

数学分析教程习题解答

张书宁

目录

第一章 实数和数列极限	1
1.1 实数	1
1.2 数列和收敛数列	1
1.3 收敛数列的性质	2
1.4 数列极限概念的推广	7
1.5 单调数列	7
1.6 自然对数的底 e	9
1.7 基本列和 Cauchy 收敛原理	13
1.8 上确界和下确界	14
1.9 有限覆盖定理	15
1.10 上极限和下极限	15

第一章 实数和数列极限

1.1 实数

1.2 数列和收敛数列

练习题 1.2

1. 1

2. **证明** 由题意有 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

另一方面, 有 $|a_n| - |a| = |a_n| - |-a| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$

当 $a_n = (-1)^{n-1}$ 时, 该命题的逆命题为假.

3. 3

4. 4

5. 5

1.3 收敛数列的性质

练习题 1.3

1. 1

2. **证明** 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, 由定理 1.3.2 可知 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是有界的, 即 $\frac{1}{|a_n|} \leq \frac{1}{2M}$.

对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{M\varepsilon}{2}.$$

同时有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right| &= \left| \frac{a_{n+1} - a + a - a_n}{a_n} \right| \\ &\leq \frac{|a_{n+1} - a| + |a_n - a|}{|a_n|} \\ &< \frac{1}{2M} \left(\frac{M\varepsilon}{2} + \frac{M\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

当 $a_n = q^n$ ($|q| < 1$) 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

$$3. (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{n}{2}(n + 1) - n^2 - 2n}{2(n + 2)} = -\frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

(4) 先对通项进行化简,

$$\begin{aligned} (\sqrt{n^2 + n} - n)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

易知

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{2}.$$

由夹逼原理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(5) 根据题意有 $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ ($n \geq 2$). 由夹逼原理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(6) 根据题意有 $2 < n^2 - n + 2 = n^2 - (n - 2) \leq n^2$ ($n \geq 2$). 由夹逼原理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n + 2)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

(7) 因为 $\frac{\pi}{4} < \arctan n < \frac{\pi}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(8) 根据题意有 $1 \leq (2 \sin^2 n + \cos^2 n) = (\sin^2 n + 1) \leq 2$. 由夹逼原理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \sin^2 n + \cos^2 n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

4. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^n}{1-a}}{\frac{1-b^n}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$

(2) 先对 a_n 进行化简,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

(3) 先对 a_n 进行化简,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdots \frac{n^2 - 1}{n^2} \\ &= \frac{(2+1)(3+1) \cdots (n+1)}{n!} \cdot \frac{(2-1)(3-1) \cdots (n-1)}{n!} \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$

(4) 先对通项进行化简,

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{9}{10}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right) \left(\frac{10}{12}\right) \left(\frac{18}{20}\right) \cdots \left(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}\right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right). \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}\right) = \frac{1}{3}.$$

(5) 因为 $\frac{n}{2} \leq |1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n| \leq \frac{n+1}{2}$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n|}{n} = \frac{1}{2}.$$

(6) 先对通项进行化简,

$$\begin{aligned} & (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) \\ &= \frac{1}{1-x} (1-x)(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) \\ &= \frac{1}{1-x} (1-x^{2^n}). \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}.$$

5. 5

6. 证明 利用不等式 $a-1 < [a] \leq a$, 则有

$$a_n - \frac{1}{n} = \frac{na_n - 1}{n} < \frac{[na_n]}{n} \leq \frac{na_n}{n} = a_n,$$

两边取极限, 即可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[na_n]}{n} = a$.

7. 证明 利用不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

先看右边, 由例 4 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$. 再看左边, 将例 4 中的 a_n 换为 $\frac{1}{a_n}$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{a}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = a$.

由夹逼原理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

8. (1) 证明 记 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = a. \end{aligned}$$

(2) **证明** 对数列 $\{a_n\}$, 设 $a_1 = a, a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$ 即可.

(3) **证明** 对数列 $\{a_n\}$, 设 $a_1 = n, a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$ 即可.

(4) **证明** 设 $a_n = \frac{1}{n}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{-\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0.\end{aligned}$$

9. **证明** 利用不等式

$$\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \leq \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}{n}}.$$

其中

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} &\leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2.\end{aligned}$$

$$\text{则有 } \frac{1}{n} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

由夹逼原理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} = 0$.

10. **证明** 设 $a_n = a_0 \sqrt{n} + \cdots + a_p \sqrt{n}$, $b_n = a_0 \sqrt{n+p} + \cdots + a_p \sqrt{n+p}$. 则有

$$a_n \leq a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \cdots + a_p \sqrt{n+p} \leq b_n.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 因此由夹逼原理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \cdots + a_p \sqrt{n+p}) = 0.$$

11. 11

12. **证明** 先对 a_n 进行化简,

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{i}{n^2}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} - 1 + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \\ &= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} + \frac{\frac{2}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + 1} + \cdots + \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.\end{aligned}$$

显然有

$$\frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}} \leq a_n \leq \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + 1}}.$$

由夹逼原理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$.

13. 13

14. 14

15. 15

16. 16

1.4 数列极限概念的推广

练习题 1.4

1. 1

2. 证明 由题意有

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

对 $\forall A > 0$, 取 $N = [2A - 1]$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > A$. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n} = +\infty.$$

3. 证明 由题意有

$$a_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2} > \frac{\frac{n \cdot n \cdot 2n}{6}}{n^2} = \frac{n}{3}.$$

对 $\forall A > 0$, 取 $N = [3A]$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > A$. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2} = +\infty.$$

4. 4

5. 证明 由题意有

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

对 $\forall A > 0$, 取 $N = [2A^2]$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > A$. 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) = +\infty.$$

1.5 单调数列

练习题 1.5

1. (1) **证明** 显然数列 $\{x_n\}$ 有下界 0. 现证明 $\{x_n\}$ 是递减的. 考察 x_n/x_{n+1} , 即

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}}{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1} \cdot \frac{n+10}{2n+1}} = \frac{2n+1}{n+10}.$$

当 $n \geq 9$ 时, 有 $(2n+1)/(n+10) \geq 1$, 即 $x_n \geq x_{n+1}$. 由定理 1.5.1 可知 $\{x_n\}$ 的极限存在.

- (2) **证明** 先对通项 x_n 进行化简,

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

显然 $x_n > 0$, 考察 x_n/x_{n+1} , 则有

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \bigg/ \frac{1}{n+2} = \frac{n+2}{n+1} > 1.$$

即 $x_n > x_{n+1}$. 由定理 1.5.1 可知 $\{x_n\}$ 的极限存在.

2. **证明** 由题意显然知道 $\{x_n\}$ 是一个递增数列. 现在来证明 $\{x_n\}$ 是有上界的. 已知 $x_1 = \sqrt{2} < 2$. 现假设 $x_{n-1} < 2$, 那么

$$x_n = \sqrt{2 + \sqrt{x_{n-1}}} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

由数学归纳法可知 $x_n < 2$ 成立, 即 2 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界. 由定理 1.5.1 可知 $\{x_n\}$ 的极限存在.

3. **证明** 设递增数列 $\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{m_n}\}$ 收敛. 我们有 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $m_n \geq n > N$ 时, 有

$$|a_{m_n} - a| < \varepsilon.$$

又因数列 $\{a_n\}$ 是递增的, 则有 $a_n \leq a_{m_n}$, 因此

$$|a_n - a| \leq |a_{m_n} - a| < \varepsilon.$$

这样就证明了数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的.

若数列 $\{a_n\}$ 是递减的, 那么 $\{-a_n\}$ 就是递增的, 同理可证 $\{-a_n\}$ 存在极限 a , 即 $-a$ 就是 $\{a_n\}$ 的极限.

4. 证明 考察 $a_n(1 - a_n)$, 则有

$$\begin{aligned} a_n(1 - a_n) &= a_n - a_n^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \left(a_n^2 - a_n + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

再结合已知条件, 则有 $a_n(1 - a_n) \leq 1/4 < a_{n+1}(1 - a_n)$, 即 $a_n < a_{n+1}$. 又因 $0 < a_n < 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

现设 $\{a_n\}$ 的极限为 a . 已知不等式

$$a_n(1 - a_n) \leq \frac{1}{4} < a_{n+1}(1 - a_n)$$

成立, 由夹逼原理可以得到 $a(1-a) = 1/4$, 解这个一元二次方程, 即可得到 $a = 1/2$.

5. 证明 根据均值不等式

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{n!} = a_n,$$

则有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &\geq \frac{n+1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}} - \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{(n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= \frac{\left(n + \frac{n}{2} + \cdots + 1\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(n + \frac{n}{2} + \cdots + 1\right) - \frac{n}{n+1}}{\left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n+1}}{\left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)} > 0. \end{aligned}$$

因此 $\{(n!)^{1/n}\}$ 是递增数列.

6. 6

1.6 自然对数的底 e

练习题 1.6

1. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^2 = e;$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{-2}} = \frac{1}{e};$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}} = \frac{1}{e};$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^3;$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2} \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2} = e^2.$

2. 证明 根据题意, 则有

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+k}{n}\right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\frac{n+k}{n+(k-1)}\right]^n \left[\frac{n+(n-1)}{n+(n-2)}\right]^n \cdots \left[\frac{n+1}{n}\right]^n}_{k \text{ 项}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\left[1 + \frac{1}{n+(k-1)}\right]^{n+(k-1)}}{\left[1 + \frac{1}{n+(k-1)}\right]^{k-1}} \times \frac{\left[1 + \frac{1}{n+(k-2)}\right]^{n+(k-2)}}{\left[1 + \frac{1}{n+(k-2)}\right]^{k-2}} \times \cdots \times \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n}_{k \text{ 项}} \\
 &= e^k.
 \end{aligned}$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + k/n)^n = e^k.$

3. 略.

4. 略.

5. 证明 $\because \{(1 + 1/n)^n\}$ 是严格递增的数列, $\{(1 + 1/n)^{n+1}\}$ 是严格递减的数列, 而它们的极限都是 e.

$$\therefore (1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}.$$

6. 证明 先证明左边的不等式. 在不等式的两边同乘 $n + 1$, 则有

$$\ln e = 1 < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由对数函数 $\ln x$ 的严格递增性可知

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由第 5 题的结论可知上式成立.

采用同样的方法亦可证明右边的不等式.

7. **证明** 先证明右边的不等式. 在不等式的两边同乘 n , 则有

$$\ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < k = k \cdot 1 = k \cdot \ln e = \ln e^k.$$

由对数函数 $\ln x$ 的严格递增性可知

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n < e^k.$$

根据第 2 题的结论已经知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + k/n)^n = e^k$, 再采用第 3 题的证明方法即可证明 $\{(1 + k/n)^n\}$ 是严格递增的数列, 上式得证.

采用同样的证明方法亦可证明左边的不等式.

8. **证明** 先看右边的不等式, 根据第 6 题的结论有

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

对上式进行化简, 则有

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

即

$$\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2}, \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{3}, \dots, \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

将上列不等式相加, 即可得到

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

采用同样的证明方法亦可证明左边的不等式.

9. **证明** 先证明 $\{x_n\}$ 是有上界的, 根据第 8 题的结论有

$$\begin{aligned} x_n &< \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} < 1. \end{aligned}$$

再来证明 $\{x_n\}$ 是严格递增的数列. 考察 $x_{n+1} - x_n$, 即

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+2)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)). \end{aligned}$$

由第 8 题的证明过程已知

$$\frac{1}{n+1} > \ln(n+2) - \ln(n+1).$$

因此 $x_{n+1} > x_n$, 所以 $\{x_n\}$ 是严格递增的.

综上所述, 由定理 1.5.1 可知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

10. **证明** 在等式的两边同时减去 $\ln(n+1)$ 得到

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) = \ln n - \ln(n+1) + \gamma + \varepsilon_n.$$

记等号的左边为 x_n , 则有

$$\begin{aligned} x_n &= \ln \frac{n}{n+1} + \gamma + \varepsilon_n \\ &= -\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

现在来证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln(1 + 1/n)) = 0$. 根据第 6 题的结论, 即不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

对一切 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立. 由夹逼原理可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + 1/n) = 0$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

由第 9 题的结论可知

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma + \varepsilon_n\right) = \gamma.$$

这就证明了

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n.$$

并且其中的 $\varepsilon_n = \ln(1 + 1/n)$.

11. **证明** 先证左边的不等式. 由第 5 题的结论可知

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e,$$

即

$$\left(\frac{2}{1}\right)^1 < e, \left(\frac{3}{2}\right)^2 < e, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e.$$

将上列不等式相乘, 则有

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{2}{1} \times \frac{3^2}{2^2} \times \dots \times \frac{(n+1)^n}{n^n} < e^n.$$

通过移项即可得到 $(n+1)^n/e^n < n!$, 这样就证明了左边的不等式.

同理可证右边的不等式.

12. **证明** 利用第 11 题的结论, 即对不等式

$$\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sqrt[n]{n+1}$$

的两边取极限, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. 由夹逼原理即可得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

13. 13.

14. 14.

15. 15.

16. **证明** .

1.7 基本列和 Cauchy 收敛原理

练习题 1.7

1. 1

2. 2

3. (1) 证明 对 $\forall p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= \left| (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} \frac{1}{(n+p)^2} \right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} \cdot \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

因此只需 $n > N = [1/\varepsilon]$, 即可得出 $\{a_n\}$ 是基本列.

(2) 证明 当 $q = 0$ 时, $\{b_n\}$ 显然收敛到 a_0 , 所以 $\{b_n\}$ 是基本列. 现设 $0 < |q| < 1$, 对 $\forall p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}
|b_{n+p} - b_n| &= |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}| \\
&= |q|^{n+1} \cdot |a_{n+1} + a_{n+2}q + \cdots + a_{n+p}q^{p-1}| \\
&\leq |q|^{n+1} (|a_{n+1}| + |a_{n+2}||q| + \cdots + |a_{n+p}||q|^{p-1}) \\
&\leq |q|^{n+1} M(1 + |q| + \cdots + |q|^{p-1}) \\
&= |q|^{n+1} M \frac{1 - |q|^p}{1 - |q|} \\
&< \frac{|q|^n M}{1 - |q|},
\end{aligned}$$

其中 $|a_n| \leq M$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 当 n 满足

$$n > N = \left\lceil \frac{\ln \frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}}{\ln |q|} \right\rceil$$

的条件时, 即可得出 $\{b_n\}$ 是基本列.

(3) **证明** 对 $\forall p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}
 |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2} \right| \\
 &\leq \frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)^2} + \frac{|\sin(n+2)x|}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)x|}{(n+p)^2} \\
 &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
 &< \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} \cdot \frac{1}{n+p} \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

因此只需 $n > N = [1/\varepsilon]$, 即可得出 $\{a_n\}$ 是基本列.

(4) **证明** 对 $\forall p \in \mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}
 |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)((n+1) + \sin(n+1)x)} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{(n+p)((n+p) + \sin(n+p)x)} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1) + \sin(n+1)x} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{(n+p) + \sin(n+p)x} \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \right| \\
 &< \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

因此只需 $n > N = [1/\varepsilon - 1]$, 即可得出 $\{a_n\}$ 是基本列.

4. **证明** 考察 $a_{n+1} - a_n$, 那么有

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= (|a_2 - a_1| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|) - (|a_2 - a_1| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|) \\
 &= |a_{n+1} - a_n| \geq 0,
 \end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调递增的. 又因 $\{a_n\}$ 是有界的, 由定理 1.5.1 可得到 $\{a_n\}$ 收敛.

5. $\exists M > 0$, 对 $\forall N \in \mathbb{N}^*$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| \geq M.$$

6. 6

1.8 上确界和下确界

练习题 1.8

1. (1) 令 $E = \{-1, 0, 3, 8, 9, 12\}$, 则有 $\sup E = 12$, $\inf E = -1$.
(2) 令 $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$, 则有 $\sup E = 1$, $\inf E = 0$.
(3) 令 $E = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$, 则有 $\sup E = +\infty$, $\inf E = 1$.
(4) 令 $E = \{\sin \frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$, 则有 $\sup E = 1$, $\inf E = 0$.
(5) 令 $E = \{x : x^2 - 2x - 3\}$, 则有 $\sup E = 3$, $\inf E = -1$.
(6) 令 $E = \{x : |\ln x| < 1\}$, 则有 $\sup E = e$, $\inf E = 1/e$.
2. 2
3. 令 $E = \{n^{1/n} : n \in \mathbb{N}^*\}$, 可得 $\sup E = \sqrt[3]{3}$, $\inf E = 1$.
4. 4
5. 5

1.9 有限覆盖定理

1.10 上极限和下极限