

# M A M B O

## SOAL & PEMBAHASAN **MATEMATIKA DASAR 1**



- ✓ Berkolaborasi dengan Asisten Dosen Matematika ITS
- ✓ Soal yang Lengkap dan Bervariasi
- ✓ Pembahasan yang Sistematis dan Mudah Dimengerti

## Mathematics Book

1. Dapatkan nilai maksimum dari  $\left| \frac{z^2 - 5z + 3}{(z^2 - 4)(z^2 + 5)} \right|$  jika  $|z| = 1$ .

**Penyelesaian,**

$$\begin{aligned} |z^2 - 4| &\geq ||z|^2 - 4| & |z^2 + 5| &= |z^2 - (-5)| \\ &= |1^2 - 4| & &\geq ||z|^2 - (-5)| \\ &= |1 - 4| & &= |1^2 + 5| \\ &= |-3| & &= |1 + 5| \\ &= 3 & &= |6| \\ & & &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z^2 - 5z + 3| &\leq |z^2| + |-5z| + |3| \\ &= |z|^2 + 5|z| + 3 \\ &= 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Diperoleh  $|z^2 - 4| \geq 3$ ,  $|z^2 + 5| \geq 6$ ,  $|z^2 - 5z + 3| \leq 9$  untuk  $|z| = 1$ .  
Selanjutnya.

$$\frac{1}{|z^2 - 4|} \leq \frac{1}{3} \text{ dan } \frac{1}{|z^2 + 5|} \leq \frac{1}{6}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^2 - 5z + 3}{(z^2 - 4)(z^2 + 5)} \right| &= \frac{|z^2 - 5z + 3|}{|z^2 - 4||z^2 + 5|} \\ &\leq \frac{9}{3 \cdot 6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dengan demikian, maksimum dari  $\left| \frac{z^2 - 5z + 3}{(z^2 - 4)(z^2 + 5)} \right|$  untuk  $|z| = 1$  adalah  $\frac{1}{2}$ .

2. Diberikan  $f$ ,  $g$  dan  $h$  merupakan fungsi  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Buktikan bahwa  $((f + g) \circ h)(x) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$ .

**Penyelesaian,**

Untuk membuktikan  $((f + g) \circ h)(x) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$ .

$$\begin{aligned} ((f + g) \circ h)(x) &= (f + g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) \\ &= (f \circ h) + (g \circ h)(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti  $((f + g) \circ h) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$  untuk semua  $x \in \mathbb{R}$ .



3. Diberikan  $g(x) = x^2 + 2x - 10$  dengan menduga nilai limit yang sesuai, dapatkan persamaan garis singgung pada kurva  $y = g(x)$  di titik  $(-5, 5)$ .

**Penyelesaian,**

$g(x) = x^2 + 2x - 10$  di  $(-5, 5)$ .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 + 2(x_0 + h) - 10 - (x_0^2 + 2x_0 - 10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h - 10 - (x_0^2 + 2x_0 - 10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h + 2 \\ &= 2x_0 + 2 \end{aligned}$$

Kemiringan adalah.

$$\begin{aligned} m &= 2x_0 + 2 \\ &= 2 \cdot -5 + 2 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan garis singgung adalah.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (5) &= -8(x - (-5)) \\ y - 5 &= -8(x + 5) \\ y - 5 &= -8x - 40 \\ y &= -8x - 35 \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan garis singgungnya adalah  $y = -8x - 35$ .

4. Diberikan  $x = \sin^{-1}(t)$  dan  $y = \log(1 - t^2)$  maka tentukan  $\frac{d^2y}{dx^2}$  dengan  $t = \frac{1}{2}$ .

**Penyelesaian,**

Diketahui  $x = \sin^{-1}(t)$  maka.

$$\sin \cdot (x) = \sin \cdot \sin^{-1}(t)$$

$$\sin(x) = t$$

Substitusi nilai  $t$  yang diperoleh ke  $y = \log(1 - t^2)$ .

$$y = \log(1 - (\sin(x))^2)$$

$$= \log(\cos^2(x))$$

$$= 2 \log(\cos(x))$$

Sehingga turunan pertamanya adalah.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} 2 \cdot \log(\cos(x)) \\ &= 2 \cdot \frac{d}{dx} (\log(\cos(x))) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{d}{dx} (\cos(x)) \\ &= \frac{-2 \cdot \sin(x)}{\cos(x)} \\ &= -2 \tan(x) \end{aligned}$$

Selanjutnya turunan keduanya adalah.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\cos^2(x)}$$

Selanjutnya, mencari nilai  $x$ .

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Dengan demikian, substitusi  $x = \frac{\pi}{6}$ .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2}{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= -\frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$



5. Hitunglah integral berikut.

$$\int \cos(4x) \sin(20x) dx$$

**Penyelesaian,**

Ingat bahwa.

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Sehingga.

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

Didapatkan.

$$\begin{aligned}\cos(4x) \sin(20x) &= \frac{1}{2}[\sin(24x) - \sin(-16x)] \\ &= \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)]\end{aligned}$$

Selanjutnya ingat bahwa.

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

Untuk suatu  $a \neq 0$ . Dari sini, diperoleh.

$$\begin{aligned}\int \cos(4x) \sin(20x) dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{24} \cos(24x) - \frac{1}{16} \cos(16x) \right] + C \\ &= -\frac{1}{48} \cos(24x) - \frac{1}{32} \cos(16x) + C\end{aligned}$$

Dapatkan Edisi lengkap pada [intip.in/POBukuMAMBO](http://intip.in/POBukuMAMBO)

**HIMATIKA ITS**



SOAL & PEMBAHASAN  
**MATEMATIKA DASAR 1**

