Analízis 1.

Hazug-paradoxon, Curry-paradoxon: Ha ez a mondat igaz, akkor (feltétel)

Kijelentés oly mondat, mely egyértelműen igaz, vagy hamis, **kijelentésváltozó-val** jelöljük (latin nagybetű).

Atomi kijelentés, ami nem bontható ⟿ **összetett kijelentések** összekötő jelekkel ún. **logikai operátorokkal**

$\neg$ unér

$\wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \bar{\wedge}, \bar{\vee}$

Összetett kijelentes

1. **ellentmondásmentesség**
2. **harmadik kizárása**
3. $\forall$ kijelentés igazságértéke csak az atomoktól függ

|| 4 fajta unér operátor

A	$\neg$	$\top$	$\bot$	Δ
i	h	i	h	i
h	i	i	h	h

Def Egy unér és binér operátorból álló teljes rendszer, melyből $\forall$ unér és binér operátor kifejezhető velük.

|| reláció: $R \subset H^2 \Leftrightarrow R: H^2 \rightarrow \{i, h\}$

Def **interpretáció** a logikai tábl-ban egy sor

A	B	A $\wedge$ B
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Def $P \equiv Q$, ha ugyanazokban az interpretációkban igaz

Def $P \models Q$

Def **tautológia**

Deff kontradikció

Nulladrendű logika

- Atom
- Kötőszó
- Összetett kij., mondat
- Zárójelek

Elsőrendű logika

- Term: (objektumok (?)), típusok de nincs logikai érték típusa
  - konstansok
  - változók
  - függvényértékek nem egészen a már ismert fv. (nem kz-okhoz kötött)
- Függvények term → term
- Predikátum olyan, mint a fv, csak lehet értéke logikai érték
- Kvantorok (csak változókra)
- Formulák atomok és összetett formulák

Kvantorok

univerzális, egzisztenciális

$\forall$ $\exists$

$\exists! x : \varphi(x)$ pont 1 db x létezik, amire φ igaz

Másodrendű logika

nagyobb kifejezhetőség, de nem igaz

$\forall \mathcal{L}: (\mathcal{L}(0) \wedge \forall n: (\mathcal{L}(n) \to \mathcal{L}(n+1)) \to \forall n: \mathcal{L}(n)$ teljes indukció

emiatt másodrendű nyelv

még vannak magasabbrendű logikák

Hilbert ε operátor

$\exists x: \varphi(x) \quad \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$

$\forall x: \varphi(x) \quad \neg\varphi(\varepsilon x \neg\varphi(x))$

Halmaz axiómák ZFC

csak egy álom

ax. rendszer legyen:
- ellentmondásmentes
- teljes (levezethetőség)
- (függetlenek, egyszerűek (csak esztétikai)) → az emberi értelmet segíti és matematikai értelemben nem árt

Elemek ismétlődhetnek

$\in$ predikátum

csak halmazok vannak (minden hz)

$A \subset B \quad \forall x \in A: x \in B \quad x \in A \to x \in B$

$A = B \quad A \subset B \wedge B \subset A$

Műveletek hz-okkal

unió, metszet, kség

(halmazok, $\cap$, $\cup$) Boole-algebra

Lehet hz eleme hz?
Lehet hz eleme önmagának?
Lehet egy hz, ami $\forall$ hz-t tartalmaz?
Hogyan konstruálhatunk halmazt?

Tétel (Russel antinómiája)

Nem létezik univerzális hz (ha A hz, akkor $A \in U$) U univerzális hz

Biz U-nak $\forall$ hz eleme, akkor ha $A = \{x \in U \mid x \notin X\}$ amik nem tartalmazzák magukat

ezt nem engedjük meg

$$\left.\begin{array}{l} A \in A \to A \notin A \\ A \notin A \to A \in A \end{array}\right\} A \in A \leftrightarrow A \notin A$$

~~Halmazaxiómák~~ ZFC

csak halmazok vannak

vált.: halmazok, predikátum: $\in$

1. Üreshz axióma

$\exists A : \forall X : X \notin A$

Jel. $\emptyset$

2. Páraxióma

$\forall X, Y : \exists \{X, Y\}$

3. Meghatározottsági axióma

$\forall X \forall Y : \forall Z : (Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y) \Rightarrow X = Y$

Jel. $\neg(X = Y) =: X \neq Y$

4. Regularitási axióma

$\forall X \neq \emptyset : \exists Y \in X : Y \cap X = \emptyset$ $\quad (\Rightarrow \forall A : A \notin A)$

$X \cap Y = \emptyset$ helyett: $\forall Z : Z \in X \Rightarrow Z \notin Y$

4 $\Rightarrow \forall A : A \notin A$

Ha A hz, akk 2 alapján $\{A\}$ is hz

$\exists Y \in \{A\} : \{A\} \cap Y = \emptyset$

$A \in \{A\} \Rightarrow A \notin Y$

5. Részhalmazaxióma (SÉMA, elhagyható)

$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ hz

vagy másodrendű nyelvben $\forall A : \forall \varphi : \exists \{x \in A \mid \varphi(x)\}$

6. Unióaxióma

$\mathcal{A}$ hzok hza

$\forall \mathcal{A} : \exists X : \forall A \in \mathcal{A} : \forall x \in A : x \in X$

7. Hatványhalmaz axióma

$\forall X : \exists \mathcal{H} : \forall A \subset X : A \in \mathcal{H}$

|| $\mathcal{H}$ bővebb $\mathcal{P}(A)$-nál

8. Végtelenségi hz

$\exists \mathcal{A} : \emptyset \in \mathcal{A} \wedge (X \in \mathcal{A} \rightarrow X \cup \{X\} \in \mathcal{A})$

9. Helyettesítési axióma

Ha egy hz elemeit kicseréljük egyértelműen, akkor hz marad.

Kiválasztási axióma

10. $\emptyset \notin \mathcal{A}, X = \cup \mathcal{A}, \exists f : \mathcal{A} \hookrightarrow X : \forall A \in \mathcal{A} : f(A) \in A$

Tétel

2025.09.23.

Def rendezett pár : $\{\{a\}, \{a,b\}\}$

Jel. (a,b)

Def I hz, $\forall i \in I$ A_i hz

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i\}$$

$\forall i \in I$ $A = A_i$ $\quad A^I = \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in A} A$

$A_1 \times A_2$ hz, mivel

$\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ létezik, mivel $a_1, a_2 \in A_1 \cup A_2 \to \{a_1\}, \{a_1, a_2\} \in$

$\in \mathcal{P}(A_1 \cup A_2) \to (a_1, a_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A_1 \cup A_2))$

$$a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$a \subset I \times \bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^2(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i) \in \mathcal{P}^3(\ldots)$$

$$a \in \prod_{i \in I} A_i \to a \in \mathcal{P}^3(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i)$$

$$\prod_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^3(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i)$$ tehát $\prod_{i \in I} A_i$ is hz

Def reláció X és Y között, R ált. kép, R ált. kép (hz), értelmezési tartomány, értékkészlet, megszorítás

$R = \{(\emptyset, \emptyset), (\{\emptyset\}, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\})\} \subset X \times Y$, ha $X = Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$R(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = Y$

$R[\emptyset] = \emptyset$

Def inverz

Tétel inverzképzés involutív és monoton

Def kompozíció

Tétel $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$, $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

Def reláció 1 hzon, id_{H}, Δ_H

Def equivalenciareláció

Deff osztályozás

Tétel R eq. rel. H-n, hk $\mathcal{A} = \{R(x) | x \in H\}$ ...

Deff parciális rendezés,

antiszimmetria: „ha te szeretsz engem és én téged, akkor egyek vagyunk"

$(H, \leq)$ poset

$x \in X: f(x) = \{a \in H | a \leq x\} \subset H$ $\quad f: H \hookrightarrow \mathcal{P}(H)$

$(H, \leq)$ izomorf $(Ran(f), \subset)$

$f: H \hookrightarrow Ran(f)$ bijektív

$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subset f(y)$

minden rendezés megfeleltethető hzrendszeren tartalmazással (?)

Deff

Deff (lineáris) rendezett

Deff jólrendezés

Tétel $(H, \leq)$ jólrendezett hz, akkor $\leq$ lineáris rendezés

Deff függvény

$$f: Dom(f) = X \hookrightarrow Y \triangleq f: X \overset{?}{\hookrightarrow} Y$$

Deff max, min etc

Deff monotonitás

Def injektív, szürjektív, bijektív

Tétel a fenti tulajdonságokat a $\circ$ megtartja

Biz $\Uparrow$

Tétel $f \subset X \times Y$, $g \subset Y \times X$

$f : X \overset{?}{\to} Y$, $g : Y \overset{?}{\to} X$ bij. és $f = g^{-1} \Longleftrightarrow f \circ g = \Delta_Y$ és $g \circ f = \Delta_X$

Biz $\boxed{\Rightarrow}$ trivi

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists x \in X, f(x) = \emptyset \to g[f(x)] = g[\emptyset] = \emptyset$

$g[f(x)] = (g \circ f)(x) = \Delta_X(x) = \{x\}$ ——— $\lightning$ $\to$

$\to Dom(f) = X$ $(Dom(g) = Y$ hasonlóan

$\forall x \in X \to \exists y \in f(x) \subset Y$ de $\emptyset \neq g(y) \subset g[f(x)] = \{x\}$

Kaptuk, hogy $Ran(g) = X$ (hasonlóan $Ran(f) = Y$)

$\emptyset \neq f(x) \subset f[g(y)] = \{y\} \to f(x) = \{y\}$

Tf f: függvény (has. g is)

$f : X \overset{?}{\to} Y$, $g : Y \overset{?}{\to} X$ szürjektívek

$f(x_1) = f(x_2) \to g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \to x_1 = x_2$

kaptuk, h. f ~~dsg~~ injektív (g hasonlóan)

$y = f(x) \to g(y) = g(f(x)) = x \to g = f^{-1}$

Axióma (Peano-axiómák)

$\mathbb{N}_0$ egy hz, $0 \in \mathbb{N}_0$ és $s : \mathbb{N}_0 \xrightarrow{D} \mathbb{N}_0$ melyekre:

s injektív

$0 \notin s[\mathbb{N}_0]$

$\forall P \subset \mathbb{N}_0 : (s[P] \cup \{0\} \subset P) \longrightarrow \mathbb{N}_0 = P$

Def összeadás, szorzás, rendezés

Tétel $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ neutrálisos kommutatív félcsoport || 0 mult. neutr, 1 add. neutr

$\underbrace{(\mathbb{N}, +, \cdot)}_{\text{biztos ez?}}$ nullosztómentes $(ab = 0 \to a = 0 \vee b = 0)$

szorzás disztributív az összeadásra nézve

$\{+, \cdot\}$ cancellatív $a + n = b + n \to b = a$

$n \neq 0 \quad an = bn \to b = a$

Tétel Peano-axiómák izomorfia erejéig egyértelműek

Biz $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ $(M, ⓪, t)$

$\varphi : \mathbb{N}_0 \to M \quad \varphi(0) = ⓪,\ \varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$

$\psi : M \to \mathbb{N}_0 \quad \psi(⓪) = 0,\ \psi(t(m)) = s(\psi(m))$

$\varphi(\psi(⓪)) = \varphi(0) = ⓪$

$\varphi(\psi(t(m)) = \varphi(s(\psi(m)) = t(\underbrace{\varphi(\psi(m))}_{=m \text{ az indukciós feltétel miatt}}) = t(m)$

$\square$

Def (Neumann-modell)

Def Egész számok

$(a,b) \sim (c,d) : a+d = b+d$

$(1,2) \sim (2,3)$ tehát a negatív számokat több jelölné, ha rendezett párok lennének, ezért a $\sim$ reláció által kijelölt osztályok lesznek (equivalenciaosztályok)

tehát $-1 = \{(0,1),(1,2),\ldots\}$ osztályokon művelet

$-2 = \{(0,2),(1,3),\ldots\}$

$\vdots$

$-k = \{(0,k),(1,1+k),\ldots\}$

Tétel $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$ integritási tartomány

$(\mathbb{N}_0,+,\cdot,\leq)$ izomorf a $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$ részhalmazával

* Jól korrekt, azaz $\sim$ equivalenciareláció

Biz tranzitivitás

$(a,b) \sim (c,d),\ (c,d) \sim (e,f)$

$a-b = c-d$ és $c-d = e-f \to$ $\to a-b = e-f$

$a+d = c+b \qquad c+f = d+e$

$a+d+f = b+c+f \qquad c+f+b = d+e+b$

$a+d+f = d+e+b \longrightarrow a+f = e+b \equiv (a,b) \sim (e,f)$

// A cancelativitást is le lehet vezetni kivonás nélkül

A reprezentánstól független az összeg és szorzás (azaz ugyanabba az osztályba fog kerülni)

$(c_1,d_1) \sim (c_2,d_2)$ akkor $(a_1,b_1) +_{\mathbb{Z}} (c_1,d_1) \sim (a_2,b_2) + (c_2,d_2)$

$(a_1,b_1) \cdot (c_1,d_1) \sim (a_2,b_2) \cdot (c_2,d_2)$

$(a_1,b_1) \leq (c_1,d_1) \Leftrightarrow (a_2,b_2) \leq (c_2,d_2)$

|| A testnél a mult. inverzből köv. a nullosztómentesség, de ha ezt kivesszük, akkor a nullosztómentességet hozzá kell venni a gyűrűhöz

Def **racionális számok**

|| a számrendszerek felépítésénél látszik, hogy az analízis mennyire szoros kapcsolatban van a számelmélettel

~~**Áll** $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ **Archimédeszi rendezett test**~~

Tétel $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ trkh. rend. test

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ izomorf $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ egy részhávál

|| de bijekció van

Biz $p, q \in \mathbb{Q}, p \geq_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}$:

$\exists (a,b) = p \to a \geq_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$, $\exists (c,d) = q$

ha $c \leq 0$ $\quad n = 1 \Rightarrow 1 \cdot p \geq q$

$c > 0 \quad n = b \cdot_{\mathbb{Z}} c + 1 \to$

$\to \overbrace{(a,b) + \dots + (a,b)}^{n} = (na+1, b) \sim$

$\sim ((c+1)a, 1) > (ca, 1) \geq (c, 1) \geq$

$\geq (c, d)$ ■

Köv (Hatványra vonatkozó Archimédeszi-tulajdonság)

Biz $p^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n(p-1) \geq q$

Def **szeletek minden ízben**