$\boxed{\text{2. eset}}$ $o(a) = n \ (n \in \mathbb{N}_0)$

$$G = \langle a \rangle = \{a^0, \dots, a^{n-1}\}$$

$a^{k_1} = a^{k_2} \to a^{k_1 - k_2} = e$, mivel $k_1 - k_2$ nem lehet n-nél kisebb természetes (ami $\neq 0$), így csak 0 lehet (vagy $k_1 = k_2 = n$, vagy $k_1 = n$ és $k_2 = 0$)

$m \in \mathbb{N}^+ \quad a^m = a^{nt+r} = a^{nt} \cdot a^r = (a^n)^t \cdot a^r =$

$= e^t a^r = a^r \ (r \in \underline{0, n-1}) \to \{a^0, a^1, \dots, a^{n-1}\}$ félcsoport

$e = a^0$ egységelem

$\| \ a^{k_1} = a^{k_2} \Leftrightarrow a^{k_1 - k_2} = e \Leftrightarrow n \mid k_1 - k_2 \Leftrightarrow k_1 \equiv k_2$

$a^i \cdot a^{n-i} = a^n = e \quad (a^i)^{-1} = a^{n-i} \to \{a^0, \dots, a^n\}$ csoport

$i \in \underline{0, n-1}$

$\to G = \{a^0, \dots, a^{n-1}\} \to G \cong (\mathbb{Z}_n, +)$

$\varphi : [k]_\equiv \mapsto a^k$ izomorfizmus

$k \in \underline{0, n-1}$

Áll $\varphi : (G_1, *) \leftrightarrow (G_2, \circ)$ izomorfizmus, akkor $\varphi(e_1) = e_2$

(e_1 a G_1-nek, e_2 a G_2-nek neutrálisa)

$\forall a \in G_1 : \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

Biz $\varphi(e_1) = \varphi(e_1 * e_1) = \varphi(e_1) \circ \varphi(e_1) \to \varphi(e_1)$ idempotens, ezért $\varphi(e_1) = e_2$, hk $\varphi(e_1) = \varphi(a * a^{-1}) = \varphi(a) \circ \varphi(a^{-1}) =$

$= e_2 \to \varphi(a) = \varphi(a)^{-1}$ $\quad \|$ a $\varphi(a)$-t balról kell szorozni

Ao 1