Biz

$\boxed{\Rightarrow}$ kicseréljük t vált. s-re, integralunk t_0-tól t-ig

$\boxed{\Leftarrow}$ t szerinti deriváltból kapjuk vissza az egyenletet

$t=t_0$ esetén visszakapjuk a kezdeti feltételt

$\|y(t)$ folytonossága a deriválásnál kellett

Áll Ha f MVL (globálisan Lipschitz) az ~~...~~ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ kz-on az L konstanssal, $(t_0, y_0) \in$ ~~...~~ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, kk $\exists \delta > 0$, hogy az

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \boxed{\text{kér}}\text{-nek}$$

$\exists!$ mo-a a $(t_0-\delta, t+\delta)$ intervallumon

Biz ha $F(y) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))$ (t függvénye) és $F \in C[t_0-\delta, t_0+\delta]$, ahol $\delta < \frac{1}{L}$, akkor be kell látni, hogy F-nek $\exists!$ fixpontja $\Leftrightarrow$ kontrakció

$$d(F(y), F(z)) = \max_{t\in[t_0+\delta, t_0-\delta]} \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\,ds\right)\right| = \max_{|t-t_0|<\delta} \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\,ds \right| \le$$

$$\le \max_{|t-t_0|<\delta} \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|\,ds \right| \overset{\mathcal{L}\text{-tul.}}{\le}$$

$$\le \max_{|t-t_0|\le\delta} \left| \int_{t_0}^{t} L \underbrace{|y(s) - z(s)|}_{\le d(y,z)}\,ds \right| \le \max_{|t-t_0|<\delta} \left| \int_{t_0}^{t} L\, d(y,z)\,ds \right| \le$$

$$\le \underbrace{L\delta}_{<1}\, d(y,z) \le d(y,z) \xrightarrow{\text{Banach-fp}} \exists$$

6