HIMATIKA ITS

MAMBO

SOAL & PEMBAHASAN
MATEMATIKA DASAR 1

- Berkolaborasi dengan Asisten Dosen Matematika ITS
- Soal yang Lengkap dan Bervariasi
- Pembahasan yang Sistematis dan Mudah Dimengerti

Mathematics Book

1. Dapatkan nilai maksimum dari $\left|\dfrac{z^2-5z+3}{(z^2-4)(z^2+5)}\right|$ jika $|z|=1$.

   Penyelesaian,

$$\begin{aligned}\left|z^2-4\right| &\geq \left||z|^2-4\right| \\ &= |1^2-4| \\ &= |1-4| \\ &= |-3| \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|z^2+5\right| &= |z^2-(-5)| \\ &\geq \left||z|^2-(-5)\right| \\ &= |1^2+5| \\ &= |1+5| \\ &= |6| \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|z^2-5z+3\right| &\leq |z^2|+|-5z|+|3| \\ &= |z|^2+5|z|+3 \\ &= 1^2+5\cdot 1+3 \\ &= 9\end{aligned}$$

Diperoleh $|z^2-4|\geq 3,\ |z^2+5|\geq 6s,\ |z^2-5z+3|\leq 9$ untuk $|z|=1$.
Selanjutnya.

$$\frac{1}{|z^2-4|}\leq\frac{1}{3} \text{ dan } \frac{1}{|z^2+5|}\leq\frac{1}{6}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\left|\frac{z^2-5z+3}{(z^2-4)(z^2+5)}\right| &= \frac{|z^2-5z+3|}{|z^2-4||z^2+5|} \\ &\leq \frac{9}{3\cdot 6} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dengan demikian, maksimum dari $\left|\dfrac{z^2-5z+3}{(z^2-4)(z^2+5)}\right|$ untuk $|z|=1$ adalah $\dfrac{1}{2}$.

2. Diberikan f, g dan h merupakan fungsi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Buktikkan bahwa $((f+g) \circ h(x)) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$.

   Penyelesaian,

   Untuk membuktikkan $((f+g) \circ h)(x) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$.

$$\begin{aligned} ((f+g) \circ h)(x) &= (f+g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) \\ &= (f \circ h) + (g \circ h)(x) \end{aligned}$$

   Dengan demikian, terbukti $((f+g) \circ h) = (f \circ h) + (g \circ h)(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

3. Diberikan $g(x) = x^2 + 2x - 10$ dengan menduga nilai limit yang sesuai, dapatkan persamaan garis singgung pada kurva $y = g(x)$ di titik $(-5, 5)$.

   Penyelesaian,

   $g(x) = x^2 + 2x - 10$ di $(-5, 5)$.

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to\ 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to\ 0} \frac{(x_0+h)^2 + 2(x_0+h) - 10 - (x_0^2 + 2x_0 - 10)}{h} \\
&= \lim_{h\to\ 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h - 10 - (x_0^2 + 2x_0 - 10)}{h} \\
&= \lim_{h\to\ 0} \frac{2x_0h + h^2 + 2h}{h} \\
&= \lim_{h\to\ 0} \frac{h(2x_0 + h + 2)}{h} \\
&= \lim_{h\to\ 0} 2x_0 + h + 2 \\
&= 2x_0 + 2
\end{aligned}$$

   Kemiringan adalah.

$$\begin{aligned}
m &= 2x_0 + 2 \\
&= 2 \cdot -5 + 2 \\
&= -8
\end{aligned}$$

   Sehingga persamaan garis singgung adalah.

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - (5) &= -8(x - (-5)) \\
y - 5 &= -8(x + 5) \\
y - 5 &= -8x - 40 \\
y &= -8x - 35
\end{aligned}$$

   Dengan demikian, persamaan garis singgungnya adalah $y = -8x - 35$.

4. Diberikan $x = \sin^{-1}(t)$ dan $y = \log(1-t^2)$ maka tentukan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dengan $t = \dfrac{1}{2}$.
Penyelesaian,
Diketahui $x = \sin^{-1}(t)$ maka.

$$\begin{aligned} \sin\cdot(x) &= \sin\cdot\sin^{-1}(t) \\ \sin(x) &= t \end{aligned}$$

Subtitusi nilai t yang diperoleh ke $y = \log(1-t^2)$.

$$\begin{aligned} y &= \log\left(1-(\sin(x))^2\right) \\ &= \log\left(\cos^2(x)\right) \\ &= 2\log\left(\cos(x)\right) \end{aligned}$$

Sehingga turunan pertamanya adalah.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}2\cdot\log\left(\cos(x)\right) \\ &= 2\cdot\frac{d}{dx}\left(\log(\cos(x))\right) \\ &= 2\cdot\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{d}{dx}(\cos(x)) \\ &= \frac{-2\cdot\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= -2\tan(x) \end{aligned}$$

Selanjutnya turunan keduanya adalah.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\cos^2(x)}$$

Dengan demikian, subtitusi $t = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{2}{\cos^2(x)} \\ &= -\frac{2}{1-\sin^2(x)} \\ &= -\frac{2}{1-t^2} \\ &= -\frac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

5. Hitunglah integral berikut.

$$\int \cos(4x)\sin(20x)\,dx$$

Penyelesaian,
Ingat bahwa.

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b\end{aligned}$$

Sehingga.

$$\cos a\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Didapatkan.

$$\begin{aligned}\cos(4x)\sin(20x) &= \frac{1}{2}[\sin(24x) - \sin(-16x)]\\ &= \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)]\end{aligned}$$

Selanjutnya ingat bahwa.

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + C$$

Untuk suatu $a \neq 0$. Dari sini, diperoleh.

$$\begin{aligned}\int \cos(4x)\sin(20x)\,dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(24x) + \sin(16x)]\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}\cos(24x) - \frac{1}{16}\cos(16x)\right] + C\\ &= -\frac{1}{48}\cos(24x) - \frac{1}{32}\cos(16x) + C\end{aligned}$$

HIMATIKA ITS

SOAL & PEMBAHASAN

MATEMATIKA DASAR 1