

Tartalomjegyzék

1. Saját jelölések	2
2. Vektorterek	3
3. Alterek összege	4
4. Konjugált mátrixok	5
5. Mátrixok sajátfelbontása	6
6. Spektrálfelbontás	7
7. Bilineáris leképezések	8
8. Euclides-terek	9
9. Ortogonális bázisok	10
10. Ortogonális kiegészítő	11
11. Adjungált	11
12. Ortogonális transzformációk	12
13. Szemiortogonális mátrixok	13
14. Qadratikus alak	14
15. Gráfelméleti alkalmazások	15

1. Saját jelölések

| Példa

|| Megjegyzés

Jelölés Az $\{i \in \mathbb{N} | 1 \leq i \leq n\}$ halmazt n jelöli.

Jelölés A szokásos halmazokon értelmezett kivonást a $-$ jel fogja jelölni \ helyett

| A nemnulla valós számok halmaza: $\mathbb{R} - \{0\}$

2. Vektorterek

1 Tétel V vektortér K felett, S független V -beli vektorok halmaza, ekkor ha $v \notin \text{span}(S)$, akkor $S \cup \{s\}$ is független.

2 Lemma V vektortér K felett, S V -beli lineárisan független vektorok halmaza, T V -beli generátor vektorok halmaza, v eleme S -nek, de nem eleme T -nek, akkor létezik egy olyan T , de nem S -beli vektor, hogy az S -ből a v -t kivéve és w -t hozzáadva $((S - \{v\}) \cup \{w\})$ független vektorrendszert kapunk.

3 Lemma V vektortér K felett, $f_1, \dots, f_n \in V$ lineárisan függetlenek, $g_1, \dots, g_m \in V$ generátorrendszer, ekkor $n \leq m$.

4 Tétel Ha V vektortér K felett, ekkor

1. ha S V -beli generátorrendszer, akkor létezik egy B bázis V -ben, ami S -nek része,
2. ha S V -beli független, akkor létezik egy olyan B bázis, aminek S része,
3. ha B_1 és B_2 V -beli bázisok, akkor a számosságuk megegyezik.

5 Definió Ha (X, \leq) **parciálisan rendezett halmaz**, ha \leq parciális rendezés.

|| A parciális rendezés reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

6 Definió Ha (X, \leq) parciálisan rendezett halmaz, ekkor $a \in X$ **maximális**, ha $\forall b \in X, a \leq b$ esetén $a = b$.

7 Definió Ha (X, \leq) parciálisan rendezett halmaz, ekkor $Y \subset X$ **lánc**, ha (Y, \leq) teljesen rendezett halmaz.

|| Teljesen rendezett halmaz bármely két eleme összehasonlítható.

8 Lemma (Zorn) Ha (X, \leq) nem üres parciálisan rendezett halmaz és minden $Y \subset X$ láncnak van X -ben felső korlátja, akkor X -nek van maximális eleme.

3. Alterek összege

Jelölés V_K jelöli a V vektorteret K test felett, de következetesség miatt mindig megjegyezzük, hogy " V_K vektortér", ami még mindig rövidebb, mint a hosszú " V K test feletti vektortér".

9 Definíció Ha V_K vektortér és $V_1, \dots, V_n \leq V$, akkor ezen alterek **összege**:

$$V_1 + \dots + V_n = \{v_1 + \dots + v_n \mid v_i \in V_i, i \in \underline{n}\}$$

10 Definíció Ha V_K vektortér és $V_1, \dots, V_n \leq V$, akkor ezen alterek **direkt összege**, olyan alterek összege, aminek minden eleme egyértelműen áll elő $v_1 + \dots + v_n$ ($\forall v_i \in V_i, i \in \underline{n}$) alakban.

|| Tehát minden vektor előáll olyan összegként, aminek tagjai különböző indexű alterekben van.

11 Állítás Ha V_K vektortér, akkor V_1, \dots, V_n összeg direkt, akkor és csak akkor, ha $v_i \in V_i - 0_V, v_i \notin \sum_{j \neq i} V_j$.

12 Állítás Ha V_K vektortér, akkor $V_1 + \dots + V_n (= \text{span}(\cup V_i))$ altér.

13 Definíció V_K vektortér, $U, W \leq V, V = U \oplus W, \pi: V \rightarrow V$ lineáris leképezés, $u \in U, w \in W$, hogy $v = u + w \in V$ esetén $\pi(v) = u$. Ekkor π -t az **U altérre való W irányú vetítésnek nevezzük.**

4. Konjugált mátrixok

14 Deffiníció $A, B \in K^{n \times n}$ A és B **konjugáltak** (hasonlók), ha létezik egy olyan $X \in K^{n \times n}$, melyre $B = X^{-1}AX$.

15 Deffiníció V_K vektortér, $f : V \rightarrow V$ lineáris leképezés a V **endomorfizmusa**.

Jelölés $\text{End}_K V$

16 Deffiníció V_K vektortér, $f \in \text{End}_K V$, $t \in K$:

1. $t \in K$ **sajátértéke** f -nek, ha létezik egy olyan nemnulla V -beli vektor, amire $f(v) = tv$,
2. $t \in K$ sajátérték, ekkor a V -beli v vektor a **t -hez tartozó sajátvektor**, ha $f(v) = tv$.
3. az f összes sajátértékének halmaza f **spektruma**.

17 Deffiníció Ha $n \geq 1$, $A \in K^{n \times n}$, ekkor A **mátrix sajátértékei, sajátvektorai, spektruma** az $f_A : K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$ endomorfizmus sajátértékei, sajátvektorai és spektruma.

18 Deffiníció V_K vektortér, $f \in \text{End}_K V$, az S_t a t -hez tartozó sajátvektorokat tartalmazó halmaz, akkor $S \cup 0_V$ az f endomorfizmus t -hez tartozó **sajátaltère**.

Jelölés $\text{Eig}_{f,t}$

19 Deffiníció V_K vektortér $f \in \text{End}_K V$, t változó, akkor $\det(f - tI)$ polinom az f **karakterisztikus polinomja**.

Jelölés $\text{char}_f(t)$

20 Deffiníció V_K vektortér, $f \in \text{End}_K V$, $t \in K$, ekkor $\dim(\text{Eig}_{f,t})$ a t sajátértékének **geometriai multiplisitása**.

21 Deffiníció V_K vektortér, t_0 az $f \in \text{End}_K V$ sajátértéke, ekkor t_0 **algebrai multiplisitása** k , ha t_0 pontosan k -szoros gyöke $\text{char}_f(t)$ -nek.

22 Deffiníció V_K vektortér, ekkor $f \in \text{End}_K V$ **diagonalizálható**, ha létezik egy \mathcal{B} bázis, amiben $[f]_{\mathcal{B}}$ diagonális.

5. Mátrixok sajátfelbontása

23 Deffiníció $A \in K^{n \times n}$, $y \in K^n - 0$, akkor az y^T sorvektor az A baloldali sajátvektora, ha $y^T A = \lambda y^T$

24 Deffiníció $A \in K^{n \times n}$ diagonalizálható mátrix sajátfelbontása PDP^{-1} , ahol P i -edik oszlopa az A mátrixhoz tartozó t_i -edik egyik sajátvektora (jelölje ezt most \underline{x}_i), P^{-1} i -edik sora az A mátrix t_i -hez tartozó egyik baloldali sajátvektora (jelölje most ezt \underline{y}_i). Ekkor:

$$\sum_{i=1}^n t_i \underline{x}_i \underline{y}_i$$

a sajátfelbontás diadikus alakja.

6. Spektrálfelbontás

25 Definíció Ha $A \in K^{n \times n}$ -nak létezik sajátfelbontása és P_i a $\text{Eig}_{A,t(i)}$ -re való vetítés mátrixa (a vetítés iránya a többi sajátaltér direkt összege), akkor A **spektrálfelbontása**:

$$A = t_1 P_1 + \dots + t_k P_k$$

7. Bilineáris leképezések

Deán vannak itt dolgok, amit nem akarok leírni.

Dia (definíció)tartalma:

1. bilineáris leképezés
2. szimmetrikus bilineáris leképezés
3. Gram-mátrix
4. baloldali, jobboldali mag, reguláris
5. ortogonalitás bilineáris leképezésre nézve
6. ortogonális kiegészítő
7. Tehetetlenségi Tétel

8. Euclides-terek

26 Deffiníció $V_{\mathbb{R}}, \beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris leképezés, ekkor β **pozitív definit**, ha szimmetrikus és minden V -beli v vektorra $\beta(v, v) \geq 0$, továbbá $\beta(v, v) = 0$ pontosan akkor, ha $v = 0$. Másik elnevezés a **skalárszorzat**.

27 Deffiníció

1. $V_{\mathbb{R}}, \beta := \langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ skalárszorzat (másnéven belsőszorzat), ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pár **Euclides-tér** (inner product space).
2. $v \in V$, akkor $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ a v **normája**
3. $v, w \in V$, akkor $d(v, w) = \|v - w\|$ a v és a w **távolsága**

Jelölés $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ jelöli a $V_{\mathbb{R}}$ vektorteret, amiben $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vektorszorzat. Ha emellett V még véges dimenziós is, akkor ezt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}$ jelöli.

28 Deffiníció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ ekkor ha $v, w \in V$, akkor a **szögük**:

$$\arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

29 Deffiníció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ és $v, w \in V$, akkor $v \perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle} w$, ha v és w szöge $\frac{\pi}{2}$.

9. Ortogonális bázisok

30 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$ $S \subset V$ **ortogonális** részhalmaz, ha minden $v, w \in S$ esetén $v \perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle} w$, valamint S **ortonormált**, ha ortogonális és minden S -beli v -re $\|v\| = 1$, és S **ortonormált bázis**, ha ortonormált és bázis.

31 Definíció $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **pozitív definit mátrix**, ha $\beta(x, y) = x^T A y$ pozitív definit pontosan akkor, ha A szimmetrikus és $x^T A x > 0$ minden nemnulla $\mathbb{R}^n - 0$ -beli vektorra.

10. Ortogonális kiegészítő

11. Adjungált

32 Definiáció $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)_E, (V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)_E, f : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés $f^* : V_2 \rightarrow V_1$ lineáris függvényt az f adjungáltjának nevezzük, ha minden $v \in V_1, w \in V_2$ -beli vektorokra:

$$\langle f(v), w \rangle_2 = \langle v, f^*(w) \rangle_1.$$

33 Definiáció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E, f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, ekkor f önadjungált, ha $f^* = f$.

34 Definiáció $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális, ha $X^T X = I$ (azaz $X^T = X^{-1}$).

12. Ortogonális transzformációk

35 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$, $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, ekkor f **ortogonális transzformáció**, ha bijektív (izomorfizmus) és minden V -beli v és w esetén:

$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle.$$

36 Állítás

1. id_V ortogonális,
2. $f, g \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, akkor fg, f^{-1} ortogonális.

37 Definíció A (G, \cdot) páros **csoport**, ha $G \neq \emptyset$.

38 Definíció A (G, \cdot) páros **Abel-csoport**, ha (G, \cdot) csoport és \cdot kommutatív.

39 Állítás Az $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ortogonális transzformációk csoportot alkotnak a kompozícióra nézve

Jelölés $O_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ (vagy $O_{\langle \rangle}$).

40 Definíció Ha $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}$, $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in V$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -ortogonális leképezés mátrixa, ekkor az ilyen leképezések csoportja a mátrixszorzásra nézve az **n -edrendű ortogonális csoport**.

Jelölés $O_{n, \langle \rangle}(\mathbb{R})$

41 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}$, $f \in O(V)$, ekkor az olyan f -ek melyekre $\det(f) = 1$ a **speciális ortogonális csoportot alkotnak**.

Jelölés $SO(V)$

42 Állítás Ha $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_E$, akkor $SO(V)$ csoport.

|| Tehát a definíció értelmes.

43 Definíció Ha $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

alakú, akkor **kétdimenziós forgásmátrix**.

Jelölés R_t

44 Tétel $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}$, ekkor f pontosan akkor ortogonális, ha létezik egy V -beli \mathcal{B} ortonormált bázis, amiben $[f]_{\mathcal{B}}$ blokkdiagonális úgy, hogy a főátlóra fűzött 2×2 -es és 1×1 -es blokkokból áll, hol a 2×2 -es blokkok R_t , az 1×1 blokkok ± 1 alakúak.

45 Következmény Két síkra való tükrözés tengely körüli forgatás.

13. Szemiortogonális mátrixok

46 Definíció $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ **szemiortogonális**, ha az oszlopok vagy sorok ortonormált bázist (vagy csak rendszert?) alkotnak. Tehát $A^T A = I_n$, ha az oszlopok alkotnak, $A A^T = I_m$, ha a sorok alkotnak ortonormált rendszert.

47 Definíció A teljes oszloprangú ($\text{rk } A = n$) $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ **QR-felbontása** $QR = A$, ha $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ szemiortogonális, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pedig felsőháromszög mátrix, ahol a diagonális elemek nemnegatívak.

48 Tétel A QR-felbontás egyértelműen létezik.

49 Definíció $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{E, \infty}$, $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, szimmetrikus, bilineáris, akkor β :

1. **pozitív definit**, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \geq 0$ és $\beta(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$,
2. **pozitív semidefinit**, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \geq 0$,
3. **negatív definit**, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \leq 0$ és $\beta(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$,
4. **negatív semidefinit**, ha $\forall v \in V : \beta(v, v) \leq 0$,
5. **indefinit**, ha $\exists v, w : \beta(v, v) > 0, \beta(w, w) < 0$.

50 Állítás $(V, \beta)_{\mathbb{R}, \infty}$, ha \mathcal{B} , egy V -beli bázis, úgy, hogy $[\beta]_{\mathcal{B}}$ diagonalizálható, a diagonális elemek d_1, \dots, d_n akkor:

1. β pozitív definit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i > 0$,
2. β pozitív semidefinit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i \geq 0$,
3. β negatív definit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i < 0$,
4. β negatív semidefinit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i \leq 0$,
5. β indefinit egyébként.

51 Állítás $(V, \beta)_{\mathbb{R}, \infty}$, ha \mathcal{B} , egy V -beli bázis, úgy, hogy $[\beta]_{\mathcal{B}}$ szimmetrikus akkor:

1. β pozitív definit pontosan akkor, ha minden sajátértéke pozitív,
2. β pozitív semidefinit pontosan akkor, ha minden sajátértéke nemnegatív,
3. β negatív definit pontosan akkor, ha minden sajátértéke negatív,
4. β negatív semidefinit pontosan akkor, ha minden sajátértéke nempozitív,
5. β indefinit egyébként.

52 Állítás (Főtengelytétel-Junior) $(V, \beta)_{\mathbb{R}, \infty}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ bázis V -ben, $A = [\beta]_{\mathcal{B}}$. Ha A_k a az A főminorja, akkor:

1. β pontosan akkor pozitív definit, ha $\det A_k > 0$,
2. β pontosan akkor negatív definit, ha $(\det A_k)(-1)^k > 0, \forall k \in \underline{n}$,
3. ha $\det A \neq 0$ és az 1., se a 2. eset nem áll fenn, akkor β indefinit.

14. Qadratikus alak

53 Definiáció $V_{\mathbb{R}, \infty}$ és $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus, bilineáris leképezés, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ V vektortér egy bázisa, $[x]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)^T$, ekkor a **qadratikus alak**:

$$Q(x) = [x]_{\mathcal{B}}^T [\beta]_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}} = \sum_{i,j=1}^n \beta(b_i, b_j) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Ekkor ez az alak az x_1, \dots, x_n egy homogén másodfokú polinomja.

Jelölés Az a szimmetrikus, bilineáris β függvény, amit Q meghatároz β_Q jelöli. jelöli.

Jelölés $(V, \beta)_{\mathbb{R}, \text{inf}}$ jelöli innentől (amíg másképpen nincs meghatározva) az \mathbb{R} feletti véges vektorteret, amin β egy szimmetrikus, bilineáris függvény.

54 Definiáció $(V, \beta)_{\mathbb{R}, \infty}$, $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ V -nek egy ortonormált bázisa, $A = [\beta_Q]_{\mathcal{C}}$, akkor $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ V -beli bázis által feszített egydimenziós altereket (egyeneseket), a Q **főtengelyeinek** nevezzük.

55 Definiáció Q qadratikus alak:

1. **pozitív definit**, pontosan akkor, ha β_Q is az,
2. **pozitív semidefinit**, pontosan akkor, ha β_Q is az,
3. **pozitív definit**, pontosan akkor, ha β_Q is az,
4. **pozitív semidefinit**, pontosan akkor, ha β_Q is az,
5. **semidefinit**, pontosan akkor, ha β_Q is az,

56 Definiáció $(a_{ij}) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = x^T A x + b^T x + d = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + d = 0$$

egyenletet kielégítő pontok **másodfokú görbék** halmazát alkotják.

15. Gráfelméleti alkalmazások

57 Deffiníció Ha $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ csúcsok halmaza, E (nem hurok)éleket tartalmazó halmaz, ekkor $G = (\mathcal{V}, E)$ **véges, hurokélmentes gráf**.

58 Deffiníció A G véges gráf **szomszéd(ság?)mátrixa** (másnéven **adjecenciamátrixa**), $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha E csúcsainak száma n és a_{ij} a v_i és a v_j csúcsok közötti élek számával egyenlő.

59 Deffiníció A G véges, hurokélmentes gráf **spektruma** a szomszédsági mátrixának a spektruma.

Jelölés $\underbrace{\mu_0 \geq \dots \geq \mu_{n-1}}_{\text{sajátértékek}}$ (mi ez?)

60 Deffiníció A G véges, hurokélmentes gráf **k -reguláris**, ha minden csúcs fokszáma k .

61 Deffiníció Ha $G = (\mathcal{V}, E)$ véges, hurokélmentes gráf, $F \subset \mathcal{V}$, ekkor az F csúcshalmaz **határa** az F és a $\mathcal{V} - F$ közt futó élek halmaza.

Jelölés ∂F

$$\|\partial F = \partial(\mathcal{V} - F)$$

62 Deffiníció A $G = (\mathcal{V}, E)$ véges, hurokélmentes gráf **izoperimetrikus** (másnéven **expanziós**, vagy **Cheeger-**) **konstansa**:

$$\min \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : F \subset \mathcal{V}, 0 < |F| \leq \frac{n}{2} \right\} = \min \left\{ \frac{|\partial F|}{\min\{|F|, |\mathcal{V} - F|\}}, \emptyset \neq F \subset \mathcal{V} \right\}$$