

SOAL & PEMBAHASAN

MATEMATIKA DASAR 1

M A M B O

- ✓ **Berkolaborasi dengan Asisten Dosen Matematika ITS**
- ✓ **Soal yang Lengkap dan Bervariasi**
- ✓ **Pembahasan yang Sistematis dan Mudah Dimengerti**

Mathematics Book

1. Dapatkan nilai maksimum dari $\left| \frac{z^2 - 5z + 3}{(z^2 - 4)(z^2 + 5)} \right|$ jika $|z| = 1$.

Penyelesaian,

$$\begin{aligned} |z^2 - 4| &\geq ||z|^2 - 4| & |z^2 + 5| &= |z^2 - (-5)| \\ &= |1^2 - 4| & &\geq ||z|^2 - (-5)| \\ &= |1 - 4| & &= |1^2 - 5| \\ &= |-3| & &= |1 - 5| \\ &= 3 & &= |-4| \\ & & &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z^2 - 5z + 3| &\leq |z^2| + |-5z| + |3| \\ &= |z|^2 + 5|z| + 3 \\ &= 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Diperoleh $|z^2 - 4| \geq 3$, $|z^2 + 5| \geq 4$, $|z^2 - 5z + 3| \leq 9$ untuk $|z| = 1$.
Selanjutnya.

$$\frac{1}{|z^2 - 4|} \leq \frac{1}{3} \text{ dan } \frac{1}{|z^2 + 5|} \leq \frac{1}{4}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^2 - 5z + 3}{(z^2 - 4)(z^2 + 5)} \right| &= \frac{|z^2 - 5z + 3|}{|z^2 - 4||z^2 + 5|} \\ &\leq \frac{9}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dengan demikian, maksimum dari $\left| \frac{z^2 - 5z + 3}{(z^2 - 4)(z^2 + 5)} \right|$ untuk $|z| = 1$ adalah $\frac{3}{4}$.

2. Diberikan f , g dan h merupakan fungsi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $((f + g) \circ h)(x) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$.

Penyelesaian,

Untuk membuktikan $((f + g) \circ h)(x) = (f \circ h)(g \circ h)(x)$.

$$\begin{aligned} ((f + g) \circ h)(x) &= (f + g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) \\ &= (f \circ h) + (g \circ h)(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti $((f + g) \circ h) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.



3. Diberikan $g(x) = x^2 + 2x - 10$ dengan menduga nilai limit yang sesuai, dapatkan persamaan garis singgung pada kurva $y = g(x)$ di titik $(-5, 5)$.

Penyelesaian,

$g(x) = x^2 + 2x - 10$ di $(2, 0)$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 + 2(x_0 + h) - 10 - (x_0^2 + 2x_0 - 10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h - 10 - (x_0^2 + 2x_0 - 10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h + 2 \\ &= 2x_0 + h \end{aligned}$$

Di titik $(2, 0)$ kemiringan adalah.

$$\begin{aligned} m &= 2x_0 + h \\ &= 2 \cdot -5 + -5 \\ &= -15 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan garis singgung adalah.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (5) &= -15(x - (-5)) \\ y - 5 &= -15(x + 5) \\ y - 5 &= -15x - 75 \\ y &= -15x - 70 \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan garis singgungnya adalah $y = 6x - 12$.

4. Diberikan $x = \sin^{-1}(t)$ dan $y = \log(1 - t^2)$ maka tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ dengan $t = \frac{1}{2}$.

Penyelesaian,

Diketahui $x = \sin^{-1}(t)$ maka.

$$\sin \cdot (x) = \sin \cdot \sin^{-1}(t)$$

$$\sin(x) = t$$

Substitusi nilai t yang diperoleh ke $y = \log(1 - t^2)$.

$$y = \log(1 - (\sin(x))^2)$$

$$= \log(\cos^2(x))$$

$$= 2 \log(\cos(x))$$

Sehingga turunan pertamanya adalah.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} 2 \cdot \log(\cos(x)) \\ &= 2 \cdot \frac{d}{dx} (\log(\cos(x))) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{d}{dx} (\cos(x)) \\ &= \frac{-2 \cdot \sin(x)}{\cos(x)} \\ &= -2 \tan(x) \end{aligned}$$

Selanjutnya turunan keduanya adalah.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\cos^2(x)}$$

Dengan demikian, substitusi $t = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{2}{\cos^2(x)} \\ &= -\frac{2}{1 - \sin^2(x)} \\ &= -\frac{2}{1 - t^2} \\ &= -\frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

5. Hitunglah integral berikut.

$$\int \cos(4x) \sin(20x) dx$$

Penyelesaian,

Ingat bahwa.

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Sehingga.

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

Didapatkan.

$$\begin{aligned}\cos(4x) \sin(20x) &= \frac{1}{2}[\sin(24x) - \sin(-16x)] \\ &= \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)]\end{aligned}$$

Selanjutnya ingat bahwa.

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

Untuk suatu $a \neq 0$. Dari sini, diperoleh.

$$\begin{aligned}\int \cos(4x) \sin(20x) dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{24} \cos(24x) - \frac{1}{16} \cos(16x) \right] + C \\ &= -\frac{1}{48} \cos(24x) - \frac{1}{32} \cos(16x) + C\end{aligned}$$

Dapatkan Edisi lengkap pada intip.in/POBukuMAMBO

HIMATIKA ITS

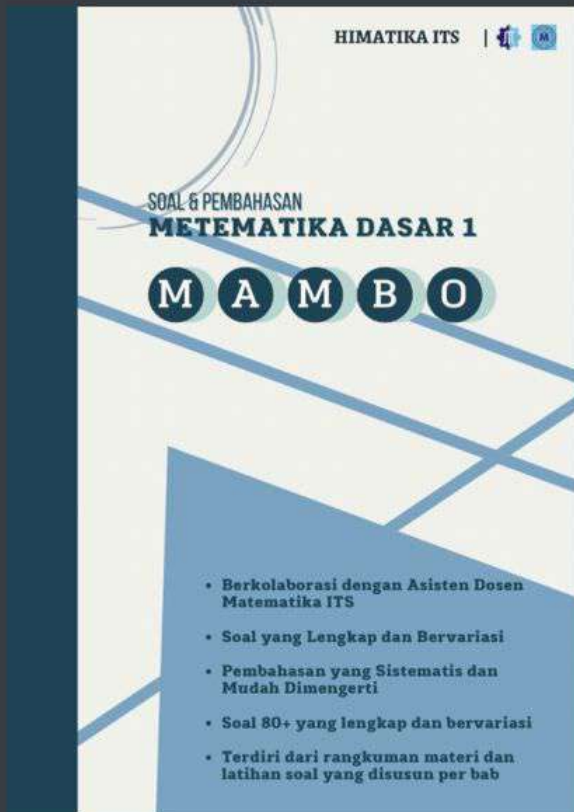
Pre-Order

22-29 Mei 2023



**HIMATIKA X ASDOS
PRESENT**

Mathematics Book



Early Bird
Price
45k*

**Periode 22-25 mei 2023*

normal price Rp 49.999

link pemesanan:

<https://intip.in/POBukuMAMBO>

Free Access: https://intip.in/mamboquiz_

CONTACT PERSON:

087728062003

- **Berkolaborasi dengan Asisten Dosen Matematika ITS**
- **Soal yang Lengkap dan Bervariasi**
- **Pembahasan yang Sistematis dan Mudah Dimengerti**
- **Soal 80+ yang Lengkap dan Bervariasi**
- **Terdiri dari Rangkuman Materi dan Latihan Soal yang Disusun Per Bab**

SOAL & PEMBAHASAN
MATEMATIKA DASAR 1

