Tartalomjegyzék

1. Saját jelölések

| Példa

|| Megjegyzés

Jelölés Az $\{i \in \mathbb{N} | 1 \leq i \leq n\}$ halmazt $\underline{n}$ jelöli.

Jelölés A szokásos halmazokon értelmezett kivonást a $-$ jel fogja jelölni $\setminus$ helyett

| A nemnulla valós számok halmaza: $\mathbb{R} - \{0\}$

2. Vektorterek

1 Tétel V vektortér K felett, S független V-beli vektorok halmaza, ekkor ha $v \notin \text{span}(S)$, akkor $S \cup \{s\}$ is független.

2 Lemma V vektortér K felett, S V-beli lineárisan független vektorok halmaza, T V-beli generátor vektorok halmaza, v eleme S-nek, de nem eleme T-nek, akkor létezik egy olyan T, de nem S-beli vektor, hogy az S-ből a v-t kivéve és w-t hozzáadva $((S - \{v\}) \cup \{w\})$ független vektorrendszert kapunk.

3 Lemma V vektortér K felett, $f_1, \ldots, f_n \in V$ lineárisan függetlenek, $g_1, \ldots, g_m \in V$ generátorrendszer, ekkor $n \leq m$.

4 Tétel Ha V vektortér K felett, ekkor

1. ha S V-beli generátorrendszer, akkor létezik egy B bázis V-ben, ami S-nek része,
2. ha S V-beli független, akkor létezik egy olyan B bázis, aminek$S$ része,
3. ha B_1 és B_2 V-beli bázisok, akkor a számosságuk megegyezik.

5 Deffiníció Ha $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, ha $\leq$ parciális rendezés.

> A parciális rendezés reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

6 Deffiníció Ha $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, ekkor $a \in X$ maximális, ha $\forall b \in X$, $a \leq b$ esetén $a = b$.

7 Deffiníció Ha $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz, ekkor $Y \subset X$ lánc, ha $(Y, \leq)$ teljesen rendezett halmaz.

> Teljesen rendezett halmaz bármely két eleme összehasonlítható.

8 Lemma (Zorn) Ha $(X, \leq)$ nem üres parciálisan rendezett halmaz és minden $Y \subset X$ láncnak van X-ben felső korlátja, akkor X-nek van maximális eleme.

3. Alterek összege

Jelölés V_K jelöli a V vektorteret K test felett, de következetesség miatt mindig megjegyezzük, hogy "V_K vektortér", ami még mindig rövidebb, mint a hosszú "V K test feletti vektortér".

9 Deffiníció Ha V_K vektortér és $V_1, \ldots, V_n \leq V$, akkor ezen alterek összege:

$$V_1 + \ldots + V_n = \{v_1 + \ldots + v_n | \, v_i \in V_i, \, i \in \underline{n}\}$$

10 Deffiníció Ha V_K vektortér és $V_1, \ldots, V_n \leq V$, akkor ezen alterek direkt összege, olyan alterek összege, aminek minden eleme egyértelműen áll elő $v_1 + \ldots + v_n$ ($\forall v_i \in V_i, i \in \underline{n}$) alakban.

> Tehát minden vektor előáll olyan összegként, aminek tagjai különböző indexű alterekben van.

11 Állítás Ha V_K vektortér, akkor $V_1, \ldots, V_n$ összeg direkt, akkor és csak akkor, ha $v_i \in V_i - 0_V, v_i \notin \sum_{j \neq i} V_j$.

12 Állítás Ha V_K vektortér, akkor $V_1 + \ldots + V_n (= \text{span}(\cup V_i))$ altér.

13 Deffiníció V_k vektortér, $U, W \leq V$, $V = U \oplus W$, $\pi : V \to V$ lineáris leképezés, $u \in U$, $w \in W$, hogy $v = u + w \in V$ esetén $\pi(v) = u$. Ekkor π-t az U altérre való W irányú vetítésnek nevezzük.

4. Konjugált mátrixok

14 Deffiníció $A, B \in K^{n\times n}$ A és B konjugáltak (hasonlók), ha létezik egy olyan $X \in K^{n\times n}$, melyre $B = X^{-1}AX$.

15 Deffiníció V_K vektortér, $f : V \to V$ linráris leképezés a V endomorfizmusa.

Jelölés $\mathrm{End}_K\, V$

16 Deffiníció V_K vektortér, $f \in \mathrm{End}_K\, V$, $t \in K$:

1. $t \in K$ sajátértéke f-nek, ha létezik egy olyan nemnulla V-beli vektor, amire $f(v) = tv$,
2. $t \in K$ sajátérték, ekkor a V-beli v vektor a t-hez tartozó sajátvektor, ha $f(v) = tv$.
3. az f összes sajátértékének halmaza f spektruma.

17 Deffiníció Ha $n \geq 1$, $A \in K^{n\times n}$, ekkor A mátrix sajátértékei, sajátvektorai, spektruma az $f_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ endomorfizmus sajátértékei, sajátvektorai és spektruma.

18 Deffiníció V_K vektortér, $f \in \mathrm{End}_K\, V$,az S_t a t-hez tartozó sajátvektorokat tartalmazó halmaz, akkor $S \cup 0_V$ az f endomorfizmus t-hez tartozó sajátaltere.

Jelölés $\mathrm{Eig}_{f,t}$

19 Deffiníció V_K vektortér $f \in \mathrm{End}_K\, V$, t változó, akkor $\det(f - tI)$ polinom az f karakterisztikus polinomja.

Jelölés $\mathrm{char}_f(t)$

20 Deffiníció V_K vektortér, $f \in \mathrm{End}_K\, V$, $t \in K$, ekkor $\dim(\mathrm{Eig}_{f,t})$ a t sajátártákának geometriai multiplicitása.

21 Deffiníció V_K vektortér, t_0 az $f \in \mathrm{End}_V\, K$ sajátértéke, ekkor t_0 algebrai multiplicitása k, ha t_0 pntosan k-szoros gyöke $\mathrm{char}_f(t)$-nek.

22 Deffiníció V_K vektortér, ekkor $f \in \mathrm{End}_K\, V$ diagonalizálható, ha létezik egy $\mathcal{B}$ bázis, amiben $[f]_{\mathcal{B}}$ diagonális.

5. Mátrixok sajátfelbontása

23 Deffiníció $A \in K^{n\times n}$, $y \in K^n - 0$, akkor az y^T sorvektor az A baloldali sajátvektora, ha $y^T A = \lambda y^T$

24 Deffiníció $A \in K^{n\times n}$ diagonilazálható mátrix sajátfelbontása PDP^{-1}, ahol P i-edik oszlopa az A mátrixhoz tartozó t_i-edik egyik sajátvektora (jelölje ezt most $\underline{x}_i$), P^{-1} i-edik sora az A mátrix t_i-hez tartozó egyik baloldali sajátvektora (jelölje most ezt $\underline{y}_i$). Ekkor:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \underline{x}_i \underline{y}_i$$

a sajátfelbontás diadikus alakja.

6. Spektrálfelbontás

25 Deffiníció Ha $A \in K^{n \times n}$-nak létezik sajátfelbontása és P_i a $\mathrm{Eig}_{A,t(i)}$-re való vetítés mátrixa (a vetítés iránya a többi sajátaltér direkt összege), akkor A spektrálfelbontása:

$$A = t_1 P_1 + \ldots + t_k P_k$$

7. Bilineáris leképezések

Dián vannak itt dolgok, amit nem akarok leírni.

Dia (deffiníció)tartalma:

1. bilineáris leképezés
2. szimmetrikus bilineáris leképezés
3. Gram-mátrix
4. baloldali, jobboldali mag, reguláris
5. ortogonalitás bilineáris leképezésre nézve
6. ortogonális kiegészítő
7. Tehetetlenségi Tétel

8. Euclides-terek

26 Deffiníció $V_{\mathbb{R}}$, $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezés, ekkor β pozitív definit, ha szimmetrikus és minden V-beli v vektorra $\beta(v,v) \geq 0$, továbbá $\beta(v,v) = 0$ pontosan akkor, ha $v = 0$. Másik elnevezés a skalárszorzat.

27 Deffiníció

1. $V_{\mathbb{R}}$, $\beta := \langle .,. \rangle : V^2 \to \mathbb{R}$ skalárszorzat (másnéven belsőszorzat), ekkor a $(V, \langle .,. \rangle)$ pár Euclides-tér (inner product space).
2. $v \in V$, akkor $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ a v normája
3. $v, w \in V$, akkor $d(v,w) = ||v - w||$ a v és a w távolsága

Jelölés $(V, \langle .,. \rangle)_E$ jelöli a $V_{\mathbb{R}}$ vektorteret, amiben $\langle .,. \rangle$ vektorszorzat. Ha emellett V még véges dimenziós is, akkor ezt $(V, \langle .,. \rangle)_{E,\overset{<}{\infty}}$ jelöli.

28 Deffiníció $(V, \langle .,. \rangle)_E$ ekkor ha $v, w \in V$, akkor a szögük:

$$\arccos \frac{\langle v, w \rangle}{||v|| \cdot ||w||}$$

29 Deffiníció $(V, \langle .,. \rangle)_E$ és $v, w \in V$, akkor $v \perp_{\langle .,. \rangle} w$, ha v és w szöge $\frac{\pi}{2}$.

9. Ortogonális bázisok

30 Deffiníció $(V, \langle .,. \rangle)_E$ $S \subset V$ ortogonális részhalmaz, ha minden $v, w \in S$ esetén $v \perp_{\langle .,. \rangle} w$, valamint S ortonormált, ha ortogonális és minden S-beli v-re $||v|| = 1$, és S ortonormált bázis, ha ortonormált és bázis.

31 Deffiníció $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív definit mátrix, ha $\beta(x, y) = x^T A y$ pozitív definit pontosan akkor, ha A szimmetrikus és $x^T x > 0$ minden nemnulla $\mathbb{R}^n - 0$-beli vektorra.

10. Ortogonális kiegészítő

11. Adjungált

32 **Deffiníció** $(V_1, \langle ., . \rangle_1)_E$, $(V_2, \langle ., . \rangle_2)_E$, $f : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés $f^* : V_2 \to V_1$ lineáris függvényt az f adjungáltjának nevezzük, ha minden v V_1-beli,w V_2-beli vektorokra:

$$\langle f(v), w \rangle_2 = \langle v, f^*(w) \rangle_1.$$

33 **Deffiníció** $(V, \langle ., . \rangle)_E$ $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$, ekkor f önadjungált, ha $f^* = f$.

34 **Deffiníció** $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális, ha $X^T X = I$ (azaz $X^T = X^{-1}$).

12. Ortogonális transzformációk

35 Deffiníció $(V, \langle ., . \rangle)_E$, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$, ekkor f ortogonális transzformácó, ha bijektív (izomorfizmus) és minden V-beli v és w esetén:
$$\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle.$$

36 Állítás
1. id_V ortogonális,
2. $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$, akkor fg, f^{-1} ortogonális.

37 Deffiníció A $(G, \cdot)$ páros csoport, ha $G \neq \emptyset$.

38 Deffiníció A $(G, \cdot)$ páros Abel-csoport, ha $(G, \cdot)$ csoport és $\cdot$ kommutatív.

39 Állítás Az $\langle ., . \rangle$-ortogonális transzformációk csoportot alkotnak a kompozícióra nézve

Jelölés $\mathrm{O}_{\langle .,. \rangle}$ (vagy $\mathrm{O}_{\langle \rangle}$).

40 Deffiníció Ha $(V, \langle ., . \rangle)_{E, \overset{<}{\infty}}$, $V = \mathbb{R}^{n \times n} A \in V$ $\langle ., . \rangle$-ortogonális leképezés mátrixa, ekkor az ilyen leképezések csoportja a mátrixszorzásra nézve az n-edrendű ortogonális csoport.

Jelölés $\mathrm{O}_{n, \langle \rangle}(\mathbb{R})$

41 Deffiníció $(V, \langle ., . \rangle)_{E, \overset{<}{\infty}}$, $f \in \mathrm{O}(V)$, ekkor az olyan f-ek melyekre $det(f) = 1$ a speciális ortogonális csoportot alkotnak.

Jelölés $\mathrm{SO}(V)$

42 Állítás Ha $(V, \langle ., . \rangle)_E$, akkor $\mathrm{SO}(V)$ csoport.

> Tehát a deffiníció értelmes.

43 Deffiníció Ha $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mátrix:
$$A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$
alakú, akkor kétdimenziós forgásmátrix.

Jelölés R_t

44 Tétel $(V, \langle ., . \rangle)_{E, \overset{<}{\infty}}$, ekkor f pontosan akkor ortogonális, ha létezik egy V-beli $\mathcal{B}$ ortonormált bázis, amiben $[f]_{\mathcal{B}}$ blokkdiagonális úgy, hogy a főátlóra fűzött 2×2-es és 1×1-es blokkokból áll, hol a 2×2-es blokkok R_t, az 1×1 blokkok ± 1 alakúak.

45 Következmény Két síkra való tükrözés tengely körüli forgatás.

13. Szemiortogonális mátrixok

46 Deffiníció $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ szemiortogonális, ha az oszlopok vagy sorok ortonormált bázist (vagy csak rendszert?) alkotnak. Tehát $A^TA = I_n$, ha az oszlopok alkotnak, $AA^T = I_m$, ha a sorok alkotnak ortonormált rendszert.

47 Deffiníció A teljes oszloprangú ($\operatorname{rk} A = n$) $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ QR-felbontása $QR = A$, ha $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ szemiortogonális, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pedig felsőháromszögmátrix, ahol a diagonális elemek nemnegatívok.

48 Tétel A QR-felbontás egyértelműen létezik.

49 Deffiníció $(V, \langle .,.\rangle)_{E,\stackrel{<}{\infty}}$, $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, szimmetrikus, bilineáris, akkor β :

1. pozitív definit, ha $\forall v \in V : \beta(v,v) \geq 0$ és $\beta(v,v) = 0 \leftrightarrow v = 0$,
2. pozitív semidefinit, ha $\forall v \in V : \beta(v,v) \geq 0$,
3. negatív definit, ha $\forall v \in V : \beta(v,v) \leq 0$ és $\beta(v,v) = 0 \leftrightarrow v = 0$,
4. negatív semidefinit, ha $\forall v \in V : \beta(v,v) \leq 0$,
5. indefinit, ha $\exists v, w : \beta(v,v) > 0$, $\beta(w,w) < 0$.

50 Állítás $(V,\beta)_{\mathbb{R},\stackrel{<}{\infty}}$, ha $\mathcal{B}$, egy V-beli bázis, úgy, hogy $[\beta]_{\mathcal{B}}$ diagonalizálható, a diagonális elemek $d_1, \ldots, d_n$ akkor:

1. β pozitív definit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i > 0$,
2. β pozitív semidefinit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i \geq 0$,
3. β negatív definit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i < 0$,
4. β negatív semidefinit pontosan akkor, ha minden $\forall d_i \leq 0$,
5. β indefinit egyébként.

51 Állítás $(V,\beta)_{\mathbb{R},\stackrel{<}{\infty}}$, ha $\mathcal{B}$, egy V-beli bázis, úgy, hogy $[\beta]_{\mathcal{B}}$ szimmetrikus akkor:

1. β pozitív definit pontosan akkor, ha minden sajátértéke pozitív,
2. β pozitív semidefinit pontosan akkor, ha minden sajátértéke nemnegatív,
3. β negatív definit pontosan akkor, ha minden sajátértéke negatív,
4. β negatív semidefinit pontosan akkor, ha minden sajátértéke nempozitív,
5. β indefinit egyébként.

52 Állítás (Főtengelytétel-Junior) $(V,\beta)_{\mathbb{R},\stackrel{<}{\infty}}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ bázis V-ben, $A = [\beta]_{\mathcal{B}}$. Ha A_k a az A főminorja, akkor:

1. β pontosan akkor pozitív definit, ha $\det A_k > 0$,
2. β pontosan akkor negatív definit, ha $(\det A_k)(-1)^k > 0$, $\forall k \in \underline{n}$,
3. ha $\det A \neq 0$ és se az 1., se a 2. eset nem áll fenn, akkor β indefinit.