$$d(x_n,x_m) \overset{\Delta\neq}{\le} \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1},x_k) \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{n-1} q^k \underset{(x_n)}{d(x_2,x_1)} \le \sum_{k=\underbrace{N}_{\le m}}^{\infty} q^k d(x_2,x_1) = \frac{q^N}{1-q} d(x_2,x_1) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Tehát $\{x_n = h(x_{n-1})\}$ Cauchy-sorozat, így mivel

(H,d) teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $(x_n) \to \hat{x}$, h folytonos, ezért

triviális

$$x_{n+1} = h(x_n) \to h(\hat{x}) \to \hat{x} = h(\hat{x})$$

Más fixpont nem lehet, mert ha $\hat{\hat{x}}$ is fixpont, akkor

$$d(\hat{x},\hat{\hat{x}}) \underset{\text{fixp.}}{=} d(h(\hat{x}),h(\hat{\hat{x}})) \le q\, d(h(\hat{x}),h(\hat{\hat{x}})) \to d(\hat{x},\hat{\hat{x}}) = 0 \to$$

~~ez nem pont fordítva!~~

$$\to \hat{x} = \hat{\hat{x}} \quad \square$$

|| kontrakció folytonos mert $\Uparrow$

Áll Teljes metrikus tér zárt részhalmaza teljes

Biz $K \subset H$ zárt, x_n K-beli Cauchy sorozat. Mivel X teljes $\exists \hat{x} \in H$, hogy $x_n \to \hat{x} \in H$. Mivel K zárt, $\hat{x} \in K$

szerintem trivi

|| $C([a,b],\mathbb{R}) \triangleq C[a,b]$ vektortér, normált tér és $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ normával

$$\|f+g\| \overset{?}{\le} \|f\| + \|g\|$$ előadó szer. trivi

sőt $C[a,b]$ teljes is (amit most elhiszünk)