2025.09.08.

Valszám 1.

Valószínűségi mező

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω eseménytér (hz): a véletlen kísérlet lehetséges kimeneteit tartalmazza, elemei ~~az~~ elemi események és bizonyos részhalmazok események

$\omega \in \Omega$ elemi esem.

$A \subset \Omega$ esem. (bizonyos részhz-ok)

Halmazműveletek

$A \cup B$: A és B közül legalább az egyik

$A \cap B$: A, B egyszerre

Def $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B kizáró események

$A - B = A \cap B^c$

Jel $\Omega - B =: B^c$

$A \subset B$ esetén A-ból köv. B

Azonosságok

Az események Boole-algebrát alkotnak a hz műveletekre

$\mathcal{F}$ Ω részhalmazai közül azok, amiket eseményeknek tekintünk, de azt tudjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \in \mathcal{F} \\ \cdot\ A \in \mathcal{F} \to A^c \in \mathcal{F} \\ \cdot\ A_1, \ldots \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \end{array}\right\} \mathcal{F} \text{ egy } \sigma\text{-algebra}$$

$\mathbb{P}$ $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, ez az ún. valószínűség

Axióma 1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$

Axióma 2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ || de $\mathbb{P}(A) = 1 \not\Rightarrow A = \Omega$

Axióma (3.) ha $E_1, \ldots$ egymást kizáró események ($E_i \in \mathcal{F}$
(σ-additivitás) $E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j)$, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$$\boxed{A \cap B = \emptyset \rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

$\rightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$\rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\rightarrow E \subset F \rightarrow \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$

Ha $A \cap B \neq \emptyset$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B^c) + \overbrace{\mathbb{P}(A \cap B)}}_{\mathbb{P}(A)}\overbrace{+ \mathbb{P}(A^c \cap B)}^{\mathbb{P}(B)}$

$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Szita-formula

$$E_1 \cap \ldots \cap E_n \neq \emptyset: \mathbb{P}(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r < \ldots \leq n} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_r})$$

~~Biz~~ teljes indukció

Egyenlő vszű elemi események

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$

$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\})$ $\omega_i \neq \omega_j$ $i \neq j$

$A \subset \Omega$, $|A| = k \leq n$ $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \ldots + \mathbb{P}(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n} \left(= \frac{|A|}{|\Omega|}\right)$

feladatoknál egyszerű kombinatorikai buktatókkal kell számolni

6p, 5k visszatevés nélkül 3

Mi a vszüsége 3-ból 2 kék és 1 piros

$$\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}}$$ saját $= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{11\cdot 10\cdot 9}$

1. megoldás

①, …, ⑥ | ⑦, …, ⑪

(i,j,k) $i\neq j, j\neq k, i\neq k$ $i,j,k \in \underline{11} = \Omega$

$11\cdot 10\cdot 9$

$A_{①} = \{$pontosan 2 kék golyó van$\} = A_{①}^{I} \cup A_{①}^{II} \cup A_{①}^{III}$

$A_{①}^{I} = \{$az elsö piros a többi kék$\} =$

$= \{(i, j, k) \mid i \in \underline{6}\ \ j,k \in \underline{11}, j\neq k\}$

①..⑥

$|A_{①}^{I}| = 6\cdot 5\cdot 4 = |A_{①}^{II}| = |A_{①}^{III}|$

$|A_{①}| = \sum_{i\in\{I,II,III\}} |A_{①}^{i}| = \frac{3\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{11\cdot 10\cdot 9} = \frac{4}{11}$

2. megoldás

$\Omega_2 = \{\{i,j,k\} \subset \underline{11}\}$

$A_2 = \{\{i\} \cup \{j,k\} \mid \{i\} \subset \underline{6}, \{j,k\} \subset \{7,\dots,11\}\}$

$|A_{②}| = 6\cdot\binom{5}{2}$

$P(A_{②}) = \frac{|A_{②}|}{|\Omega_{②}|} = \frac{6\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}}$

Elcserélt telefonok példája: mi a vszűsége annak, hogy senki sem kapja a sajátját telóját
a fentiek felhasználása

mo.: $\mathbb{P}(E_1 \cup \dots \cup E_N) = \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r+1} \binom{N}{r} \frac{(N-r)!}{N!} = \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r+1} \frac{1}{r!}$

$$1 - \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} = \sum_{r=0}^{N} (-1)^{r} \frac{1}{r!} \xrightarrow[N \to \infty]{} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

2025.09.15.

Feltételes valószínűség

2 kocka (fehér, vörös)

$\mathbb{P}(\text{dobások összege } 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{10}$

$\mathbb{P}(\text{dobások összege } 10, \text{ ha a fehérrel 6-ot dobok}) = \frac{1}{6}$

Def $E \in \mathfrak{X}$, $\mathbb{P}(E) > 0$. Ekkor $\forall F \in \mathfrak{X}$ bekövetkezése E-t feltéve:

$$\frac{\mathbb{P}(F \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$$

Jel $\mathbb{P}(F \mid E)$

All Rögzített E $(\mathbb{P}(E) > 0)$ mellett a $\mathbb{P}(\cdot \mid E) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ és teljesíti a Kolmogorov-axiómákat

Biz * $\mathbb{P}(F \mid E) \geq 0$

* $\mathbb{P}(\Omega \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(E)}$

* Ha $F_i \cap F_j = \emptyset$ $i \neq j$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \mid E\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \cap E\right)}{\mathbb{P}(E)} =$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i \cap E)$$

Szorzási szabály

Áll $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B|A)$

$E_1,\dots,E_n$ események

$$\mathbb{P}(E_1\cap\dots\cap E_n)=\mathbb{P}(E_n|E_1\cap\dots\cap E_{n-1})\cdots\mathbb{P}(E_3|E_2\cap E_1)\overbrace{\mathbb{P}(E_2|E_1)\mathbb{P}(E_1)}^{\mathbb{P}(E_1\cap E_2)}$$

Bayes tétele

Új információ átformálja az 'a priori' ismereteinket.

Def $A_1,\dots,A_n$ teljes eseményrendszert alkot, ha páronként kizárók, de $\bigcup_{i\in\underline{n}} A_i$, más néven partíciót alkotnak.

Tétel Teljes eseményrendszerben $(A_1,\dots,A_n)$

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i\in\underline{n}}\mathbb{P}(B\cap A_k)=\sum_{i\in\underline{n}}\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)$$

|| teljes valószínűség tétele

| előzmények kizárják egymást

Tétel (Bayes) $$\mathbb{P}(A_i|B)=\frac{\mathbb{P}(A_i\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i\in\underline{n}}\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

Függetlenség

Def $E,F\in\mathcal{F}$, függetlenek, ha $\mathbb{P}(F\cap E)=\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$

|| Ha $\mathbb{P}(E)>0 \Rightarrow$ E és F ftlen $\to \mathbb{P}(F)=\mathbb{P}(F|E)$

|| franciakártyában a szín és az érték független

|| A kizáróság a függés ~~legszélsőségesebb~~ példája

$\underline{n}=\{1,\dots,n\}$

$\underline{k,n}=\{k,\dots,n\}$

tt $\underline{n}=\underline{1,n}$

A már bekövetkezett dolog nem hat a történő dolog valószínűségére

Def $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{F}$ <u>teljesen függetlenek</u>
ha $\forall r \in \underline{n}$: $1 \le i_1 < \dots < i_r \le n$:

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_r}) = \mathbb{P}(E_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(E_{i_r})$$

Innentől teljes függetlenség értendő a függetlenség alatt.

2025.09.22.

σ-additivitás

$A_1, A_2, \dots$ eseményrendszer

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Def $D_1, D_2, D_3, \dots$ <u>növekvő eseménysorozat</u> $D_1 \subset D_2 \subset \dots$

Jel $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} D_n$

Def $C_1, \dots$ csökkenő $C_1 \supset C_2 \supset \dots$

Jel $\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

A limesz egy $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ függvény, ahol Dom monoton ~~halmaz~~ eseménysorozatok ~~hz~~-a

All Ha teljesül a σ-additivitás, akkor

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} D_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n)$$

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n)$$

Biz $A_n = D_n - D_{n-1}$ és $A_1 = D_1$

~~[illegible]~~ $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \mathbb{P}(D_N)$$

$$N \to \infty$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(D_n)$$

másrészt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} D_n\right)$$

$C_1, \ldots$ csökkenő $\to C_1^c, \ldots$ növekvő

$$\left(\lim_{n \to \infty} C_n^c\right)^c = \lim_{n \to \infty} C_n \text{, míg } \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(C_n) = 1 - \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(C_n^c) \quad \square$$

miért hagytad ki ezt a helyet?

Teljes és páronkénti ftlenség

| teljesen független események: független kísérletek
(kockadobás, pénzfeldobás, visszatevéses húzás)

Néhány valszínűség

végig a függetlenségohet használtuk ki, vagy a valszínűségek szorozhatók

$\mathbb{P}$(mind az n kísérlet sikeres) $= p^n$

$\mathbb{P}$(legalább 1 sikeres) $= 1-(1-p)^n$

$\mathbb{P}$(pontosan k-szor sikerül n-ből) $= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

∞ sok ftlen kísérletben mi a vszínűsége, hogy mindig sikerül?

$S_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, $S_n = \bigcap_{k=1}^{n} E_k$ $\mathbb{P}(S_n) = p^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ így $\mathbb{P}(S_\infty) = 0$

Feltételes függetlenség

Deff E esemény, $\mathbb{P}(E) > 0$, F_1 és F_2 feltételesen ftlenek E mellett ha

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 | E) = \mathbb{P}(F_1|E)\,\mathbb{P}(F_2|E)$$

| orvosi tesztek, tudjuk hogy beteg, akkor nem ftlenek, de felt. függ.

Valszínűségi változó

Deff $X: \Omega \to \mathbb{R}$ (mérhető) függvény, azaz X egy véletlen szám, mérési eredmény s valszínűségi változónak nevezzük

|| nagybetűvel / görög betűvel

Def $\mathcal{X}$ val. vált. diszkrét, ha $Dom(\mathcal{X})$ megszámlálható hz.

|| $\star$ $Dom(\mathcal{X}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x_i\}$

Def $\mathcal{X}$ val. vált. súlyfüggvénye $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $p(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathcal{X}(x_i)) & x = x_i \\ 0 \text{ ha } x \neq x_i \end{cases}$

Def Ψ binomiális eloszlású $n \geq 1$ és $p (\in (0,1))$ ~~értékek~~ paraméterekkel, ha a $k = 0, 1, 2, \dots, n$ értékeket veheti fel és $\mathbb{P}(\Psi(k)) = \binom{n}{k} p^k (n-k)^{n-k}$

|| súlyfüggvényre $\forall$ igaz, hogy $Ran(\mathbb{P}(\Psi)) \subset \mathbb{R}^+$ és
|| $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\Psi(x_i)) = 1$

Def W geometriai eloszlású $p (\in (0,1))$ ha $\mathbb{P}(W(k)) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p$ | q mint gudarc

All. $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = 1$

Def Egy $\mathcal{X}$ diszkrét val. változó várható értéke

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(\mathcal{X}(x_i))$$

ha a sor abszolút konvergens.

|| átrendezhető ha abszolút konvergens, ez kell nekünk
|| súlypont, nagy számok törvénye

Binomiális eloszlás várható értéke

$$\Psi \sim Binom(n, p)$$

$$k = (t^k)'\Big|_{t=1}$$

$$\mathbb{E}(\Psi) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(\Psi(k)) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} t^k \binom{n}{k} (1-p)^{n-k}\right)'\Bigg|_{t=1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k}\right)'\Bigg|_{t=1} =$$

$$= n(tp - 1 - p)^{n-1} \cdot p\Big|_{t=1} = n \cdot p$$

nice!

Geometriai eloszlás

$$W \sim Geom(p)$$

$$\mathbb{E}(W) = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)' =$$

$$= p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

nice! (but not as much

2025. 09. 29.

Áll $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{X}$ diszkrét valószínűségi változó

az $Y = g(\mathcal{X})$ d.v.v. értéke $\mathbb{E}(g(\mathcal{X})) = \sum_i g(x_i) P(\mathcal{X} = x_i)$

Biz $\mathbb{E}(Y) = \sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_j y_j \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{i:\, g(x_i) = y_j} \{\mathcal{X} = x_i\}}_{\{Y = y_j\}}\Big) = *$

$\{x_i\}_i$ az $\mathcal{X}$ d.v.v. lehetséges értékei

$\{y_i\}_i = \{g(x_i)\}_i$

$$* = \sum_j y_j \sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_j \underbrace{\sum_{\substack{i \\ g(x_i = y_j)}}}_{\sum_i} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

páronként diszjunktak

■

Köv $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_i (ax_i + b)\mathbb{P}(X = x_i) = a\sum x_i \mathbb{P}(X = x_i) =$$

$$+ \; b\underbrace{\sum_i \mathbb{P}(X = x_i)}_{1} = a\,\mathbb{E}(X) + b$$

|| függvényt nem vihetjük ki

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{2}$ itt ~~$g(x)$~~ x^2

$\mathbb{E}(X) = 0$

$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Def X val. vált. $\mathbb{E}(|X|^n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
akkor az X **n-edik momentuma** létezik és ez
$\mathbb{E}(X^n)$.

|| mennyire tud eltérni a várható értéktől egy esemény valszínűsége

Def X valsz. vált., $\exists$ a 2. momentuma
kk X **szórásnégyzetén** az $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$

Def X **szórása** $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2 X}$

|| $\mathbb{D}^2(X) \geq 0$, $\mathbb{D}^2(X) = 0 \rightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$

|| távolságmérés

Áll $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

hanyag
||
sloppy
pongyola

Biz $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) =$

$= \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) =$

$= \sum_i (x_i^2 - 2x_i\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2)\mathbb{P}(X = x_i) =$

$= \sum_i x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - 2\mathbb{E}(X)\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i) + \mathbb{E}(X)^2 \sum_i$

$\sum_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 =$

$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ $\blacksquare$

Köv $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$ (Jensen $\neq$-ség)

Áll $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\mathbb{D}^2(aX + b) = a^2\mathbb{D}^2(X)$ és $\mathbb{D}(aX + b) = |a|\mathbb{D}(X)$

Biz $\mathbb{D}^2(aX + b) = \mathbb{E}\big((aX + b - \overbrace{\mathbb{E}(aX + b)}^{a\mathbb{E}(X)+b})^2\big) =$

$= \mathbb{E}\left(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2\right) = a^2\mathbb{D}^2(X) \to \sqrt{a^2\mathbb{D}^2(X)} = |a|\mathbb{D}(X)$

Binomiális eloszlás $X \sim Bin(n, p)$

$X :=$ sikeres kísérletek száma n ftlen kísérletből, ahol p a siker valószínűsége

$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k \in \underline{n}_0$

$\mathbb{E}(X) = np$ $\mathbb{D}(X) = np(1-p)$

$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} =$

$$= n(n-1)p \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k}}_{=(p+1-p)^{n-2}} \to \mathbb{E}(X(X-1)) = n(n-1)p^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2 + \mathbb{E}(X) = n(n-1)p^2 + p^2 = np((n-1)p+1)$$

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np((n-1)p+1) - n^2p^2 = np(1-p)$$

Def X d.v.v. **módusza** $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X=x) \geq \mathbb{P}(X=y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

|| nem $\boxed{!}$

Áll $X \sim Bin(x,p) \to X$ módusza $\lfloor np(1-p) \rfloor$

Ha $(n+1)p \in \mathbb{N}$ akkor $(n+1)p$ és $(n+1)p-1$ is módusz

Biz
$$\frac{\mathbb{P}(X=i)}{\mathbb{P}(X=i-1)} = \frac{\binom{n}{i} p^2 (1-p)^{n-1}}{\binom{n}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i+1}} = \overbrace{\frac{(n-i+1)}{i} \cdot \frac{p}{1-p}}^{H}$$

$$H \geq 1 \iff np - ip + p \geq i - ip \to (n+1)p \geq i$$

$i = \lfloor (n+1)p \rfloor$-ig nő, utána csökken

Tétel (Bernoulli Nagy Számok Törvénye)

Ha X_n d.v.v. úgy, hogy $X_n \sim Bin(n,p)$ akkor
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Biz nem biz

Def X d. v. v. λ paraméterű Poisson-eloszlású, ha

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Jel $X\sim Poi(\lambda)$

|| $\lambda\in\mathbb{R}^+$

|| $\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$

|| $X_n\sim Bin(n,\frac{1}{n})\quad \mathbb{P}(X=0)=(1-\frac{1}{n})^n\rightarrow e^{-1}$

Tétel X_n binomiális eloszlású d v v sorozata úgy, hogy (Poisson aprox.) $X_n\sim Bin(n,p_n)$, ahol $\lim_{n\to\infty} n\cdot p_n=\lambda>0$, akkor $\forall k\in\mathbb{N}\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=k)=e^{-\lambda}\frac{x^k}{k!}$

Ki az a Foxy? És miért szedi szét a lábtörlőt?

Biz $\mathbb{P}(X_n=k)=\binom{n}{k}p_n^k(n-p_n)^{n-k}=\frac{1}{k!}\cdot$

$\cdot\, np_n(n-1)\cdot p_n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)p_n(1-p_n)^n\cdot(1-p_n)^{-k}\rightarrow *$

$$\lim_{n\to 0}p_n=0\rightarrow \left.\begin{array}{l} np_n\rightarrow\lambda\\ (n-1)p_n\rightarrow\lambda\\ \vdots\\ (n-k+1)\rightarrow\lambda\end{array}\right\}\rightarrow np_n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)p_n\rightarrow\lambda^k$$

Gratulálok, találtál egy ka- lat + 7 pont

$(1-p_n)^{\lambda}\rightarrow e^{-\lambda}\qquad \Rightarrow *\rightarrow\frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$ ∎

$(1-p_n)^{-k}\rightarrow 1$

|| $a_n\rightarrow\infty\ \ b_n\rightarrow 0$, $a_nb_n\rightarrow\lambda \rightarrow (1+b_n)^{a_n}\rightarrow e^{\lambda}$

Egy csónakon született a hulláng.