

2025.09.08.

Valószínűségi mező

Valószínűségi mező 1.

Valószínűségi mező

(Ω, F, P)

+ eseményter(hz): a véletlen hírérfel lehetséges hímeneteit tartalmazza, elemei az elemi események és bizonyos részhalmazok események

$\omega \in \Omega$ elemi esem.

$A \subset \Omega$ esem. (bizonyos részhzok)

Kalmazműveletek

$A \cup B$: A és B közül legalább az egyik

$A \cap B$: A, B egyszerre

Defn $A \cap B = \emptyset$, azzor A és B kizárt események

$A - B = A \cap B^c$

Jel $\Omega - B := B^c$

$A \subset B$ esetén A -ból hörv. B

Azonosságok

Itt események Boole-algebrait alkotnak a hz műveletekre

(F) Ω részhalmazai közül azok, amiket eseményeknek tekinthünk, de azt tudjuk, hogy $\Omega \in \mathcal{F}$

- $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, \dots \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

\mathcal{F} egy σ -algebra

(P) $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, ez az in. valószínűség

Axioma 1. $P(A) \geq 0$

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$ || de $P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$

Valószínűségi mező 1.

Axioma (3.) ha E_1, \dots egymással hizáro események ($E_i \in \mathcal{E}$)
(σ -additivitás) $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$), ekkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$\rightarrow P(\emptyset) = 0$$

$$\rightarrow E \subset F \rightarrow P(E) \leq P(F)$$

$$\text{Ha } A \cap B \neq \emptyset : P(A \cup B) = \underbrace{P(A \cap B^c)}_{P(A)} + \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} + \underbrace{P(A^c \cap B)}_{P(B)}$$

Szita formula

$$E_1 \cap \dots \cap E_n \neq \emptyset : P(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_r})$$

Biz teljes indukció

Egyenlő számú események

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}, P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$
$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}) \quad \omega_i \neq \omega_j \quad i \neq j$$

$$A \subset \Omega, |A| = k \leq n \quad A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$$
$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n} \left(= \frac{|A|}{|\Omega|} \right)$$

feladatoknál a leggyakrabban használt módszer a kombinatorikai hármasok alkalmazása

6 p, 5 h vizsgatevés nélküli

Mi a szüksége 3-ból 2 hétközépső

$$\frac{(6)(5)}{11} \text{ saját} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10 \cdot 9}$$

1. megoldás

(1, ..., 6) (7, ..., 11)

$(i, j, h) \quad i \neq j, j \neq h, i \neq h \quad i, j, h \in \underline{11} = \Omega_{\text{megoldásokat kér}}$

$$11 \cdot 10 \cdot 9$$

$$A_0 = \left\{ \text{nincs 2 hétközépső van} \right\} = A_0^I \cup A_0^{II} \cup A_0^{III}$$

$$A_0^I = \left\{ \text{az első nincs a többi hétközépső} \right\} =$$

$$= \left\{ (i, j, h) \mid i \in \underline{6}, j, h \in \underline{11}, j \neq h \right\}$$

①..⑥

$$|A_0^I| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = |A_0^{II}| = |A_0^{III}|$$

$$|A_0| = \sum_{i \in \{I, II, III\}} |A_0^i| = \frac{3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{4}{11}$$

2. megoldás

$$\Omega_2 = \left\{ \{i, j, h\} \subset \underline{11} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \{i\} \cup \{j, h\} \mid i \in \underline{6}, \{j, h\} \subset \{7, \dots, 11\} \right\}$$

$$|A_2| = 6 \cdot \binom{5}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{6 \binom{5}{2}}{\binom{11}{3}}$$

Változam 1.

3

Elsofelts telefonok peldaja: mi a valozioge annak, hogy seki sem hajja a sajat telepj.

a fentiek felhangalasa

$$\text{mivel: } P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) = \sum_{r=1}^N (-1)^{r+1} \binom{N}{r} \frac{(N-r)!}{N!} = \sum_{r=1}^N (-1)^{r+1} \frac{1}{r!}$$
$$1 - \sum_{r=1}^N (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \quad \downarrow \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

2025.09.15.

Feltetelos valozinuseg

2. Kocha (feher, vörös)

$$P(\text{dobások összege } 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{dobások összege } 10, \text{ ha a fehérrel } 6\text{-ot dobok}) = \frac{1}{6}$$

Difff $E \in \mathcal{F}$, $P(E) > 0$. Ekkor $\forall F \in \mathcal{F}$ bekorethezese

E -t feltere:

$$\frac{P(F \cap E)}{P(E)}$$

Jel $P(F|E)$

All Rögzített E ($P(E) > 0$) mellett a $P(\cdot | E) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ és teljesiti a Kolmogorov-axiomákat

Biz * $P(F|E) \geq 0$

$$* P(Q|E) = \frac{P(E)}{P(E)}$$

$$* \text{ Ha } F_i \cap F_j = \emptyset \quad i \neq j, \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i | E) = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \cap E)}{P(E)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i \cap E)}{P(E)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i \cap E)$$

Szorzási szabály

Def $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

E_1, \dots, E_n események

$$P(E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \cdots P(E_2 | E_1) \underbrace{P(E_1)}_{P(E_1)}$$

Bayes tétele

így információ átformálja az 'apriori' ismereteinket.

Def A_1, \dots, A_n teljes eseményrendszert alkot, ha párhuzamos hizárok, de $\bigcup_{i \in n} A_i$, más néven particiót alkotnak.

Teljes Teljes eseményrendszernben (A_1, \dots, A_n)

$$P(B) = \sum_{i \in n} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in n} P(B|A_i) P(A_i)$$

|| teljes valószínűségtétele

|| előzmények hizájához egymást

Teljes Bayes $P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{i \in n} P(B|A_i) P(A_i)}$

Függetlenség

Def $E, F \in \mathcal{F}$, függetlenek, ha $P(F \cap E) = P(E) P(F)$

|| Ha $P(E) > 0 \Rightarrow E$ és F fülek $\rightarrow P(F) = P(F|E)$

|| Francia háromjában a szín és az érték független

|| A hizároság a fügés ~~feszültséges~~ résldája

$$\underline{n} = \{1, \dots, n\}$$

$$\underline{k, n} = \{k, \dots, n\}$$

$$\text{tt } \underline{n} = \underline{1, n}$$

|| A már behövethető dolog nem hat a történő dolog vezetésére

Delf $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}$ teljesen függetlenek

ha $\forall r \in \underline{n} : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n :$

$$P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(E_{i_r})$$

Innen a teljes függetlenség függetlensége alatt.

2025.09.22.

σ -additivitás

A_1, A_2, \dots eseményrészletek

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Delf D_1, D_2, D_3, \dots növekvő eseménysorozat $D_1 \subset D_2 \subset \dots$

Jel $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$

Delf C_1, \dots csökkenő

$C_1 \supset C_2 \supset \dots$

Jel $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

gyűrűtérrel

|| A limitez egy $P(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ahol Dom monoton halmaz eseménysorozatokhoz a

Alb Ha teljesül a σ -additivitás, akkor

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n)$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n)$$

Biz $A_n = D_n - D_{n-1} \Rightarrow A_1 = D_1$

~~Aszthetikus~~ $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$

$$\sum_{k=1}^N P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = P(D_N)$$

$N \nearrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n)$$

máris szűt

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n\right)$$

C_1, \dots csökkenő $\rightarrow C_1^c, \dots$ növekvő

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^c\right)^c = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n, \text{ míg } \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n^c)$$

□

mivel hagyta ki ezt a helyet?

Talosam!

Feljes és páronkentő függetlenség

| teljesen független események: független hírleretek
 (hochadobás, pénzfeldobás, vizsgatétel eredménye)

Néhány valószínűség

$$P(\text{mind az } n \text{ hírleret sikeres}) = p^n$$

$$P(\text{legalább } 1 \text{ sikeres}) = 1 - (1-p)^n$$

$$P(\text{ pontosan } k \text{-szor sikeres } n \text{-ból}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

∞ soh független hírleretben mi a valószínűsége, hogy minden sikeres?

$$S_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n, \quad S_n = \bigcap_{k=1}^n E_k \quad P(S_n) = p^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{így } P(S_\infty) = 0$$

Feltételes függetlenség

Deff E esemény, $P(E) > 0$, F_1 és F_2 feltételezen függetlenségi E mellett ha

$$P(F_1 \cap F_2 | E) = P(F_1 | E) P(F_2 | E)$$

| orvosi tesztelés, tudjuk hogy beteg, akkor nem függetlenségi, de felt. függ.

Valószínűségi változó

Deff $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (merhető) függvény, azaz X egy véletlen szám, mérési eredmény s valószínűségi változónak nevezett
 || nagylétreülés/görög betűvel

Df X val. vál. dizkrét, ha $\text{Dom}(X)$ megszámlálható hz.
 || $\text{Dom}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$

Df X val. vál. sűlyfüggvénye $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $p(x) = \begin{cases} P(X(x_i)) & x = x_i \\ 0 & \text{más}\end{cases}$

Df Ψ binomialis eloszlású $n \geq 1$ is $\Psi(\epsilon(0,1))$ esetek paramétereiből, ha a $k = 0, 1, 2, \dots, n$ értékeket veheti fel
 $\therefore P(\Psi(k)) = \binom{n}{k} p^k (n-k)^{n-k}$

|| Ψ sűlyfüggvénye. Igaz, hogy $\text{Ran}(\text{P}(\Psi)) \subset \mathbb{R}^+$
 $\sum_{k=0}^n P(\Psi(k)) = 1$

Df W geometriai eloszlású $p(\epsilon(0,1))$ aligazsó mintára
 ha $P(W(k)) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p$ $| q \text{ mint } p \text{ gudaré}$

Mt. $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = 1$

Df Egy X dizkrét val. változó várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X(x_i))$$

ha a sor abszolút konvergens.

|| átvendethető ha abszolút konvergens, ez hell reálumba

|| sűlypont, nagy számok tövében

Binomialis eloszlás várható értéke

$$\Psi \sim \text{Binom}(n, p)$$

$$h = (t^h)|_{t=1}$$

$$\begin{aligned}
 E(\Psi) &= \sum_{h=0}^n h P(\Psi=h) = \sum_{h=1}^n h \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} = \\
 &= \left(\sum_{h=1}^n t^h \binom{n}{h} (1-p)^{n-h} \right) \Big|_{t=1} = \left(\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (tp)^h (1-p)^{n-h} \right) \Big|_{t=1} = \\
 &= n(t p - 1 + p)^{n-1} \cdot p \Big|_{t=1} = n \cdot p
 \end{aligned}$$

nice!

Geometriai eloszlás

$$W \sim \text{Geom}(p)$$

$$\begin{aligned}
 E(W) &= \sum_{h=1}^{\infty} h p q^{h-1} = p \sum_{h=1}^{\infty} h q^{h-1} = p \left(\sum_{h=0}^{\infty} q^h \right) = \\
 &= p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

nice! (but not as much)

2025. 09. 29.

telj $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ X dizájnű valószínűségi változó
 az $Y=g(X)$ d.v.v. értéke $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) P(X=x_i)$
Biz $E(Y) = \sum_j y_j P(Y=y_j) = \sum_j y_j P(\cup\{X=x_i\}) = *$
 $\{x_i\}_i$ az X d.v.v. lehetséges értékei
 $\{y_j\}_j = \{g(x_i)\}_i$

$$\{y_j\}$$

$$*= \sum_j y_j \sum_i P(X=x_i) = \sum_j \underbrace{\sum_i g(x_i=y_j)}_{P(X=x_i)} P(X=x_i)$$

páronként dioszjunktib

Kör $\forall a, b \in \mathbb{R}, E(aX+b) = aE(X) + b$

$$E(aX+b) = \sum_i (ax_i + b) P(X=x_i) = a \sum_i x_i P(X=x_i) + b \sum_i P(X=x_i)$$

$$+ b \underbrace{\sum_i P(X=x_i)}_1 = a E(X) + b$$

függvényt nem rakhattuk ki

$$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2} \quad \text{itt } g(x) = x^2$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Deff X val. válts. $E(|X|^n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

ahhoz az X n -edik momentumára létezik és ez

$$E(X^n).$$

|| mennyire tud elterni a várható értéktől egy esemény valszínűsége

Deff X valg. válts., \exists a 2. momentumra

hh X szórásnégyzetén az $D^2(X) = E((X-E(X))^2)$

Deff X szórása $D(X) = \sqrt{D^2(X)}$

|| $D^2(X) \geq 0$, $D^2(X) = 0 \rightarrow P(X=E(X))=1$

|| távolságmérs

All $D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Biz $D^2(X) = E((X - E(X))^2) =$

 $= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) =$
 $= \sum_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) P(X=x_i) =$
 $= \sum_i x_i^2 P(X=x_i) - 2E(X) \sum_i x_i P(X=x_i) + E(X)^2 \sum_i$
 $\sum_i P(X=x_i) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E(X)^2 =$
 $= E(X^2) - E(X)^2$

Kor $E(X^2) \geq E(X)^2$ (Jensen ≠ -ság)

All $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad D^2(aX+b) = a^2 D^2(X)$ is $D(aX+b) = |a| D(X)$

Biz $D^2(aX+b) = E((aX+b - E(aX+b))^2) =$

 $= E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 D^2(X) \rightarrow a^2 D^2(X) = |a| D(X)$

Binomialis eloszlás $X \sim \text{Bin}(n, p)$

$X :=$ sikeres kísérletek száma n félék kísérlet, ahol p a siker valószínűsége

$P(X=h) = \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} \quad h \in \underline{\mathbb{N}_0}$

$E(X) = np \quad D(X) = np(1-p)$

$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^1 h(h-1) \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} = \sum_{n=2}^n \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} =$

hanyag
sloppy
mongolka

$$= n(n-1)p^n \sum_{k=2}^n \underbrace{\binom{n-2}{k-2} p^{n-2} (1-p)^{n-k}}_{=(n+1-p)^{n-2}} \rightarrow E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$$

$$E(X) = n(n-1)p^2 + E(X) = n(n-1)p^2 + p^2 = np((n-1)p+1)$$

$$D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np((n-1)p+1) - n^2p^2 = np(1-p)$$

Df: X d.v.v. módszera $x \in \mathbb{R}$
 $P(X=x) \geq P(X=y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

|| nem! ||

All: $X \sim \text{Bin}(x, p) \rightarrow X$ módszera $[np(1-p)]$

Ha $(n+1)p \in \mathbb{N}$ akkor $(n+1)p$ és $(n+1)p-1$ is módsz.

$$\text{Biz: } \frac{P(X=i)}{P(X=i-1)} = \frac{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}{\binom{n}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i+1}} = \frac{(n-i+1)}{i} \cdot \frac{p}{1-p}$$

$$H \geq 1 \Leftrightarrow np - ip + p \geq i - ip \Leftrightarrow (n+1)p \geq i$$

$\Rightarrow i = [(n+1)p] - \text{ig nö, utána csökken}$

Tétel (Bernoulli Nagy Számok Törvénye)

Ha X_n d.v.v. ilyen, hogy $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ akkor

$t \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > t\right) = 0$$

Biz nem biz

Nálának 1.

Defn X d. v. v. 2 paraméterű Poisson-eloszlás, ha

$$P(X=h) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^h}{h!} \quad \text{then}$$

jel $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} P(X=h) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{n}) \\ P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e^{-1} \end{array} \right.$$

sorozata

\checkmark ugy, hogy (Poisson approx.)

Pétf X_n binomiális eloszlású d.v.v. ugy, hogy

$X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, ahol $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$, akkor

$$\text{then } \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n=h) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^h}{h!}$$

Ki az a Foxxy?
És mire szedízett
a labatót?

$$\text{BIZ } P(X_n=h) = \binom{n}{h} p_n^h (1-p_n)^{n-h} = \frac{1}{h!} \cdot n p_n (n-1) \cdot p_n \cdots (n-h+1) p_n (1-p_n)^{n-h} \cdot (1-p_n)^h \rightarrow *$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 \rightarrow np_n \rightarrow \lambda$$

$$(n-1)p_n \rightarrow \lambda$$

$$(n-h+1) \rightarrow \lambda$$

$$\rightarrow np_n \cdots (n-h+1)p_n \rightarrow \lambda^h$$

Gratulálok, találtál

na \checkmark lab + 7 pont

$$(1-p_n)^h \rightarrow e^{-\lambda}$$

$$\# * \rightarrow \frac{1}{h!} \lambda^h e^{-\lambda}$$

$$(1-p_n)^{-h} \rightarrow 1$$

$$\left| \begin{array}{l} a_n \rightarrow \infty \\ a_n b_n \rightarrow \lambda \end{array} \right. \rightarrow (1+b_n)^{a_n} \rightarrow e^\lambda$$



Egy csónakon
született a hulász.