

Analízis 1.

Há zug-paradoxon, Curry-paradoxon: Ha ez a mondat igaz, akkor (feltétel) kijelentés oly mondat, mely egyértelműen igaz, vagy hamis, híjelentes változóval jelöljük (latin nagybetű).

Atomi híjelentes, ami nem bontható összetett híjelentesek összetövével jellehet von. logikai operátorokkal

$$\begin{array}{c} \neg \text{ unár} \\ \neg, V, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, \bar{\neg}, \bar{V} \end{array}$$

Összetett híjelentes

- ① ellentmondásmentesség
- ② harmadik hizárosa
- ③ \neg híjelentes igazságértéks csak az atomuktól függ

|| 4 fajta unár operátor

A	\neg	T	\perp	Δ
i	h	i	h	i
h	i	i	h	h

teljes

Deff

Egy unár és binár operátorból álló rendszer, melyből \neg unár és binár operátor hitelesíthető velük.

|| reláció: $R \subset H^2 \leftrightarrow R: H^2 \leftrightarrow \{i, h\}$

Deff

interpretáció
a logikai tábl.-ban
egy sor

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Deff

$P \equiv Q$, ha ugyanazokban az interpretációkban igaz

Deff

$P \models Q$

Deff

tautológia

1/1

Defn konttradikció

Küllőrendű logika

- Atom
- Kötőszó
- Összetett fiz. mondat
- Zárójelek

Elsőrendű logika

- Term: (objektumok⁽²⁾), típusok de nincs logikai értékesítés
- konstansok
- változók
- függvényértékek nem egészben a már ismert fr. (nem hz-akkor hozható)
- Függvények term \hookrightarrow term
- Predikatum olyan, mint a fr., csak lehet értéke logikai érték
- Kvantorok (csak változókról)
- Formulák atomok és összetett formulák

Kvantorok

univerzialis, egzistenciális

\forall

\exists

$\exists! x : \varphi(x)$

pont 1 db x létezik,
amire φ igaz

Másodrendű logika

nagyobb lefejezhetőség, de nem igaz

$\forall x : (\mathcal{L}(0) \wedge \forall n : (\mathcal{L}(n) \rightarrow \mathcal{L}(n+1))) \rightarrow \forall n : \mathcal{L}(n)$ teljes indukció
 emiatt másodrendű szelv
 még vannak magasabbrendű logikák

Hilbert & operator

$$\exists x : \varphi(x) \quad \varphi(\varepsilon x \varphi(x))$$

$$\forall x : \varphi(x) \rightarrow \varphi(\varepsilon x \forall y \varphi(y))$$

Kalmaz axiómáh ZFC

ax. rendszer legyen:
 csak egy állom

- ellentmondásmentes
- teljes (levezethetőség)
- függetlenek, egyszerűek (csak egységes)

→ az emberi értelmet segíti
 és matematikai értelmezés nem árt

Elemek ismétlődhetnek

\in predikátum

csak halmazok vannak (minden hz)

$$ACB \quad \forall x \in A : x \in B \quad \forall A \rightarrow \forall B$$

$$A=B \quad ACB \wedge BCA$$

Műveletek hozzávalóval

unió, metszet, hszeg

(halmazok, \cap , \cup) Boole-algebra

Lehet hz eleme hz?
 Lehet hz eleme önmagának?
 Lehet egy hz, ami hz-t tartalmaz?
 Hogyan konstruálhatunk halmazt?

Tetes (Russel antinomiája)

Nem létezik univerzális hz (ha A hz, akkor $A \in U$)

Biz U -nak nincs eleme, akkor ha $A = \{x \in U \mid x \notin x\}$ amik nem tartalmazzák magukat.

$$\left. \begin{array}{c} A \in A \rightarrow A \notin A \\ A \notin A \rightarrow A \in A \end{array} \right\} A \in A \leftrightarrow A \notin A$$

A halmazaxiomákkal ZFC

csak halmazok vannak

váll.: halmazok, predikátum: \in

① Üres halmaz axióma

$$\exists A : \forall X : X \notin A$$

Jel: Ø

② Paraxióma

$$\forall X, Y : \exists \{X, Y\}$$

③ Meghatározottságú axióma

$$\forall X \forall Y : \forall Z : (Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \rightarrow X = Y$$

Jel: $\neg(X = Y) \equiv X \neq Y$

④ Regularitási axióma

$$\forall X \neq \emptyset : \exists Y \in X : Y \cap X = \emptyset \quad (\rightarrow \forall A : A \neq A)$$

|| $X \cap Y = \emptyset$ helyett: $\forall Z : Z \in X \rightarrow Z \notin Y$

④ $\rightarrow \forall A : A \neq A$

de A hz, aha ② alapján $\{A\}$ is \emptyset

$\exists Y \in \{A\} : \{A\} \cap Y = \emptyset$

$$A \in \{A\} \rightarrow A \neq Y$$

⑤ Rész halmazaxióma (Séma, elhagyható)

$$\{x \in A | \varphi(x)\} \text{ hz}$$

vagy másodrendű nyelvben $\forall A : \forall \varphi : \exists \{x \in A | \varphi(x)\}$

⑥ Unio axióma

Ø hz, hz

$$\forall A : \exists X : \forall A \in A : \forall x \in A : x \in X$$

⑦ Katványhalmoz axióma

$$\forall X : \exists \mathcal{E} : \forall A \in X : A \in \mathcal{E}$$

|| je bővebb $P(A)$ -nál

⑧ Végtelenségi hz

$$\exists A : \mathcal{E} \in A \wedge (x \in A \rightarrow x \in \{x\} \in A)$$

⑨ Relyettesítési axióma egértelműen

Ha egy hz elemet kieseréljük, akkor hz marad.

Kiválasztási axióma

⑩ $\mathcal{E} \notin A, X = U \mathcal{A}, \exists f : A \hookrightarrow X : \forall A \in \mathcal{A} : f(A) \in A$

Férfi

2025.09.23.

Riff rendezett pár : $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

Jeb (a, b)

Diff I hz, $\forall i \in I A_i$ hz

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I : f(i) \in A_i\}$$

$\forall i \in I A = A_i$

$$A^I = \prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} A$$

$A_1 \times A_2$ hogyan mivel

$\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ létezik, mivel $a_1, a_2 \in A_1, \cup A_2 \rightarrow \{a_1^2, \{a_1, a_2\}\} \in \mathcal{P}(A_1 \cup A_2) \rightarrow (a_1, a_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A_1 \cup A_2))$

$$a: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$a \in I \times \bigcup_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^2(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i) \in \mathcal{P}^3(\dots)$$

$$a \in \prod_{i \in I} A_i \rightarrow a \in \mathcal{P}^s(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i)$$

$$\prod_{i \in I} A_i \subset \mathcal{P}^3(I \cup \bigcup_{i \in I} A_i) \quad \text{tehát } \prod_{i \in I} A_i \text{ is hogyan }$$

Defn R általánosított reláció, R általánosított reláció, értelmezési tartomány, értékhez közelítő, megfelelő X és Y hozzájárulás

$$R = \{(\emptyset, \emptyset), (\{\emptyset\}, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\})\} \subset X \times Y, \text{ ha } X = Y = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$R(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = Y$$

$$R[\emptyset] = \emptyset$$

Defn inverz

Tétel inverzhez közelítő involutív és monoton

Defn kompozíció

$$\text{Tétel } (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}, \quad R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

Defn reláció 1 hozzájárulás, id_H, Δ_H

Defn ekvivalenciareláció

Def osztályozás

Tétel R eg. rel. H-n, hh $\mathcal{I} = \{R(x) | x \in H\}$...

Def parciális rendezés,

|| antiszimmetria: "ha te szerető engem is értéged, akkor egymag vagyunk"

(H, \leq) rendszer

$$\times \in X : f(x) - \{a \in H | a \leq x\} \subset H \quad f : H \hookrightarrow P(H)$$

(H, \leq) izomorf $(\text{Ran}(f), \subset)$

$f : H \hookrightarrow \text{Ran}(f)$ bijektív

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subset f(y)$$

minden rendszerek megfelelhetően hrendszerek tartalmazással (\subseteq)

Def

Def (lineáris) rendszet

Def jólrendezés

Tétel (H, \leq) jólrendezett hz, akkor \leq lineáris rendszés

Def függvény

$$f : \text{Dom}(f) = X \hookrightarrow Y \triangleq f : X \overset{\text{D}}{\hookrightarrow} Y$$

Def max, min etc

Def monotonitás

Déf injektív, szürjektív, bijektív

Tétel a fenti tulajdonságokat a \circ megtartja

Biz 

Tétel $f \subset X \times Y, g \subset Y \times X$

$f: X \xrightarrow{\text{bij}} Y, g: Y \xrightarrow{\text{bij}} X$ és $f = g^{-1} \Leftrightarrow f \circ g = \Delta_Y$ és $g \circ f = \Delta_X$

Biz  trivi

$\Leftarrow \exists x \in X, f(x) = \emptyset \rightarrow g[f(x)] = g[\emptyset] = \emptyset$

$g[f(x)] = (g \circ f)(x) = \Delta_X(x) = \{x\} \quad \checkmark \rightarrow$

$\rightarrow \text{Dom}(f) = X \quad (\text{Dom}(g) = Y \text{ hasonlóan}$

$\forall x \in X \rightarrow \exists y \in f(x) \subset Y \text{ de } \emptyset \neq g(y) \subset g[f(x)] = \{x\}$

Kaptuk, hogy $\text{Ran}(g) = X$ (hasonlóan $\text{Ran}(f) = Y$)

$\emptyset \neq f(x) \subset f[g(y)] = \{y\} \rightarrow f(x) = \{y\}$

$\text{Itt } f: \text{függvény (hos. } g \text{ is)}$

$f: X \xrightarrow{\text{bij}} Y, g: Y \xrightarrow{\text{bij}} X$ szürjektívek

$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$

Kaptuk, h. f ~~szürjektív~~ injektív (g hasonlóan)

$y = f(x) \rightarrow g(y) = g(f(x)) = x \rightarrow g = f^{-1}$

Axióma (Peano-axiómák)

\mathbb{N}_0 egy hz, $0 \in \mathbb{N}_0$ és $s: \mathbb{N}_0 \xrightarrow{\text{?}} \mathbb{N}_0$ melyehre:

s injektív

$0 \notin s[\mathbb{N}_0]$

$\forall P \subset \mathbb{N}_0 : (s[P] \cup \{0\} \subset P) \rightarrow \mathbb{N}_0 = P$

Def összegadás, szorzás, rendezés

Tétel $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ neutrális kommutatív félegyüttes

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ nullosztómentes ($a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$)

biztos ez?

szorzás distributív az összegadásra nézve

$\{+, \cdot\}$ cancellativ $a+n=b+n \rightarrow b=a$

$n \neq 0 \quad a \cdot n = b \cdot n \rightarrow b=a$

Tétel Peano-axiómák izomorfia erejéig egyértelműek

Biz $(\mathbb{N}_0, 0, s) \cong (\mathbf{M}, 0, t)$

$$\psi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbf{M} \quad \psi(0) = 0, \psi(s(n)) = t(\psi(n))$$

$$\psi: \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \psi(0) = 0, \psi(t(m)) = s(\psi(m))$$

$$\psi(\psi(0)) = \psi(0) = 0$$

$$\psi(\psi(t(m))) = \psi(s(\psi(m))) = t(\underbrace{\psi(\psi(m))}) = t(m)$$

= m az indukciós feltétel miatt

□

Def (Neumann-modell)

9

Delf Egész számok

$$(a, b) \sim (c, d) : a+d = b+c$$

$(1, 2) \sim (2, 3)$ tehát a negatív számokat több jelölné, ha rendezett párak lennének, ezért a \sim reláció által kijelölt osztályok lesznek (egyenlőségszállyok)

$$\text{tehát } -1 = \{(0, 1), (1, 2), \dots\}$$

osztályon művek

$$-2 = \{(0, 2), (1, 3), \dots\}$$

$$\vdots$$

$$-h = \{(0, h), (1, 1+h), \dots\}$$

Tétel $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ integritási tartomány

$(\mathbb{N}_0, +, \leq)$ izomorf a $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ részhalmazával

* Ha helyt, azaz \sim egyenlőségszálly

Biz transitivitás

$$(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f)$$

$$\begin{aligned} a+b &= c+d \\ a+d &= e+f \\ \downarrow & \downarrow \\ a+d+f &= b+c+f \\ \downarrow & \downarrow \\ a+d+f &= d+e+f \end{aligned} \rightarrow a+f = e+b \equiv (a, b) \sim (e, f)$$

$$a+d = c+f$$

$$c+f = d+a$$

$$\downarrow$$

$$a+d+f = b+c+f$$

$$c+f = d+e+f$$

$$\downarrow$$

$$a+d+f = d+e+f$$

$$c+f = d+e+f$$

$$\downarrow$$

$$a+d+f = d+e+f$$

II. A cancelativitást is le lehet vezetni hivánás nélkül

A reprezentánsból független az összeg és szorzás (azaz ugyanabba az osztályba fog kerülni)

$$(c_1, d_1) \sim (c_2, d_2) \text{ akkor } (a_1, b_1) +_{\mathbb{Z}} (c_1, d_1) \sim (a_2, b_2) +_{\mathbb{Z}} (c_2, d_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (c_1, d_1) \sim (a_2, b_2) \cdot (c_2, d_2)$$

$$(a_1, b_1) \leq (c_1, d_1) \Leftrightarrow (a_2, b_2) \leq (c_2, d_2)$$

|| A testnél a mult. inverziből köv. a nullsztómentesség, de ha
ezt nincs, akkor a nullsztómentességet hozzá kell tenni a gyűrűhöz

Delf racionális számok

|| a számrendszerek felépítésénél látjuk, hogy az analízis mennyire
szoros kapcsolatban van a számelmélettel

~~Tétel ($\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq$) Archimedész rendszert test~~

Tétel ($\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq$) Archimedész rendszert test

Biz. $n, q \in \mathbb{Q}, p >_a 0_a : \exists n \in \mathbb{Z}$
 $\exists (a, b) = p \rightarrow a >_a 0_a, \exists (c, d) = q$
ha $c \leq 0$ $n=1 \rightarrow 1p > q$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ izomorf $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ egy részhával

|| de bijektív van

$c > 0$ $n = b : c \rightarrow$
 $\rightarrow (a, b) + \dots + (a, b) = (na + b) \sim$
 $\sim ((c+1)a + 1) > (ca + 1) \geq (c, 1) \geq (c, d)$ ■

Kör (hatványra vonatkozó Archimedész-tulajdonság)

Biz. $p^n > 1 + n(p-1) \geq q$

Bernoulli

Delf száletek minden igben