1. Lineáris algebra

1.1. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

1. Deffiníció. *Legyen $\mathbb{F}$ test $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, $b \in \mathbb{F}$ egy n változós lineáris egyenletrendszer:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,$$

ahol a_i együttható, x_i változó, b pedig konstans.

2. Deffiníció. *Egy n változós m egyenletrendszerből álló lineáris egyenletrendszer (LER):*

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

ahol a_{ij} együttható, x_i változó, b_i pedig konstans.

3. Deffiníció. $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ *megoldása a fenti LER-nek, ha minden i-re*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$$

teljesül.

4. Deffiníció. *Egy LER homogén, ha minden konstans nulla, inhomogén, ha nem homogén.*

5. Állítás. *Egy LER homogén $\leftrightarrow$ $(0, \ldots, 0)$ megoldás.*

6. Deffiníció. *Két LER eqivalens, ha a megoldásaiknak halmaza megegyezik.*

7. Lemma. *A következők eqivalens LER-hez vezetnek:*

1. *két egyenletet felcserélünk,*
2. *egy egyenletet megszorzunk egy nemnulla $\mathbb{F}$-beli elemmel,*
3. *az egyik egyenlet többszörösét hozzáadjuk egy másikhoz.*

8. Deffiníció. *Egy LER kibővített mátrixa:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & \ddots & & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n
\end{array}\right)$$

9. Deffiníció. *A fenti lemmában a műveletek az elemi sorműveletek:*

1. *i-edik és j-edik sor cseréje, jelölés: $(i) \leftrightarrow (j)$,*
2. *i-edik sor c-szerese (c nem nulla), jelölés: $c(i)$,*
3. *i-edik sorhoz a j-edik sor hozzáadása, jelölés: $(i) + c(j)$.*

10. Deffiníció. *Egy mátrix sorlépcsős alakú (row echelon form)*

- *ha vannak csupa akkor azok utolsók és a nem csupa nulla sorok több nullával kezdődnek, mint az előző,*
- *nem csupa nulla sorban az első nemnulla elem, a vezérelem (pivot).*

11. Deffiníció. *A Gauss-elimináció a LER kibővített mátrixának sorlécsős alakra hozással való megoldási módja.*

12. Tétel. *Minden mátrix sorlépcsős alakra hozható elemi sorműveletekkel.*

13. Deffiníció. *Egy mátrix redukált sorlépcsős alakú (reduced row echelon form), ha minden vezéreleme 1-es és oszlopukban minen más elem nulla.*

Jelölés. *A mátrix redukált sorlépcsős alakja:* $\mathrm{rref}(A)$.

14. Tétel.

1. *Minden mátrix redukált sorlépcsős alakra hozható elemi sorműveletekkel.*
2. *A sorlépcsős alak független az elemi sorműveletektől.*

15. Deffiníció. *A mátrix redukált sorlépcsős alakja a fenti egyértelmű mátrix.*

16. Deffiníció. *Az egyetrendszerek sorlépcsős alakra hozásával való megoldása a Gauss-Jordan elimináció.*

17. Deffiníció. *Egy változó szabad, ha a rref-ben az oszlopában nincs vezérelem és kötött, ha van.*

18. Tétel (LER megoldása)**.**

1. *Ha az rref-ben van olyan sor, ami a mátrixban csupa nulla és a kibővített mátrixban nem csupa nulla van (ellentmondásos sor), akkor nincs megoldás.*
2. *Különben a szabad változók tetszőleges értékéhez egyetlen megoldás tartozik.*

19. Következmény. *Egy LER megoldásszáma* 0, $|\mathbb{F}|^f$, *ahol* f *a szabad változók száma.*

1.2. Vektorterek

20. Deffiníció. *Az* $\mathbb{F}$ *test, ekkor az* $\mathbb{F}$ *feletti* n *dimenziós tér:*

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{F}^n, +, \cdot) \\
&\mathbb{F}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n)^T | x_j \in \mathbb{F}\right\} \\
&+ : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n \quad (x_1, \ldots, x_n)^T + (y_1, \ldots, y_n)^T = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^T \\
&\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n)^T = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^T
\end{aligned}$$

Ha $u, v, w \in \mathbb{F}^n$ *és* $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$*:*

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$,
2. $u + v = v + u$,
3. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{F} :\ 0 + v = v$,
4. $\forall v \in \mathbb{F}^n\ \exists(-v) \in (F)^n : (-v) + v = 0$,
5. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,
6. $(\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u$,
7. $\lambda(\beta u) = (\lambda\beta)u$,
8. $1u = u$.

21. Deffiníció. *A* $(V, +, \cdot)$ *egy* $\mathbb{F}$ *test feletti vektortér, ha* V *olyan halmaz, amiben van egy kitüntetett* $\mathbf{0}$, $+ : V \times V \to V$, $\cdot : F \times V \to V$ *műveletek pedig az 1–8. tulajdonságokat teljesítik.*

22. Deffiníció. *Az* $U \subseteq V$ *altér, ha:*

1. $U \neq \emptyset$,
2. $u, v \in U$, *akkor* $u + v \in U$,
3. $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{F}$, *akkor* $\lambda u \in U$.

Jelölés. $U \leq V$

23. Deffiníció. *Ha egy homogén LER mátrixa* A*, akkor a nulltere:*

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{F}^n | x \text{ megoldás}\},$$

ahol n *a változók száma.*

24. Állítás. *Ha* A *egy* n *változós* $\mathbb{F}$ *feletti LER, akkor* $\mathcal{N}(A) \leq \mathbb{F}^n$.

25. Lemma. *Ha* $U \leq V$*, akkor* $\mathbf{0} \in U$.

26. Következmény. *Minden* V *vektortérre igaz, hogy* $\{\mathbf{0}\} \in V$.

27. Deffiníció. *Az $X \subseteq V$ halmaz affin altér, ha létezik egy olyan V-beli v vektor és $U \leq V$ altér, hogy $X = \{u + v | u \in U\}$.*

Jelölés. $X = u + V$

28. Állítás. *Egy n változós, megoldható LER megoldáshalmaza ($\mathcal{N}(A)$), affin altér $\mathbb{F}^n$-ben.*

Az $\emptyset$ nem altér, ezért kell a megoldhatóság.

29. Állítás. *Legyen $v, v' \in V$ és $U, U' \leq V$. A $v + V = v' + U'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $U = U'$ és $v - v' \in U$.*

30. Deffiníció. *Legyenek $v_1, \dots, v_n$ vektorok V vektortér elemei, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pedig $\mathbb{F}$ elemei. Ekkor*

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n v_i$$

a vektorok lineáris kombinációja.

31. Deffiníció. *A $v_1, \dots, v_n$ vektorok lineáris kombinációinak halmaza az általuk kifeszítettfeszített altér.*

Jelölés. *A $v_1, \dots, v_n$ vektorok által feszített altér:* $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$.

32. Állítás. *A* $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ *altér.*

1.3. Halmazelméleti kitérés

33. Deffiníció. *Ha H egy halmaz és $X \subseteq \mathcal{P}(H)$:*

- *$A \in X$ legkisebb, ha $\forall B \in X: \ A \subseteq B$,*
- *$A \in X$ legnagyobb, ha $\forall B \in X: \ B \subseteq A$,*
- *$A \in X$ minimális, ha $B \in X$, $B \subseteq A \to B = A$,*
- *$A \in X$ maximális, ha $B \in X$, $A \subseteq B \to B = A$.*

34. Állítás.

1. *Ha létezik legkisebb halmaz, akkor ez az egyetlen minimális.*
2. *Ha létezik lagnagyobb halmaz, akkor ez az egyetlen maximális.*

35. Állítás.

1. *Ha X halmaz véges, akkor létezik minimális és maximális részhalmaz.*
2. *Ha X halmaz végtelen, akkor nem mindig létezik maximális és minimális részhalmaz.*

Vissza a vektorterekhez

36. Deffiníció. *Az $S \subseteq V$ halmaz, ekkor*

$$\mathrm{span}(S) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i | n \in \mathbb{N}, \forall i \in (1, \dots, n) \ \lambda_i \in \mathbb{F}, v_i \in S \right\} & \text{ha } S \neq \emptyset \\ \mathbf{0} & \text{ha } S = \emptyset \end{cases}$$

Az $S \subseteq V$ halmaz generátor, ha $\mathrm{span}(S) = V$

37. Állítás. *Az $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ halmaz akkor és csak akkor generátor az $A = (v_1 | \dots | v_n)$-ra $\mathrm{rref}(A)$-ban minden sorban van vezérelem.*

38. Deffiníció. *Az $S \subset V$ (lineárisan) független, ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathbf{0}$ ($\lambda_i \in \mathbb{F}$, $v_j \neq v_j$, $v_i, v_j \in V$), akkor és csak akkor, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$-re $\lambda_i = 0$.*

39. Állítás. *A $\{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbb{F}^n$ halmaz akkor és csak akkor lineárisan független, ha $A = (v_1 | \dots | v_n)$-re $\mathrm{rref}(A)$-ban minden oszlopban van vezérelem.*

40. Állítás. *Az S halmaz akkor és csak akkor független, ha minden $\in S$-re $v \notin \mathrm{span}(S - \{v\})$.*

41. Állítás. *Ha $U \subseteq W \subseteq V$ részhalmazok a V vektortérben, akkor:*

1. *ha U generátor, akkor W is,*
2. *ha U generátor és $u \in U$ és $u \in \operatorname{span}(U - \{u\})$, akkor $U - \{u\}$ is generátor,*
3. *ha W független, akkor U is,*
4. *ha W független és $w \in V$ olyan, hogy $w \notin \operatorname{span}(W)$, akkor $W \cup \{w\}$ is független.*

42. Deffiníció. *Az $S \subset V$ bázis, ha független és generátor.*

43. Állítás. *Az $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{F}^m$ akkor és csak akkor bázis, ha $A = (v_1| \dots |v_n)$-re:*

$$\operatorname{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

44. Tétel. *A következő állítások eqivalensek $S \subseteq V$-re:*

1. *S bázis,*
2. *S minimális generátor,*
3. *S mazimális független.*

45. Tétel. *Ha V vektortér, akkor:*

1. *Létezik benne bázis,*
2. *bármelyik két bázis azonos elemszámú.*

46. Deffiníció. *A V vektortér dimenziója egy bázishalmazának elemszáma.*

Jelölés. $\dim(V)$

47. Állítás. *Ha V vektortér, akkor:*

1. $\dim(\mathbb{F}^n) = n$,
2. $\dim(V) = n$ *és S generátor, akkor* $n \leq |S|$,
3. $\dim(V) = n$ *és S független, akkor* $|S| \leq n$,
4. $\dim(V) = n = |S|$ *akkor csak akkor, ha S generátor és független is,*
5. *$U \leq V$ esetén a $\dim(U) \leq \dim(V)$ összefüggésben csak akkor és csak akkor áll fenn az egyenlőség, ha $U = V$.*

48. Következmény. *Ha $B = (b_1, \dots, b_n)$ bázis V vektortérben (rögzített sorrendben), akkor minden V-beli vektor előállítható egyértelműen*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

alakban (azaz b_i-k lineáris kombinációiként).

49. Deffiníció. *A v vektor B bázisbeli koordinátái az együtthatókból álló vektor.*

Jelölés.

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

1.4. Mátrixok

Szabatosan fogalmazva a mátrixok számtáblázatok.

50. Deffiníció. *Az R gyűrű, akkor egy $m \times n$ mátrix az m sorból és n oszlopból álló táblázat:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ahol $a_{ij} \in R$.

Jelölés.
- a_j: *j-edik oszlop ($a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$)*
- a_{ij}: *az i-edik sor j-edik eleme*
- $R^{m\times n}$: *az összes R feletti $m \times n$-es mátrix halmaza.*

51. Deffiníció. *Ha $A, B \in R^{m\times n}$, akkor A és B összege:*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij},$$

és ha $A \in R^{m\times n}$ és $\lambda \in R$, akkor A λ-szorosa:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{ij}.$$

52. Állítás. *Ha $\mathbb{F}$ test és $(\mathbb{F}^{m\times n}, +, \cdot)$ vektortér, akkor*

$$\dim(\mathbb{F}^{m\times n}) = m \cdot n.$$

53. Deffiníció. *Ha $A \in R^{m\times n}$, $v \in R^n$, $v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, akkor e mátrix és vektor szorzata:*

$$Av = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \in R^m$$

ahol $a_1, \dots, a_n \in R^m$ oszlopvektorok.

54. Állítás. *Ha értelmes A mátrix és v vektor szorzata ($\lambda \in R; x, y \in R^n; A \in R^{m\times n}$), akkor az alábbi tulajdonságok teljesülnek rá:*

1. $A(x + y) = Ax + Ay$,
2. $A\lambda x = \lambda Ax$.

55. Deffiníció. *Két mátrix szorzata ($A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times k}$):*

$$AB = (Ab_1 | \dots | Ab_k) \in R^{m\times k}.$$

56. Állítás. *Ha értelmes a szorzás ($\lambda \in R, A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times k}, C \in R^{k\times l}$), akkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,
2. $(AB)C = A(BC)$,
3. $AE = EA = A$,
4. $A(B + C) = AB + AC$ *és* $(B + C)A = BA + CA$.

57. Deffiníció. *Egy $A \in R^{m\times n}$ mátrix diadikus (másnéven diád), ha van olyan $v \in R^{m\times 1}$ és $w \in R^{1\times n}$ vektorok, amikre:*

$$A = vw.$$

Jelölés.
1. *A $v \in R^n$ a $v \in R^{n\times 1}$-et jelöli (tehát oszlopvektort).*
2. *A v^T eleme $R^{1\times n}$-nek (tehát sorvektor) és minden $1 \le i \le n$ esetén $v_{i1} = v^T_{1i}$.*

58. Deffiníció. *A*

$$0_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in R^{n\times n}$$

mátrix a nullamátrix.

59. Deffiníció. *Az*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in R^{n\times n}$$

mátrix az egység (másnéven identitás) mátrix, ahol ha $A \in R^{m\times n}$, akkor:

$$I_m A = A = A I_n$$

egyenlőségnek teljesülnie kell.

60. Következmény. *Az $(R^{n\times n}, +, \cdot)$ hármas gyűrűt alkot, ahol 0_{nn} az additív egység, I_n pedig a multiplikatív egység, de az $(R^{m\times n}, +, \cdot)$ nem gyűrű (például mert az összeadásra nem zárt).*

61. Deffiníció. *Az $A \in R^{m\times n}$ mátrix transzponáltja:*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in R^{n\times m}.$$

62. Állítás. *Ha $A, B \in R^{n\times n}$, akkor teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
3. $(AB)^T = B^T A^T$.

63. Deffiníció. *Az $A \in R^{n\times n}$ mátrix szimmmetrikus, ha $A = A^T$.*

64. Lemma. *Az A,B megfelelő méretű mátrixok ($A \in R^{m\times k}, B \in R^{k\times n}$), akkor:*

1. *az AB oszlopai a B oszlopai szorozva A-val,*
2. *az AB oszlopai az A oszlopainak lineáris kombinációi,*
3. *az AB sorai az A sorai szorozva B-vel,*
4. *az AB sorai a B sorainak lineáris kombinációi.*

65. Következmény. *Az AX előáll X-ből (nem feltétlenül eqivalens) sorműveletek segítségével.*

66. Deffiníció. *Az E elemi mátrix, ha EX az X-ből elemi sorművelettel kapható.*

67. Következmény. *A Gauss-elimináció lényegében megegyezik elemi mátrixokkal (balról) való szorzásával.*

1.5. Mátrixhoz rendelt alterek

68. Deffiníció. *Ha $\mathbb{F}$ test és $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, akkor:*

- *A nulltere: $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{F}^n | Ax = 0\}$,*
- *A sortere: $\mathcal{S}(A) = \{A \text{ sorai által feszített altér}\}$,*
- *A oszloptere: $\mathcal{O}(A) = \{A \text{ oszlopai által feszített altér}\}$.*

69. Tétel.

1. *Az $\mathcal{S}(A)$ egy bázisa a vezérelemeket tartalmazó sorokból álló vektorrendszer.*
2. *Az $\mathcal{O}(A)$ egy bázisa a vezérelemeket tartalmazó oszlopokból álló vektorrendszer.*

70. Deffiníció. *Egy A mátrix rangfelbontása BR, ahol B az előző tétel első részbeli $\operatorname{rref}(A)$ oszlopai és R a második részbeli $\operatorname{rref}(A)$ sorai.(???)*

71. Deffiníció. *Az $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrixnak a rangja az oszlopterének a dimenziója, tehát $\dim(\mathcal{O}(A))$.*

Jelölés. $\operatorname{rk}(A)$

72. Következmény. *A rang, az oszloptér dimenziója, a vezérelemek száma és a sortér dimenziója ugyanannyi.*

73. Következmény.

$$\underbrace{\dim(\mathcal{O}(A))}_{\leq \mathbb{F}^n} = \underbrace{\dim(\mathcal{S}(A))}_{\leq \mathbb{F}^m}$$

74. Tétel. *Ha $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, akkor:*

1. $\mathrm{rk}(A) \leq \min(m,n)$,
2. $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^T)$,
3. $\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$,
4. $\mathrm{rk}(AB) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$.

75. Deffiníció. *Az A és B mátrix egymás inverzei, ha AB és BA is egységmátrix. Ekkor $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$.*

76. Állítás. *A deffiníciót csak négyzetes mátrixok elégítik (a mátrixok körében), azaz $m = n = \mathrm{rk}(A)$, és ekkor az inverz egyértelmű.*

Jelölés. *Ha A-nak van inverze, akkor ezt az A^{-1} jelöli.*

77. Tétel. *Ha $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, akkor eqivalensek az alábbi kijelentések:*

1. *A-nak létezik inverze,*
2. $\mathrm{rk}(A) = n$,
3. $\mathrm{rref}(A) = I_n$, *és ekkor $(A|I_n)$-ből Gauss-Jordan-eliminációval $(I_n|A^{-1})$-et kapjuk.*

78. Következmény. *Az $AX = B$ mátrixegyenlet megoldása $X = A^{-1}B$, ha A invertálható.*

79. Állítás. *Ha $A, B \in R^{n\times n}$ invertálható mátrixok, $\lambda \in R$, akkor teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
4. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

80. Deffiníció. *Az $A \in R^{n\times n}$*

- *diagonális, ha $(A)_{ij} = 0$, ha $i \neq j$,*
- *alsó háromszögmátrix, ha $(A)_{ij} = 0$, ha $i < j$,*
- *felsőháromszögmátrix, ha $(A)_{ij} = 0$, ha $i > j$,*
- *permutációmátrix, ha minden sorában és oszlopában pontosan egy 1-es szerepel és a többi eleme 0.*

81. Állítás. *Ha $A, B \in R^{n\times n}$ diagonális (felső, vagy alsóháromszögmátrix), akkor $A + B$, AB és ha $\lambda \in R$, akkor λA is az. Emellett A pontosan akkor invertálható, ha $a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$.*

82. Állítás. *Ha $A, B \in R^{n\times n}$ permutációmátrix, akkor AB és $A^{-1} = A^T$ is az.*

1.6. Lineáris leképezések

83. Deffiníció. *Ha V és W $\mathbb{F}$ feletti vektortér, akkor $\varphi : V \to W$ lineáris, ha $\forall u, v \in V; \forall \lambda \in \mathbb{F}$ esetén:*

1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

Jelölés. *A 0_V a V vektortér nullavektorát jelöli.*

84. Lemma. *Ha $\varphi : V \to W$ lineáris, akkor $\varphi(0_V) = 0_W$.*

85. Lemma. *Ha V és W vektortér és $\dim(V) = n$, valamint $a_1, \ldots, a_n \in W$ és $e_1, \ldots, e_n \in W$, akkor létezik egyetlen olyan $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés, melyre:*

$$\varphi(e_j) = a_j.$$

86. Következmény. *Ha $\varphi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ lineáris leképezés és $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, akkor:*

1. *a φ megfeleltethető egy $\mathbb{F}$-beli bijekciónak(???),*
2. *A-hoz hozzárendelhető az $x \mapsto Ax$ leképezés,*
3. *φ-hez hozzárendelhető a $(\varphi(e_1)|\dots|\varphi(e_n))$ mátrix.*

87. Deffiníció. *A $\varphi : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ lináris leképezés (standard) mátrixa:*

$$(\varphi(e_1)|\dots|\varphi(e_n)) \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

mátrix, ahol e_j az az oszlopmátrix, aminek a j-edik komponense 1, a többi 0.

Jelölés. $[\varphi]$

88. Deffiníció. *Ha $\varphi : V \to W$ egy lineáris leképezés, akkor:*

- *φ magtere azoknak a vektorok halmaza, amikhez φ 0_W-t rendel, azaz $\{v \in V|\varphi(v) = 0_W\}$,*
- *φ képtere azoknak a vektoroknak a halmaza, amiket φ egy V-beli vektorhoz rendel, azaz $\{w \in W|\exists v \in V : \varphi(v) = w\}$.*

Jelölés. *magtér:* $\mathrm{Ker}(\varphi)$, *képtér:* $\mathrm{Im}(\varphi)$

89. Állítás. *Ha $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés, akkor:*

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) \le V$, $\mathrm{Im}(\varphi) \le W$,
2. *ha $V = \mathbb{F}^n$, $W = \mathbb{F}^m$ és $A = [\varphi]$, akkor* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{N}(A)$ *és* $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(A)$.

90. Tétel (Dimenziótétel)**.** *Ha $\varphi : V \to W$ lináris leképezés, akkor:*

$$dim(ker(\varphi)) + dim(im(\varphi)) = dim(V).$$

91. Deffiníció. *Ha $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ bázis V-ben, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ bázis W-ben, akkor:*

$$[\varphi]_{BC} = ([\varphi(v_1)]_C|\dots|[\varphi(v_n)]_C)\,.$$

Ha $V = \mathbb{F}^n$ és $W = \mathbb{F}^m$ alkalmasan választjuk a standard bázisokat.(???)