人工智能数学基础

中科大 自动化系　郑志刚

2018.10

提 纲

- 命题逻辑
- 一阶谓词逻辑

数理逻辑

- 数理逻辑：用数学方法来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科
- 与数学其它分支、计算机科学、AI、语言学有密切的联系
- 数理逻辑的内容
  - 逻辑演算
    - 命题逻辑
    - 谓词逻辑
  - 证明论
  - 公理集合论
  - 递归论
  - 模型论

一、命题逻辑

- 命题
  - 定义：能够判断真假的陈述句
  - 真值
    - 真：正确的判断;真值＝1,T
    - 假：错误的判断;真值＝0,F
  - 例子：
    - 2是素数
    - 雪是黑色的
    - 3能够被2整除
    - 地球以外的星球上也有人

一些不是命题的句子

- X+y>5
- 这朵花多美呀！
- 明天下午有会吗？
- 请你把门关上！
- X,y未知，真假不定
- 感叹句
- 疑问句
- 祈使句

判断是否为命题的方法

- 陈述句
- 真值确定
  - 真值是确定的
  - 可以不知道（“1＋1＝10”、“今天是晴天”）

原子命题与命题符号化

- 原子命题（简单命题）
  - 不能够再分解的命题
- 命题符号化
  - 使用小写的字母表示命题
  - 放在命题的前面
  - $p,q,r,\ p_i,q_i,r_i$
  - p:2是素数　　真命题
  - q:雪是黑的　　假命题

命题常量和命题变量

- 命题常量：其真值是确定的简单命题
- 命题变量（命题变元）
  - 定义：真值不确定的简单陈述句
  - 表示：也用小写字母表示：p,q,r, p_i,q_i,r_i
  - 性质：命题变量不是命题
  - 例子：$X+y>5$

复合命题

- 定义：由简单命题用联结词联结而成的命题
- 例子
  - 3不是偶数
  - 2是素数和偶数
  - 林芳学过英语或日语
  - 如果角A和角B是对顶角，则角A和角B相等

否定、合取联结词

- 定义1：设p为任一命题，复合命题“非p”称为p的否定式，记做¬p。 ¬为否定联结词， ¬p为真当且仅当p为假。
  - p:3是偶数
  - ¬p:3不是偶数
- 定义2：设p,q为二命题，复合命题“p并且q”称作p和q的合取式，记做p∧q， ∧为合取联结词，p∧q为真当且仅当p，q同时为真
  - p:李平聪明
  - q:李平用功
  - p∧q：李平不但聪明，而且用功
  - p∧ ¬ q：李平聪明,但不用功

析取联结词

- 定义3：设p,q为二命题，复合命题“p或q”称作p和q的**析取式**，记做p∨ q， ∨为**析取联结词**， p∨q为真当且仅当p和q中至少有一个为真
  - p:李平聪明
  - q:李平用功
  - p∨q：李平聪明或者用功
  - p∨¬q：李平聪明或者不用功

蕴涵联结词

- 定义4：设p,q为二命题，复合命题“如果p，则q”称作p和q的**蕴涵式**，记做p→q， →为**蕴涵联结词**， p→q为假当且仅当p为真，q为假
- 如果p→q为真，记做p⇒q，称为定理
- 与自然语言不一样，蕴涵式的前件和后件可以没有内在联系

  例如：如果2＋2≠4，则太阳从西边出来
- 蕴涵式的真值表

p	q	p →q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴涵联结词

- 将下列命题符号化
  - 只要不下雨，我就骑自行车上班
  - 只有不下雨，我才骑自行车上班

  - p:下雨
  - q:骑自行车上班

  - $\neg p \to q$
  - $\neg q \to p$

等价联结词

- 定义5：设p,q为二命题，复合命题“p当且仅当q”称作p和q的**等价式**，记做p↔q， ↔为**等价联结词**， p↔q为假当且仅当p与q的真值不相同
- 与自然语言不一样，等价式的2个命题可以没有内在联系

  例如：2+2≠4，当且仅当太阳从西边出来
- 等价式的真值表

p	q	p↔q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

逻辑联结词的优先级

- $\neg$
- $\wedge$
- $\vee$
- $\rightarrow$
- $\leftrightarrow$
- 联结词相同时，从左至右运算。

命题符号化的例子

- 分析出简单命题，将之符号化
- 用联结词将简单命题联结起来，形成复合命题的符号化
- 例子：

1：小王是游泳冠军或是百米赛跑冠军

2：如果我上街，我就去书店看看，除非我很累

1：$p \vee q$,其中：q:小王是游泳冠军；q:小王是百米赛跑冠军

2：$\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)$,其中p:我上街,q:我去书店看看, r:我很累

命题公式及分类

- 复合命题：$\neg p, p\wedge q, p\vee q, p\rightarrow q, p\leftrightarrow q$
  - 如果p,q为命题常量，这些复合命题为命题
  - 如果p,q为命题变量，这些复合命题为命题公式
- 命题公式：由命题常量、命题变量、逻辑联结词、括号等构成的**有效**字符串

命题公式及分类

- 定义6：
  1. 单个命题常项或变项p,q,r,⋯,p_i,q_i,r_i ,0,1是合式公式
  2. 如果A是合式公式，则（¬A）为合式公式
  3. 如果A,B是合式公式，则（A∧B），（A∨ B），（A→B），（A ↔B）也是合式公式
  4. 只有有限次地应用1－3组成的符号串才是合式公式

- 命题逻辑下的合式公式：命题公式，公式
- 例子： ¬(p ∨ q)

公式的层次

- 定义7
  - 若A为单个命题（常项或变项）p,q,r,p_i,q_i, r_i, …, 0,1, 则称A为0层公式
  - 称A是n+1 (n>=0)层公式是指A符合下列情况之一：
    - A⇔ ¬B,B为n层公式
    - A⇔ B∧C, 其中B，C分别为i,j层公式，且n= max(i,j)
    - A⇔ B∨C, 其中B,C的层次同2
    - A⇔ B→C, 其中B,C的层次同2
    - A⇔ B↔C, 其中B,C的层次同2

命题公式的赋值或解释

- 命题公式中命题常项和变项，不是命题，只有对命题公式中的所有命题变项进行赋值，公式的真值才能够确定下来，才能够变成命题
- 定义8:
  - 设A为一个命题公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$为出现在A中的所有命题变项，给指定一组真值，称为对A的一个**赋值或解释**。如果指定的一组值使A的值为真，则称这组值为**成真赋值**，如果指定的一组值使A的值为假，则称这组值为**成假赋值**。

公式的真值表

- 真值表：含有n个变项的公式，其赋值有2^n个，将每一个赋值及公式在此赋值下的真值构成的表
- 例子: $(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$

p	q	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$(p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

公式的性质

- 定义9
  - 设A为一个命题公式
  - 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A为**重言式或永真式**（真值表最后一列全为1）
  - 若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A为**矛盾式或永假式**（真值表最后一列全为0）
  - 若A至少存在一组赋值是成真赋值，则称A为**可满足式**（真值表最后一列有1）

等值演算

- 判断公式性质的办法
  - 真值表
  - 等值演算将之演算成简单形式，判断其性质
- 定义10
  - 设A,B为2个命题公式，若等价式A↔B是重言式，则称A与B是等值的，记做A⇔B
  - ⇔：不是逻辑联结词，一个等值的记号，不能够用＝（数值上的相等）代替
  - 等值本质上是指：公式A和B在任何解释下都相等

逻辑等值式

1. $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ 双重否定律
2. $A \Leftrightarrow A \vee A$ 等幂律
3. $A \Leftrightarrow A \wedge A$
4. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ 交换律
5. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
6. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ 结合律
7. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
8. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 分配律
9. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

逻辑等值式

10. $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$	德.摩根律
11. $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$	
12. $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$	吸收律
13. $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$	
14. $A\vee 1\Leftrightarrow 1$	0律
15. $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$	
16. $A\vee 0\Leftrightarrow A$	同一律
17. $A\wedge 1\Leftrightarrow A$	

逻辑等值式

18. $A \lor \neg A \Leftrightarrow 1$	排中律
19. $A \land \neg A \Leftrightarrow 0$	矛盾律
20. $A \to B \Leftrightarrow \neg A \lor B$	蕴涵等值式
21. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \land (B \to A)$	等价等值式
22. $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$	假言易位
23. $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$	等价否定等值式
24. $(A \to B) \land (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$	归谬论

等值演算

- 利用等值式，将一个公式变换成另外一种形式的过程
- 例子

  $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

  $p\to(q\to r)$

  $\Leftrightarrow\neg p\vee(q\to r)$

  $\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$

  $\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$

  $\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$

  $\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

等值演算

$$q\vee\neg((\neg p\vee q)\wedge p)$$
$$\Leftrightarrow q\vee\neg((\neg p\wedge p)\vee(q\wedge p))$$
$$\Leftrightarrow q\vee\neg(0\vee(q\wedge p))$$
$$\Leftrightarrow q\vee\neg(q\wedge p)$$
$$\Leftrightarrow q\vee(\neg q\vee\neg p)$$
$$\Leftrightarrow(q\vee\neg q)\vee\neg p$$
$$\Leftrightarrow 1\vee\neg p$$
$$\Leftrightarrow 1$$

等值演算

$(p\vee\neg p)\rightarrow((q\wedge\neg q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow 1\rightarrow((q\wedge\neg q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow 1\rightarrow(0\wedge r)$

$\Leftrightarrow 1\rightarrow 0$

$\Leftrightarrow \neg 1\vee 0$

$\Leftrightarrow 0\vee 0$

$\Leftrightarrow 0$

简单析取式及简单合取式

- 简单析取式和简单合取式
  - 定义10：仅由有限个命题变项或其否定构成的析取式称为，**简单析取式**；仅由有限个命题变项或其否定构成的合取式称为，**简单合取式**
  - 例子：
  - 简单析取式：

    p, q, $p\vee\neg q$, $\neg p\vee q$, $\neg p\vee\neg q\vee r$
  - 简单合取式：

    p, q, $p\wedge\neg q$, $\neg p\wedge q$, $\neg p\wedge\neg q\wedge r$

合取范式

- 定义11：
  - 仅有有限个简单析取式构成的合取式称为**合取范式**

    $A=A1\wedge A2\wedge\cdots\wedge An$

    其中A1，A2，…，An为简单析取式

  例子：

  $A=(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(q\vee\neg q)$
- 任何公式都有与其对应的合取范式

化成合取范式的步骤

1. 消去对{¬，∧，∨}来说冗余的联结词
2. 否定联结词的消除或内移
3. 利用分配率

例子: $((p\vee q)\to r)\to p$

$\Leftrightarrow\quad (\neg(p\vee q)\vee r)\to p$

$\Leftrightarrow\quad \neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow\quad \neg(\neg p\wedge\neg q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow\quad (\neg\neg p\vee\neg\neg q)\wedge\neg r)\vee p$

$\Leftrightarrow\quad ((p\vee q)\wedge\neg r)\vee p$

$\Leftrightarrow\quad ((p\vee q)\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$

$\Leftrightarrow\quad (p\vee q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$

$\Leftrightarrow\quad (p\vee q)\wedge(\neg r\vee p)$

合取范式

- 原子：命题常项或变项　$p, q, r, p_i, q_i, r_i, 0, 1$
- 文字：原子或原子的否定　$p, \neg q, \neg q_i, r$
- 子句：文字的析取　$p \vee \neg q, \neg p \vee q, \neg p \vee \neg q \vee r$
- 合取范式：子句的合取　$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
- 子句集：合取范式的集合表示　$S: \{p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q \vee r\}$
  - 每一个合取项作为集合的元素
  - 元素之间的关系为合取

命题逻辑的问题

- 命题作为命题演算的基本单位，不再分解
- 无法研究命题内部的结构和命题之间的联系
- 例子：苏格拉底三段论
  - p:凡人都是要死的
  - q:苏格拉底是人
  - r:苏格拉底是要死的
  - 命题符号化：$(p \wedge q) \rightarrow r$　真值不定！

    如：取解释:I=P/T,Q/T,R/F 则公式为假值F. 就是说解释I 弄假了此公式。

解决问题的办法

- 将命题进一步分解成：个体词，谓词和量词等
- 研究它们的形式结构和逻辑关系，总结出正确地推理形式和规则
- 一阶谓词逻辑

二、一阶谓词逻辑

先看几个命题：

1. 3是质数	x是质数	F(x)
2. 王二生于武汉市	x生于武汉市	G(x,y)
3. 7=2×3	x=y × z	H(x,y,z)

称“3”、“王二”、“武汉市”、“7”、“2”、“3”为个体;

代表个体的变元称为个体变元；

刻画个体性质或个体之间关系的词叫谓词。

“是质数”、“生于”、“…=… ×…”都是谓词。

- 简单命题的分解：个体词和谓词
- 个体词
  - 指可以独立存在的客体
  - 可以表示具体的事物：李明，玫瑰花，自然数
  - 可以表示抽象的概念：思想
- 谓词
  - 用于刻画个体词的性质或个体词之间的关系的词

    2是有理数， 是有理数

    小李比小王高， … 比 …高

个体常项、个体变项和个体域

- 个体常项
  - 定义：表示具体或特定的词
  - 表示：小写的英文字母a,b,c,…表示
  - 个体确定下来
- 个体变项
  - 定义：泛指的个体的词
  - 表示：小写的英文字母x,y,z,…表示
  - 个体没有确定下来
- 个体域
  - 个体变项的取值范围
  - 可以是一个有限的集合{a,b,c}
  - 也可以是一个无限的集合：全体自然数，全体实数
  - 全总个体域：宇宙间的一切事物组成的个体域

谓词常项、谓词变项

- 谓词常项
  - 定义：表示具体性质或关系的词
  - 表示：大写英文字母F,G,H,…
- 谓词变项
  - 定义：表示抽象或泛指的性质或关系的词
  - 表示：大写英文字母F,G,H,…

F(x): x很高，x是无理数,…;

L(x,y):x比y学习好, x比y大,…;

谓词的元数

- 谓词的元数：谓词中包含的个体词的个数
- n元谓词：包含有n个个体词的谓词
  - F(x)一元谓词
  - L(x,y)二元谓词
- 有时n元谓词：包含有n个个体变项的谓词
  - F(a): 0元谓词
  - L(x,a):1元谓词

谓词符号化的例子

- 2是素数且是偶数
  - F(x): x是素数;G(x): x是偶数
  - a:2
  - $F(a) \wedge G(a)$
- 如果2大于3，则2大于4
  - L(x,y): x大于y
  - a:2; b:3 ; c:4
  - $L(a,b) \rightarrow L(b,c)$

全称量词和存在量词

- 谓词符号化下面的句子
  - 所有的人都是要死的
  - 有的人活到100岁以上
- 量词：表示数量的词
- 全称量词
  - 对应于日常语言中的“一切”，“任意的”，“所有的”
  - 表示：∀
  - ∀xF(x) :x是∀所作用的个体变元。

全称量词和存在量词

- 存在量词
  - 对应于日常语言中的“存在着”，“有一个”，“至少一个”等词
  - 表示：∃
  - ∃xF(x) :x是∃所作用的个体变元。

再看前面的三段论法：

P:“所有的人都会犯错误” $\forall x(M(x) \rightarrow R(x))$

Q:“张三是人” M(“张三”)

R:“张三会犯错误” R(“张三”)

谓词符号化的例子

- 所有的人都是要死的
  - 定义谓词：$F(x)$，x是要死的
  - 个体域为全体人类时：$\forall x F(x)$
  - 全总个体域(没有申明个体域)：$\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$
  - 特性谓词：$M(x)$
- 有的人活到100岁以上
  - 定义谓词：$G(x)$ x活到100岁以上
  - 个体域为全体人类时：$\exists x G(x)$
  - 全总个体域(没有申明个体域)：$\exists x(M(x) \wedge G(x))$

量词使用的注意事项

1. 不同的个体域，符号化的形式可能不一样
2. 如果没有给出个体域，都应以全总个体域为个体域
3. 引入特性谓词后，使用全称量词和存在量词符号化的形式不一样
4. 个体词和谓词的涵义确定之后，n元谓词转化成命题至少要n个量词

量词使用的注意事项

5. 当个体域为有限集时，D={a1,a2,⋯,an}，由量词的意义可以看出，对于任意的谓词F(x)，都有
   - $\forall xF(x) \Leftrightarrow F(a1) \wedge F(a2) \wedge \cdots \wedge F(an)$
   - $\exists xF(x) \Leftrightarrow F(a1) \vee F(a2) \vee \cdots \vee F(an)$
6. 多个量词同时出现，不能够随意颠倒它们的次序
   - $\forall x \exists y H(x, y)$
   - $\exists x \forall y H(x, y)$

一阶谓词逻辑中的命题符号化

- 凡是有理数都可以表示成分数
  - 不用引入特性谓词的情况

    $\forall xF(x)$
  - 引入特性谓词的情况

    $\forall x(R(x) \to F(x))$

一阶谓词逻辑中的命题符号化

- 没有不犯错误的人
  - 没有指定个体域，以全总个体域作为个体域
  - 谓词：M(x) x是人；F(x)：x犯错误
  - $\neg\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$
- 在北京工作的人未必是北京人
  - F(x)：x在北京工作； G(x)：x是北京人
  - $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

谓词公式的字母表

- 定义11 字母表
  - 个体常项: $a,b,c,\cdots,\ a_i,b_i,c_i,\cdots,\ i>=1$
  - 个体变项: $x,y,z,\cdots,\ x_i,y_i,z_i,\cdots,\ i>=1$
  - 函数符号: $f,g,h,\cdots,\ f_i,g_i,h_i,\cdots,\ i>=1$
  - 谓词符号: $F,G,H,\cdots,\ F_i,G_i,H_i,\cdots,\ i>=1$
  - 量词符号: $\forall,\exists$
  - 联结词符: $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$
  - 逗号和括号 : （，），，，

项的递归定义

- 定义12
  1. 个体常项和变项是项
  2. 若$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是任意的n元函数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是项，则$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是项
  3. 只有有限次地使用1，2生成的符号才是项

- a,b,x,y, f(x,y), f(x,g(a,b,z))

合式公式（谓词公式）

- 原子公式
  - 定义13：设$R(x_1,x_2,..,x_n)$是任意的n元谓词，$t_1,t_2,\cdots,t_n$为项，则$R(t_1,t_2,\cdots,t_n)$称为原子公式
- 合式公式，定义14：
  1. 原子公式是合式公式
  2. 如果A是合式公式，则（$\neg A$）为合式公式
  3. 如果A,B是合式公式，则（$A\wedge B$），（$A\vee B$），（$A\rightarrow B$），（$A\leftrightarrow B$）也是合式公式
  4. 如果A是合式公式，则$\forall xA$，$\exists xA$也是合式公式
  5. 只有有限次地应用1－4组成的符号串才是合式公式（谓词公式）

指导变项、辖域

- 定义15：在合式公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x为**指导变项**，称A为相应量词的**辖域**。在辖域中，x的所有出现称为**约束出现**（即x受相应量词指导变项的约束），A中不是约束出现的其它变项称为**自由出现**。
- 通常用A(x)表示x是自由出现的任意公式
- 例子
  - $\forall x(F(x)\rightarrow\exists yH(x,y))$
  - $\exists xF(x)\wedge G(x,y)$
  - $\forall x\forall y(R(x,y)\vee L(y,z))\wedge\exists xH(x,y)$

闭式

- 定义16：设A为任一公式，若A中无自由出现的个体变项，则称A是**封闭的合式公式**，简称**闭式**。
- 例子：
  - $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$
  - $\exists x\forall y(F(x)\vee G(x,y))$

换名规则和代替规则

- 为了避免出现某个变项既是自由出现的又是约束出现的，使用以下2种办法
  - **换名规则**：将量词辖域种出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成另外一个辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式其它部分不变

    $\exists xF(x)\wedge G(x,y)$　　$\exists zF(z)\wedge G(x,y)$

  - **代替规则**：对某个自由出现的个体变项用与原公式中的所有个体变项符号不同的变项符号来代替，且处处代替

    $\exists xF(x)\wedge G(x,y)$　　$\exists xF(x)\wedge G(z,y)$

公式的解释

- 公式的解释：一阶谓词公式中含有：个体常项，个体变项（自由出现或约束出现的），函数变项，谓词变项等。对各种变项指定特殊的常项来代替，就构成公式的一个解释。
- 解释，定义17
  - 一个解释I由下面的4个部分构成
  1. 非空个体域D
  2. D上的一部分特定的元素
  3. D上的一些特定的函数
  4. D上的一些特定的谓词

解释的例子

- 解释
  - $D_I=\{2,3\}$
  - D_I上的特定元素
  - 函数：$f(2)=3, f(3)=2$
  - 谓词：$F(2)=0; F(3)=1$

    $G(x,y)$为$G(i,j)=1,\ i,j=2,3;$

    $L(x,y)$为$L(2,2)=L(3,3)=1$

    $L(3,2)=L(2,3)=0;$
- $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge G(x,2))\Leftrightarrow (F(2)\wedge G(2,2))\wedge(F(3)\wedge G(3,2))\Leftrightarrow(0\wedge 1)\wedge(1\wedge 1)\Leftrightarrow 0$

公式的解释

- $\exists x(F(f(x))\wedge G(x,f(x))$
  $\Leftrightarrow (F(f(2))\wedge G(2,f(2))\vee(F(f(3)\wedge G(3,f(3))$
  $\Leftrightarrow(F(3)\wedge G(2,3))\vee(F(2)\wedge G(3,2))$
  $\Leftrightarrow(1\vee 1)\wedge(0\vee 1)$
  $\Leftrightarrow 1$
- $\forall x\exists yL(x,y)$
  $\Leftrightarrow\forall x(L(x,2)\vee L(x,3))$
  $\Leftrightarrow(L(2,2)\vee L(2,3))\wedge(L(3,2)\vee L(3,3))$
  $\Leftrightarrow 1\wedge 1\Leftrightarrow 1$

公式的性质

- 定义18
  - 设A为一个公式(谓词公式)
  - 若A在它的任何解释下取值均为真，则称A为**逻辑有效式或永真式**
  - 若A在它的任何解释下取值均为假，则称A为**矛盾式或永假式**
  - 若A至少存在一组解释是成真赋值，则称A为**可满足式**

代换实例

- 定义19：设A_0是含命题变项$p_1,p_2,\cdots,p_n$的命题公式，$A_1,A_2,\cdots,A_n$是n个谓词公式，用$A_i(i=1\cdots n)$处处代替p_i，所得到的公式称为A_0的代换实例
- 例子
  - 命题公式：$p\vee q$
    - $A1\Leftrightarrow\exists xF(x)$
    - $A2\Leftrightarrow G(x,y)$
  - 代换实例： $(\exists xF(x))\vee G(x,y)$

代换实例的一个结论

- 命题公式的重言式的代换实例在谓词逻辑中，仍然是重言式；
- 命题公式的矛盾式的代换实例在谓词逻辑中，仍然是矛盾式；
- 例子：
  - $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
    - $A: F(x)$
  - $F(x) \vee \neg F(x) \Leftrightarrow 1$

一阶逻辑等值式

- 定义20：设A,B是一阶逻辑中的任意2公式，若$A \leftrightarrow B$是逻辑有效式，则称A与B是等值的，记做$A \Leftrightarrow B$，称$A \Leftrightarrow B$为**等值式**
- 命题逻辑中的24条等值式的代换实例也是逻辑等值式
  - $p \vee p \Leftrightarrow p$
  - $\exists xF(x) \vee \exists xF(x) \Leftrightarrow \exists xF(x)$

谓词逻辑中的逻辑等值式1

- 定理1：量词否定等值式
  - $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$
  - $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$

  - 证明 D＝{a1,a2,⋯,an}

$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\neg(A(a1)\wedge A(a1)\wedge\cdots\wedge A(an))$

$\Leftrightarrow\neg A(a1)\vee \neg A(a1)\vee \cdots\vee \neg A(an)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$

谓词逻辑中的逻辑等值式2

- 定理2：量词的辖域收缩和扩张等值式
  - $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$
  - $\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$
  - $\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$
  - $\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$
  - $\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$
  - $\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$
  - $\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$
  - $\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

谓词逻辑中的逻辑等值式3

- 定理3：量词分配等值式
  - $\forall x(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \land \forall x B(x))$
  - $\exists x(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \lor \exists x B(x))$

  - $\forall$对$\land$的分配成立；$\exists$对$\lor$分配成立
  - $\forall$对$\lor$的分配不成立；$\exists$对$\land$分配不成立

谓词逻辑中的逻辑等值式4

- 定理4
  - $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$
  - $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

  - 量词的性质相同，可以交换位置
  - 量词的性质不同，不可交换位置

前束范式

一个谓词公式，如果量词非否定地放在全式的开头，而量词的辖域都延伸到整个谓词公式，则称这样的公式为前束范式。

一般地，谓词逻辑中的公式G如果有如下形状：

$$Q_1x_1,\ldots Q_n\, x_n\, M(x_1,\ldots,x_n)$$

则称G为前束范式。

其中Q_i是$\forall x_i$或$\exists x_i$, $i=1,\ldots,n$，$M(x_1,\ldots,x_n)$是不含量词的公式。

$Q_1x_1,\ldots Q_n\, x_n$称为首标，M称为母式。

例如：$\forall x\exists y(F(x,y)\rightarrow G(x,y))$ 前束范式

$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(x)))$ 非前束范式

利用改名规则、量词否定公式和量词辖域扩张公式等，可把任一谓词公式化成前束范式。例如：

$$\sim\forall x(P(x) \rightarrow \exists xQ(x))$$

$$=\sim\forall x(\sim P(x) \lor \exists xQ(x))$$

$$=\exists x(P(x) \land \sim\exists xQ(x))$$

$$= \exists x(P(x) \land \forall x\sim Q(x))$$

$$= \exists x(P(x) \land \forall y\sim Q(y))$$

$$\exists x\forall y(P(x) \land \sim Q(y))$$

将任意谓词公式化为前束范式的四个步骤：

•步骤1：使用以下基本等价公式，将G中的↔和→删去：

$$F \leftrightarrow H=(F \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow F)$$

$$F \rightarrow H=\sim F \vee H$$

•步骤2：使用~(~F)=F，摩根定律及以下等价公式，将谓词公式中的所有否定号~放在原子之前：

$$\sim \forall x G(x)=\exists x \sim G(x)$$

$$\sim \exists x G(x)=\forall x \sim G(x)$$

•步骤3：如果需要，则将约束变量改名。

•步骤4：利用等价公式将所有量词提到公式的最前面。

前束范式例题

- 求下列公式的前束范式
  - $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$

  - $\exists xF(x)\rightarrow\forall xG(x)$

$\Leftrightarrow\neg\exists xF(x)\vee\forall xG(x)\Leftrightarrow\forall x\neg F(x)\vee\forall yG(y)$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg F(x)\vee G(y))$

[例]将公式$\forall x \forall y(\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$化为前束范式：

解：$\forall x \forall y(\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$

$= \forall x \forall y(\sim \exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \vee \exists u Q(x,y,u))$

$= \forall x \forall y(\forall z (\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z)) \vee \exists u Q(x,y,u))$

$= \forall x \forall y \forall z \exists u (\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z)) \vee Q(x,y,u))$

谓词公式的合取范式和子句集

- 对任一公式
  - 量词辖域扩张和收缩定理，得到**前束范式**
  - 对于母式，等值演算得到**合取范式**
  - 合取项的集合，构成了该公式的子句集S

- 前束范式
- 母式
  - 原子：谓词
  - 文字：谓词或谓词的否定
  - 子句：文字的析取
  - 合取范式：子句的合取
  - 子句集：合取范式的集合形式，元素之间的关系为合取关系