Diffegyenletek 1

2025.09.12.

math.bme.hu/~mhiss

LZH + vizsga

$2 \cdot 20\% + 60\%$ (min 40% külön-külön)

határok: 40, 55, 70, 85

70 ponttól lehet szóbelizni

Közönséges differenciálegyenletek (KDE)

1 független változó

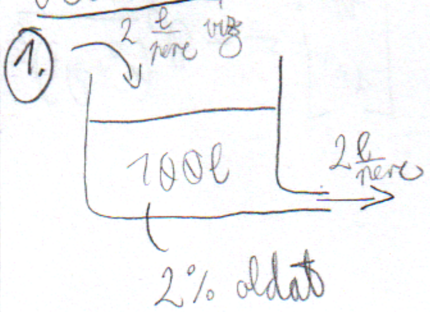
$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$y(x) \in \mathbb{R}^n$

|| parciális diffegyenleteknél lehet több független megoldás

Példák

1.



A só mennyisége a tartályban az idő függvényében.

Mo: $y(t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \quad 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{y(t)}{100} = y(t) - y(t+\Delta t)$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{50} y(t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = y'(t) = -\frac{1}{50} y(t)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{50} \quad \Big/ \int \dots dt$$

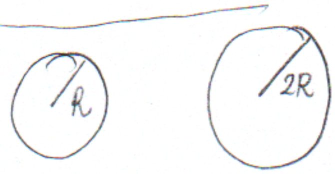
$$\log|y(t)| = -\frac{1}{50} t + C_1 \quad \Big/ \exp(\dots)$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\frac{1}{50}t} \cdot C_2$$

és $y(0) = 2 \rightarrow C_2 = 2$

$$y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

|| homogén, lineáris DE

② 

Mekkora lesz a nagyobbik, mire a kisebbik elolvad

$$V(t+\Delta t) - V(t) \approx -k A(t)\cdot \Delta t$$

$$\frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} \approx -k A(t) \quad / \Delta t \to 0$$

$$V'(t) = -k A(t)$$

$$4r^2\pi r' = -k 4 r^2 \pi$$

$$r' = -k$$

$\Rightarrow r = -kt + c$

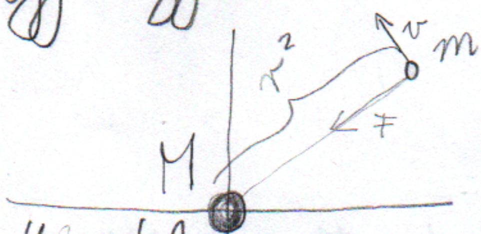
$r(0) = c = R$ és

$r(t) = -kt + R = 0$

$t = \frac{R}{k}$ ekkor olvad

$r\left(\frac{R}{k}\right) = -k\frac{R}{k} + 2R = \underline{\underline{R}}$

③ Bolygómozgás



$M \gg m$

$$F = -\gamma \frac{M m r}{|r|^2} = \cancel{m} r''$$

$$-\gamma \frac{M}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

ha $u = x'$, $v = y'$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = -\gamma \frac{M}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Miért síkmozgás?

$$(r \times r')' = \underbrace{r' \times r'}_{0} + \underbrace{r \times r''}_{0} = 0$$

Ezt nem tudjuk megoldani

Deff (Explicit elsőrendű KDE, (EEKDE)):
Legyen $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f: U \to \mathbb{R}^n$ folyt.
Az $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ismeretlen függvényre felírt egyenletet EEKDE-nek nevezzük.

Def (EEKDE-re vonatkozó kezdetiérték probléma ($\boxed{kép}$)):
U, f, y mint fennt, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in U$

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

ER ~~az~~ EEKDE-re vonatkozó $\boxed{kép}$

2025.09.25

A $\boxed{kép}$ megoldásának $\exists$-se és $!$-sége

|| $a_n \to a$ (metr. térben) $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N: d(a_n, a) < \varepsilon$.

Def a_n sorozat metr. térben **Cauchy-sorozat**, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, $n, m > N$
$d(a_n, a_m) < \varepsilon$

|| Cauchy $\mathbb{Q}$-ban $\not\Rightarrow$ konvergens, például $1, 1.4, 1.44, \ldots$ s.i.t. $\sqrt{2}$ tizedestört alakja

Def (H, d) **teljes**, ha $\forall$ Cauchy sorozat konvergens is

Def $k: H \to H$ **kontrakció**, ha $\exists q < 1$, hogy $\forall (x, y) \in H^2$-re
$d(k(x), k(y)) \leq q\, d(x, y)$

Tétel (Banach vagy kontrakciós fixponttétel)
(H, d) teljes metrikus tér, k kontrakció: $\exists! \hat{x}_0 \in Dom(k)$, $k(\hat{x}_0) = \hat{x}_0$

Tétel (Fixpont-keresés)
A fenti fixpontra $\hat{x}_0 = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x_n = k(x_{n-1})\}$ $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in H$

Biz $x_1 \in H$ $\quad x_2 = k(x_1), \ldots, x_{n+1} = x(k_n)$

$d(x_2, x_1) \leq q\, d(x_1, x_0)$, mert k kontr., innen

$d(x_{n+1}, x_n) \leq q\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots < q^{n-1} d(x_2, x_1)$ Diff 1

$$d(x_n, x_m) \overset{\Delta\neq}{\leq} \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} q^k \underset{(x_n)}{d(x_2, x_1)} \leq \sum_{\substack{k=N \\ N \leq m}}^{\infty} q^k d(x_2, x_1) = \frac{q^N}{1-q} d(x_2, x_1) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Tehát $\{x_n = k(x_{n-1})\}$ Cauchy-sorozat, így mivel (H, d) teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $(x_n) \to \hat{x}$, k folytonos, ezért triviális

$$x_{n+1} = k(x_n) \to k(\hat{x}) \to \hat{x} = k(\hat{x})$$

Más fixpont nem lehet, mert ha $\hat{\hat{x}}$ is fixpont, akkor

$$d(\hat{x}, \hat{\hat{x}}) \underset{\text{fixp.}}{=} d(k(\hat{x}), k(\hat{\hat{x}})) \leq q\, d(k(\hat{x}), k(\hat{\hat{x}})) \to d(\hat{x}, \hat{\hat{x}}) = 0 \to$$

~~ez nem pont fordítva!~~

$$\to \hat{x} = \hat{\hat{x}} \quad \square$$

|| kontrakció folytonos mert $\Uparrow$

Áll. Teljes metrikus tér zárt részhalmaza teljes

Biz. $K \subset H$ zárt, x_n K-beli Cauchy sorozat. Mivel X teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $x_n \to \hat{x} \in H$. Mivel K zárt, $\hat{x} \in K$

szerintem trivi

|| $C([a,b], \mathbb{R}) \triangleq C[a,b]$ vektortér, normált tér és $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ normával

$$\|f + g\| \overset{?}{\leq} \|f\| + \|g\|$$ előadó szer. trivi

sőt $C[a,b]$ teljes is (amit most elhiszünk)

Def $D \subset \mathbb{R}^n$, nyílt ~~hz~~ $f: D \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz, ha $\exists L > 0, \forall x, y \in D$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Ha $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ és $|f'| \leq L$, akkor f Lipschitz az L konstanssal:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'\right| \leq L|x - y|$$

általánosítása annak, hogy deriválható és a der. korlátos (tehát itt azt mondjuk, hogy deriválható ~~tulajdons~~ darabokból áll)

Deff (második változójában lokálisan Lipschitz MVLL)

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}^n$, MVLL, ha $(t_0, y_0) \in U$ $\exists V$ környezete és azon egy (V-től függő) $L > 0$ konstans úgy, hogy $\forall (t, y_1)$ és $(t, y_2) \in V$-re igaz, hogy:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

ez kell ahhoz, hogy tudjunk találni megoldást

Diff $f: D \to \mathbb{R}^m$ lokálisan Lipsch. $\Uparrow$

Deff $f: U \to \mathbb{R}^n$ MVL

A $\boxed{kép}$ megoldásáról

All $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ nyílt, $f: U \to \mathbb{R}^n$ folyt., $(t_0, y_0) \in U$,

$y(t)$ mo. $\left.\begin{array}{l} y'(t)f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\}$ $\boxed{kép}$-nek $\Longleftrightarrow y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$

a beztonság kedvéért folyt. legyen

Picard-integrálegyenl~~et~~nek megoldása

Diff 1.

Biz

$\boxed{\Rightarrow}$ kicseréljük t vált. s-re, integrálunk t_0-tól t-ig

$\boxed{\Leftarrow}$ t szerinti deriváltból kapjuk vissza az egyenletet

$t=t_0$ esetén visszakapjuk a kezdeti feltételt

$\|y(t)$ folytonossága a deriválásnál kellett

globálisan Lipschitz

Áll Ha f MVL az ~~[illegible]~~ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ hz-on az L konstanssal,

$(t_0, y_0) \in$ ~~[illegible]~~ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, kk $\exists \delta > 0$, hogy az $\left.\begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{KÉP}}$-nek

$\exists!$ mo-a a $(t_0-\delta, t+\delta)$ intervallumon

Biz ha $F(\overset{t}{y}) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))$ és $F \in C[t_0-\delta, t_0+\delta]$, ahol
(t függvénye)

$\delta < \frac{1}{L}$, akkor be kell látni, hogy F-nek $\exists!$ fixpontja $\Leftrightarrow$ kontrakció

$$d(F(y), F(z)) = \max_{t\in[t_0+\delta, t_0-\delta]} \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds - \right.$$

$$\left. - \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,ds\right)\right| = \max_{|t-t_0|<\delta} \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\,ds \right| \leq$$

$$\leq \max_{|t-t_0|<\delta} \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|\,ds \right| \overset{L\text{-tul.}}{\leq}$$

$$\leq \max_{|t-t_0|\leq\delta} \left| \int_{t_0}^{t} L \underbrace{|y(s) - z(s)|}_{\leq d(y,z)}\,ds \right| \leq \max_{|t-t_0|\leq\delta} \left| \int_{t_0}^{t} L\,d(y,z)\,ds \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{L\delta}_{<1}\, d(y,z) \leq d(y,z) \xrightarrow{\text{Banach-fp}} \exists$$

2025.09.26.

Tétel (Picard – Lindelöf,

$U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \xrightarrow{C} \mathbb{R}^n$ folyt., $(t_0, y_0)\in U$,

$a>0,\ r>0$ $\big(\underbrace{H=[t_0-a, t_0+a]\times B(y_0, r)}_{\text{henger-szerű}}\subset U\big)$

a $\exists L>0\ \forall (t, y_1), (t, y_2)\in H\ \big(|f(t, y_1)-f(t, y_2)|\le L|y_1-y_2|$

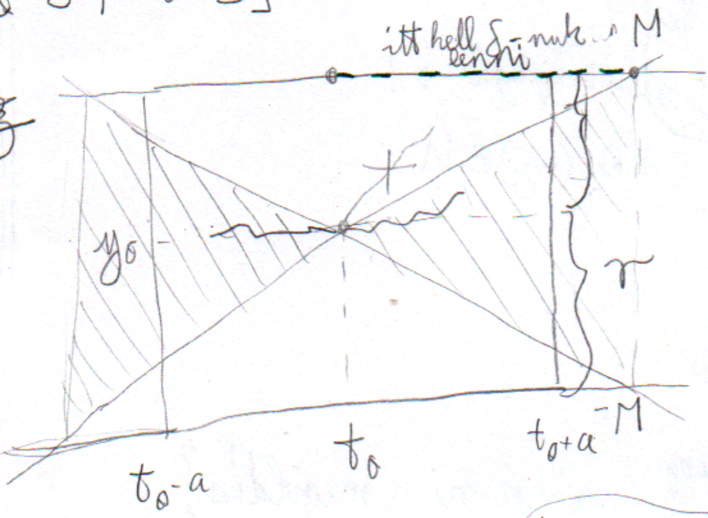
|| Cauchy tulajdonság ⇝ gyanús, hogy kompaktokon teljesül és viszont

|| A fenti következne, ha f MVLL lenne U-n

Akkor $\left.\begin{array}{l} y'(t)=f(t, y(t)) \\ y(t_0)=y_0 \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{kép}}$-nek $\exists!$ mo-sa a

$[t_0-\delta, t_0+\delta]$ int-on, ha $\delta < \min\left(a, \frac{r}{M}, \frac{1}{L}\right)$, ahol $M=\max\limits_{H}|f|$

Biz



[vonalkázott terület]-ben lesz a megoldás

$\subset H$

$Y=\underbrace{\{y\in C[t_0-\delta, t_0+\delta]\ \big|\ |y(t)-y_0|\le M|t-t_0|\}}_{\text{pillangóban menő fvek}}$

Minden megoldás az Y-ban kell lennie az érintő meredekségé miatt (itt ezt elhisszük)

$F(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$ $\quad F: Y \xrightarrow{?} Y$ operátor,

P-féle mo-sa ↔ kép mo-sa

mert $\left|F(y(t)) - y_0\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds\right| \le M|t-t_0|$, tehát F Y-ba képez(?)

Y teljes metr. tér mert a $C[t_0-\delta, t_0+\delta]$ teljes metrikus tér zárt részhz-a. F kontrakció, mert

$$d(F(y),F(z)) = \max_{t\in[t_0-\delta,t_0+\delta]} \left|f(y(t)) - F(z(t))\right| = \max_{|t-t_0|<\delta} \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s)) - f(s,z(s))\,ds\right| \le \dots \le \underbrace{L\delta}_{<1} d(y,z) \Rightarrow \text{kontrakció}$$

mint előző biz

a Banach-fixpont szerint F-nek pontosan egy fixpontja van ⇔ a Picard-féle egyenletnek pontosan egy megoldása van ⇔ $\boxed{\text{kép}}$-nek ∃! ■

nem öf → nem !

n = 1 U:  összefüggő → !

$$y'(t) = \frac{1}{\mathbb{1}_U} = \begin{cases} 1 & \text{ha } (t,y)\in U \end{cases}$$

$\mathbb{1}_U$ U karakterisztikus fv-e

$\mathbb{1}_U(t,y) = \begin{cases} 1 & (t,y)\in U \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

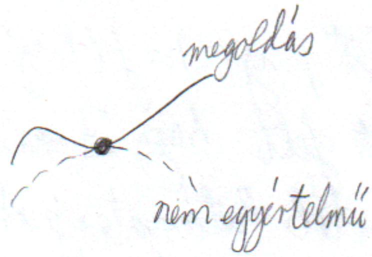
$y(t_0) = y_0$

Kezdeti feltételtől függően mi a megoldás?

⇒ bal oldalhoz i ~~szakasz~~ bármely jobb oldali tartozhat, ⇒ ha az ért. tart. nem öf, akkor nem lesz öf-ség

Deff $\varphi(t)$ mo-sa $\boxed{\text{kép}}$-nek, ha $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ $\forall t \in Dom(\varphi)$-re és $Dom(\varphi)$ öf (~~zz~~ intervallum)

Def A $\boxed{\text{kép}}$ megoldása lokálisan $\boxed{!}$, ha $\varphi_1(t)$ és $\varphi_2(t)$ is megoldás, akkor $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ $(t_0-\delta, t_0+\delta) \cap Dom(\varphi_1) \cap Dom(\varphi_2)$ halmazon



(az érintők $= -k$), de van egy pont a kis környezet, ahol nem egyenlők

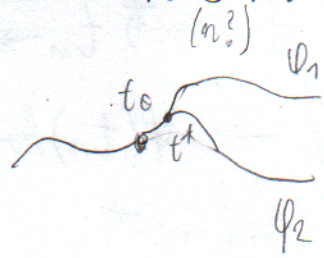
Áll $y'(t)=f(t,y(t))$ DE-hez tart. $\forall$ $\boxed{\text{kép}}$ mo-sa lok. $\boxed{!}$, akkor globálisan is $\boxed{!}$

Biz $y(t_0)=y_0$ $\overbrace{\exists\varphi_1 \exists\varphi_2}^{\text{megoldások}}(\varphi_1\neq\varphi_2) \wedge \exists t>t_0$ $\varphi_1(t)\neq\varphi_2(t)$

$(t<t_0$ hasonló$)$

$t^* = \inf\limits_{t>t_0} \{t \mid \varphi_1(t)\neq\varphi_2(t)\}$. φ_1, φ_2 $\overset{\text{balról is}}{\text{folyt.}}$: $\varphi_1(t^*)=\varphi_2(t^*)$

Ezért $y(t^*)=\varphi_1(t^*)$ kezdeti feltételhez tartozó megoldás lokálisan sem egyértelmű



kis intervallum $\to$ végén van kis intervallum $\to$ ...

$\to$ lefedjük-e ~~ezekkel az~~ int-okkal az egészet (mit?)

Def A $\varphi_1(t)$ megoldás <u>bővebb</u>, mint $\varphi_2(t)$, ha $Dom(\varphi_1) \supset Dom(\varphi_2)$ és $Dom(\varphi_2)$-n $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$

Def A $\varphi_1(t)$ <u>megoldás max.</u>, ha φ_2 bővebb, mint $\varphi_1 \to \varphi_2=\varphi_1$

Ha nem max, akkor φ_1 folytatható

a fenti reláció nem dichotóm
Ha ∀ $\boxed{\text{kép}}$ van mo, akkor van max megoldás is
megoldások részben rendezett hzok (Zorn-lemma)

Lemma $\overset{\text{nyílt}}{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}^n$ folyt., $y'(t) = f(t, y(t))$
DE-nek ∀ kezdeti ~~érték mellett~~ felt.-hez ∃ mo ⟶
⟶ egy. ~~max~~ max mo. határtól határig terjed, azaz
minden $K \subset U$ kompakt halmazt mindkét irányban
($t < t_0$-ra és hasonló) elhagy.

Biz $\exists K \subset U$ kompakt, $\varphi(t)$ max mo. $\varphi(t)$ $t > t_0$ nem
hagyja el a K-t ($t < t_0$ hasonló), ~~azaz~~ $(t, \varphi(t)) \in K$
K-n $|f|$ maximuma M, kk $|\varphi(t_1) - \varphi_2(t_2)| =$

$$= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s))\, ds \right| \leq M|t_1 - t_2| \to \varphi \text{ egyenletesen is folytonos}$$

b $Dom(\varphi)$ felső végpontja, $b \notin Dom(\varphi)$ ⟶
⟶ $\varphi(b) = \lim_{t \to b-} \varphi(t)$ ∃ (mert $t_n \to b$ ⟶ t_n Cauchy ⟶
⟶ $\varphi(t_n)$ is Cauchy ⟶ $\varphi(t_n)$ konvergens)
φ balról diffható b-ben (mert:

$$\lim_{t \to b-} \frac{\varphi(b) - \varphi(t)}{b - t} = \lim_{t \to b-} \varphi'(c) =$$

Lagrange: $\exists c \in (t, b)$

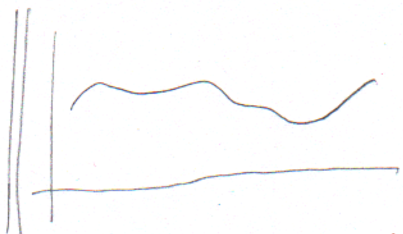
$$= \lim_{t \to b-} f(c, \varphi(c)) = f(b, \varphi(b))$$
)

↯ φ folytatható

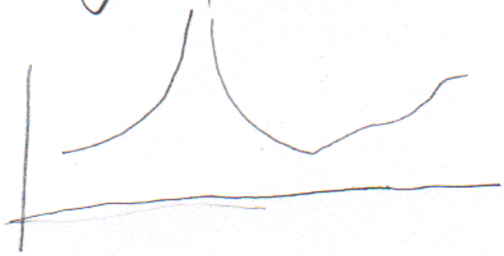
$b \in Dom(\varphi)$ ⟿

10

$b \in Dom(\varphi)$, kk φ folytatható az $y(b)=\varphi(b)$ kezdeti feltételhez tartozó bármely megoldással $\to$ φ nem volt maximális ∎



vagy



lokális Lips. $\to$ lokálisan $\exists$ mo $\to$ $\forall$ kezdeti feltételre igaz $\to$
$\to$ összeuniózom + kell még, hogy összefüggő legyen

__Tétel__ (Picard-Lindelöf, globális változat)

$U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ nyílt, $f: U \xrightarrow{D} \mathbb{R}^n$ folyt., MVLL, $(t_0, y_0) \in U$, akkor az

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \boxed{\text{kép}}\text{-nek}$$

létezik max. megoldása, ez a megoldás globálisan egyértelmű és határtól határig terjed.

__Biz__: $\forall (t_0, y_0) \in U$, $\exists V \subset U$ (f MVL V-n). A lokális változat szerint $\exists \delta > 0$, hogy $[t_0-\delta, t_0+\delta]$-n $\boxed{!}$ megoldása van az $y(t_0)=y_0$ kezdeti feltétellel felírt $\boxed{\text{kép}}$-nek. Legyen $Dom(\Phi) = \bigcup_{\substack{\varphi \text{ mo} \\ \text{a kép-nek}}} Dom(\varphi)$

Ez értelmes, mert a megoldás lokálisan $\boxed{!}$ $\to$ globálisan $\boxed{!}$:

$$\Phi(t) = \varphi(t) \text{ jóldeff.}$$

Ez ~~global~~ max megoldás és határtól határig terjed