Analízis 1.

Hazug-paradoxon, Curry-paradoxon: Ha ez a mondat igaz, akkor (feltétel)

Kijelentés oly mondat, mely egyértelműen igaz, vagy hamis, **kijelentésváltozó-val** jelöljük (latin nagybetű).

Atomi kijelentés, ami nem bontható ⟶ **összetett kijelentések** összekötő jelekkel ún. **logikai operátorokkal**

$\neg$ unér

$\wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \bar{\wedge}, \bar{\vee}$

Összetett kijelentes

1. **ellentmondásmentesség**
2. **harmadik kizárása**
3. $\forall$ kijelentés igazságértéke csak az atomoktól függ

4 fajta unér operátor

A	$\neg$	$\top$	$\bot$	Δ
i	h	i	h	i
h	i	i	h	h

Deff Egy unér és binér operátorból álló teljes rendszer, melyből $\forall$ unér és binér operátor kifejezhető velük.

relácio: $R \subset H^2 \Leftrightarrow R: H^2 \Rightarrow \{i, h\}$

Deff **interpretáció** a logikai tábl-ban egy sor

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Deff $P \equiv Q$, ha ugyanazokban az interpretációkban igaz

Deff $P \models Q$

Deff **tautológia**

Deff kontradikció

Nulladrendű logika

- Atom
- Kötőszó
- Összetett kij., mondat
- Zárójelek

Elsőrendű logika

- Term: (objektumok(?)), típusok de nincs logikai érték típusa
  - konstansok
  - változók
  - függvényértékek nem egészen a már ismert fv. (nem kz-okhoz kötött)
- Függvények term → term
- Predikátum olyan, mint a fv, csak lehet értéke logikai érték
- Kvantorok (csak változókra)
- Formulák atomok és összetett formulák

Kvantorok

univerzális, egzisztenciális

$\forall$ $\exists$

$\exists! x : \varphi(x)$ pont 1 db x létezik, amire φ igaz

Másodrendű logika

nagyobb kifejezhetőség, de nem igaz

$\forall\mathcal{L}: (\mathcal{L}(0) \wedge \forall n: (\mathcal{L}(n) \to \mathcal{L}(n+1))) \to \forall n: \mathcal{L}(n)$ teljes indukció

emiatt másodrendű nyelv

még vannak magasabbrendű logikák

Hilbert ε operátor

$\exists x: \varphi(x)$ $\quad \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$

$\forall x: \varphi(x)$ $\quad \neg\varphi(\varepsilon x \neg\varphi(x))$

Halmaz axiómák ZFC

csak egy álom

ax. rendszer legyen:
- ellentmondásmentes
- teljes (levezethetőség)
- (függetlenek, egyszerűek (csak esztétikai)) → az emberi értelmet segíti és matematikai értelemben nem árt

Elemek ismétlődhetnek

$\in$ predikátum

csak halmazok vannak (minden hz)

$A \subset B$ $\quad \forall x \in A: x \in B$ $\quad x \in A \to x \in B$

$A = B$ $\quad A \subset B \wedge B \subset A$

Lehet hz eleme hz?
Lehet hz eleme önmagának?
Lehet egy hz, ami $\forall$ hz-t tartalmaz?
Hogyan konstruálhatunk halmazt?

Műveletek hzokkal

unió, metszet, kül

(halmazok, $\cap$, $\cup$) Boole-algebra

Tétel (Russel antinómiája)

Nem létezik univerzális hz (ha A hz, akkor $A \in U$) (U univerzális hz)

Biz U-nak $\forall$ hz eleme, akkor ha $A = \{x \in U \mid x \notin x\}$ amik nem tartalmazzák magukat (ezt nem engedjük meg)

$$\left.\begin{array}{l} A \in A \to A \notin A \\ A \notin A \to A \in A \end{array}\right\} A \in A \leftrightarrow A \notin A$$

~~Halmaz axiómák~~ ZFC

csak halmazok vannak

vált.: halmazok, predikátum: $\in$

1. Üreshz axióma

$$\exists A: \forall X: X \notin A$$

Jel. $\emptyset$

2. Páraxióma

$$\forall X, Y: \exists \{X, Y\}$$

3. Meghatározottsági axióma

$$\forall X \forall Y: \forall Z: (Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y) \Rightarrow X = Y$$

Jel. $\neg(X = Y) =: X \neq Y$

4. Regularitási axióma

$$\forall X \neq \emptyset: \exists Y \in X: Y \cap X = \emptyset \qquad (\Rightarrow \forall A: A \notin A)$$

$X \cap Y = \emptyset$ helyett: $\forall Z: Z \in X \Rightarrow Z \notin Y$

4 $\Rightarrow \forall A: A \notin A$

Ha A hz, akk 2 alapján $\{A\}$ is hz

$\exists Y \in \{A\}: \{A\} \cap Y = \emptyset$

$A \in \{A\} \Rightarrow A \notin Y$

5. Részhalmazaxióma (SÉMA, elhagyható)

$$\{x \in A \mid \varphi(x)\} \text{ hz}$$

vagy másodrendű nyelvben $\forall A: \forall \varphi: \exists \{x \in A \mid \varphi(x)\}$

6. Unióaxióma

$\mathcal{A}$ hzok hza

$$\forall \mathcal{A}: \exists X: \forall A \in \mathcal{A}: \forall x \in A: x \in X$$

⑦ Hatványhalmaz axióma

$\forall X : \exists \mathcal{H} : \forall A \subset X : A \in \mathcal{H}$

|| $\mathcal{H}$ bővebb $\mathcal{P}(A)$-nál

⑧ Végtelenségi hz

$\exists \mathcal{A} : \emptyset \in \mathcal{A} \land (X \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cup \{X\} \in \mathcal{A})$

⑨ Helyettesítési axióma

Ha egy hz elemeit kicseréljük egyértelműen, akkor hz marad.

Kiválasztási axióma

⑩ $\emptyset \notin \mathcal{A}$, $X = \cup \mathcal{A}$, $\exists f : \mathcal{A} \hookrightarrow X : \forall A \in \mathcal{A} : f(A) \in A$

Tétel

2025.09.23.

Def rendezett pár : $\{\{a\}, \{a,b\}\}$

Jel. (a,b)

Def I hz, $\forall i \in I$ A_i hz

$$\prod_{i \in I} A_i = \{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i \}$$

$\forall i \in I$ $A = A_i$ $A^I = \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in A} A$

$A_1 \times A_2$ hz mivel

$\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ létezik, mivel $a_1, a_2 \in A_1 \cup A_2 \to \{a_1\}, \{a_1, a_2\} \in$

$\in \mathcal{P}(A_1 \cup A_2) \to \underline{(a_1, a_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A_1 \cup A_2))}$

$$a: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$a \subset I \times \bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^2(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i) \in \mathcal{P}^3(\dots)$$

$$a \in \prod_{i \in I} A_i \to a \in \mathcal{P}^3(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i)$$

$$\prod_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^3(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i)$$ tehát $\prod_{i \in I} A_i$ is hz

<u>Def</u> reláció X és Y között, R ált. kép, R ált. kép (hz), értelmezési tartomány, értékkészlet, megszorítás

$R = \{(\emptyset, \emptyset), (\{\emptyset\}, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\})\} \subset X \times Y$, ha $X = Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$R(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = Y$

$R[\emptyset] = \emptyset$

<u>Def</u> inverz

<u>Tétel</u> inverzképzés involutív és monoton

<u>Def</u> kompozíció

<u>Tétel</u> $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$, $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

<u>Def</u> reláció 1 hzon, id_{H}, Δ_H

<u>Def</u> equivalenciareláció

6

Deff osztályozás

Tétel R eq. rel. H-n, hh $\mathcal{A}=\{R(x) | x \in H\}$ ...

Deff parciális rendezés,

antiszimmetria: „ha te szeretsz engem és én téged, akkor egyek vagyunk"

$(H, \leq)$ poset
$x \in X: f(x)=\{a \in H | a \leq x\} \subset H \quad f: H \hookrightarrow \mathcal{P}(H)$

$(H, \leq)$ izomorf $(Ran(f), \subset)$
$f: H \hookrightarrow Ran(f)$ bijektív
$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subset f(y)$

minden rendezés megfeleltethető hzrendszeren tartalmazással (?)

Deff

Deff (lineáris) rendezet

Deff jólrendezés

Tétel $(H, \leq)$ jólrendezett hz, akkor $\leq$ lineáris rendezés

Deff függvény

$$f: Dom(f)=X \hookrightarrow Y \triangleq f: X \overset{D}{\hookrightarrow} Y$$

Deff max, min etc

Deff monotonitás

Def injektív, szürjektív, bijektív

Tétel a fenti tulajdonságokat a $\circ$ megtartja

Biz $\Uparrow$

Tétel $f \subset X \times Y$, $g \subset Y \times X$

$f: X \overset{?}{\to} Y$, $g: Y \overset{?}{\to} X$ bij. és $f = g^{-1} \Longleftrightarrow f \circ g = \Delta_Y$ és $g \circ f = \Delta_X$

Biz $\boxed{\Rightarrow}$ trivi

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists x \in X, f(x) = \emptyset \to g[f(x)] = g[\emptyset] = \emptyset$

$g[f(x)] = (g \circ f)(x) = \Delta_X(x) = \{x\} \longrightarrow$ ↯ $\to$

$\to \mathrm{Dom}(f) = X$ ($\mathrm{Dom}(g) = Y$ hasonlóan

$\forall x \in X \to \exists y \in f(x) \subset Y$ de $\emptyset \neq g(y) \subset g[f(x)] = \{x\}$

Kaptuk, hogy $\mathrm{Ran}(g) = X$ (hasonlóan $\mathrm{Ran}(f) = Y$)

$\emptyset \neq f(x) \subset f[g(y)] = \{y\} \to f(x) = \{y\}$

Tf f: függvény (has. g is)

$f: X \overset{?}{\to} Y$, $g: Y \overset{?}{\to} X$ szürjektívek

$f(x_1) = f(x_2) \to g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \to x_1 = x_2$

kaptuk, h. f injektív (g hasonlóan)

$y = f(x) \to g(y) = g(f(x)) = x \to g = f^{-1}$

Axióma (Peano-axiómák)

$\mathbb{N}_0$ egy hz, $0 \in \mathbb{N}_0$ és $s: \mathbb{N}_0 \xrightarrow{D} \mathbb{N}_0$ melyekre:

- s injektív
- $0 \notin s[\mathbb{N}_0]$
- $\forall P \subset \mathbb{N}_0 : (s[P] \cup \{0\} \subset P) \to \mathbb{N}_0 = P$

Deff összeadás, szorzás, rendezés

Tétel $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ neutrálisos kommutatív félcsoport ‖ 0 mult. neutr, 1 add. neutr

$\underbrace{(\mathbb{N}, +, \cdot)}_{\text{biztos ez?}}$ nullosztómentes $(ab = 0 \to a = 0 \vee b = 0)$

szorzás disztributív az összeadásra nézve

$\{+, \cdot\}$ cancellatív $a + n = b + n \to b = a$

$n \neq 0 \quad an = bn \to b = a$

Tétel Peano-axiómák izomorfia erejéig egyértelműek

Biz $(\mathbb{N}_0, 0, s) \quad (M, \odot, t)$

$$\varphi : \mathbb{N}_0 \to M \quad \varphi(0) = \odot, \ \varphi(s(n)) = t(\varphi(n))$$

$$\psi : M \to \mathbb{N}_0 \quad \psi(\odot) = 0, \ \psi(t(m)) = s(\psi(m))$$

$$\varphi(\psi(\odot)) = \varphi(0) = \odot$$

$$\varphi(\psi(t(m))) = \varphi(s(\psi(m))) = t(\underbrace{\varphi(\psi(m))}_{=m \text{ az indukciós feltétel miatt}}) = t(m)$$

$\square$

Deff (Neumann-modell)

Def Egész számok

$(a,b) \sim (c,d) : a+d = b+d$

$(1,2) \sim (2,3)$ tehát a negatív számokat több jelölné, ha rendezett párok lennének, ezért a $\sim$ reláció által kijelölt osztályok lesznek (equivalenciaosztályok)

tehát $-1 = \{(0,1),(1,2),\dots\}$ osztályokon művelet

$-2 = \{(0,2),(1,3),\dots\}$

$\vdots$

$-k = \{(0,k),(1,1+k),\dots\}$

Tétel $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$ integritási tartomány

$(\mathbb{N}_0,+,\cdot,\leq)$ izomorf a $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$ részhalmazával

A jól korrekt, azaz $\sim$ equivalenciareláció

Biz tranzitivitás

$(a,b) \sim (c,d),\ (c,d) \sim (e,f)$

$a-b=c-d$ és $c-d=e-f \to$ $\to a-b=e-f$

$a+d=c+b \qquad c+f=d+a$

$a+d+f=b+c+f \qquad c+f+b=d+e+b$

$a+d+f=d+e+b \longrightarrow a+f=e+b \equiv (a,b)\sim(e,f)$

// A cancelativitást is le lehet vezetni kivonás nélkül

A reprezentánstól független az összeg és szorzás (azaz ugyanabba az osztályba fog kerülni)

$(c_1,d_1) \sim (c_2,d_2)$ akkor $(a_1,b_1) +_{\mathbb{Z}} (c_1,d_1) \sim (a_2,b_2) + (c_2,d_2)$

$(a_1,b_1)\cdot(c_1,d_1) \sim (a_2,b_2)\cdot(c_2,d_2)$

$(a_1,b_1) \leq (c_1,d_1) \Leftrightarrow (a_2,b_2) \leq (c_2,d_2)$

A testnél a mult. inverzből köv. a nullosztómentesség, de ha ezt kivesszük, akkor a nullosztómentességet hozzá kell venni a gyűrűhöz

Def racionális számok

a számrendszerek felépítésénél látszik, hogy az analízis mennyire szoros kapcsolatban van a számelmélettel

~~Tétel $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ Archimédeszi rendezett test~~

Tétel $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ trkh. rend. test

$(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$ izomorf $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ egy részhávával

|| de bijekció van

Biz $p,q \in \mathbb{Q}$, $p >_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}$:
$\exists(a,b)=p \to a >_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$, $\exists(c,d)=q$
ha $c\leq 0$ $n=1 \Rightarrow 1p \geq q$
$c>0$ $n=b\cdot_{\mathbb{Z}} c+1 \to$
$\to \underbrace{(a,b)+\dots+(a,b)}_{n}=(na+1,b)\sim$
$\sim((c+1)a,1)>(ca,1)\geq(c,1)\geq$
$\geq(c,d)$ ∎

Köv (Hatványra vonatkozó Archimédeszi-tulajdonság)

Biz $p^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+n(p-1)\geq q$

Def szeletek minden izben

2025.09.30.

kezdőszelet, leszálló részhalmaz, végszelet, felszálló részhalmaz, maximumos / maximum nélküli kezdőszelet

minimumos / minimum (enthaupten)

kezdőszelet lefejezése

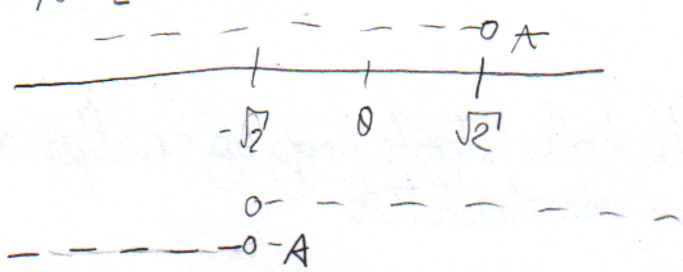
végszelet —||—

Tétel szeletek közti viszony (min-max, komplementer)

Biz $A\subset H$ kezdő szelet, $a\in\bar{A}$, $x\in X$, $a\leq x$. Mm. hogy $x\in\bar{A}$
ha $x\notin\bar{A}$ ~~zz~~ $x\in A$, $a\leq x$ miatt ez azt jelenti, hogy
$a\in A$ ↯ $\to x\in\bar{A}$

Megj $\mathbb{Q}$-ra $+/-$ -ra specifikusan kimondva

‖ $]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} = A$ --- mint a csak $\mathbb{Q}$-beli számok

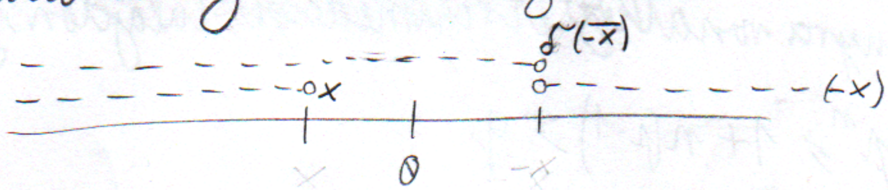


Deff Dedekind-szeletek

‖ Deff korrekt

Tétel $(\mathbb{R}, +, \leq)$ rendezett komm. csoport

Biz additív inverz: $x \in \mathbb{R}$ inverze



‖ δ azért kell, hogy ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $-x$ ne legyen fejes

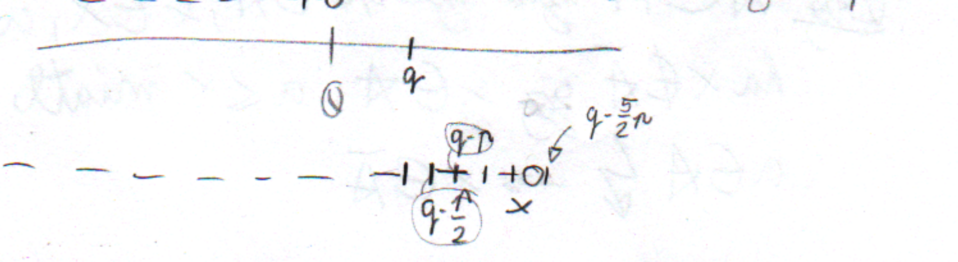
be kell látni, hogy $x +_{\mathbb{Q}} \delta(\overline{-x}) = 0_{\mathbb{Q}}$ $x, y \in \mathbb{R}$

$x + \delta(\overline{-x}) \subset 0$: $p \in x +_{\mathbb{Q}} \delta(\overline{-x})$, akkor $\exists q \in x$, $r \in \delta(\overline{-x})$: $p = q + r$

$r \in \delta(\overline{-x}) \subset \overline{-x} \to r \notin -x \to -r \notin x$

Mivel $q \in x$, ezért $-r > q \to 0 > q + r$. Kaptuk, hogy $q + r \subset 0_{\mathbb{Q}}$

$0_{\mathbb{Q}} \subset x +_{\mathbb{Q}} \delta(\overline{-x})$: ha $p < 0$, $q \in x$, $r \in \overline{x}$. $\mathbb{Q}$ Arkhimédeszi tulajdonsága miatt $\exists n \in \mathbb{Z}^+$: $q - n\frac{p}{2} \in \overline{x}$ mivel $\Rightarrow$

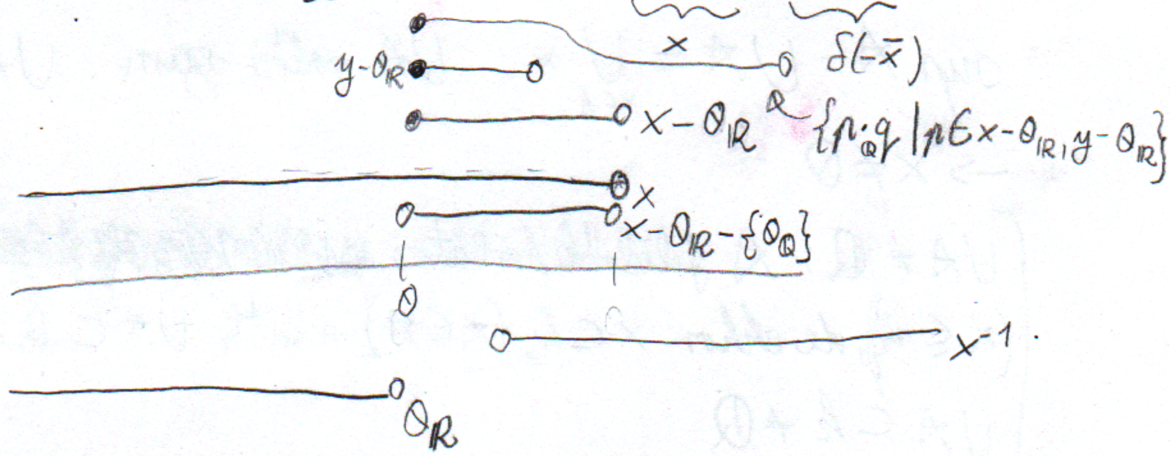


$\Rightarrow \frac{r}{2} > 0,\ r-q \in \mathbb{Q}: \exists n \in \underset{\mathbb{Z}^+}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{N}^+}} : n \cdot \frac{r}{2} > r-q \Leftrightarrow q - n\frac{r}{2} > r \in \bar{x}$

A legkisebb ilyen $\mathbb{Z}^+$-beli elem n_0, ekkor $s = q - n_0\frac{r}{2} \in \bar{x}$, ekkor $s+\frac{r}{2} \in x$ és $s-\frac{r}{2} \in \bar{x}$ és nem a minimuma $\bar{x}$-nek, mert $s < s-\frac{r}{2}$

$\frac{r}{2} - s \in -\bar{x}$ és nem max $\frac{r}{2} - s \in \delta(-\bar{x})$, $\underbrace{s+\frac{r}{2}}_{x} + \underbrace{\frac{r}{2}-s}_{\delta(-\bar{x})} = r$

Def $x \cdot_{\mathbb{R}} y$



itt szaggatott kellett volna?

~~Tétel~~ **Megj** A def korrekt

~~Biz~~

$1_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q}, q < 1\}$, multipl. inverz $0_{\mathbb{R}}$-nak nincs

Ha x pozitív: $x^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{p} \in x, 0 < \frac{1}{p}\}$. Az inverz $\delta(\overline{x^{-1}})$

Ha x negatív:

$$\delta\left(\overline{-\left(\delta\left(\overline{\delta(-\bar{x})}^{-1}\right)\right)}\right)$$

nyilván (additív és multiplikatív inverzek vételevel jutunk el ide)

Tm, hogy $x \cdot_{\mathbb{R}} \delta(\overline{x^{-1}}) = 1_{\mathbb{R}}$

$\boxed{\subset}$ $\boxed{\supset}$ hasonlóan az előző tételhez

csak hogy a lépkedést szorzással kell elvégezni

$0 < r < 1$ $\sqrt{r}$ helyett $\frac{1+r}{2}$-vel osztogatjuk $q \in x$ számot addig amíg $s = \frac{q}{\left(\frac{1+p}{2}\right)^{n_0}} \in \overline{X}$ || mivel $\sqrt{p} \le \frac{1+p}{2}$

Tétel $(\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ teljes rendezett test, sőt izomorfia erejéig egyértelműen

Biz $(\mathbb{R}, \le)$ Dedekind-teljes ~~zz~~ ha $A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$, A felülről korlátos, akkor $\exists \sup A$

$\sup A = \cup A = \bigcup_{x \in A} x$. $\cup A$ valós szám: $\cup A \ne \emptyset$. $\exists x \in A \to$
$\to x \ne \emptyset$

$\cup A$ valós:

- $\cup A \ne \mathbb{Q}$: A felülről korlátos ~~azaz~~ $\exists k \in \mathbb{R}\ (\forall x \in A)(x \le k)$, de akkor $x \subset k\ (x \in A)$ miatt $\cup A \subset k \ne \mathbb{Q}$
  $\cup A \subset k \ne \mathbb{Q}$
- $\cup A$ kezdőszelet: $a \in \cup A$ és $b \in \mathbb{Q}$, $b \le a \to b \in \cup A$
  $\exists x \in A$: $a \in x$ erre $b \in x$ is teljesül
- $\cup A$ maximum nélküli: $a \in \cup A \to \exists x \in A$: $a \in x$, de ehhez
  $\exists b \in x$: $b > a$, $b \in \cup A$

<u>$\cup A$ felső korlát</u> $x \in A$, $x < \cup A$, azaz $x \le_{\mathbb{R}} \cup A$

<u>$\cup A$ legkisebb f.k.</u> $y \in \mathbb{R}$ felső korlátja A-nak, akkor $x \le_{\mathbb{R}} y$
$(x \in A)$

$\Downarrow$

$x \subset y\ (\forall x \in A)$

$\Downarrow$

$\cup A < y \leftarrow \cup A \subset y$

<u>unicitás</u> $(T, +_T, \cdot_T, \le_T)$ egy telj. rend. test

$\exists 0_T, 1_T \in T$

$s(n) = n +_T 1_T$ } Peano-ax-nak megf. konstrukció N_T
N_T izomorf $\mathbb{N}_0$-nak $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ konstruáljuk $\mathbb{Z}_T$, $\mathbb{Q}_T$, amik izomorfak $\mathbb{Z}$-vel és $\mathbb{Q}$-val

$\mathbb{Q}_T$ és $\mathbb{Q}$ közti $f: \mathbb{Q}_T \xrightarrow{\text{D}} \mathbb{Q}$ izomorfia (művelet és rendezéstartó bijekció)

$t \in T: g(t) = \sup\{f(q) \mid q \in \mathbb{Q}_T, q < t\} \in \mathbb{R}$. Ez a $g: T \to \mathbb{R}$ izomorfizmus ■

Def komplex számok

Tétel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ algebrailag rendezett test

metrikusan teljes

nem rendezett test ($\nexists R \subset \mathbb{C}^2$ $((\mathbb{C}, R)$ rendezett test$)$)

Biz (részlet)

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \to x \cdot x \geq 0 \cdot x = 0 \\ x < 0 \to -x > 0 \to (-x)(-x) \geq 0 \end{array}\right\} x^2 \geq 0$$

Def azonos számosság Jel $\sim$

Tétel számosságtulajdonságai

$\| H$ hz $\to$ $\mathcal{P}(H)$-n $\sim$ eq. rel.

Biz
1) id bij.
2) inverz bij.
3) kompozíció bij.

Def kisebb számosság vagy egyenlő Jel $\lesssim$

Tétel A, B hz, $A \neq \emptyset$ $(A \lesssim B) \Leftrightarrow (\exists g: B \xrightarrow{\text{D}} A$ szürj.$) \Leftrightarrow (\exists C \subset B: A \sim C)$ ① ② ③

Biz ① → ② $f: A \hookrightarrow B$ injektív $g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{ha } b \in Ran(f) \\ a, & \text{ha } b \in B - Ran(f) \end{cases}$

és $a \in A$ ~~tetsz.~~ rögzített

szürj.

② → ③ $g: B \to A$ szürjektív

$h(a)$ egy oly $b \in B$ amire $g(b) = a$, ahol $a \in A$

$h: A \xrightarrow{\sim} C$ bijekció, ahol $C = Ran(h) \subset B$

③ → ①. $C \subset B$, $h: A \xrightarrow{\sim} C$ bijekció esetén $f(a) = h(a)$,

$f: A \hookrightarrow B$ injekció

$(1, k)$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & 2 \mid n \\ \frac{1-n}{2} & 2 \nmid n \end{cases}$ $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ $g(n, k) =$

$(1,1), \underbrace{(2,1)}, (1,2), \underbrace{(2,2)}, \underbrace{\quad}, (1,3)$

$\mathbb{R} > \mathbb{N}^+$ $\nexists$ bijekció

$[0,1[\; > \mathbb{N}^+$

$\nexists f: \mathbb{N}^+ \xrightarrow{\sim} [0,1[$ bij $\longrightarrow$ $\lightning$ (az ismert módszer, ahol tizedestörtnek megfeleltetjük a $\mathbb{N}^+$ számokat)

Jel $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

$|\mathbb{R}| = c$

konstrukció: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots, \mathbb{N}_0$

számosságok $0, \; 1, \; 2, \; 3$

egy idő után

// transfinit indukció (ez megérdemel egy +10 pontos 🐻 békát)

Tétel Cantor-tétel

Köv nincs legnagyobb számosság

Biz $f: A \xrightarrow{\text{ö}} \mathcal{P}(A)$ szürjekció

$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ $B \subset A \to B \in \mathcal{P}(A) \to$

$\to \exists b \in A\ (f(b) = B)$ mivel f szürjektív

$b \in B \to b \notin B$

$b \in B \to b \in f(a) \to b \notin B$

$b \notin B \to b \in A - B \to b \in f(b) \to b \in B$

$b \in B \Leftrightarrow b \notin B$ ↯

Biz (köv) trivi