

2025.09.08.

Valószínűségi mező

Valószínűségi mező 1.

## Valószínűségi mező

(Ω, F, P)

+ eseményter(hz): a véletlen hírérfel lehetséges hímeneteit tartalmazza, elemei az elemi események és bizonyos részhalmazok események

$\omega \in \Omega$  elemi esem.

$A \subset \Omega$  esem. (bizonyos részhzok)

## Kalmazműveletek

$A \cup B$ : A és B közül legalább az egyik

$A \cap B$ : A, B egyszerre

Defn  $A \cap B = \emptyset$ , azzor A és B kizárt események

$A - B = A \cap B^c$

Jel  $\Omega - B := B^c$

$A \subset B$  esetén  $A$ -ból hörv. B

## Azonosságok

Itt események Boole-algebrait alkotnak a hz műveletekre

(F)  $\Omega$  részhalmazai közül azok, amiket eseményeknek tekinthünk, de azt tudjuk, hogy  $\Omega \in \mathcal{F}$

- $A \in \mathcal{F} \rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, \dots \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$  egy  $\sigma$ -algebra

(P)  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , ez az in. valószínűség

Axioma 1.  $P(A) \geq 0$

Axioma 2.  $P(\Omega) = 1$  || de  $P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$

Valószínűségi mező 1.

Axioma (3.) ha  $E_1, \dots$  egymással hizáro események ( $E_i \in \mathcal{E}$ )  
( $\sigma$ -additivitás)  $E_i \cap E_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), ekkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$\rightarrow P(\emptyset) = 0$$

$$\rightarrow E \subset F \rightarrow P(E) \leq P(F)$$

$$\text{Ha } A \cap B \neq \emptyset : P(A \cup B) = \underbrace{P(A \cap B^c)}_{P(A)} + \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} + \underbrace{P(A^c \cap B)}_{P(B)}$$

Szita formula

$$E_1 \cap \dots \cap E_n \neq \emptyset : P(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_r})$$

Biz teljes indukció

Egyenlő valószínűségi események

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}, P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\}) \quad \omega_i \neq \omega_j \quad i \neq j$$

$$A \subset \Omega, |A| = k \leq n \quad A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$$

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n} \left( = \frac{|A|}{|\Omega|} \right)$$

feladatoknál ~~egyenlő~~ egyszerű kombinatorikai lehetségekkel számolni

6, 5 h vizsgatevés nélkülb

Mi a százége 3-ból 2 hétk és 4 piros

$$\frac{(6)(5)}{11} \text{ saját} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10 \cdot 9}$$

1. megoldás

(1, ..., 6) (7, ..., 11)

$(i, j, h) \quad i \neq j, j \neq h, i \neq h \quad i, j, h \in \underline{11} = \Omega_{\text{megoldásokat kér}}$

$$11 \cdot 10 \cdot 9$$

$$A_0 = \left\{ \text{nincs 2 hétk golyó van} \right\} = A_0^I \cup A_0^{II} \cup A_0^{III}$$

$$A_0^I = \left\{ \text{az első pirosat többi hétk} \right\} =$$

$$= \left\{ (i, j, h) \mid i \in \underline{6}, j, h \in \underline{11}, j \neq h \right\}$$

①..⑥

$$|A_0^I| = 6 \cdot 4 = |A_0^{II}| = |A_0^{III}|$$

$$|A_0| = \sum_{i \in \{I, II, III\}} |A_0^i| = \frac{3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{4}{11}$$

2. megoldás

$$\Omega_2 = \left\{ \{i, j, h\} \subset \underline{11} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \{i\} \cup \{j, h\} \mid i \in \underline{6}, \{j, h\} \subset \{7, \dots, 11\} \right\}$$

$$|A_2| = 6 \cdot \binom{5}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{6 \binom{5}{2}}{\binom{11}{3}}$$

Változam 1.

3

Elsofelts telefonok peldaja: mi a valozioge annak, hogy seki sem hajja a sajat telepj.

a fentiek felhangalasa

$$\text{mivel: } P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) = \sum_{r=1}^N (-1)^{r+1} \binom{N}{r} \frac{(N-r)!}{N!} = \sum_{r=1}^N (-1)^{r+1} \frac{1}{r!}$$
$$1 - \sum_{r=1}^N (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \quad \downarrow \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

2025.09.15.

## Feltetelos valozinuseg

2. Kocha (feher, vörös)

$$P(\text{dobások összege } 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{dobások összege } 10, \text{ ha a fehérrel } 6\text{-ot dobok}) = \frac{1}{6}$$

Difff  $E \in \mathcal{F}$ ,  $P(E) > 0$ . Ekkor  $\forall F \in \mathcal{F}$  bekorethezese

$E$ -t feltere:

$$\frac{P(F \cap E)}{P(E)}$$

Jel  $P(F|E)$

All Rögzített  $E$  ( $P(E) > 0$ ) mellett a  $P(\cdot | E) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  és teljesiti a Kolmogorov-axiomákat

Biz \*  $P(F|E) \geq 0$

$$* P(Q|E) = \frac{P(E)}{P(E)}$$

$$* \text{ Ha } F_i \cap F_j = \emptyset \quad i \neq j, \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i | E) = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \cap E)}{P(E)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i \cap E)}{P(E)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i \cap E)$$

## Szorzási szabály

$$\text{akk} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$E_1, \dots, E_n$  események

$$P(E_1 \cap E_2)$$

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \cdots P(E_2 | E_1) \underbrace{P(E_1)}_{P(E_1)}$$

## Bayes tétele

így információ átformálja az 'apriori' ismereteinket.

Deff  $A_1, \dots, A_n$  teljes eseményrendszert alkot, ha párhuzamos hizárok, de  $\bigcup_{i \in n} A_i$ , más néven particiót alkotnak.

Teljes Teljes eseményrendszernben  $(A_1, \dots, A_n)$

$$P(B) = \sum_{i \in n} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in n} P(B|A_i) P(A_i)$$

|| teljes valószínűségtétele

|| előzmények hizájához egymást

$$\text{Teljes Bayes} \quad P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) P(A_i)}{\sum_{i \in n} P(B|A_i) P(A_i)}$$

## Függetlenség

Deff  $E, F \in \mathcal{F}$ , függetlenek, ha  $P(F \cap E) = P(E) P(F)$

|| Ha  $P(E) > 0 \Rightarrow E$  és  $F$  fülek  $\rightarrow P(F) = P(F|E)$

|| Francia háromjában a szín és az érték független

|| A hizároság a fügés ~~feszültséges~~ résldája

$$\underline{n} = \{1, \dots, n\}$$

$$\underline{k, n} = \{k, \dots, n\}$$

$$\text{tt } \underline{n} = \underline{1, n}$$

|| A már behövethető dolog nem hat a történő dolog vezetésére

Delf  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}$  teljesen függetlenek

ha  $\forall r \in \underline{n} : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n :$

$$P(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(E_{i_r})$$

Innen a teljes függetlenség függetlensége alatt.

2025.09.22.

$\sigma$ -additivitás

$A_1, A_2, \dots$  eseményrészletek

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Delf  $D_1, D_2, D_3, \dots$  növekvő eseménysorozat  $D_1 \subset D_2 \subset \dots$

Jel  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$

Delf  $C_1, \dots$  csökkenő

$C_1 \supset C_2 \supset \dots$

Jel  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

gyűrűtérrel

|| A limitez egy  $P(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, ahol Dom monoton halmaz eseménysorozatokhoz a

Alb Ha teljesül a  $\sigma$ -additivitás, akkor

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n)$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n)$$

Biz  $A_n = D_n - D_{n-1} \Rightarrow A_1 = D_1$

~~Aszthetikus~~  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$

$$\sum_{k=1}^N P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = P(D_N)$$

$N \nearrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n)$$

máris szűt

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n\right)$$

$C_1, \dots$  csökkenő  $\rightarrow C_1^c, \dots$  növekvő

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^c\right)^c = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n, \text{ míg } \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n^c)$$

□

mivel hagyta ki ezt a helyet?

Talosam!

## Feljes és páronkentő függetlenség

| teljesen független események: független hírleretek  
 (hochadobás, pénzfeldobás, vizsgatétel eredménye)

### Néhány valószínűség

$$P(\text{mind az } n \text{ hírleret sikeres}) = p^n$$

$$P(\text{legalább } 1 \text{ sikeres}) = 1 - (1-p)^n$$

$$P(\text{ pontosan } k \text{-szor sikeres } n \text{-ból}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

∞ soh független hírleretben mi a valószínűsége, hogy minden sikeres?

$$S_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n, \quad S_n = \bigcap_{k=1}^n E_k \quad P(S_n) = p^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{így } P(S_\infty) = 0$$

## Feltételes függetlenség

Deff  $E$  esemény,  $P(E) > 0$ ,  $F_1$  és  $F_2$  feltételezen függetlenségi  $E$  mellett ha

$$P(F_1 \cap F_2 | E) = P(F_1 | E) P(F_2 | E)$$

| orvosi tesztelés, tudjuk hogy beteg, akkor nem függetlenségi, de felt. függ.

## Valószínűségi változó

Deff  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (merhető) függvény, azaz  $X$  egy véletlen szám, mérési eredmény s valószínűségi változónak nevezett  
 || nagylétével/görög betűvel

Df  $X$  val. vál. dizkrét, ha  $\text{Dom}(X)$  megszámlálható hz.  
 ||  $\text{Dom}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$

Df  $X$  val. vál. sűlyfüggvénye  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $p(x) = \begin{cases} P(X(x_i)) & x = x_i \\ 0 & \text{más}\end{cases}$

Df  $\Psi$  binomialis eloszlású  $n \geq 1$  is  $\Psi(\epsilon(0,1))$  esetek paramétereiből, ha a  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  értékeket veheti fel  
 $\therefore P(\Psi(k)) = \binom{n}{k} p^k (n-k)^{n-k}$

||  $\Psi$  sűlyfüggvénye. Igaz, hogy  $\text{Ran}(\Psi(\Psi)) \subset \mathbb{R}^+$   
 $\sum_{k=0}^n P(\Psi(k)) = 1$

Df  $W$  geometriai eloszlású  $p(\epsilon(0,1))$  aligazsó mintára  
 ha  $P(W(k)) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p$   $\left| \begin{array}{l} q \text{ mint} \\ \text{gudaré} \end{array} \right.$

Mt.  $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = 1$

Df Egy  $X$  dizkrét val. változó várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X(x_i))$$

ha a sor abszolút konvergens.

|| átvendészhető ha abszolút konvergens, ez hell reális

|| sűlypont, nagy számok tövében

## Binomialis eloszlás várható értéke

$$\Psi \sim \text{Binom}(n, p)$$

$$h = (t^h) \Big|_{t=1}$$

$$\begin{aligned}
 E(\Psi) &= \sum_{h=0}^n h P(\Psi=h) = \sum_{h=1}^n \binom{n}{h} n^h (1-p)^{n-h} = \\
 &= \left( \sum_{h=1}^n t^h \binom{n}{h} (1-p)^{n-h} \right) \Big|_{t=1} = \left( \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (tp)^h (1-p)^{n-h} \right) \Big|_{t=1} = \\
 &= n(t p - 1 + p)^{n-1} \cdot p \Big|_{t=1} = n \cdot p
 \end{aligned}$$

nice!

## Geometriai eloszlás

$$W \sim \text{Geom}(p)$$

$$\begin{aligned}
 E(W) &= \sum_{h=1}^{\infty} h p q^{h-1} = p \sum_{h=1}^{\infty} h q^{h-1} = p \left( \sum_{h=0}^{\infty} q^h \right) = \\
 &= p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

nice! (but not as much)