

$$\textcircled{1.1} \quad \frac{11!}{4!4!2!} \cdot \frac{11!}{5!2!2!}$$

m a

$$\frac{2 \cdot m \cdot a}{22!}$$

2.3.4.5.6.7.8.9.10.11

hánygyerme
családból
szárm

1.14	20	db család	db gyerek	esély, hogy db gyerek van 1/20	esély, hogy gyerek 1/48
		5	7	1	5
		14	4	7	14
		12	3	4	12
		12	2	3	12
		5	1	1	5

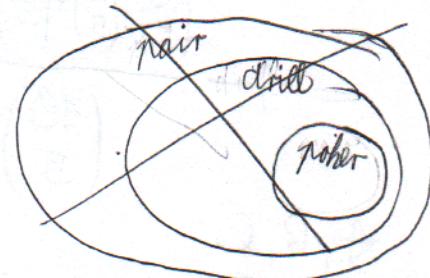
$$\textcircled{1.15} \quad 18 \text{ ög}, 5 \text{ megj}$$

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{13}{2}}{\binom{18}{4}}$$

eseménytér: 18 ög közül 4 befogásra
események: 0, 1, 2, 3, 4 jelöletlen ög lesz.

$$\textcircled{1.16} \quad \text{egg pár, de csak egy pár}$$

full house: $13 \cdot \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{drill}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{pár}}$



poker: $13 \cdot \binom{48}{1}$

drill: $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{49}{2} - (\text{full house}) - (\text{poker})$

2 pairs: $\binom{13}{2} \binom{13}{2} \cdot \binom{48}{1} - (\text{poker}) - (\text{full house})$

royal flush: 4^4

színos: $4^9 - (\text{r. flush})$

flush: $\binom{13}{5} \cdot 4 - (\text{színos}) - (\text{royal flush})$

pair: $13 \cdot \binom{50}{3} -$
- f. h) - (drill) -
- (poker)

1.12

1.20. 6p, 6f, 7k $P(\text{mind a három szín előfordul}) =$
 $= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = P(A)$

$A_1 = \{\text{nincs szerepelés}\}$

$A_2 = \{\text{sárga szerepel}\}$

$A_3 = \{\text{kék szerepel}\}$

$C_i = \{i\text{-edik szín nem húzható ki}\}$

$$P(A) = 1 - P(C_p \cup C_f \cup C_k) =$$

$$= 1 - P(C_p) - P(C_f) - P(C_k) + P(C_p \cap C_k) + P(C_p \cap C_f) +$$
 $+ P(C_f \cap C_k) - P(C_p \cap C_f \cap C_k) =$

$$= 1 - \frac{\binom{13}{5} + \binom{13}{5} + \binom{12}{5} - \binom{6}{5} - \binom{7}{5} - \binom{6}{5}}{\binom{19}{5}}$$

A, B, C

$$\Omega = \{(i, n) : i = A, B, n \geq 2\}$$

$$\Omega = \{AA, ACC, ACBB, ACBAA, \dots, BB, BCC, BCAA, \dots\}$$

$$\tilde{A} = \{\text{torna nyer}\} = \left\{ \begin{array}{l} \underset{(A,2)}{AA}, \underset{(A,5)}{ACBA\star}, \underset{(A,8)}{ACBACBAA}, \underset{(B,4)}{BCAA}, \\ \underset{(B,7)}{BCABC\star}, \dots \end{array} \right\}$$

$$E_i := \{i \text{ nyer elosztás}\}$$

$$P(\tilde{A} \cap E_A) = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-8} + \dots = 2^{-2} \cdot \frac{1}{1-2^{-3}} = \frac{2}{7}$$

$$P(\tilde{A} \cap E_B) = 2^{-4} + 2^{-7} + \dots = 2^{-4} \cdot \frac{1}{1-2^{-3}} = \frac{1}{14}$$

$$P(\tilde{A}) = P(\tilde{A} \cap E_A) + P(\tilde{A} \cap E_B) = \frac{5}{14}$$

$$P(\tilde{B}) = \frac{5}{14}, P(\tilde{C}) = \frac{2}{7}$$

$$2 \cdot 2^{-2} + 2 \cdot 2^{-3} + \dots = 2 \cdot 2^{-2} \cdot \frac{1}{1-2^{-1}} = 1$$

1.25.

2 hocha
↳ 2p, 2z, 1o, 1f oldal

az, hogy
mi a száműrje
hogy nincs
measset játzanak

$$\Omega = \{(p,p), (p,h), \dots, (f,f)\}$$

$$P((p,p)) = \frac{2^2}{6^2}$$

	p	p	z	z	f	o
↑						
p						
z						
f						
o						

$$P((f,f)) = \frac{1}{6^2}$$

$$P(A) = \frac{2^2 + 2^2 + 1 + 1}{6^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

b) } $P(\text{kítőbözövel}) = \frac{26}{36} = \frac{13}{36}$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = \frac{26 \cdot 26 \cdot 16}{(6^2)^3}$$

2025. 09. 22.

2.3)

a) $1 - P(\text{nincs zöldje}) = 1 - \binom{15}{5} / \binom{20}{5}$

b) $P(\text{nehéz 2 nem zöld és 3 zöld van})$ es a misiknál
van zöldje) = *

de $P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$

$$P(\text{nehéz 2 nem zöld és 3 zöld van}) = \frac{\binom{5}{2} \binom{5}{3}}{\binom{20}{5}}$$

/3

$$x = \frac{(5)(9)(3)}{(2)} / \frac{(20)(15)}{(5)(5)}$$

All $P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$

~~$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$~~

~~$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$~~

~~$P(A \cup A^c|B) = \frac{P(A \cup A^c \cap B)}{P(B)} =$~~

~~$P(A \cap B \cup A^c \cap B) = P(A|B) + P(A^c|B) = 1$~~

$\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{AEAA}$

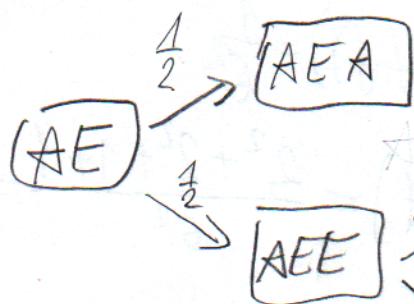
$\frac{1}{3} \downarrow \boxed{AEAE}$

$\frac{4}{3} \rightarrow \boxed{AEEA}$

$\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{AEEE}$

Polya-urna

(2.6)



$A_i = \{ \text{Adém hér i fôbôb, ha } i \text{ fo'van} \}$

$P(A_1) = P(AEEE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(A_2) = P(A\bar{E}A\bar{E}) + P(\bar{A}\bar{E}EA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$P(A_3) = P(AEAA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(2.8.) $A, B, C = \{A, B, C \text{ ontôtto}\}$ $P(R|A, B, C) = (0.02, 0.03, 0.05)$

$R = \{ \text{rossga suti}\}$ $P(A, B, C) = (0.5, 0.3, 0.2)$

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|A) \cdot P(A)}{P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C)}$$

$= \frac{0.02 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.2 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{0.01}{1.13} = \frac{1}{113}$

[2.10]

	F	L
1	12	8
2	6	n

$$P(F) \cdot P(1) = P(F \cap 1)$$

$$P(L) \cdot P(1) = P(L \cap 1)$$

$$P(F) \cdot P(2) = P(F \cap 2)$$

$$P(L) \cdot P(2) = P(L \cap 2)$$

$$P(n) =$$

[2.15.] n fü A_{ij} i,j ∈ n i < j A_{ij}

páros mert e kettő hármasat jelenít

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B) &= \\ &= P(A)P(B) \\ P(A) &\neq 0 \neq P(B) \end{aligned}$$

teljes nem mérhető Zembereknél

$$B_{i,x} = \{i\text{-neh x-edikén van a szülinapja}\} \quad x \in \underline{365}$$

$$P(A_{ij}) = \sum_{x \in \underline{365}} P(B_{i,x} \cap B_{j,x}) =$$

$$= \sum_{x \in \underline{365}} P(B_{i,x}) \cdot P(B_{j,x}) = \sum_{x \in \underline{365}} \frac{1}{365^2} = \frac{1}{365}$$

$$P(A_{ij} \cap A_{kl}) = \sum_{x,y \in \underline{365}} P(B_{i,x} \cap B_{j,x} \cap B_{k,y} \cap B_{l,y}) =$$

$$= \sum_{x,y \in \underline{365}} \frac{1}{(365)^4} = 365^2 \cdot \frac{1}{365^4} = \frac{1}{(365)^2}$$

/5

$$P(A_{ij} \cap A_{ik}) = \sum_{x \in \underline{365}} P(B_{ix} \cap B_{jx} \cap B_{kx}) = \sum_{x \in \underline{365}} \frac{1}{365^3} =$$

$$= \frac{1}{365^2} = P(A_{ij}) P(A_{ik})$$

Tehát az $\binom{n}{2}$ esemény parallanub páronként fülelő

b) már megmutatott megmondottuk, hogy nem

$$P(A_{ij} \cap A_{jk} \cap A_{ki}) = \sum_{x \in \underline{365}} P(B_{ix} \cap B_{jx} \cap B_{kx}) =$$

$$= \frac{1}{365^2} \neq \frac{1}{365^3} = P(A_{ij} \cap A_{jk} \cap A_{ki})$$

(2, 17.)

$A_i : i \in \mathbb{N} \quad A_i = \{i\text{-edik vizsgán átmegy}\}$

$$P(A_i | A_{i+1}^c \cap \dots \cap A_1^c) = \frac{1}{1+i} \quad \frac{1+i-1}{1+i}$$

$$1 - P(\text{soha nem megy át}) = 1 - \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1+i}\right) = 1 - \emptyset$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n} + \dots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{n-2}{n-1} + \frac{n-1}{n} = \frac{(n-2)n + (n-1)^2}{(n-1)n} = \\ &= \frac{n^2 - 2n + n^2 - 2n + 1}{n^2 - n} = \frac{2n^2 - 4n + 1}{n^2 - n} \end{aligned}$$

2.20.

 $A = \{\text{elsőre jött válogatottam}\}$ $B = \{$

2025. 09. 30.

 $A = \{\text{2. hárköt hozzájáró}\}$ $B = \{\beta \quad - \quad \parallel \quad \}$ $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega, P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

$C_n = \{n\text{-adik hozzájáró eredménye piros}\}$ események
 nem függetlenek, de feltételeesen függetlenek, ha tudjuk a
 hozzájáró eredményét

$$\text{a) } P(C_n) = P(C_n \cap A) + P(C_n \cap B) =$$

$$= P(C_n | A)P(A) + P(C_n | B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } P(C_n | \bigcap_{i \in \underline{k-1}} C_i) = \frac{P(\bigcap_{i \in \underline{k}} C_i)}{P(\bigcap_{i \in \underline{k-1}} C_i)} =$$

$$= \frac{P(A)P(\bigcap_{i \in \underline{k}} C_i) + P(B)P(\bigcap_{i \in \underline{k}} \bar{C}_i)}{P(A)P(\bigcap_{i \in \underline{k-1}} C_i) + P(B)P(\bigcap_{i \in \underline{k-1}} \bar{C}_i)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} = P_k$$

$a^k + b^k =$
 $= (a+b)/a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \dots + b^{k-1}$

$$P_k > \frac{1}{2} \text{ ha } k \geq 2$$

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} P_k = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} =$$

(3.4) A, B, C, D, E

X : ahány mérkőzést A megnyer $\Rightarrow \Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$P(X=k)$$

$$k \in \mathbb{N}_0$$

trükk könnyebb hizárolni másikat:

$$P(X \geq k) \text{ értékét } k \in \mathbb{N}_0$$

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= P(\text{az első } k \text{ meccset A nyeri}) = \\ &= P(\text{A nyeri és a másik } k \text{ másik játékoshozük "a legjobb"}) = \frac{1}{k+1}, \text{ hisz az } k+1 \text{ játékos közül} \\ &\text{várományos relatív sorrendje ugyanolyan valószínű} \end{aligned}$$

$$p_k = P(X=k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1) =$$

$$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$k=4 \quad P(X=4) = \frac{1}{5}$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot \frac{1}{5}$$

Hihető valószínűség

szám	0,5	1,0
soranki szám	2	2
ez a várható érték	3	3
	4	4

$$\text{az összesen } \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

3.19. X = akárnyor Kochával 6-ost dobtunk

$$X \sim \text{Binom}(3, \frac{1}{6})$$

$$p_k = P(X=k) \quad k \in \underline{\mathbb{Z}_0}$$

$$p_k = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k} \quad E(X) = np = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$$

nettó nyereményem: Z nettel

$$Z = \begin{cases} X, & \text{ha } X \geq 1 \\ -1, & \text{ha } X=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= [-1] p_0 + [1] p_1 + [2] p_2 + [3] p_3 = \\ &= E(X) - p_0 = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{-17}{216} \end{aligned}$$

3.20. A ma meghibásodó alkatrészek számát jelöljük x -szel

$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$

türelmi valószínűsége ha

mar lü-

$$P(\text{ma leíl}) = P(X \geq h) =$$

$$= \sum_{l=h}^n \binom{n}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n-l} = q$$

tom az integrál
jelköt, ahogy
szállnak fel a
dörgelemeib

Ha γ -adik napra áll le előzör a rendszer, akkor

$Y \sim \text{Geom}(q)$ (Független q valsegű híréleteket végez és

Valószínűségek)

Y a próbalkozások száma az előző sikertől)

$$P(Y=t) = (1-q)^{t-1} q$$

3.14. Tír-edék feladat (ez +2 pont)

$$A = \{\text{Anna nyer}\} \quad B = \{\text{Bori nyer}\}$$

$$C = \{\text{Döntetlen}\}$$

A, B, C teljes eseményrendszerek

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(B) = P(A^c) \quad P(\text{Bori legalább egy 6-ost dob} | A^c) =$$

$$= \frac{55}{216} \quad P(A^c) \cdot P(B^c)$$

$$P(C) = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{216}$$

a) $X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{216}\right)$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{216}{91}$$

b) $P(\text{Anna győz})$

$$\sum_{h=1}^{\infty} P(\text{a h. hárben győz}) = \sum_{h=1}^{\infty} P(C)^{h-1} P(A) =$$

$$= P(A) \cdot \frac{1}{1 - P(C)} = \frac{36}{91}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Anna győz}) &= \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \\ &= P(A | A \cup B) \quad \text{ez elmeletileg} \end{aligned}$$