

北京化工大学 2013-2014 学年第一学期

《矩阵论》试题

一、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 6 & -15 & 3 \end{pmatrix}$,

1. 求 A 的特征多项式和全部特征值;
2. 求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式;
3. 求 A 的 Jordan 标准型 J ;
4. 求 $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k$;
5. 计算 e^{At}

6. 求微分方程组 $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ 满足初值 $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解.

解:

$$\begin{aligned} 1. \lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda-2 & 5 & -1 \\ -2 & \lambda+5 & -1 \\ -6 & 15 & \lambda-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda+5 & -2 \\ \lambda-3 & 15 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 5\lambda & \lambda^2-5\lambda \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 5\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

特征多项式为 λ^3 , 特征值为 $\lambda = 0$ (三重).

2. 不变因子为 $d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda, d_3(\lambda) = \lambda^2$. 初等因子为 λ, λ^2 , 最小多项式为 $m(\lambda) = \lambda^2$.

3. Jordan 标准型为 $J = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 或者 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$.

4. 由于 $\rho(A) = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.

5. 取多项式 $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, 由带余除法设 $f(\lambda) = q(\lambda, t)(\lambda)m(\lambda) + b_1(t)\lambda + b_0$, 代入

$$f(0) = b_0, \quad f'(0) = b_1(t) \text{ 得}$$

$$\begin{cases} 1 = b_0 \\ t = b_1(t) \end{cases}, \text{ 所以 } e^{At} = f(A) = tA + I = \begin{pmatrix} 1+2t & -5t & t \\ 2t & 1-5t & t \\ 6t & -15t & 1+3t \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ 微分方程组的解为 } x(t) = e^{At}x(0) = \begin{pmatrix} 1+2t & -5t & t \\ 2t & 1-5t & t \\ 6t & -15t & 1+3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-2t \\ 1-6t \end{pmatrix}.$$

二、已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

1. 求 $\|A\|_{m_1}, \|A\|_{m_\infty}, \|A\|_1, \|A\|_\infty, \|A\|_F$;

2. 设 $x, y \in C^n, B = xy^H$, 试比较 $\|B\|_F$ 与 $\|x\|_2 \|y\|_2$ 的大小, 给出理由.

解: 1. $\|A\|_{m_1} = 6 + \sqrt{2}, \|A\|_{m_\infty} = 6, \|A\|_1 = 2 + \sqrt{2}, \|A\|_\infty = 4, \|A\|_F = \sqrt{10}$

2. 相等, 直接计算或者

$$\begin{aligned} \|B\|_F &= \sqrt{\text{tr}(B^H B)} = \sqrt{\text{tr}(y x^H x y^H)} = \sqrt{x^H x} \cdot \sqrt{\text{tr}(y y^H)} \\ &= \sqrt{x^H x} \cdot \sqrt{\text{tr}(y^H y)} = \sqrt{x^H x} \cdot \sqrt{y^H y} = \|x\|_2 \|y\|_2. \end{aligned}$$

三、用 Householder 变换求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的 QR 分解.

解 记 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $\alpha = \|x\|_2 = 2$, $x - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 取 $u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{得 } H_1 = I_4 - 2uu^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{对 } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 记 } x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } \alpha_1 = \|x_1\|_2 = 2, \quad x_1 - \alpha_1 e'_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ 取 } u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{得 } H_2 = I_3 - 2u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{令 } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} H_1, \text{ 则有 } Q = H_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 使得 } A = QR.$$

$$\text{四、已知 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. 求 A 的满秩分解;
2. 求 A^+ ;
3. 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax = b$ 是否有解;
4. 求线性方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解, 并说明是哪种解.

$$\text{解 } 1. A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = FG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. F^+ = (F^T F)^{-1} F^T = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad G^+ = G^T (GG^T)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^+ = G^+ F^+ = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A^+b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AA^+b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = b, \quad \text{所以方程组 } Ax = b \text{ 有解.}$$

$$4. x_0 = A^+b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{是 } Ax = b \text{ 的极小范数解.}$$

五、已知矩阵空间 $R^{2 \times 2}$ 的一个基为 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

线性变换 T 满足 $T(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T(A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T(A_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

1. 求 T 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的矩阵;
2. 判断是否存在 $R^{2 \times 2}$ 的基, 使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵, 并证明你的结论;
3. 求 $N(T)$ 的一个基;
4. 求 $R^{2 \times 2}$ 的一个基, 使得 T 在该基下的矩阵为 **Jordan** 矩阵, 并写出这个 **Jordan** 矩阵.

$$\text{解 } (A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_1, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

记 $B_i = T(A_i), \quad 1 \leq i \leq 4$, 则 $(B_1, B_2, B_3, B_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_2$,

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$T(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)C_1^{-1}C_2$, 所以 T 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的

$$\text{矩阵为 } A = C_1^{-1}C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\det(\lambda I - A) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$, A 有两个二重特征值 0, 1。 $\text{rank}(I - A) = 3$, 1 的几何重数

$4 - \text{rank}(I - A) = 1$ 小于代数重数 2, 所以 T 不可对角化, 即不存在 $R^{2 \times 2}$ 的基, 使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

3. $N(T) = \{X | T(X) = O\} = \{X | X = (A_1, A_2, A_3, A_4)\alpha, A\alpha = 0\}$. $Ax = 0$ 的一个基础解系

$$\text{为 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } N(T) \text{ 的一个基为 } X_i = (A_1, A_2, A_3, A_4)\alpha_i, \quad i=1, 2, \text{ 即}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda(\lambda - 1)^2 \end{bmatrix},$$

对 $\lambda = 1$, 解线性方程组

$$(I - A)x = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{取 } p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求 $(I - A)x = -p_3$ 的解.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 取 } p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求出可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, 使得 $P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, 取基为

$(A_1, A_2, A_3, A_4)P$, 即为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, 则在此基下

的矩阵为 Jordan 矩阵 J .