数学分析教程习题解答

张书宁

目录

第一章　实数和数列极限

1.1　实数

1.2　数列和收敛数列

练习题 1.2

1. (1) **证明**　根据题意, 则有

$$\left|\frac{1}{1+\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{1+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 只要取 $N=[1/\varepsilon^2]$, 当 $n>N$ 时, 便有

$$\left|\frac{1}{1+\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon.$$

(2) **证明**　根据题意, 则有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 只要取 $N=[1/\varepsilon]$, 当 $n>N$ 时, 便有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

(3) **证明**　利用均值不等式

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n}.$$

便可得到

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{n}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[1/(\varepsilon-1)]$, 当 $n>N$ 时, 即可得到

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon.$$

(4) **证明** 由题意, 可得到

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|=\frac{|(-1)^{n-1}|}{n}=\frac{1}{n}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[1/\varepsilon]$, 当 $n>N$ 时, 即可得到

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

(5) **证明** 当 $n\geqslant 3$ 时, 有

$$\left|\frac{2n+3}{5n-10}-\frac{2}{5}\right|=\frac{2n+3-2(n-2)}{5(n-2)}=\frac{7}{5(n-2)}<\frac{2}{n-2}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[2/\varepsilon+2]$, 当 $n>N$ 时, 便得到

$$\left|\frac{2n+3}{5n-10}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon.$$

(6) **证明** 根据题意, 可得到

$$|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}-1|=0.\underbrace{00\cdots0}_{n\text{ 个}}9\cdots<\frac{1}{10^n}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\lg(1/\varepsilon)]$, 当 $n>N$ 时, 可得到

$$|0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}-1|<\varepsilon.$$

这便证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 个}}=1$.

(7) **证明** 因为

$$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n(n+1)-n^2}{2n^2}=\frac{1}{2n}.$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[1/2\varepsilon]$, 当 $n>N$ 时, 便可得到

$$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

(8) 略.

(9) **证明** 利用等式

$$\operatorname{arccot}x=\frac{\pi}{2}-\arctan x.$$

则有

$$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|=\operatorname{arccot}n.$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=[\cot\varepsilon]$, 当 $n>N$ 时, 可得到

$$\left|\arctan n-\frac{\pi}{2}\right|=\operatorname{arccot}n<\varepsilon.$$

(10) 1.10

2. **证明** 由题意, 对 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathrm{N}^*$, 当 $n>N$ 时，使得不等式

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

成立. 另一方面，有 $||a_n|-|a||\leqslant|a_n-a|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.
当 $a_n=(-1)^{n-1}$ 时, 该命题的逆命题为假.

3. **证明** 设数列 $\{a_n\}$ 从第 N 项开始后面的项全部等于常数 c, 现在来证明 c 就是 $\{a_n\}$ 的极限. 对 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $|a_n-c|<\varepsilon$ 成立, 只要 $n\geqslant N$ 即可. 因为当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|a_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

这便证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

4. 4

5. 对 $\forall N\in\mathrm{N}^*$, 依然 $\exists M>0$, 即便 $n>N$, 也有不等式

$$|a_n-a|\geqslant M$$

成立.

6. 6

7. 7

1.3 收敛数列的性质

练习题 1.3

1. 1

2. **证明** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$, 由定理 1.3.2 可知 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是有界的, 即 $\dfrac{1}{|a_n|}\leqslant\dfrac{1}{2M}$.
对 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathrm{N}^*$, 当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\frac{M\varepsilon}{2}.$$

同时有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right|&=\left|\frac{a_{n+1}-a+a-a_n}{a_n}\right|\\&\leqslant\frac{|a_{n+1}-a|+|a_n-a|}{|a_n|}\\&<\frac{1}{2M}\left(\frac{M\varepsilon}{2}+\frac{M\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

当 $a_n=q^n\ (|q|<1)$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$.

3. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}{3-2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\dfrac{n}{2}(n+1)-n^2-2n}{2(n+2)}=-\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$.

(4) 先对通项进行化简,

$$\begin{aligned}(\sqrt{n^2+n}-n)^{\frac{1}{n}}&=\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)^{\frac{1}{n}}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

易知

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{2}.$$

由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)^{\frac{1}{n}}=1$.

(5) 根据题意有 $\dfrac{1}{2}\leqslant 1-\dfrac{1}{n}<1\ (n\geqslant 2)$. 由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$.

(6) 根据题意有 $2<n^2-n+2=n^2-(n-2)\leqslant n^2\ (n\geqslant 2)$. 由夹逼原理可得

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}=1.$$

(7) 因为 $\dfrac{\pi}{4}<\arctan n<\dfrac{\pi}{2}\ (n\in\mathrm{N}^*)$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan n)^{\frac{1}{n}}=1$.

(8) 根据题意有 $1\leqslant(2\sin^2 n+\cos^2 n)=(\sin^2 n+1)\leqslant 2$. 由夹逼原理可得

$$\lim_{n\to\infty}(2\sin^2 n+\cos^2 n)^{\frac{1}{n}}=1.$$

4. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1-a^n}{1-a}}{\frac{1-b^n}{1-b}}=\dfrac{1-b}{1-a}$.

(2) 先对 a_n 进行化简,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(3) 先对 a_n 进行化简,

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\&= \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}\\&= \frac{(2+1)(3+1)\cdots(n+1)}{n!}\cdot\frac{(2-1)(3-1)\cdots(n-1)}{n!}\\&= \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}$.

(4) 先对通项进行化简,

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)\\=&\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)\\=&\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{10}{12}\right)\left(\frac{18}{20}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right)\\=&\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\\=&\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{n+2}{n+1}\right)\\=&\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\frac{1}{3}.$$

(5) 因为 $\dfrac{n}{2}\leqslant|1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n|\leqslant\dfrac{n+1}{2}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n|}{n}=\frac{1}{2}.$$

(6) 先对通项进行化简,

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\\=&\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\\=&\frac{1}{1-x}(1-x^{2^{n-1}}).\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1}{1-x}.$$

5. 5

6. **证明** 利用不等式 $a-1<[a]\leqslant a$, 则有

$$a_n-\frac{1}{n}=\frac{na_n-1}{n}<\frac{[na_n]}{n}\leqslant\frac{na_n}{n}=a_n,$$

两边取极限，即可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$.

7. **证明** 利用不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

先看右边, 由例 4 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$. 再看左边, 将例 4 中的 a_n 换为 $\dfrac{1}{a_n}$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\dfrac{1}{a}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a$.

由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

8. (1) **证明** 记 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1}\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}=a.\end{aligned}$$

(2) **证明** 对数列 $\{a_n\}$, 设 $a_1=a$, $a_2=a_3=\cdots=a_n=1$ 即可.

(3) **证明** 对数列 $\{a_n\}$, 设 $a_1=n$, $a_2=a_3=\cdots=a_n=1$ 即可.

(4) **证明** 设 $a_n=\dfrac{1}{n}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n!)^{-\frac{1}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0.\end{aligned}$$

9. **证明** 利用不等式

$$\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\frac{1}{n}}{n}\leqslant\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}\leqslant\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}{n}}.$$

其中

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}&\leqslant1+\frac{1}{1\cdot2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\\&=1+1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\&=2-\frac{1}{n}<2.\end{aligned}$$

则有 $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} < \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = 0$.

10. **证明** 设 $a_n = a_0\sqrt{n}+\cdots+a_p\sqrt{n}$, $b_n = a_0\sqrt{n+p}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}$. 则有

$$a_n \leqslant a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p} \leqslant b_n.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 因此由夹逼原理可得

$$\lim_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}) = 0.$$

11. 11

12. **证明** 先对 a_n 进行化简,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right) \\ &= \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-1+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \\ &= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}+\frac{\frac{2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}+\cdots+\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}. \end{aligned}$$

显然有

$$\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}.$$

由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{4}$.

13. 13

14. 14

15. 15

16. 16

1.4 数列极限概念的推广

练习题 1.4

1. 1

2. **证明**　由题意有

$$a_n=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

对 $\forall A>0$, 取 $N=[2A-1]$, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n>A$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n}=+\infty.$$

3. **证明**　由题意有

$$a_n=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}>\frac{\frac{n\cdot n\cdot 2n}{6}}{n^2}=\frac{n}{3}.$$

对 $\forall A>0$, 取 $N=[3A]$, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n>A$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}=+\infty.$$

4. 4

5. **证明**　由题意有

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{n+n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

对 $\forall A>0$, 取 $N=[2A^2]$, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n>A$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=+\infty.$$

1.5　单调数列

练习题 1.5

1. (1) **证明**　显然数列 $\{x_n\}$ 有下界 0. 现证明 $\{x_n\}$ 是递减的. 考察 x_n/x_{n+1}, 即

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}}{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}\cdot\frac{n+10}{2n+1}}=\frac{2n+1}{n+10}.$$

当 $n\geqslant 9$ 时, 有 $(2n+1)/(n+10)\geqslant 1$, 即 $x_n\geqslant x_{n+1}$. 由定理 1.5.1 可知 $\{x_n\}$ 的极限存在.

(2) **证明**　先对通项 x_n 进行化简,

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\\&=\frac{n!}{(n+1)!}\\&=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

显然 $x_n > 0$, 考察 x_n/x_{n+1}, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{n+1}\bigg/\frac{1}{n+2} = \frac{n+2}{n+1} > 1.$$

即 $x_n > x_{n+1}$. 由定理 1.5.1 可知 $\{x_n\}$ 的极限存在.

2. **证明** 由题意显然知道 $\{x_n\}$ 是一个递增数列. 现在来证明 $\{x_n\}$ 是有上界的. 已知 $x_1 = \sqrt{2} < 2$. 现假设 $x_{n-1} < 2$, 那么

$$x_n = \sqrt{2 + \sqrt{x_{n-1}}} < \sqrt{2+2} = 2.$$

由数学归纳法可知 $x_n < 2$ 成立, 即 2 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界. 由定理 1.5.1 可知 $\{x_n\}$ 的极限存在.

3. **证明** 设递增数列 $\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{m_n}\}$ 收敛. 我们有 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathrm{N}^*$, 当 $m_n \geqslant n > N$ 时, 有

$$|a_{m_n} - a| < \varepsilon.$$

又因数列 $\{a_n\}$ 是递增的, 则有 $a_n \leqslant a_{m_n}$, 因此

$$|a_n - a| \leqslant |a_{m_n} - a| < \varepsilon.$$

这样就证明了数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的.

若数列 $\{a_n\}$ 是递减的, 那么 $\{-a_n\}$ 就是递增的, 同理可证 $\{-a_n\}$ 存在极限 a, 即 $-a$ 就是 $\{a_n\}$ 的极限.

4. **证明** 考察 $a_n(1-a_n)$, 则有

$$\begin{aligned} a_n(1-a_n) &= a_n - a_n^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \left(a_n^2 - a_n + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

再结合已知条件, 则有 $a_n(1-a_n) \leqslant 1/4 < a_{n+1}(1-a_n)$, 即 $a_n < a_{n+1}$. 又因 $0 < a_n < 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

现设 $\{a_n\}$ 的极限为 a. 已知不等式

$$a_n(1-a_n) \leqslant \frac{1}{4} < a_{n+1}(1-a_n)$$

成立, 由夹逼原理可以得到 $a(1-a) = 1/4$, 解这个一元二次方程, 即可得到 $a = 1/2$.

5. **证明** 根据均值不等式

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{n!} = a_n,$$

则有

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &\geqslant \frac{n+1}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}-\frac{n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \\
&=\frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)-n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)} \\
&=\frac{\left(n+\frac{n}{2}+\cdots+1\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(n+\frac{n}{2}+\cdots+1\right)-\frac{n}{n+1}}{\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)} \\
&=\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{n}{n+1}}{\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)} \\
&=\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)}>0.
\end{aligned}
$$

因此 $\{(n!)^{1/n}\}$ 是递增数列.

6. 6

1.6 自然对数的底 e

练习题 1.6

1. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-2}\right)^{n-2}\left(1+\dfrac{1}{n-2}\right)^2=\mathrm{e}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^n\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^3$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}=\mathrm{e}^2$.

2. **证明** 根据题意，则有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+k}{n}\right)^n\\
=&\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\frac{n+k}{n+(k-1)}\right]^n\left[\frac{n+(n-1)}{n+(n-2)}\right]^n\cdots\left[\frac{n+1}{n}\right]^n}_{k\text{ 项}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\left[1+\frac{1}{n+(k-1)}\right]^{n+(k-1)}}{\left[1+\frac{1}{n+(k-1)}\right]^{k-1}}\times\frac{\left[1+\frac{1}{n+(k-2)}\right]^{n+(k-2)}}{\left[1+\frac{1}{n+(k-2)}\right]^{k-2}}\times\cdots\times\left[1+\frac{1}{n}\right]^n}_{k\text{ 项}}\\
=&\,\mathrm{e}^k.
\end{aligned}
$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+k/n)^n=\mathrm{e}^k$.

3. 略.

4. 略.

5. **证明** $\because \{(1+1/n)^n\}$ 是严格递增的数列, $\left\{(1+1/n)^{n+1}\right\}$ 是严格递减的数列, 而它们的极限都是 e.

$\therefore (1+1/n)^n<\mathrm{e}<(1+1/n)^{n+1}$.

6. **证明** 先证明左边的不等式. 在不等式的两边同乘 $n+1$, 则有

$$\ln\mathrm{e}=1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由对数函数 $\ln x$ 的严格递增性可知

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

由第 5 题的结论可知上式成立.

采用同样的方法亦可证明右边的不等式.

7. **证明** 先证明右边的不等式. 在不等式的两边同乘 n, 则有

$$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)^n<k=k\cdot1=k\cdot\ln\mathrm{e}=\ln\mathrm{e}^k.$$

由对数函数 $\ln x$ 的严格递增性可知

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n<\mathrm{e}^k.$$

根据第 2 题的结论已经知道 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+k/n)^n=\mathrm{e}^k$, 再采用第 3 题的证明方法即可证明 $\{(1+k/n)^n\}$ 是严格递增的数列, 上式得证.

采用同样的证明方法亦可证明左边的不等式.

8. **证明**　先看右边的不等式, 根据第 6 题的结论有

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

对上式进行化简, 则有

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

即

$$\ln 2-\ln 1<1, \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}, \cdots, \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

将上列不等式相加, 即可得到

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

采用同样的证明方法亦可证明左边的不等式.

9. **证明**　先证明 $\{x_n\}$ 是有上界的, 根据第 8 题的结论有

$$\begin{aligned} x_n &< \left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}<1. \end{aligned}$$

再来证明 $\{x_n\}$ 是严格递增的数列. 考察 $x_{n+1}-x_n$, 即

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{n+1}-(\ln(n+2)-\ln(n+1)). \end{aligned}$$

由第 8 题的证明过程已知

$$\frac{1}{n+1}>\ln(n+2)-\ln(n+1).$$

因此 $x_{n+1}>x_n$, 所以 $\{x_n\}$ 是严格递增的.

综上所述, 由定理 1.5.1 可知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

10. **证明**　在等式的两边同时减去 $\ln(n+1)$ 得到

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=\ln n-\ln(n+1)+\gamma+\varepsilon_n.$$

记等号的左边为 x_n, 则有

$$\begin{aligned} x_n &= \ln\frac{n}{n+1}+\gamma+\varepsilon_n \\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\gamma+\varepsilon_n. \end{aligned}$$

现在来证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln(1+1/n))=0$. 根据第 6 题的结论，即不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

对一切 $n\in\mathrm{N}^*$ 成立. 由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+1/n)=0$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=0.$$

由第 9 题的结论可知

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\gamma+\varepsilon_n\right)=\gamma.$$

这就证明了

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n.$$

并且其中的 $\varepsilon_n=\ln(1+1/n)$.

11. **证明** 先证左边的不等式. 由第 5 题的结论可知

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\mathrm{e},$$

即

$$\left(\frac{2}{1}\right)^1<\mathrm{e},\left(\frac{3}{2}\right)^2<\mathrm{e},\cdots,\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

将上列不等式相乘, 则有

$$\frac{(n+1)^n}{n!}=\frac{2}{1}\times\frac{3^2}{2^2}\times\cdots\times\frac{(n+1)^n}{n^n}<\mathrm{e}^n.$$

通过移项即可得到 $(n+1)^n/\mathrm{e}^n<n!$, 这样就证明了左边的不等式.

同理可证右边的不等式.

12. **证明** 利用第 11 题的结论, 即对不等式

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n+1}$$

的两边取极限, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$. 由夹逼原理即可得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

13. 13.

14. 14.

15. 15.

16. **证明** .

1.7 基本列和 Cauchy 收敛原理

练习题 1.7

1. 1

2. 2

3. (1) **证明** 对 $\forall p \in \mathrm{N}^*$, 有

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \left|(-1)^n\frac{1}{(n+1)^2}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+(-1)^{n+p-1}\frac{1}{(n+p)^2}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}\cdot\frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p} \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

因此只需 $n > N = [1/\varepsilon]$, 即可得出 $\{a_n\}$ 是基本列.

(2) **证明** 当 $q=0$ 时, $\{b_n\}$ 显然收敛到 a_0, 所以 $\{b_n\}$ 是基本列. 现设 $0<|q|<1$, 对 $\forall p \in \mathrm{N}^*$, 有

$$
\begin{aligned}
|b_{n+p}-b_n| &= |a_{n+1}q^{n+1}+a_{n+2}q^{n+2}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}| \\
&= |q|^{n+1}\cdot|a_{n+1}+a_{n+2}q+\cdots+a_{n+p}q^{p-1}| \\
&\leqslant |q|^{n+1}(|a_{n+1}|+|a_{n+2}||q|+\cdots+|a_{n+p}||q|^{p-1}) \\
&\leqslant |q|^{n+1}M(1+|q|+\cdots+|q|^{p-1}) \\
&= |q|^{n+1}M\frac{1-|q|^p}{1-|q|} \\
&< \frac{|q|^nM}{1-|q|},
\end{aligned}
$$

其中 $|a_n| \leqslant M$ $(n \in \mathrm{N}^*)$. 当 n 满足

$$
n > N = \left[\frac{\ln\frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}}{\ln|q|}\right]
$$

的条件时, 即可得出 $\{b_n\}$ 是基本列.

(3) **证明** 对 $\forall p \in \mathrm{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)^2}+\frac{|\sin(n+2)x|}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{|\sin(n+p)x|}{(n+p)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}\cdot\frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

因此只需 $n > N = [1/\varepsilon]$, 即可得出 $\{a_n\}$ 是基本列.

(4) **证明** 对 $\forall p \in \mathrm{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)((n+1)+\sin(n+1)x)}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)((n+p)+\sin(n+p)x)}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)+\sin(n+1)x}+\cdots+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+p)+\sin(n+p)x}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}\right| \\ &< \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

因此只需 $n > N = [1/\varepsilon - 1]$, 即可得出 $\{a_n\}$ 是基本列.

4. **证明** 考察 $a_{n+1}-a_n$, 那么有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n &= (|a_2-a_1|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|)-(|a_2-a_1|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|) \\ &= |a_{n+1}-a_n| \geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调递增的. 又因 $\{a_n\}$ 是有界的, 由定理 1.5.1 可得到 $\{a_n\}$ 收敛.

5. $\exists M > 0$, 对 $\forall N \in \mathrm{N}^*$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| \geqslant M.$$

6. 6

1.8 上确界和下确界

练习题 1.8

1. (1) 令 $E=\{-1,0,3,8,9,12\}$, 则有 $\sup E=12$, $\inf E=-1$.

   (2) 令 $E=\{1/n:n\in\mathrm{N}^*\}$, 则有 $\sup E=1$, $\inf E=0$.

   (3) 令 $E=\{\sqrt{n}:n\in\mathrm{N}^*\}$, 则有 $\sup E=+\infty$, $\inf E=1$.

   (4) 令 $E=\{\sin\frac{\pi}{n}:n\in\mathrm{N}^*\}$, 则有 $\sup E=1$, $\inf E=0$.

   (5) 令 $E=\{x:x^2-2x-3\}$, 则有 $\sup E=3$, $\inf E=-1$.

   (6) 令 $E=\{x:|\ln x|<1\}$, 则有 $\sup E=\mathrm{e}$, $\inf E=1/\mathrm{e}$.

2. 2

3. 令 $E=\{n^{1/n}:n\in\mathrm{N}^*\}$, 可得 $\sup E=\sqrt[3]{3}$, $\inf E=1$.

4. 4

5. 5

1.9 有限覆盖定理

1.10 上极限和下极限