bigcup A < y$$

unicitás $(T, +_T, \cdot_T, \leq_T)$ egy tely. rend. test

$$\exists 0_T, 1_T \in T$$

$$\left[s(n) = n +_T 1_T \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{Peano-ax-nak meg. konstrukció } N_T \\ N_T \text{ izomorf } \mathbb{N}_0 \text{-nak} \end{array} \right. \Rightarrow$$

\Rightarrow hanstruktív Z_T, Q_T , amik izomorfak Z -vel és Q -val
 Q_T és Q közti $f: Q_T \xrightarrow{\sim} Q$ izomorfia (művelet és rendezéstartó
bijekció)
 $t \in T: g(t) = \sup \{f(q) \mid q \in Q_T, q < t\} \in \mathbb{R}$. Ez a $g: T \rightarrow \mathbb{R}$
izomorfizmus ■

Def komplex számok

Tétel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ algebraileg rendezett test

metriktan teljes

nem rendezett test ($\# R \subset \mathbb{C}^2 ((\mathbb{C}, R) \text{ rendezett test})$)

Biz (rendezet) $x \geq 0 \rightarrow x \cdot x \geq 0 \cdot x = 0$

$$x < 0 \rightarrow -x > 0 \rightarrow (-x)(-x) \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

Def azonos számoság Jel ~

Tétel számoság tulajdonságai

$$\| H \text{ hz} \rightarrow P(H) - n \sim \text{eq. rel.}$$

Biz 1) id bij.

2) inverz bij.

3) kompozíció bij.

Def hiselb. számoság Jel \exists
vagy egységes

Tétel $A, B \text{ hz}, A \neq \emptyset (A \underset{\textcircled{1}}{\sim} B) \leftrightarrow (\exists g: B \xrightarrow{\sim} A \text{ szüj.}) \leftrightarrow (\exists C \subset B: A \sim C)$ \textcircled{2} \textcircled{3}

Biz $\boxed{\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}}$ $f: A \hookrightarrow B$ injektív $g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{ha } b \in \text{Ran}(f) \\ a, & \text{ha } b \notin \text{Ran}(f) \end{cases}$
 és a $\in A$ tetsz. rögzített
 Bizj.

$\boxed{\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3}}$ $g: B \rightarrow A$ surjektív

$h(a)$ egyely $b \in B$ amire $g(b) = a$, ahol $a \in A$

$h: A \hookrightarrow C$ bijektív, ahol $C = \text{Ran}(h) \subset B$

$\boxed{\textcircled{3} \rightarrow \textcircled{1}}$. $C \subset B$, $h: A \hookrightarrow C$ bijektív extén $f(a) = h(a)$,
 $f: A \hookrightarrow B$ injektív

(1, h)

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & 2|n \\ \frac{n-1}{2} & 2+n \end{cases} \quad f: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(n, k) = n +$$

(1, 1) (2, 1) (1, 2) (2, 2) (1, 3)

$\mathbb{R} > \mathbb{N}^+$ ~~↪~~ \neq bijektív

$[0, 1] > \mathbb{N}^+$

$\exists f: \mathbb{N}^+ \hookrightarrow [0, 1]$ bij \rightarrow ↴ (az ismert módszer, ahol
 tizedestörtnek megfeleltetjük a \mathbb{N}^+
 számokat)

Jel $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = \mathbb{C}$

konstrukció: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \dots, \mathbb{N}_0$
 számoságok 0, 1, 2, 3

egy idő után

Péter Cantor-tétel

Kör nincs legnagyobb számszám

Biz $f: A \hookrightarrow P(A)$ szürjelelő

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \quad B \subseteq A \rightarrow B \in P(A) \rightarrow$$

$\rightarrow \exists b \in A (f(b) = B)$ mivel f szürjelelő

$$\begin{aligned} b \in B &\rightarrow b \notin B \\ &\downarrow f(f(a)) \nearrow \\ &b \in A - B \end{aligned}$$

$$b \in f(b) \rightarrow b \in B$$

$$b \in B \Leftrightarrow b \notin B$$

Biz (kör) trivi