

1. Saját jelölések

Jelölés Az $\{i \in \mathbb{N} | 1 \leq n\}$ halmazt \underline{n} jelöli.

2. Alterek összege

Jelölés V_K jelöli a V vektorteret K test felett, de következetesség miatt mindig megjegyezzük, hogy " V_K vektortér", ami még mindig rövidebb, mint a hosszú " V K test feletti vektortér".

1 Definíció Ha V_K vektortér és $V_1, \dots, V_n \leq V$, akkor ezen alterek **összege**:

$$V_1 + \dots + V_n = \{v_1 + \dots + v_n | v_i \in V_i, 1 \leq i \leq n\}$$

2 Definíció Ha V_K vektortér és $V_1, \dots, V_n \leq V$, akkor ezen alterek **direkt összege**, olyan összeg, aminek minden eleme egyértelműen áll elő $v_1 + \dots + v_n$ ($\forall v_i \in V_i, i \in \underline{n}$). ha benne minden összeg egyértelmű.

3 Definíció V_K vektortér, $U, W \leq V$, $V = U \oplus W$, $\pi : V \rightarrow U$ lineáris leképezés, $u \in U$, $w \in W$, hogy $v = u + w \in V$ esetén $\pi(v) = u$. Ekkor π -t az U **altérre való W irányú vetítésnek nevezzük**.

3. Konjugált mátrixok

4 Definíció $A, B \in K^{n \times n}$ A és B **konjugáltak** (hasonlók), ha létezik egy olyan $X \in K^{n \times n}$, melyre $B = X^{-1}AX$.

5 Definíció V_K vektortér, $f : V \rightarrow V$ lineáris leképezés a V **endomorfizmusa**.

Jelölés $\text{End}_K V$

6 Definíció V_K vektortér, $f \in \text{End}_K V$, $t \in K$:

- $t \in K$ **sajátértéke** f -nek, ha létezik egy olyan nemnulla V -beli vektor, amire $f(v) = tv$,
- $t \in K$ sajátérték, ekkor a V -beli v vektor a t -hez **tartozó sajátvektor**, ha $f(v) = tv$.
- az f összes sajátértékének halmaza f **spektruma**.

7 Definíció Ha $n \geq 1$, $A \in K^{n \times n}$, ekkor A **mátrix sajátértékei, sajátvektorai, spektruma** az $f_A : K^n \rightarrow K^n$, endomorfizmus sajátértékei, sajátvektorai és spektruma.

8 Definíció V_K vektortér, $f \in \text{End}_K V$, az S_t a t -hez tartozó sajátvektorokat tartalmazó halmaz, akkor $S \cup 0_V$ az f t -hez tartozó **sajátaltéré**.

Jelölés $\text{Eig}_{f,t}$

9 Definíció V_K vektortér $f \in \text{End}_K V$, $t \in K$ változó, akkor $\det(f - tI)$ polinom az f **karakterisztikus polinomja**.

Jelölés $\text{char}_f(t)$

10 Definíció V_K vektortér, $f \in \text{End}_K V$, $t \in K$, ekkor $\dim(\text{Eig}_{f,t})$ a t sajátértékének **geometriai multiplicitása**.

11 Definíció V_K vektortér, t_0 az $f \in \text{End}_K V$ sajátértéke, ekkor t_0 **algebrai multiplicitása** k , ha t_0 pontosan k -szoros gyöke $\text{char}_f(t)$ -nek.

12 Definíció V_K vektortér, ekkor $f \in \text{End}_K V$ **diagonalizálható**, ha létezik egy \mathcal{B} bázis, amiben $[f]_{\mathcal{B}}$ diagonális.

4. Mátrixok sajátfelbontása

13 Definíció $A \in K^{n \times n}$, $y \in K^n - 0$, akkor az y^T sorvektor az A **baloldali sajátvektora**, ha $y^T A = \lambda y^T$

14 Definição $A \in K^{n \times n}$ diagonalizálható mátrix **sajátfelbontása** PDP^{-1} , ahol P i -edik oszlopa az A mátrixhoz tartozó t_i -edik egyik sajátvektora (jelölje ezt most \underline{x}_i), P^{-1} i -edik sora az A mátrix t_i -hez tartozó egyik baloldali sajátvektora (jelölje ezt most ezt \underline{y}_i). Ekkor:

$$\sum_{i=1}^n t_i \underline{x}_i \underline{y}_i$$

a **sajátfelbontás** **diadikus alakja**.

5. Spektrálfelbontás

15 Definição Ha $A \in K^{n \times n}$ -nak létezik sajátfelbontása és P_i a $\text{Eig}_{A, t(i)}$ -re való vetítés mátrixa (a vetítés iránya a többi sajátaltér direkt összege), akkor A **spektrálfelbontása**:

$$A = t_1 P_1 + \dots + t_k P_k$$

6. Bilineáris leképezések

Dián vannak itt dolgok, amit nem akarok leírni.

Dia (definíció)tartalma:

1. bilineáris leképezés
2. szimmetrikus bilineáris leképezés
3. Gram-mátrix
4. baloldali, jobboldali mag, reguláris
5. ortogonalitás bilineáris leképezésre nézve
6. ortogonális kiegészítő
7. Tehetetlenségi Tétel

7. Euclides-terek

16 Definição $V_{\mathbb{R}}, \beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris leképezés, ekkor β **pozitív definit**, ha szimmetrikus és minden V -beli v vektorra $\beta(v, v) \geq 0$, továbbá $\beta(v, v) = 0$ pontosan akkor, ha $v = 0$. Másik elnevezés a **skalárszorzat**.

17 Definição

1. $V_{\mathbb{R}}, \beta := \langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ skalárszorzat (másnéven belsőszorzat), ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pár **Euclides-tér** (inner product space).
2. $v \in V$, akkor $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ a v **normája**
3. $v, w \in V$, akkor $d(v, w) = \|v - w\|$ a v és a w **távolsága**

Jelölés $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ jelöli a $V_{\mathbb{R}}$ vektorteret, amiben $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vektorszorzat. Ha emellett V még véges dimenziós is, akkor ezt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}$ jelöli.

18 Definição $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ ekkor ha $v, w \in V$, akkor a **szögük**:

$$\arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

19 Definição $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ és $v, w \in V$, akkor $v \perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle} w$, ha v és w szöge $\frac{\pi}{2}$.

8. Ortogonális bázisok

20 Definição $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ $S \subset V$ **ortogonális** részhalmaz, ha minden $v, w \in S$ esetén $v \perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle} w$, valamint S **ortonormált**, ha ortogonális és minden S -beli v -re $\|v\| = 1$, és S **ortonormált bázis**, ha ortonormált és bázis.

21 Definição $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **pozitív definit mátrix**, ha $\beta(x, y) = x^T A y$ pozitív definit pontosan akkor, ha A szimmetrikus és $x^T x > 0$ minden nemnulla $\mathbb{R}^n - 0$ -beli vektorra.

9. Ortogonális kiegészítő

10. Adjungált

22 Definíció $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)_E, (V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)_E, f : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés $f^* : V_2 \rightarrow V_1$ lineáris függvényt az f adjungáltjának nevezzük, ha minden $v \in V_1, w \in V_2$ vektorokra:

$$\langle f(v), w \rangle_2 = \langle v, f^*(w) \rangle_1.$$

23 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E, f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, ekkor f önadjungált, ha $f^* = f$.

24 Definíció $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális, ha $X^T X = I$ (azaz $X^T = X^{-1}$).

11. Ortogonális transzformációk

25 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E, f \in \text{End } \mathbb{R}V$, ekkor f ortogonális transzformáció, ha bijektív (izomorfizmus) és minden V -beli v és w esetén:

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle.$$

26 Definíció A (G, \cdot) páros csoport, ha $G \neq \emptyset$.

27 Definíció A (G, \cdot) páros Abel-csoport, ha (G, \cdot) csoport és \cdot kommutatív.

Jelölés Az $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ra ortogonális transzformációk csoportját $O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ jelöli (vagy $O_{\langle \cdot \rangle}$).

28 Definíció Ha $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}, V = \mathbb{R}^{n \times n} A \in V$ ortogonális leképezés mátrixa, ekkor az ilyen leképezések csoportja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ra nézve az n -edrendű ortogonális csoport.

Jelölés $O_{n, \langle \cdot \rangle}(\mathbb{R})$

29 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}, f \in O(V)$, ekkor az olyan f -ek melyekre $\det(f) = 1$ a speciális ortogonális csoportot alkotnak.

Jelölés $SO(V)$

12. Szemiortogonális mátrixok

30 Definíció $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ szemiortogonális, ha az oszlopok vagy sorok ortonormált bázist (vagy csak rendszert?) alkotnak. Tehát $A^T A = I_n$, ha az oszlopok alkotnak, $A A^T = I_m$, ha a sorok alkotnak ortonormált rendszert.

31 Definíció A teljes oszloprangú ($\text{rk } A = n$) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ QR-felbontása $QR = A$, ha $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ szemiortogonális, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pedig felsőháromszögmátrix, ahol a diagonális elemek nemnegatívak.

32 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}, \beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, szimmetrikus, bilineáris, akkor β :

1. pozitív definit, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \geq 0$ és $\beta(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
2. pozitív semidefinit, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \geq 0$,
3. negatív definit, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \leq 0$ és $\beta(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
4. negatív semidefinit, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \leq 0$,
5. indefinit, ha $\exists v, w : \beta(v, v) > 0, \beta(w, w) < 0$.