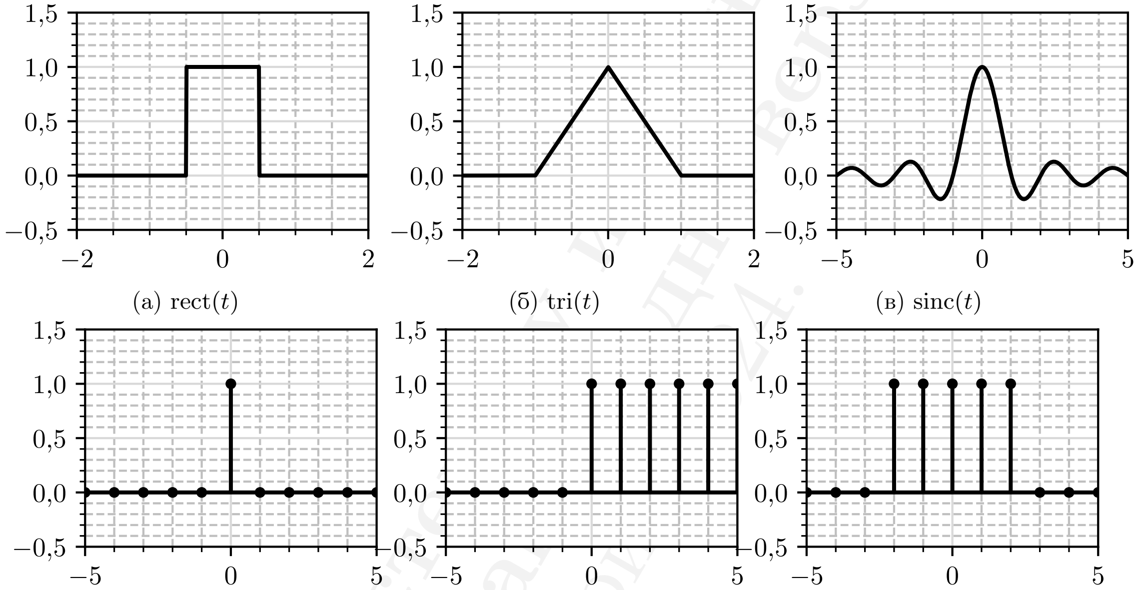
Садржај

1 Основне особине сигнала и система

1.1 Континуални и дискретни сигнали

1. Нацртати континуалне сигнале: (а) јединични правоугаони импулс, $\mathrm{rect}(t)$, (б) јединични троугаони импулс, $\mathrm{tri}(t)$, (в) функцију $\mathrm{sinc}(t)$; и дискретне сигнале (г) дискретан јединични импулс, $\delta[n]$, (д) дискретан јединични низ, $\mathrm{u}[n]$, и (ђ) дискретну правоугаону функцију полуширине 2, $\mathrm{rect}_2[n]$.

<u>Резултат</u>:



(а) $\mathrm{rect}(t)$ (б) $\mathrm{tri}(t)$ (в) $\mathrm{sinc}(t)$

(г) $\delta[n]$ (д) $\mathrm{u}[n]$ (ђ) $\mathrm{rect}_2[n]$

Слика 1.1

Делта импулс и Хевисајдова одскочна функција

2. Скицирати временски дијаграм сигнала датог изразом $x(t) = \delta(f(t))$ где је $f(t) = t^2 - 1$, а $\delta(t)$ Дираков делта импулс.

<u>Решење</u>: Строга анализа проблема композиције делта импулса са датом функцијом, $\delta(t) \circ f(t) = \delta(f(t))$ спроводи се у математичкој теорији дистрибуција. Проблем ћемо анализирати са инжењерског становишта, тумачећи га на следећи начин. Пре свега, уочимо да је за $f(t) \neq 0$ тада $\delta(f(t)) = 0$, по дефиницији. Са друге стране, тачке $f(t) = 0$ представљају нуле функције $f(t)$. Уочимо једну нулу те функције, t_0, и распишимо функцију $f(t)$ у Тејлоров ред око тачке t_0:

$$f(t) = \cancelto{0}{f(t_0)} + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \cdots \tag{2.1}$$

онда приметимо да нас интересује резултат само у веома непосредној околини тачке t_0, те можемо занемарити све чланове реда који су већи од првог, чиме преостаје $f(t) \approx f'(t_0)(t - t_0)$. Одавде у околини тачке t_0 важи:

$$\delta(f(t)) = \delta(f'(t_0)(t - t_0)) = \frac{\delta(t - t_0)}{|f'(t_0)|}, \tag{2.2}$$

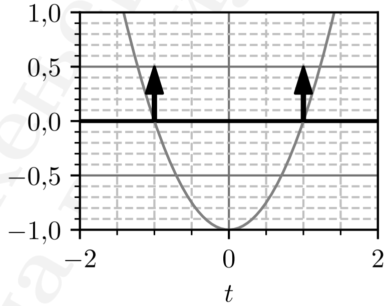
при чему је искоришћено својство скалирања аргумента делта импулса[1]. Закључујемо да се у тачки t_0, таквој да је $f(t_0) = 0$, дешава појава делта импулса чија је мера $1/|f'(t_0)|$. Пошто се по један импулс налази у свакој тачки нуле функције $f(t)$ коначно се може писати:

$$\delta(f(t)) = \sum_{\substack{t_i \\ f(t_i)=0}} \frac{\delta(t - t_i)}{|f'(t_i)|}, \tag{2.3}$$

У конкретном датом случају, нуле функције $f(t)$ су $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$, па је:

$$\delta(f(t)) = \frac{\delta(t+1)}{2} + \frac{\delta(t-1)}{2}, \tag{2.4}$$

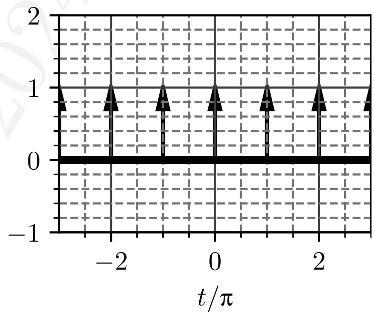
што је и тражени резултат који је приказан на слици 2.1. Функција $f(t)$ је уцртана сивом бојом, а сигнал $\delta(f(t))$ црном бојом.



Слика 2.1

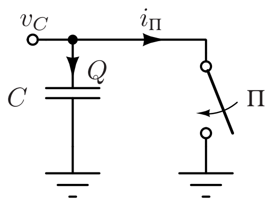
3. Континуални сигнал $\delta(\sin(t))$ расписати преко скалираних и померених делта импулса и скицирати његов временски дијаграм.

<u>Резултат</u>: Сигнал се може изразити као поворка Диракових импулса у облику $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\pi) = Ш_{\pi}(t)$. Тражена скица приказана је на слици 3.1.



Слика 3.1

4. У колу са слике познато је $C = 1$ [µF]. Идеалан прекидач П је отворен, а кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q = 1$ [µC]. У тренутку $t_0 = 0$ затвара се прекидач. Одредити $v_C = v_C(t)$ и $i_П = i_П(t)$, за $-\infty < t < \infty$.



Слика 4.1

<u>Решење</u>. Према услову задатка је $v_C(t < 0) = \dfrac{Q}{C} = 1$ [V]. Према карактеристици идеалног прекидача након затварања прекидача је $v_C(t > 0) = 0$, обједињено ово се може записати у условном облику као $v_C(t) = \begin{cases} 1\ [\mathrm{V}], & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$. Добијени израз се може записати и помоћу Хевисајдове одскочне функције као

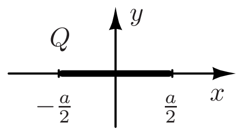
$$v_{\mathrm{C}} = 1\ [\mathrm{V}]\,(1 - \mathrm{u}(t)). \tag{4.1}$$

[1] Својство скалирања аргумента делта импулса: $\delta(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$.

Тако записан израз је нарочито користан за одређивање тражене струје, пошто је струја кондензатора, за референтни смер усклађен са напоном, константне капацитивности дата изразом $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$, она се може потражити као $i_C = \dfrac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = -1\ [\upmu\mathrm{C}]\,\dfrac{\mathrm{du}(t)}{\mathrm{d}t} = -1\ [\upmu\mathrm{C}]\ \updelta(t)$. Пошто је добијена струја кондензатора у супротном референтном смеру од струје прекидача, коначан резултат за струју прекидача је $i_\Pi(t) = 1\ [\upmu\mathrm{C}]\ \updelta(t)$.

Важно је прокоментарисати две ствари у вези са овим резултатом. Прво, физички смисао делта импулса може се потражити у свим појавама које трају веома кратко а које имају коначан утицај. У овом случају, за „бесконачно кратко“ време кроз прекидач протекне целокупно наелектрисање кондензатора. Са друге стране, приметимо да је димензија сигнала $\delta(t)$ заправо $\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$, па је мера делта импулса који одговара струји заправо количина наелектрисања. Ово је конзистентно са дефиниционим својством Дираковог импулса према $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\updelta(t)}_{[\mathrm{s}^{-1}]}\,\underbrace{\mathrm{d}t}_{[\mathrm{s}]} = \underbrace{1}_{[\cdot]}$.

5. Танка нит дужине a хомогено је наелектрисана укупним наелектрисањем Q постављена је дуж x-осе, као на слици. Аналитички описати (а) функцију подужне густине наелектрисања $Q'(x)$. Одредити и (б) исту функцију за $a \to 0$.



Слика 5.1

<u>Решење</u>: (а) Подужна густина наелектрисања ван области нити је онда $Q'(|x| > a/2) = 0$ док је у области нити константна, $Q'(|x| < a/2) = Q/a$. Ово се може записати као[2]

$$Q'(x) = \frac{Q}{a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right). \tag{5.1}$$

(б) Када је $a \to 0$, нит суштински постаје тачка, па је подужна густина наелектрисања $Q'(x) = Q\updelta(x)$, где је $\updelta(x)$ Дираков делта импулс. Такође, ово се може третирати као да је $\updelta_a(x) = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{rect}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ језгро делта импулса, па у граничном процесу када је $a \to 0$ постаје $\updelta(x) = \lim\limits_{a\to 0} \updelta_a(x)$.

Слично као у задатку 4, димензија мере делта функције је укупно наелектрисање, будући да је мера самог импулса дефинисаног у просторном домену димензије реципрочне дужине. У електромагнетици, тачкаста наелектрисања се третирају као делта импулси густине наелектрисања у простору, чиме се омогућава аналитичко решавање проблема са тачкастим наелектрисањима у простору.

6. Нека је дат континуалан сигнал $x(t) = \mathrm{e}^{\upsigma t}\,\text{Ш}_T(t)\,\mathrm{u}(t+\upvarepsilon)$, где је $0 < \upvarepsilon < T$. (а) Одредити услов које треба да задовољава параметар $\upsigma \in \mathbb{R}$ тако да интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t$ конвергира, и у том случају (б) израчунати тај интеграл.

<u>Решење</u>: (а) Дата поворка делта импулса се може расписати по дефиницији, а затим

[2] Јединична правоугаона функција дефинише се као $\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$, па се правоугаона функција у интервалу $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ може дефинисати као $\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$.

се може применити особина еквиваленције[3] делта импулса према

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sigma t} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)}_{Ш_T(t)} \mathrm{u}(t+\varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{\sigma t}\delta(t-kT)}_{\text{особина екв.}} \mathrm{u}(t+\varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\sigma kT}\delta(t-kT)\,\mathrm{u}(t+\varepsilon). \tag{6.1}$$

Интеграл датог израза се онда може израчунати заменом редоследа интеграције и сумирања[4] према поступку:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}}_{\text{замена}} \mathrm{e}^{\sigma kT}\delta(t-kT)\,\mathrm{u}(t+\varepsilon)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{\sigma kT}}_{\text{const}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\,\mathrm{u}(t+\varepsilon)\,\mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

У последњем написаном интегралу, члан $\mathrm{u}(t+\varepsilon)$ ограничава интеграл са леве стране чиме се онда интеграл решава провером да ли Делта импулс $\delta(t-kT)$ постоји у домену инетеграције $t \in (-\varepsilon, \infty)$. као

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\,\mathrm{u}(t+\varepsilon)\,\mathrm{d}t = \int_{-\varepsilon}^{\infty} \delta(t-kT)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & ,k<0 \\ 1 & ,k\geqslant 0 \end{cases} = \mathrm{u}[k] \quad \text{(дискретан јединични низ)} \tag{6.3}$$

Сменом добијеног резултата у (6.2) добија се геометријски ред[5] ограничен са леве стране

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\sigma kT}\mathrm{u}[k] = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{\sigma T})^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\sigma T}}, \quad \text{под условом конвергенције: } \left|\mathrm{e}^{\sigma T}\right| < 1. \tag{6.4}$$

Добијени услов конвергенције последица је суме геометријског реда и даје услов па је тражени услов $\sigma < 0$, а тражени интеграл дат је резултатом у изразу (6.4).

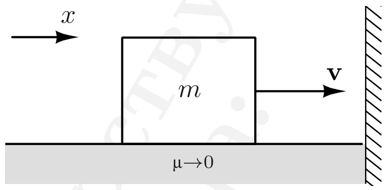
Читаоцу се препоручује да понови задатак у случају да је $\sigma \in \mathbb{C}$.

[3]Особина *еквиваленције* је $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(x-t_0)$.

[4]Строго оправдање замене интеграла и суме је сложено. Ипак, у инжењерским применама, користимо то без оправдања будући да се *патолошки* случајеви где то није оправдано у пракси практично не јављају. Практично сматрамо да је $\sum\int \equiv \int\sum$.

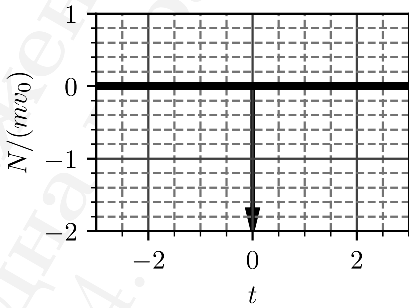
[5]Сума геометријског реда је облика $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$, под условом да је $|q|<1$.

7. На слици је приказано круто тело масе m које може да се креће по подлози без трења. Брзина тела дата је као $\mathbf{v} = v(t)\,\mathbf{i}_x$. У тренутку $t_0 = 0$ блок се апсолутно еластично судара са непокретним зидом након чега се креће брзином алгебарског интензитета $v(t) = -v_0$. (а) Одредити и изразити $v(t)$ за $-\infty < t < \infty$. (б) Одредити и нацртати временски дијаграм алгебарског интензитета силе којом зид делује на блок $\mathbf{N} = N(t)\mathbf{i}_x$.



Слика 7.1

Резултат: (а) $v(t) = v_0\big(1 - 2\mathrm{u}(t)\big)$. (б) Тражени дијаграм приказан је на слици 7.2. Временски облик силе нормалне реакције зида дат је у облику $N(t) = -2mv_0\,\delta(t)$. Нагласимо да је у овом случају димензија мере делта импулса механички импулс (количина кретања). Односно, може се рећи да механички импулс, који је тело примило приликом краткотрајног дејства силе, одговара мера делта импулса силе која је на њега том приликом деловала.



Слика 7.2

8. Одредити следеће интеграле:

(а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)\,\mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ (в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \cos(\tau)\,\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ (д) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau)\,\mathrm{u}(\tau-1)\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

(б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \sin(\tau)\,\mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ (г) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\tau)\,\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ (ђ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \mathrm{e}^{\tau^2-3\tau+2}\,\delta(\tau-1)\,\mathrm{d}\tau$

Скицирати сигнале из тачака (а) и (б).

Резултат: (а) $\sin(t)\,\mathrm{u}(t)$; (б) $\big(1-\cos(t)\big)\,\mathrm{u}(t)$; (в) $\mathrm{u}(t)$; (г) 1; (д) 0; (ђ) 1.

9. Нацртати следеће континуалне сигнале:

(а) $x(t) = 2\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)$, и $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

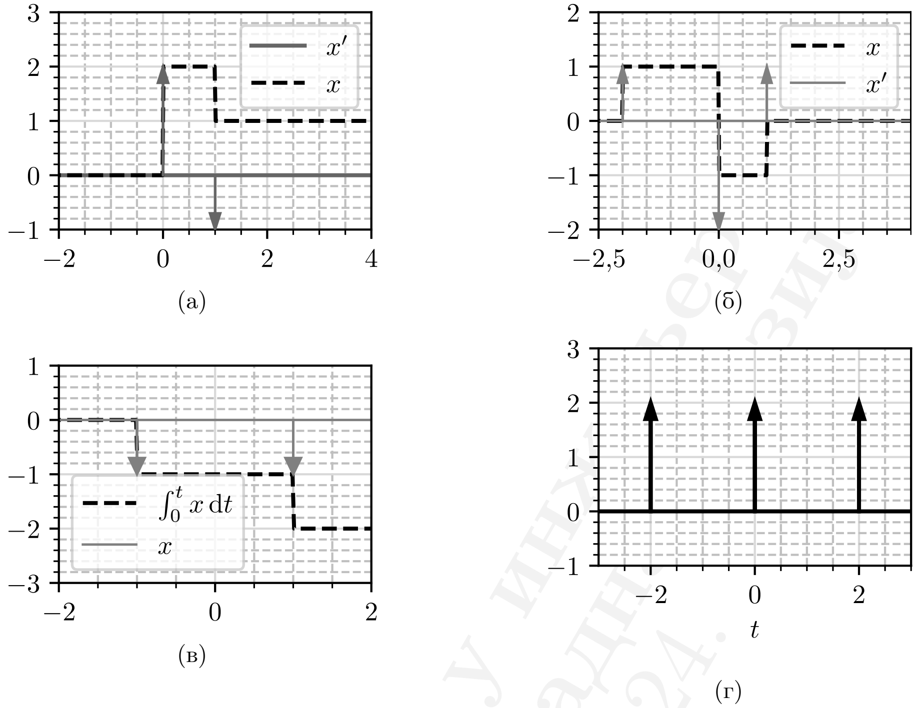
(б) $x(t) = \mathrm{u}(t+2) - 2\mathrm{u}(t) + \mathrm{u}(t-1)$, и $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

(в) $x(t) = \cos(\pi t)[\delta(t+1)+\delta(t-1)]$, и $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$;

(г) $x(t) = \text{Ш}\left(\dfrac{t}{2}\right)$,

где су $\mathrm{u}(t)$ и $\delta(t)$ јединична одскочна функција и Дираков импулс редом.

Резултат: Тражени дијаграми приказани су на слици 9.1.



Слика 9.1

10. Нацртати следеће дискретне сигнале $x = x[n]$:

(а) $x[n] = \mathrm{u}[n] - 2\mathrm{u}[n-4]$,
и $y[n] = \nabla x[n]$;

(б) $x[n] = n^2(\delta[n+2] - 2\delta[n-2])$,
и $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$;

(в) $x[n] = (1-n)(\mathrm{u}[n+2] - \mathrm{u}[n-3])$

(г) $x[n] = \cos\frac{\pi n}{N}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\right)\mathrm{u}[n]$,
за $N = 3$;

где су $\mathrm{u}[t]$ и $\delta[n]$ дискретни јединични низ и дискретни јединични импулс редом, а $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$ је диференца уназад,

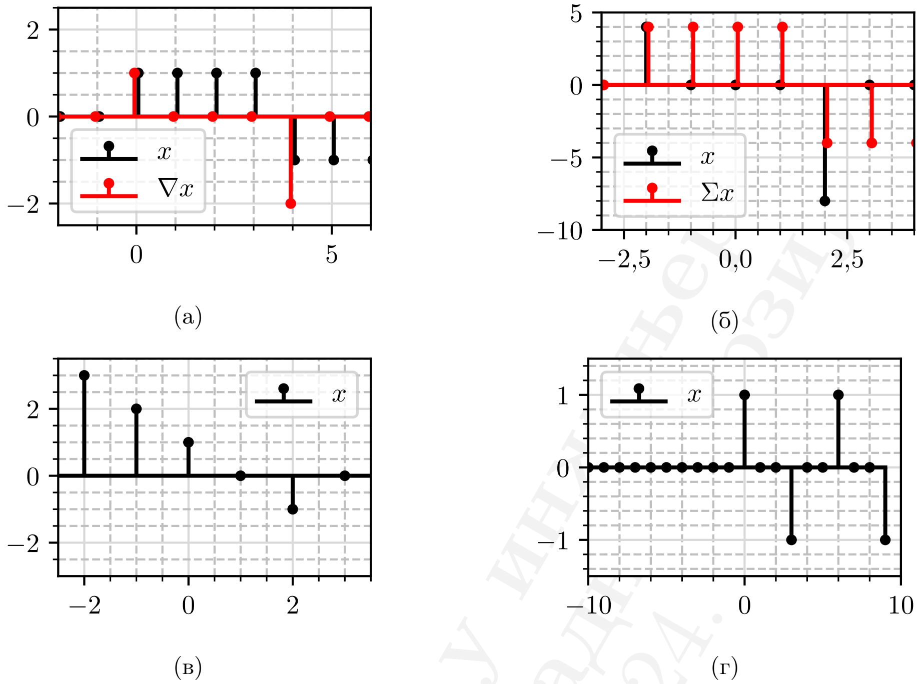
Резултат: Тражени дијаграми приказани су на слици 10.1.

11. Изразити периодичну поворку Дираковиx импулса $\text{Ш}_T(t)$ сложеном трансформацијом јединичне периодичне поворке Дираковиx импулса $\text{Ш}(t) = \text{Ш}_1(t)$.

Решење: Период тражене поворке једнак је T док је период јединичне поворке једнак јединици. Јасно је потребно онда прво обавити скалирање временске осе тако да се од јединичног импулса добије импулс одговарајуће ширине. Том приликом је потребно обавити скалирање временске осе појединачног делта импулса[6] па се има:

$$\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{T} - k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t-kT}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}T\delta\left(t-kT\right) = T\text{Ш}_T(t) \quad (11.1)$$

[6] Користи се резултат $\delta\big(a(t-t_0)\big) = \frac{1}{|a|}\delta(t-t_0)$



Слика 10.1: Уз задатак 10. На апсциси је n, а на ординати су означене величине.

Коначно, из добијеног резултата је тражени израз $Ш_T(t) = \frac{1}{T} Ш\left(\frac{t}{T}\right)$.

Парност сигнала

12. Одредити парну и непарну компоненту континуалних сигнала $x = x(t)$ за:

(а) $x(t) = \mathrm{e}^{kt}$; и (б) $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$,

где су k и ω_0 познате реалне константе.

Решење: Сваки континуални сигнал $x(t)$ може се, на *јединствен* начин, представити преко његове парне и непарне компоненте, $x_\mathrm{e}(t) = \mathrm{Ev}\, x(t)$ и $x_\mathrm{o}(t) = \mathrm{Od}\, x(t)$ редом, као

$$x(t) = x_\mathrm{e}(t) + x_\mathrm{o}(t). \tag{12.1}$$

Парна и непарна компонента сигнала могу се одредити разматрањем израза за $x(-t)$ као и његове парне и непарне компоненте. Наиме,

$$x(-t) = x_\mathrm{e}(-t) + x_\mathrm{o}(-t) \Rightarrow x(-t) = x_\mathrm{e}(t) - x_\mathrm{o}(t), \tag{12.2}$$

при чему су искоришћени $x_\mathrm{e}(-t) = x_\mathrm{e}(t)$ и $x_\mathrm{o}(t) = -x_\mathrm{o}(-t)$, према дефиницији парне и непарне компоненте. Одатле се онда из система једначина (12.1) и (12.2) налазе изрази за парну и напарну компоненту сигнала датог као $x(t)$:

$$x_\mathrm{e}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad \text{и} \tag{12.3}$$

$$x_\mathrm{o}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}. \tag{12.4}$$

На основу добијеног резултата (12.4), онда се могу непосредно одредити парна и непарна компонента датих израза

(а) $\mathrm{Ev}\{\mathrm{e}^{kt}\} = \dfrac{\mathrm{e}^{kt} + \mathrm{e}^{-kt}}{2} = \cosh(x)$, и $\mathrm{Od}\{\mathrm{e}^{kt}\} = \dfrac{\mathrm{e}^{kt} - \mathrm{e}^{-kt}}{2} = \sinh(x)$;

(б) $\mathrm{Ev}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t)$, и $\mathrm{Od}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2} = \mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$;

13. Одредити парну и непарну компоненту континуалног простопериодичног сигнала, облика $x(t) = \sin(\omega_0 t + \theta)$, где су ω_0 и θ познате константе.

Решење: Решење се може потражити поступком описаним у задатку 12, ипак, у случају овог задатка, али и разних других сродних примера, резултат се може пронаћи *идентификацијом* парног и непарног дела сигнала, трансформацијом полазног израза. Применимо израз за синус збира[7] чиме се добија

$$x(t) = \sin(\omega_0 t + \theta) = \underbrace{\cos\theta}_{\text{const}} \cdot \sin\omega_0 t + \underbrace{\sin\theta}_{\text{const}} \cdot \cos\omega_0 t. \tag{13.1}$$

Пошто је познато да су $\sin(\omega_0 t)$ и $\cos(\omega_0 t)$ непаран и паран сигнал редом, а знамо да се сигнал $x(t)$ може на јединствен начин представити као збир његових парних и непарних компоненти, онда морају бити

$$\mathrm{Od}\{x(t)\} = \cos\theta \cdot \sin\omega_0 t, \quad \text{и} \tag{13.2}$$

$$\mathrm{Ev}\{x(t)\} = \sin\theta \cdot \cos\omega_0 t. \tag{13.3}$$

[7] Синус збира углова $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Овакав поступак идентификације компоненти сигнала, често може брже довести до резултата од поступка описаног у задатку 12.

14. Полазећи од дефиниција парног и непарног сигнала извести услов за парност сигнала

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot x_3(t) \cdots x_n(t) = \prod_{k=1}^{n} x_k(t),$$

где је сваки од сигнала $x_k(t)$ за $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ или паран или непаран.

<u>Резултат</u>: Сигнал је паран ако и само ако је број непарних сигнала из скупа $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ паран.

15. Применом својстава парних и непарних сигнала израчунати вредности одређених интеграла

(а) $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^{\sin 2t}}\mathrm{d}t$;

(б) $I_2 = \displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 - t + 2t^3 - t^5 + 2t^7}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

<u>Решење</u>: Пошто су границе интеграла парне, може се користити својство да је

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} \mathrm{Ev}\{f(t)\}\mathrm{d}t, \tag{15.1}$$

односно, потребно је потражити парне компоненте датих подинтегралних величина.

(а) Парна компоненте подинтегралне величине налази се применом особина парности простопериодичних функција, применом поступка из задатка 12, као

$$\mathrm{Ev}\left\{\frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^{\sin 2t}}\right\} = \frac{\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^{\sin 2t}} + \dfrac{\cos(-t)}{1+\mathrm{e}^{\sin 2(-t)}}}{2} = \frac{\dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^{\sin 2t}} + \dfrac{\cos t}{1+\mathrm{e}^{-\sin 2t}}}{2} = \tag{15.2}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos(t)\cancel{(2+\mathrm{e}^{\sin 2t}+\mathrm{e}^{-\sin 2t})}}{\cancel{2+\mathrm{e}^{\sin 2t}+\mathrm{e}^{-\sin 2t}}}}{2} = \frac{1}{2}\cos(t). \tag{15.3}$$

Заменом добијеног резултата у (15.1), коначно се налази, $I_1 = 1$.

(б) Сличним поступком се налази резултат $I_2 = 2\sqrt{3}$.

Периодичност, снага и енергија сигнала

16. Утврдити да ли су следећи сигнали периодични и за оне који то јесу израчунати основни период:

(а) $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$;

(б) $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$;

(в) $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}$.

<u>Решење</u>: Периодичност збира континуалних сигнала $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, и $f_n(t)$ може се дискутовати на основу њихових основних периода T_1, T_2, …, и T_n. Претпоставимо да је основни период сигнала $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)$ једнак T. Тада је јасно да се период сваког од сигнала сабирака мора садржати цео број пута у сигналу збира, односно $T = n_1T_1 = n_2T_2 = \ldots = n_nT_n$, где су n_1, n_2, …, и n_n цели бројеви. Пошто је основни период најмањи такав период, то значи да је T најмањи број који се цео број пута садржи у сваком од периода сигнала сабирака, односно је

$$T = \mathrm{NZS}\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}. \tag{16.1}$$

Такав резултат ће постојати уколико је $\dfrac{T_i}{T_j} = \dfrac{n_i}{n_j} \in \mathbb{Q}, \forall i,j$, односно, ако је однос сваког пара периода рационалан број. За такве периоде кажемо да су *рационално самерљиви.*

(а) Сигнал $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$ је периодичан, јер су основни периоди[8] сабирака рационално самерљиви, односно, $T = \mathrm{NZS}\left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{5}\right\} = 2\pi$.

(б) Сигнал $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$ је апериодичан јер периоди сабирака, $\dfrac{2\pi}{6}$ и 2, нису рационално самерљиви пошто је $\pi \notin \mathbb{Q}$.

(в) Сигнал $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}$ је периодичан, јер су основни периоди сабирака $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{4}$, и π рационално самерљиви, а период је $T = \mathrm{NZS}\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}, \pi\right\} = \pi$.

17. Реална дискретна синусоида дефинисана је у облику $x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$, где је $A \geqslant 0$, $|\Omega_0| \leqslant \pi$ и $|\phi| \leqslant \pi$. Ако дата секвенца

(а) $\{0,1,0,-1\}$;

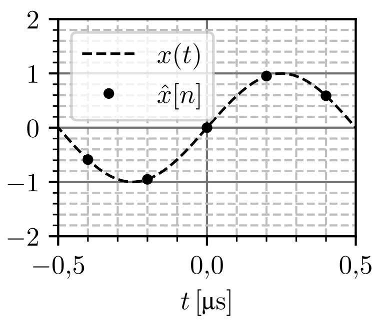
(б) $\{0,1,1,0,-1,-1\}$;

(в) $\{1,0,-1,-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2}\}$

представља основни период ове синусоиде, при чему је први члан $x[0]$, одредити параметре A, Ω_0 и ϕ.

<u>Резултат</u>: (а) $\Omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$, $A = 1$, (б) $\Omega_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$, $A = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, (в) $\Omega_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\phi = \dfrac{\pi}{4}$, $A = \sqrt{2}$

18. Континуални сигнал $x_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$, учестаности $f_1 = 1$ [MHz], измерен је дигиталним осцилоскопом у тренуцима времена $t = kT_s$, где је $T_s = 0{,}2$ [μs], чиме је добијен дискретан сигнал $\hat{x}[n] = x(nT_s)$, као на слици. Затим је мерен простопериодични сигнал $x_2(t)$, учестаности f_2, измерен истим поступком са истом вредношћу T_s, чиме је добијен дискретан сигнал $\hat{x}_2[n] = x_2(nT_s)$. Установљено је да је $\hat{x}_1[n] = \hat{x}_2[n]$. На основу тог резултата, одредити могуће вредности учестаности f_2.



Слика 18.1

[8] Основни период синусоиде $\sin(\omega_0 t + \theta)$ је $T = 2\pi/\omega_0$.

<u>Решење</u>: Дискретни сигнал $\hat{x}_1[n]$, добијен од континуалног сигнала $x_1(t)$, је дат изразом $\hat{x}_1[n] = \sin(2\pi f_1 n T_s)$. Нека је учестаност простопериодичног сигнала $x_2(t)$ записана као $f_2 = f_1 + \Delta f$, онда се за дискретан сигнал $\hat{x}_2[n]$ може писати

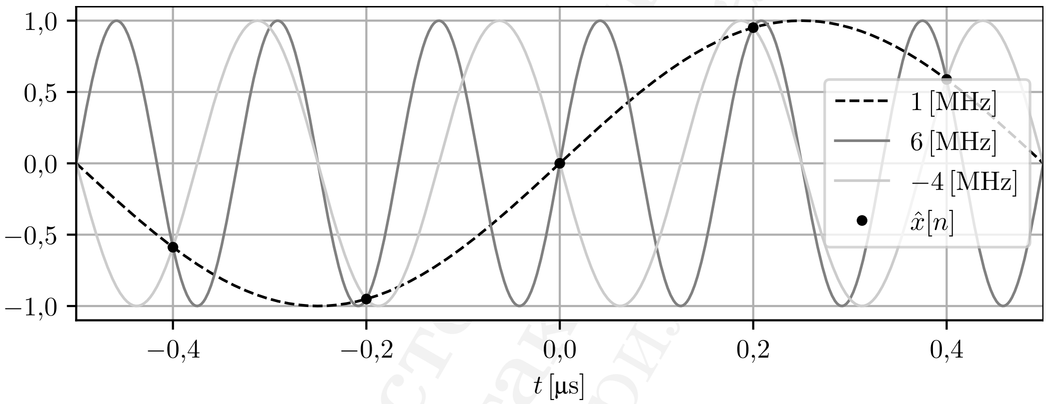
$$\hat{x}_2[n] = \sin(2\pi f_2 n T_s) = \sin(2\pi(f_1 + \Delta f)nT_s) = \sin(2\pi f_1 n T_s + \underbrace{2\pi \Delta f n T_s}_{2\pi k[n]}) \tag{18.1}$$

$$= \sin(2\pi f_1 n T_s) = \hat{x}_1[n] \tag{18.2}$$

Због периодичности континуалне синусоиде, довољан је услов да је $2\pi\Delta f n T_s = 2\pi k[n]$, за целобројне вредности $k[n]$. Односно, услов да је $\Delta f = k[n]/nT_s$. Пошто је Δf константа, онда мора бити $k[n] = k_0 n$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, односно, $\Delta f = k_0/T_s$. Закључујемо да су могуће учестаности сигнала x_2 из скупа

$$f_2 = \{\dots, f_1 - 2f_s, f_1 - f_s, f_1, f_1 + f_s, f_1 + 2f_s, \dots\}, \qquad f_s = \frac{1}{T_s}. \tag{18.3}$$

Пошто су у конкретном случају $f_s = 5$ [MHz], то су могућа решења из скупа f_2 [MHz] $\in \{\dots, -4{,}1, 6, 11, \dots\}$.



Слика 18.2: Синусоиде различитих учестаности које одговарају истом дискретном низу.

Резултат овог задатка је веома важан јер наговештава проблем да је дискретизацијом континуалног сигнала, у општем случају, немогуће једнозначно реконструисати полазни сигнал. Ипак, у наставку курса, изучићемо који квалитети континуалног сигнала, и одабир времена T_s, могу довести до једнозначне реконструкције и много сложенијих сигнала од простопериодичног.

19. Познато је да су енергије реалних сигнала $x = x(t)$ и $y = y(t)$, W_x и W_y редом, коначне. Одредити (а) услов, који треба да задовољавају сигнали x и y, под којим је снага сигнала $z(t) = x(t) + y(t)$ једнака $W_z = W_x + W_y$. На основу резултата из претходне тачке (б) доказати једнакост:

$$W\{x\} = W\{\mathrm{Ev}\{x\}\} + W\{\mathrm{Od}\{x\}\},$$

где $W\{x\}$ означава енергију сигнала x.

<u>Решење</u>: (а) Снага сигнала $z(t) = x(t) + y(t)$ може се изразити као

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + y(t))^2 \,\mathrm{d}t}_{W_z} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \,\mathrm{d}t}_{W_x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 \,\mathrm{d}t}_{W_y} + 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\,\mathrm{d}t. \tag{19.1}$$

Да би се остварио услов $W_z = W_x + W_y$, потребно је да буде $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0$. За реалне сигнале $x(t)$ и $y(t)$ који овај услов задовољавају каже се да су *ортогонални*[9].

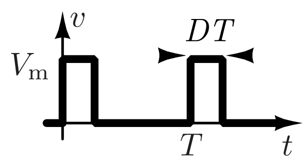
(б) На основу резултата претходне тачке, једнакост коју треба доказати је тачна, будући да је услов интеграл непарне функције у симетричним границама, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{Ev}\{x\}\cdot\mathrm{Od}\{x\}}_{\text{Непарна функција}}\,\mathrm{d}t = 0$. Односно, кажемо да су парна и непарна компонента сигнала ортогонални сигнали.

20. Нека дат периодичан сигнал $x(t)$, чија је основна периода T. Такав сигнал се може једнозначно представити преко своје сталне (DC) компоненте и наизменичне (AC) компоненте као $x(t) = \tilde{x}(t) + X$. Стална компонента је константна, док је средња вредност наизменичне компоненте равна нули. Одредити израз за средњу снагу, P, сигнала $x(t)$, у зависности од средњих снага његових DC и AC компоненти, P_{DC} и P_{AC}, редом.

<u>Решење:</u> Пошто је средња вредност производа сталне и наизменичне компоненте сигнала једнака $\frac{1}{T}\int\limits_T \tilde{x}(t)X\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}X\underbrace{\int\limits_T \tilde{x}(t)\,\mathrm{d}t}_{=0,\text{ по деф.}} = 0$, закључује се да су стална и наизменична компонента ортогоналне у смислу дефинисаном у задатку 19а, па је на основу става из тог задатка снага комплетног сигнала једнака збиру сигнала компоненти:

$$P = P_{\mathrm{DC}} + P_{\mathrm{AC}}. \tag{20.1}$$

21. Дат је напонски сигнал $v = v(t)$ облика периодичне поворке униполарних правоугаоних импулса амплитуде $V_{\mathrm{m}} = 5$ [V], као на слици. Трајање импулса је DT где је $0 \leqslant D \leqslant 1$ (тзв. *фактор испуне*), а учестаност сигнала је f. Одредити средњу снагу наизменичне компоненте тог сигнала у функцији фактура испуне $P_{\mathrm{AC}} = P_{\mathrm{AC}}(D)$.

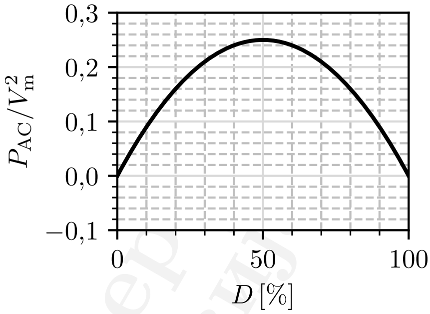


Слика 21.1

<u>Решење:</u> На основу става доказаног у задатку 20 средња снага комплетног сигнала једнака је збиру средњих снага наизменичне и сталне компоненте, $P = P_{\mathrm{AC}} + P_{\mathrm{DC}}$. Стална компонента сигнала једнака је $V = \frac{1}{T}\int\limits_0^T v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_0^{DT} V_{\mathrm{m}}\mathrm{d}t = DV_{\mathrm{m}}$, па је снага сталне компоненте $P_{\mathrm{DC}} = D^2V_{\mathrm{m}}^2$.

[9] Ортогоналност сигнала строго је дефинисана у векторском простору над скупом свих <u>комплексних</u> сигнала, на коначном интервалу $[a,b]$, у коме се скаларни производ дефинише као $\langle x(t), y(t)\rangle = \int\limits_a^b x(t)y^*(t)\,\mathrm{d}t$. Сигнали $x(t)$ и $y(t)$ су онда у том смислу ортогонални ако је $\langle x(t), y(t)\rangle = 0$. Ова идеја ће бити коришћена приликом увођења Фуријеових редова.

Средња снага комплетног сигнала је $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{DT} V_\mathrm{m}^2\mathrm{d}t = DV_\mathrm{m}^2$, одакле је средња снага наизменичне компоненте $P_\mathrm{AC} = V_\mathrm{m}^2 D(1-D)$, што представља параболу по D, као што је илустровано на слици 21.2.



Слика 21.2

22. Извести израз за снагу сигнала:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_n\cos(n\omega_0 t), \qquad (n \in \mathbb{N})$$

где су a_0, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ познате реалне константе.

<u>Решење</u>: Периоди сигнала $x(t)$ су $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ и $T_k = \dfrac{T_0}{k}$, где је $k \in \{2{,}3,\ldots,n\}$, па је укупни период сигнала $x(t)$ једнак T_0. Снага сигнала $x(t)$ може се изразити као

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left(a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_n\cos(n\omega_0 t)\right)^2\,\mathrm{d}t \quad (22.1)$$

Подинтегрална величина се може поделити на чланове у две различите врсте, квадрат сваког члана у изразу, и производ различитих чланова у изразу, чиме се добија израз

$$T_0 P_x = \int_{T_0} a_0^2\,\mathrm{d}t + \int_{T_0} a_1^2\cos^2(\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \int_{T_0} a_2^2\cos^2(2\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{T_0} a_n^2\cos^2(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \quad (22.2)$$

$$+2a_0a_1\int_{T_0}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + 2a_0a_2\int_{T_0}\cos(2\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \cdots + 2a_0a_n\int_{T_0}\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \quad (22.3)$$

$$+2a_1a_2\int_{T_0}\cos(\omega_0 t)\cos(2\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \cdots + 2a_{n-1}a_n\int_{T_0}\cos((n-1)\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \cdots \quad (22.4)$$

Интеграли у изразу (22.2) су квадрати простопериодичних величина[10], па је њихова вредност једнака $T_0/2$. У реду (22.3) су интеграли простопериодичних функција па су они сви равни нули, док су у реду (22.4) сви интеграли типа[11] $\displaystyle\int_T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t$, за $n \neq m$ равни нули. На основу тога, коначно се има

$$P_x = a_0^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{2} \quad (22.5)$$

Резултат се може добити и уопштењем става из задатка 19. Будући да су сабирци израза у задатку облика да је, интеграл на периоду производа свака два од њих раван

---

[10] За сигнале $\cos^2(n\omega t)$, са периодом T, средња вредност је $\dfrac{1}{2}$ па је $\displaystyle\int_{T_0}\cos^2(n\omega t)\mathrm{d}t = \dfrac{T}{2}$.

[11] Доказ овог става следи из чињенице да су сигнали $\cos(n\omega_0 t)$ и $\cos(m\omega_0 t)$ ортогонални за $m \neq n$ у смислу дефинисаном у задатку 19а. Овај став је од нарочитог интереса за увођење Фуријеових редова.

нули, то је снага тог сигнала једнака збиру снага сваког од сигнала понаособ. Сигнал $_0$ је константни сигнал, па је његова снага једнака квадрату амплитуде a_0^2, док је снага сигнала $a_n \cos(n\omega_0 t)$, $n \in \mathbb{N}$, једнака $a_n^2/2$ (квадрат ефективне вредности $a_n/\sqrt{2}$). Сабирањем таквих снага, добија се исти коначан резултат.

****23.** Позната је отпорност отпорника $R = 3$ [kΩ] и струја успостављена на његовим прикључцима $i = \dfrac{0{,}75\, I_0}{1{,}25 - \cos(\omega t)}$, где су $I_0 = 1$ [mA] и $\omega = 10^3 \left[\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$. Израчунати средњу снагу Џулових губитака на том отпорнику, P_R.

<u>Решење</u>: Средња снага отпорника одређује се рачунањем израза $P_R = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T i^2(t) R\,\mathrm{d}t$. Односно, $P_R = \dfrac{RI_0^2}{T}\displaystyle\int_0^T \left(\frac{0{,}75}{1{,}25 - \cos(\omega t)}\right)^2 \mathrm{d}t$. Ради једноставности, у добијеном интегралу се може увести смена која има смисао тренутне фазе, $\phi = \omega t$, након чега се има $P_R = \dfrac{RI_0^2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\frac{0{,}75}{1{,}25 - \cos(\phi)}\right)^2 \mathrm{d}\phi$. Добијени интеграл

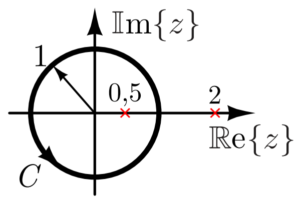
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{0{,}75^2}{\left(1{,}25 - \cos(\phi)\right)^2}\,\mathrm{d}\phi \tag{23.1}$$

може се решити методама *комплексне анализе.*

Косинусна функција се пре свега изражава у експоненцијалној форми $\cos(\phi) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}}{2}$ и замењује у израз (23.1), након чега се сређује добијени израз и елиминишу негативни експоненти:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{0{,}75^2}{\left(1{,}25 - \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \frac{2{,}25\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}}{(2{,}5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi} - 1)^2}\,\mathrm{d}\phi. \tag{23.2}$$

У добијеном изразу уводи се смена $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$, односно $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{d}\phi$. Пошто су границе интеграције за ϕ од 0 до 2π то тачка z у комплексној равни описује контуру C јединичне кружнице у позитивном математичком смеру (слика 23.1). Трансформацијом бројиоца $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}\,\mathrm{d}\phi = \dfrac{z\mathrm{d}z}{\mathrm{j}}$ и сменом $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi} = z^k$ ($k \in \mathbb{N}$) интеграл из (23.2) се може записати као



Слика 23.1

$$I = \underbrace{\frac{1}{\mathrm{j}} \oint_C \underbrace{\frac{2{,}25z}{(2{,}5z - z^2 - 1)^2}}_{f(z)}\,\mathrm{d}z}_{I'} \tag{23.3}$$

Контурни интеграл I' се може решити израчунавањем резидуума полова подинтегралне функције, $f(z)$, који се налазе унутар контуре интеграције (Кошијева теорема о резидуумима):

$$I' = \mathrm{j}2\pi \sum_{z_{\mathrm{p}k} \in C} \operatorname*{Res}_{z = z_{\mathrm{p}k}} f(z). \tag{23.4}$$

Добијена функција $f(z)$ има полове који одговарају коренима полинома из имениоца $p(z) = (2{,}5z - z^2 - 1)^2 = (z - 0{,}5)^2(z - 2)^2$. Полином има два двострука корена, 0,5 и 2, који представљају двоструке полове подинтегралне функције (слика 23.1). Од ових полова, само двоструки пол у 0,5 је унутар контуре интеграције. Резидуум пола другог реда је у општем случају дат изразом $\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-c)^2 f(z)$. Израчунавањем јединог потребног резидуума се налази

$$\operatorname*{Res}_{z=0{,}5} f(z) = \lim_{z\to 0{,}5} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2{,}25z\cancel{(z-0{,}5)^2}}{\cancel{(z-0{,}5)^2}(z-2)^2}\right) = \lim_{z\to 0{,}5}\left(-\frac{2{,}25z+4{,}5}{(z-2)^3}\right) = \frac{5}{3}. \tag{23.5}$$

Заменом добијеног резултата у (23.4) и (23.3) добија се $I = 2\pi\frac{5}{3}$ одакле се коначно заменом у израз за снагу добија $P_R = \frac{RI_0^2}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi}\frac{5}{3} = 5$ [mW].

1.2 Континуални системи

24. За следеће системе испитати да ли су стабилни у *BIBO* смислу, линеарни, временски инваријантни, са меморијом и каузални:

(а) $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t-kT)$,

(б) $y(t) = \sqrt{2}x(t)$,

(в) $y(t) = t\,(x(t-1))^2$,

(г) $y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

(д) $y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$,

(ђ) $y(t) = t\mathrm{e}^{x(t)-t}\,\mathrm{u}(t)$,

где је $y(t) = \mathrm{O}\{x(t)\}$ одзив посматраног система.

<u>Решење</u>: Поновимо особине система и њихове дефиниције

- Систем је *линеаран* уколико је *адитиван* и *хомоген*. Систем је адитиван уколико је одзив на збир два улаза једнак збиру одзива на сваки од улаза појединачно, $\mathrm{O}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathrm{O}\{x_1(t)\} + \mathrm{O}\{x_2(t)\}$. Систем је хомоген ако је одзив на умножак улаза и константе једнак производу одзива и константе, односно $\mathrm{O}\{kx(t)\} = k\mathrm{O}\{x(t)\}$, $k = \mathrm{const}$. У општем случају, систем је линеаран уколико важи принцип суперпозиције

$$\mathrm{O}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = a\mathrm{O}\{x_1(t)\} + b\mathrm{O}\{x_2(t)\}, \qquad \forall a,b = \mathrm{const}. \tag{24.1}$$

- Систем је *стабилан у BIBO смислу* (енг. *Bounded Input Bounded Output*) уколико сваки ограничен улаз доводи до ограниченог излаза. Односно, уколико је побуда ограничена са $B_\mathrm{x} \geqslant 0$, тако да је $|x(t)| < B_\mathrm{x}, \forall t$, онда је систем стабилан у BIBO смислу ако је и одзив ограничен, односно постоји B_y такво да је $|y(t)| < B_\mathrm{y}, \forall t$. Предикатском логиком ово се може записати и као

$$(\exists B_\mathrm{x})(\forall t)(|x(t)| < B_x) \Rightarrow (\exists B_\mathrm{y})(\forall t)(|\mathrm{O}\{x(t)\}| < B_y). \tag{24.2}$$

Важно је нагласити да је дати исказ импликација, односно код *BIBO* стабилних система може се десити да неограничена побуда доводи до неограниченог одзива или да неограничена побуда доводи до ограниченог одзива. Такође, често је могуће показати да систем није стабилан одређивањем контрапримера, односно, испитивањем исказа контрапозиције.

- Систем је *стационаран* (тј. временски инваријантан/непроменљив) уколико транслација побуде у времену доводи до исте транслације одзива у времену:

$$y(t) = \mathrm{O}\{x(t)\} \Rightarrow y(t-\tau) = \mathrm{O}\{x(t-\tau)\}. \tag{24.3}$$

  Стационарност система се често може испитати уверавањем да ли систем на неки начин препознаје апсолутно време - односно да ли његов одзив експлицитно зависи од времена.

- За систем се каже да *нема меморију* уколико тренутна вредност одзива зависи само од тренутне вредности улаза, односно, нема особину *меморисања* претходних вредности улаза. Иначе, систем је са меморијом.

- За систем се каже да је *каузалан* уколико тренутна вредност одзива не зависи од будућих вредности улаза. Сваки систем који постоји у природи, или који може да се реализује, је каузалан.

(а)

- Линеарност испитујемо испитивањем суперпозиције $\mathrm{O}\{ax_1(t)+bx_2(t)\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} ax_1(t-kT) + bx_2(t-kT) = a\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_1(t-kT) + b\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_2(t-kT) = a\mathrm{O}\{x_1(t)\} + b\mathrm{O}\{x_2(t)\}$, што значи да систем јесте линеаран. ✓
- Претпоставимо да је ограничена побуда $x(t)=1$, онда је одзив $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1 \to \infty$, па је одзив неограничен па систем није стабилан у *BIBO* смислу. ×
- Пошто чланови суме за $k>0$ за вредност одзива у тренутку t користе вредност побуде у тренуцима $t-kT<t$ (односно у прошлости), систем је са меморијом. ×
- Пошто су сви чланови суме такви да је $t-kT \leqslant t$, систем је каузалан. Обратити пажњу да је ово последица одабира доње границе сумирања. ✓

(б)

- Испитивањем суперпозиције, $\mathrm{O}\{ax_1(t)+bx_2(t)\} = \sqrt{2}(ax_1(t)+bx_2(t)) = a\sqrt{2}x_1(t) + b\sqrt{2}x_2(t) = a\mathrm{O}\{x_1(t)\} + b\mathrm{O}\{x_2(t)\}$, закључује се да је систем линеаран. ✓
- Пошто је систем множење константом, ограниченост побуде имплицира ограниченост одзива, $B_y = \sqrt{2}B_\mathrm{x}$, па је систем стабилан у *BIBO* смислу. ✓
- Пошто транслација побуде доводи до транслације одзива, систем је стационаран. ✓
- Пошто је одзив у тренутку t пропорционалан вредности побуде у тренутку t, систем нема меморију. ×
- Пошто систем за рачунање тренутне вредности одзива „види“ само тренутну вредност побуде, он је каузалан. ✓

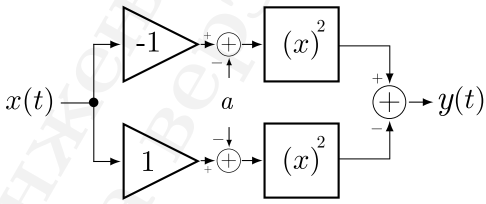
(в)

- Линеарност система не важи, будући да постоји квадрирање сигнала, што је нити адитивна нити хомогена операција. ×
- Размотримо сигнал $x(t)=1$, тада је $y(t)=t$, па је $y(\infty)\to\infty$ одзив неограничен, па систем није стабилан у *BIBO* смислу. ×
- Одзив у тренутку t зависи од тренутка $t-1$ тако да је дати систем са меморијом. ✓
- Пошто одзив у тренутку t не зависи од будућности, систем је каузалан. ✓

Примери (г), (д) и (ђ) се читаоцу остављају за вежбу. Коначни резултат приказан је табеларно.

	(а)	(б)	(в)	(г)	(д)	(ђ)
Линеаран	✓	✓		✓	✓	
Временски инваријантан	✓	✓			✓	
Са меморијом	✓		✓	✓	✓	
Стабилан		✓				✓
Каузалан	✓	✓	✓	✓		✓

25. У систему са слике употребљени су идеални појачавачи сигнала, суматори и блокови за квадрирање, а a је позната реална константа. Одредити (а) везу између излаза и улаза система. Испитати да ли је тај систем (б) линеаран, (в) са меморијом и (г) стабилан у *BIBO* смислу.



Слика 25.1

<u>Резултат</u>: (а) Тражена веза је $y(t) = 4ax(t)$. (б) Систем је линеаран, без меморије и стабилан.

26. Нека је дат континуалан систем диференцијалном једначином облика $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ay = x$, где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ побуда и одзив тога система редом, а a је позната реална константа. Одредити одзив на експоненцијалну побуду облика $\mathrm{e}^{bt}\,\mathrm{u}(t)$, (а) ако је $b \neq a$ и (б) $b = a$.

<u>Решење</u>: За $t < 0$ је одзив на побуду једнак нули, док се за $t > 0$ решава диференцијална једначина $y'(t) - ay(t) = \mathrm{e}^{bt}$. У општем случају, решење се састоји из *хомогеног* и *партикуларног* дела. Хомогени део се налази одређивањем корена карактеристичног полинома $P(\lambda) = \lambda - a$ па је $\lambda_0 = a$. Постоји само једна карактеристична функција па је облик хомогеног дела одзива $y_{\mathrm{h}}(t) = A\mathrm{e}^{at}$, за произвољну вредност константе A. Партикуларни део експоненцијалне побуде се тражи у експоненцијалном облику[12], па је $y_{\mathrm{p}} = B\mathrm{e}^{bt}$, заменом у полазну једначину добија се:

$$Bb\cancel{\mathrm{e}^{bt}} - aB\cancel{\mathrm{e}^{bt}} = \cancel{\mathrm{e}^{bt}} \Rightarrow B = \frac{1}{b-a}. \tag{26.1}$$

Комплетан облик одзива је онда облика $y(t) = A\mathrm{e}^{at} + \frac{1}{b-a}\mathrm{e}^{bt}$. Будући да је побуда ограничена то је одзив непрекидан па је $y(0^+) = 0$ одакле се налази константа A, па је $A = \frac{1}{a-b}$, коначно се добија да је одзив на тражену побуду:

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{b-a}. \tag{26.2}$$

(б) Проблем дељења нулом када је $b = a$ се може решити тражењем граничне вредности. Узмимо да је $b = a + \varepsilon$ и заменимо у резултат 26.2, одатле се сређивањем даље има

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{(a+\varepsilon)t} - \mathrm{e}^{at}}{\cancel{a} + \varepsilon - \cancel{a}} = \mathrm{e}^{at}\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon t} - 1}{\varepsilon}. \tag{26.3}$$

[12]То је природно за очекивати, будући да је експоненцијална функција једина сразмерна своме изводу.

Будући да је $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\varepsilon t}-1}{\varepsilon}=t$ одзив у траженом случају ће бити коначно $y(t)=t\mathrm{e}^{at}$.

У општем случају, генерализацијом поступка који је дат у овом задатку, показује се да је партикуларни део решења диференцијалне једначине $P(\mathrm{D})y(t)=x(t)$, за експоненцијалну побуду $x(t)=\mathrm{e}^{at}\mathrm{u}(t)$, дат у облику $y_{\mathrm{p}}(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{at}}{P(a)}$, ако је $P(a)\neq 0$.

Уколико је a једностуки корен полинома P, онда је партикуларни део у облику $y_{\mathrm{p}}=\dfrac{t\mathrm{e}^{at}}{P'(a)}$, а кажемо да побуда „погађа" резонансу система првог реда.

Ако је a вишеструки корен полинома P, вишеструкости s, онда је партикуларни део у облику $y_{\mathrm{p}}=\dfrac{t^{s}\mathrm{e}^{at}}{P^{(s)}(a)}$.

27. Нека је систем описан диференцијалном једначином у облику $P(\mathrm{D})\,y(t)=x(t)$, где су $x(t)$ и $y(t)$ побуда и одзив тог система редом, а $P(\mathrm{D})$ је оператор дат полиномом са реалним коефицијентима по оператору диференцирања $\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Полазећи од формуле одзива за експоненцијалну побуду, облика $y_{\mathrm{p}}=\dfrac{\mathrm{e}^{at}}{P(a)}$, одредити партикуларни део одзива на нерезонантну побуду када је она простопериодична, облика (а) $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ и (б) $x(t)=\sin(\omega_0 t)$.

<u>Решење:</u> Приметимо да је $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$. Мотивисани том примедбом, размотримо побуду комплексним сигналом облика: $\underline{x}(t)=x_{\mathrm{r}}(t)+\mathrm{j}x_{\mathrm{i}}(t)$. Заменом је одзив на такву побуду у облику: $\underline{y}(t)=P(\mathrm{D})\underline{x}=P(\mathrm{D})x_{\mathrm{r}}(t)+\mathrm{j}P(\mathrm{D})x_{\mathrm{i}}(t)$, односно, може се тврдити да је $\mathbb{R}\mathrm{e}\left\{\underline{y}(t)\right\}=\mathbb{R}\mathrm{e}\left\{P(\mathrm{D})\underline{x}\right\}$, односно, $\mathbb{I}\mathrm{m}\left\{\underline{y}(t)\right\}=\mathbb{I}\mathrm{m}\left\{P(\mathrm{D})\underline{x}\right\}$. Другим речима, реални део побуде побуђује само реални део одзива, док имагинарни део побуде побуђује само имагинарни део одзива.

На овом резултату можемо да темељимо поступак одређивања одзива на побуде облика $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$, полазећи од одзива на експоненцијалну побуду $\mathrm{e}^{\underline{s}t}$, $\underline{s}=\mathrm{j}\omega$, користећи резултат да је $\underline{y}_{\mathrm{p}}(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{\underline{s}t}}{P(\underline{s})}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{P(\mathrm{j}\omega_0)}$, одакле се налазе партикуларни делови одзива за побуде облика $\cos(\omega_0 t)$ и $\sin(\omega_0 t)$ као:

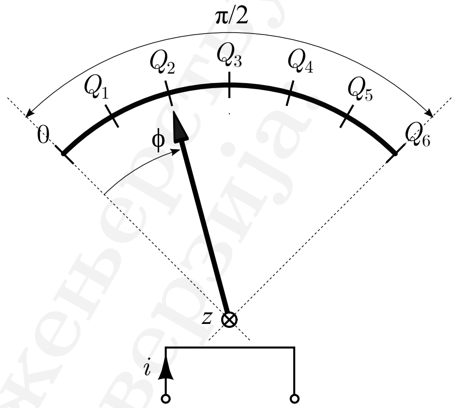
$$y_{\mathrm{p}}^{(\cos)}(t)=\mathbb{R}\mathrm{e}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{P(\mathrm{j}\omega_0)}\right\}=\mathbb{R}\mathrm{e}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{|P(\mathrm{j}\omega_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg P(\mathrm{j}\omega_0)}}\right\}=\frac{\cos\bigl(\omega_0 t-\arg P(\mathrm{j}\omega_0)\bigr)}{|P(\mathrm{j}\omega_0)|};\text{ и}\tag{27.1}$$

$$y_{\mathrm{p}}^{(\sin)}(t)=\mathbb{I}\mathrm{m}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{P(\mathrm{j}\omega_0)}\right\}=\mathbb{I}\mathrm{m}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{|P(\mathrm{j}\omega_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg P(\mathrm{j}\omega_0)}}\right\}=\frac{\sin\bigl(\omega_0 t-\arg P(\mathrm{j}\omega_0)\bigr)}{|P(\mathrm{j}\omega_0)|},\tag{27.2}$$

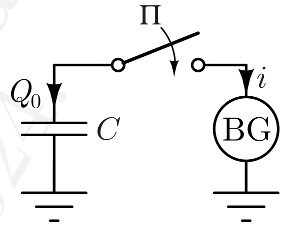
којом приликом је расписан карактеристични полином у комплексном поларном облику,

$P(\mathrm{j}\omega_0) = |P(\mathrm{j}\omega_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg P(\mathrm{j}\omega_0)}$, а коришћено је и $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}/\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg P(\mathrm{j}\omega_0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_0 t - \arg P(\mathrm{j}\omega_0)\right)}$.

***28.** На слици 28.1 је приказана једна конструкција балистичког галванометра (БГ), инструмента за мерење протока наелектрисања. Казаљка инструмента може да прави угаони отклон у границама $0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Веза између струје, $i = i(t)$, на једином електричном приступу БГ и угаоног отклона казаљке, $\phi = \phi(t)$, дата је диференцијалном једначином $J\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + F\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + K\phi = \alpha i$, при чему је познато $J = 6\ \left[\mathrm{s}^2\right]$, $F = 24$ [s], $K = 24$ и $\alpha = \pi\mathrm{e}\ \left[\frac{1}{\mu\mathrm{A}}\right]$, где је e основа природног логаритма. Сматрати да се тај приступ БГ, у електричном смислу, понаша као савршен кратак спој. Инструмент се калибрише на основу огледа са слике 2. Непосредно пре затварања прекидача, кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q_0 = 1$ [μC] а казаљка БГ мирује у нултом положају, $\phi = 0$. (а) Решавањем у временском домену одредити кретање казаљке, $\phi(t)$, по затварању прекидача до успостављања новог стационарног стања. (б) Скицирати временски дијаграм $\phi(t)$.



Слика 28.1



Слика 28.2

(в) Израчунати вредности једнако размакнутих подеока са слике 1, Q_1, Q_2, ..., Q_6, ако се као показивање инструмента (односно, количина наелектрисања протекла у импулсу) очитава вредност на коју показује казаљка у тренутку када је најдаље од нултог подеока током свог кретања.

Решење: На основу резултата задатка 4, струја која протиче кроз БГ по затварању прекидача је $i(t) = Q_0\delta(t)$. Та импулсна побуда побуђује разматрани систем па је потребно потражити одзив на побуду.

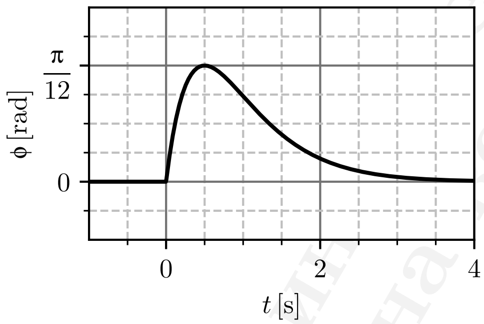
Карактеристични полином диференцијалне једначине система је $P(\lambda) = J\lambda^2 + F\lambda + K$, корени карактеристичног полинома потражују се из обрасца решења квадратне једначине као $\lambda_{1,2} = \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4JK}}{2J}$. Заменом бројних вредности установљава се да постоји *двоструки* реални корен $\lambda_0 = -2\ \left[\mathrm{s}^{-1}\right]$. На основу тога, општи облик одзива на импулсну побуду се може записати у облику

$$\phi(t) = (\Phi_0 + \Phi_1 t)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}, \quad \text{где су } \Phi_0 \text{ и } \Phi_1 \text{ произвољне константе} \tag{28.1}$$

Користећи поступак за одређивање одзива на импулсну побуду из додатка B, закључујемо да одзив треба да има прекид у изводу првог реда, а да су остали изводи непрекидни. На основу тога је $\phi(0^+) = 0$ и $\phi'(0^+) = \frac{\alpha Q_0}{J}$.

Из израза (28.1) је $\phi'(0^+) = \Phi_0$ па је $\Phi_0 = 0$. Имајући то у виду, први извод отклона казаљке у нули је $\phi'(t) = \Phi_1\mathrm{e}^{\lambda_0 t}(\lambda_0 t + 1) \Rightarrow \phi'(0^+) = \Phi_1$, одакле се налази да је $\Phi_1 = \frac{\alpha Q_0}{J}$, па је $\Phi_1 = \frac{\pi\mathrm{e}}{6}\ \left[\mathrm{s}^{-1}\right]$. Коначно је тражени облик угаоног отклона казаљке дат изразом, $\phi(t) = \frac{\alpha Q_0}{J}t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, односно бројевно $\phi(t) = \frac{\pi\mathrm{e}}{6}\ \left[\mathrm{s}^{-1}\right] t\mathrm{e}^{-2\left[\mathrm{s}^{-1}\right]t}$.

(б) За цртање временског дијаграма најважнија је максималну тренутну вредност сигнала, будући да се она користи у другом делу задатка. нуле првог извода налазе се из ранијег резултата $\phi'(t) = \Phi_1 e^{\lambda_0 t_\mathrm{m}}(\lambda_0 t_\mathrm{m} + 1) = 0$ одакле је $t_\mathrm{m} = -\dfrac{1}{\lambda_0} = \dfrac{1}{2}$ [s] а максимална вредност је $\phi_\mathrm{m} = \dfrac{\pi}{12}$ [rad]. Додатно, могуће је одредити и тачку превоја за прецизније цртање, решавањем $\phi''(t) = 0$ добија се да је тренутак превоја $t_\pi = 1$ [s]. Временски дијаграм тог резултата приказан је на слици 28.3.



Слика 28.3

(в) Пошто је дати систем линеаран (описан је линеарном диференцијалном једначином), важи да уколико је побуда 1 [μC] $\delta(t)$ произвела одзив $\phi(t)$, онда ће побуда облика k [μC] $\delta(t)$ произвести одзив облика $k\phi(t)$. Пошто је $\max k\phi(t) = k \max \phi(t) = \dfrac{k\pi}{12}$, а подеоци размакнути за по тачно $\dfrac{\pi}{12}$, то подеоци треба да буду $Q_k = k$ [μC].

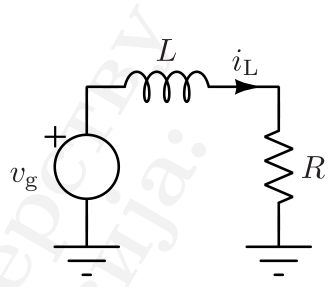
29. Континуалан систем је диференцијалном једначином у облику

$$(\mathrm{D} + 1)y(t) = x(t),$$

где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ побуда и одзив тога система, а $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ је оператор диференцирања. Познат је преиницијални услов одзива $y(0^-) = 1$. Побуда је дата изразом $x(t) = \cos(t)\mathrm{u}(t)$. Одредити сопствени ($y_\mathrm{a}$), принудни ($y_\mathrm{f}$), комплетни ($y$), прелазни ($y_\mathrm{t}$), и устаљени ($y_\mathrm{ss}$) одзив система за задату побуду.

<u>Резултат</u>: Видети и задатак . $y_\mathrm{a} = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)$, $y_\mathrm{f} = \left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{u}(t)$, $y = \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{u}(t)$, $y_\mathrm{t} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)$, $y_\mathrm{ss} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

30. У колу са слике познато је $L = 1$ [mH] и $R = 50$ [Ω]. У почетном тренутку струја калема је $i_L(0^-) = 0{,}5$ [mA]. Напон побудног генератора је облика $v_\mathrm{g}(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$, где су $V_\mathrm{m} = 1$ [V] и $\omega = 10^6 \left[\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$. Као одзив се посматра струја калема на отпорнику $i_L = i_L(t)$. Одредити (а) одзив на почетне услове, (б) одзив на побуду, (в) комплетан одзив и (г) устаљени одзив.



Слика 30.1

Решење: Диференцијална једначина која описује систем је

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = v_\mathrm{g}. \tag{30.1}$$

Њој одговара карактеристични полином $P(\lambda) = R + L\lambda$ који има само један реалан корен $\lambda_0 = -\dfrac{R}{L} = -5\times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$. Хомогени део решења ове диференцијалне једначине је стога $i_{L,\mathrm{h}}(t) = I_0\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, где је I_0 произвољна константа. Партикуларни део се може одредити помоћу поступка показаног за нерезонантну синусоидалну побуду у задатку 27, према

$$i_{L,\mathrm{p}} = \mathbb{Im}\left\{\frac{V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{P(\mathrm{j}\omega)}\right\} = \mathbb{Im}\left\{\frac{V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{R+\mathrm{j}\omega L}\right\} = V_\mathrm{m}\frac{R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)}{R^2 + (\omega L)^2}. \tag{30.2}$$

Коначно, опште решење за струју калема је

$$i_L(t) = \underbrace{I_0\mathrm{e}^{\lambda_0 t}}_{\text{Хомогени део}} + \underbrace{V_\mathrm{m}\frac{R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Партикуларни део}}. \tag{30.3}$$

(а) Одзив на почетне услове налази се само на основу хомогеног дела, помоћу почетних услова. Добија се

$$i_{L1}(t) = I_{01}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \Rightarrow i_{L1}(0^-) = I_{01}\cancelto{1}{\mathrm{e}^{\lambda_0\cdot 0}} \Rightarrow I_{01} = 0{,}5\ [\mathrm{mA}]\,.$$

Тако да је одзив на почетне услове $i_{L1}(t) = 0{,}5$ [mA] $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$.

(б) Одзив на побуду, одређује се заменом постиницијалних почетних услова у опште решење диференцијалне једначине. Приликом тражења одзива на побуду претпоставља се да су сви преиницијални услови равни нули. Додатно, уколико у десној страни нема Дираковних импулса онда су све функције $i_L(t), i'_L(t), i''_L(t), \ldots, i_L^{(n-1)}(t)$ непрекидне, па су стога и постиницијални услови равни нули. У том облику тражи се *другачија* константа за хомогени део.

$$\underbrace{i_{L2}(0^+) = 0}_{\text{Постиницијални услов}} = \underbrace{I_{02}\mathrm{e}^{\lambda_0\cdot 0}}_{\text{Хомогени део}} + \underbrace{V_\mathrm{m}\frac{R\sin(\omega\cdot 0) - \omega L\cos(\omega\cdot 0)}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Партикуларни део}} = I_{02} - \frac{\omega L V_\mathrm{m}}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \tag{30.4}$$
$$= I_{02} \approx 1\ [\mathrm{mA}]\,.$$

Тако да је одзив побуду: $i_{L2}(t) \approx 1$ [mA] $\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + 50$ [μA] $\sin(\omega t) - 1$ [mA] $\cos(\omega t)$.

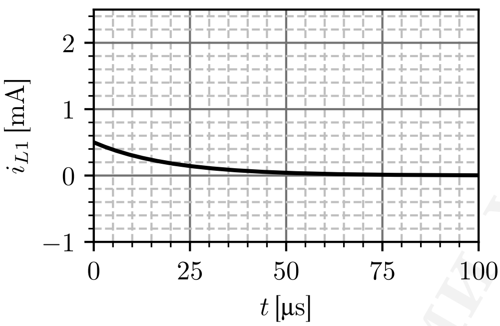
(в) На основу суперпозиције, комплетан одзив добија се сабирањем одзива на почетне услове и одзива на побуду. Коначан резултат је валидан од тренутка $t = 0$ услед чега се дописује одскочна функција. Коначно је комплетан одзив:

$$i_L(t) \approx \left(1{,}5\ [\mathrm{mA}]\ \mathrm{e}^{\lambda_0 t} + 50\ [\mu\mathrm{A}]\ \sin(\omega t) - 1\ [\mathrm{mA}]\ \cos(\omega t)\right) \mathrm{u}(t). \tag{30.5}$$

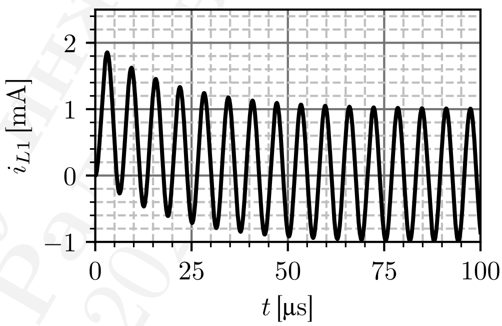
Приметимо да у овом изразу постоји члан добијен из хомогеног дела који је побуђен напонским генератором.

(г) Након довољно дугог времена, чланови хомогеног дела који представљају прелазни режим ишчезавају будући да је $e^{\lambda_0 t} \to 0$ јер је $\lambda_0 < 0$, након чега преостаје устаљени одзив

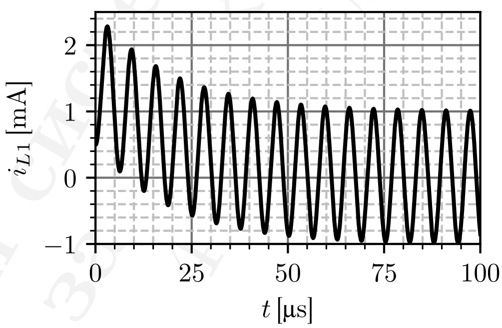
$$i_{L,\mathrm{ss}}(t) \approx 50\ [\mu\mathrm{A}]\ \sin(\omega t) - 1\ [\mathrm{mA}]\ \cos(\omega t). \tag{30.6}$$



(а) Сопствени одзив.



(б) Одзив на побуду.

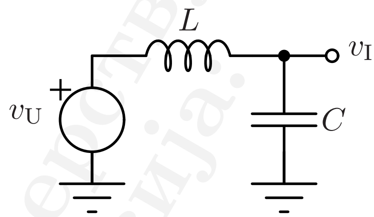


(в) Комплетан одзив

Слика 30.2

Добијени резултати су нацртани на дијаграмима на слици 30.2.

***31.** У колу са слике познати су $L = 100$ [μH] и $C = 1$ [μF]. У почетном тренутку у колу нема акумулисане енергије. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_\mathrm{U} = v_\mathrm{U}(t)$ а излаз напон у колу $v_\mathrm{I} = v_\mathrm{I}(t)$. Познато је $v_\mathrm{I}(t < 0) = 0$ а побуда је у облику $v_\mathrm{U}(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$, где је $V_\mathrm{m} = 10$ [mV]. Одредити и скицирати напон на излазу система када је кружна учестаност побудног генератора (а) $\omega = 10^3 \left[\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$ и (б) $\omega = 10^5 \left[\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$. За учестаност из тачке (б) скицирати и (в) дијаграм снаге коју улаже напонски генератор у колу $p_\mathrm{g} = p_\mathrm{g}(t)$.



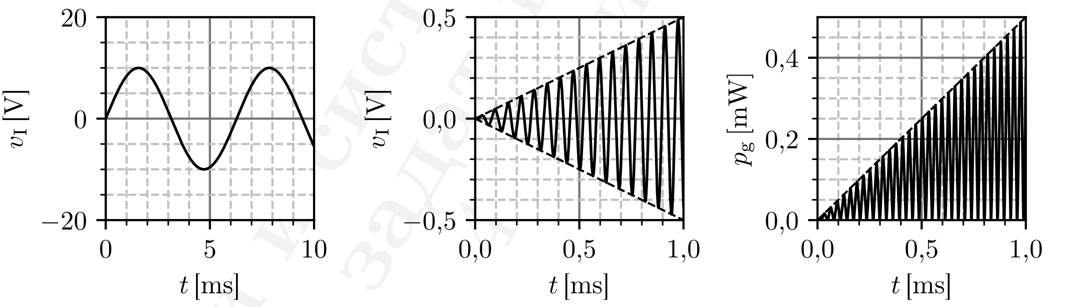
Слика 31.1

<u>Резултат</u>:

(а) Тражени одзив је $v_\mathrm{I}(t) = 10\ [\mathrm{mV}]\sin(\omega t)$. Резултат је приказан на слици 31.2а.

(б) Тражени одзив је $v_\mathrm{I}(t) = -0{,}5 \left[\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{ms}}\right] t\cos(\omega t)$. Резултат је приказан на слици 31.2б.

(в) Тражена снага је $p_\mathrm{g} \approx 250 \left[\dfrac{\mu\mathrm{W}}{\mathrm{ms}}\right] t\big(1+\cos(2\omega t)\big)$. Резултат је приказан на слици 31.2в.



(а) (б) (в)

Слика 31.2

32. Нека је дат систем једначина
$$\begin{cases} \left(\mathrm{D}^2 + \dfrac{1}{25}\right) g(t) = x(t) \\ y(t) = g(t)\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t - kT - \tau) \end{cases}$$
, где је $T = 10\pi$, а D је оператор диференцирања. Дати систем једначина описује каузалан *LTI* систем чији је једини улаз $x(t)$ а једини излаз $y(t)$. Израчунати **минималну** вредност параметра $\tau > 0$ тако да је посматрани систем стабилан у *BIBO* смислу.

<u>Решење</u>: Стабилност система испитујемо испитивањем апсолутне интеграбилности импулсног одзива $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\mathrm{d}t < \infty$, дакле за $x(t) = \delta(t)$. Прво одређујемо одзив $g(t)$ у том случају, решавањем $\left(\mathrm{D}^2 + \frac{1}{25}\right) g(t) = \delta(t)$, чиме се добија $g(t) = 5\sin\left(\frac{t}{5}\right)\mathrm{u}(t)$, одакле се заменом у израз за $y(t)$ добија импулсни одзив:

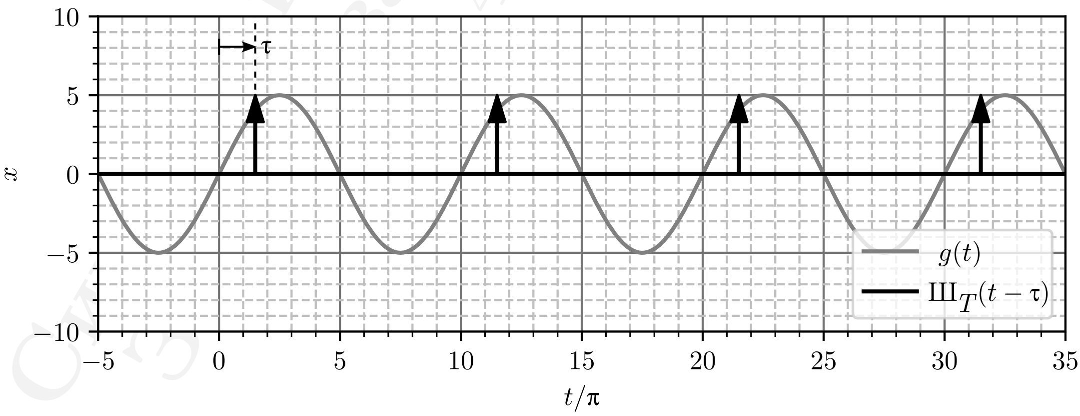
$$h(t) = 5\sin\left(\frac{t}{5}\right)\mathrm{u}(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} 5\sin\left(\frac{kT+\tau}{5}\right)\delta(t - kT - \tau). \tag{32.1}$$

Услов стабилности се може онда изразити као

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\mathrm{d}t = \left|\sum_{k=0}^{\infty} 5\sin\left(\frac{kT+\tau}{5}\right)\right| < \infty. \tag{32.2}$$

Једини начин на који је могуће да добијена сума конвергира јесте да је $\sin\left(\frac{kT+\tau}{5}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\tau}{5}\right) = 0$ за све $k \in \mathbb{N}$, односно, треба да буде $\frac{\tau}{5} = m\pi$, где је $m \in \mathbb{Z}$. Коначно, минимално $\tau > 0$ које задовољава наведени услов јесте $\tau = 5\pi$, а минимално позитивно решење је када је $\tau = 5\pi$.

Други део поступка може се размотрити и графички. На слици 32.1 приказан је одређени импулсни одзив $g(t)$. У изразу (32.1) може се препознати други члан као $Ш_T(t-\tau)$, односно, импулсни одзив система је $h(t) = g(t) \cdot Ш_T(t-\tau)$, што је илустровано на слици 32.1. Пошто су периоди функције $g(t)$ и функције $Ш_T(t-\tau)$ исти, прираштај интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\mathrm{d}t$ је увек исти за сваки делта импулс, то значи да ће тај интеграл бити коначан само ако делта импулси „гађају“ нуле функције $g(t)$, што се дешава када је $\tau = kT/2 = 5k\pi$.



Слика 32.1

Конволуција континуалних сигнала

33. Дати су сигнали $x = x(t)$ који се доводе на улаз система чији је импулсни одзив дат изразом $h = h(t)$. Одредити принудни одзив у случајевима:

(а) $x(t) = \mathrm{u}(t)$, $h(t) = \delta(t - T)$, $T \in \mathbb{R}$

(б) $x(t) = \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{u}(t)$, где су $a,b \in \mathbb{R}_0^+$ и $a \neq b$

(в) $x(t) = t^k\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{u}(t)$, где је $k \neq -1$.

(г) $x(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t - T)$, $h(t) = x(t)$, где је $T \in \mathbb{R}^+$.

<u>Решење:</u> Принудни одзив система (одзив система на побуду) одређен је конволуцијом побуде $x(t)$ и импулсног одзива $h(t)$, што је одређено конволуционим интегралом

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{33.1}$$

(а) Заменом датих сигнала у (33.1) добија се $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\tau)\,\underbrace{\delta(t - \tau - T)}_{\tau = t - T}\,\mathrm{d}\tau$. Овај интеграл је исказ својства еквиваленције Дираковог импуса, па је $y(t) = \mathrm{u}(t - T)$. Такође, приметимо да је систем чији је импулсни одзив $\delta(t - T)$ систем за кашњење за време T, што је конзистентно са добијеним резултатом.

(б) Заменом датих сигнала у (33.1) добија се $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a\tau}\mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{e}^{-b(t-\tau)}\mathrm{u}(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$. У овом интегралу, Хевисајдова одскочна функција намеће границе интегације, будући да је $\mathrm{u}(\tau) \cdot \mathrm{u}(t - \tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$. Одатле се има, да је подинтегрална величина једнака нули за $t < 0$, па је $y(t < 0) = 0$, док је за $t > 0$ одзив једнак $y(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}\,\mathrm{e}^{-b(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{(b-a)\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}}{a - b}$. Узимајући у обзир оба резултата (и за $t < 0$ и за $t > 0$), коначно се може записати $y(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}}{a - b}\,\mathrm{u}(t)$.

Читаоцу се препоручује да тачку понови у случају када је $a = b$.

(в) Слично као у претходној тачки, и у овом случају Хевисајдова одскочна функција намеће границе интеграције, па се има $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tau^k \mathrm{u}(\tau)\,\mathrm{u}(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \tau^k\,\mathrm{d}\tau = \frac{t^{k+1}}{k + 1}\,\mathrm{u}(t)$.

Такође, приметимо да, пошто је $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{u}(t)$, то онда систем чији је импулсни одзив $\mathrm{u}(t)$ мора представљати интегратор.

(г) Тачка се оставља читаоцу за вежбу, коначан резултат је $y(t) = T\,\mathrm{tri}\left(\dfrac{t}{T} - 1\right)$.

34. Нека је познат импулсни одзив $h(t)$ неког линеарног временски инваријантног система.

У зависности од тог импулсног одзива, дискутовати стабилност тог система у BIBO смислу.

<u>Решење</u>: Одзив LTI система на произвољну побуду $x(t)$ може се изразити помоћу конволуције као $y(t) = x(t) * h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Претпоставимо да је побудни сигнал апсолутно ограничен као $|x(t)| \leqslant B_x$, за неко ограничење B_x, онда се има[13]

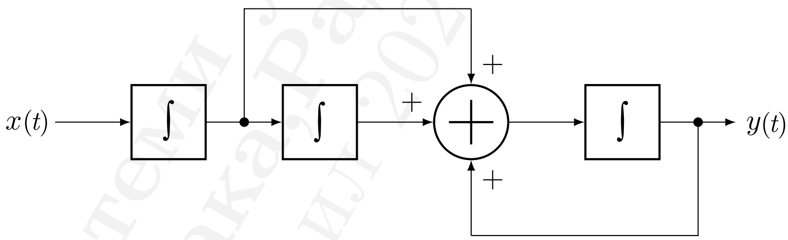
$$|y(t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant B_\mathrm{x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau = B_y. \qquad (34.1)$$

Одатле се има да је потребан и довољан услов да је и одзив ограничен $B_y < \infty$, дат у облику

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty. \qquad (34.2)$$

Коначно, LTI систем чији је импулсни одзив $h(t)$ је стабилан у BIBO смислу ако и само ако је импулсни одзив апсолутно интеграбилан, односно ако важи услов (34.2).

35. У систему са слике употребљени су идеални блокови за интеграљење и сумаротри. Улаз система је континуалан сигнал $x = x(t)$ а излаз је континуалан сигнал $y = y(t)$.



Слика 35.1

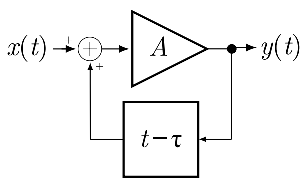
(а) Описати систем одговарајућом диференцијалном једначином,

(б) одредити импулсни одзив тог система, $h(t)$, и

(в) испитати стабилност тог система у *BIBO* смислу.

<u>Резултат</u> (а) $(\mathrm{D}^3 - \mathrm{D}^2)y(t) = (\mathrm{D}+1)x(t)$, (б) $h(t) = \left(-2 - t + 2\mathrm{e}^t\right)\mathrm{u}(t)$. (в) Систем није *BIBO* стабилан.

36. На слици је приказан континуалан систем у коме је употребљен идеални појачавач појачања $A \in \mathbb{R}$ и идеални блок за кашњење кашњења $\tau > 0$. Посматра се систем чији је једини улаз сигнал $x = x(t)$ а једини излаз сигнал $y = y(t)$.



Слика 36.1

(а) Одредити израз за импулсни одзив посматраног система, $h(t)$, и скицирати његов временски дијаграм у интервалу $0 \leqslant t \leqslant 5\tau$.

[13] Примењује се и *неједнакост троугла* у интегралној форми $\left|\int\limits_I f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_I |f(x)|\mathrm{d}x$.

(б) Полазећи од резултата претходне тачке, испитати BIBO стабилност посматраног система у зависности од параметара A и τ.

(в) За вредност параметра $A = 1$, скицирати временски дијаграм одзива датог система на побуду $x(t) = \sin(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$, где је $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{\tau}$.

<u>Решење:</u> (а) Означимо оператор кашњења за време τ са T_τ, односно $\mathrm{T}_\tau x(t) = x(t-\tau)$. Веза између улазног и излазног сигнала се може онда записати као $y = A(x + \mathrm{T}_\tau y)$, одакле се сређивањем добија $y = \dfrac{A}{1 - A\mathrm{T}_\tau}x$, одакле је оператор система непосредно $\mathrm{L} = \dfrac{A}{1 - A\mathrm{T}_\tau}$.

I начин Добијени оператор се може итеративно развити у ред по оператору T_τ, поступком:

$$\mathrm{L} = \frac{A}{1 - A\mathrm{T}_\tau} = \frac{A \overbrace{- A^2\mathrm{T}_\tau + A^2\mathrm{T}_\tau}^{+0}}{1 - A\mathrm{T}_\tau} = A + A\mathrm{T}_\tau \overbrace{\frac{A}{1 - A\mathrm{T}_\tau}}^{\mathrm{L}} \dots \tag{36.1}$$

$$= A + A^2T_\tau^2 + A^3T_\tau^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} A^k T_\tau^{k-1} \tag{36.2}$$

II начин по аналогији са изразом за суму геометријског реда,

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \tag{36.3}$$

без упуштања у питања конвергенције, може се приметити да се добијени оператор може изразити као:

$$\mathrm{L} = A \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{A\mathrm{T}_\tau}_{q}} = A(1 + A\mathrm{T}_\tau + A^2\mathrm{T}_\tau^2 + \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k T_\tau^{k-1} \tag{36.4}$$

Оба предложена начина, дати изразима (36.2) и (36.4) дају исти резултат, па се импулсни одзив на основу тога може добити непосредно директном применом оператора као

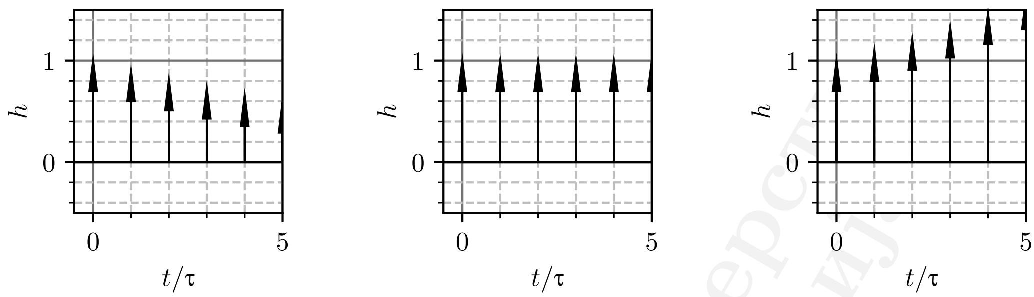
$$h(t) = \mathrm{L}\delta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k T_\tau^{k-1}\delta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \delta(t - (k-1)\tau), \tag{36.5}$$

којом приликом је искоришћено да је $\mathrm{T}_\tau^k = \mathrm{T}_{k\tau}$, што је тачно у конкретном случају система за кашњење. Импулсни одзив стога представља поворку Диракових импулса на положајима $(k-1)\tau$, сваки мере A^k, за $k \in \mathbb{N}$. У зависности од тога да ли је параметар $A > 0$ већи, мањи, или једнак 1, разликују се три случаја за скицирање графика.

У случају када је $A < 0$ такође раздвајамо ова три случаја, али онда су импулсни на непарним местима усмерени наниже.

(б) Стабилност датог система може се испитати на начин описан у задатку 34, испитивањем конвергенције интеграла апсолутне вредности импулсног одзива, односно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} A^k \delta(t - (k-1)\tau) \right| \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} |A|^k \cancelto{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - (k-1)\tau)t\,\mathrm{d}t} \tag{36.6}$$



(а) $A < 1$ (б) $A = 1$ (в) $A > 1$

Слика 36.2

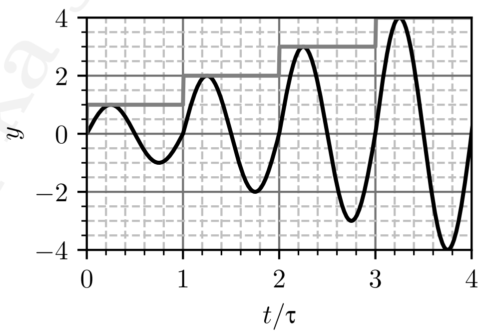
Систем је BIBO стабилан дакле у случају да је израз $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |A|^k$ конвергентан, што је сума геометријског реда, па је услов конвергенције да је $|A| < 1$. Закључујемо, систем је стабилан у BIBO смислу ако је $|A| < 1$, а нестабилан уколико је $|A| \geqslant 1$.

(в) У случају када је $A = 1$, оператор таквог система има облик $\mathrm{L} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_\tau^k$, па се одзив на побуду $x(t) = \sin(2\pi t/\tau)\,\mathrm{u}(t)$ може добити као:

$$y(t) = \mathrm{L}x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_\tau^k \sin(2\pi t/\tau)\,\mathrm{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(2\pi(t - k\tau)/\tau)\,\mathrm{u}(t - k\tau) \tag{36.7}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sin(2\pi t/\tau - 2\pi k)}_{\text{Периодичност } \sin}\,\mathrm{u}(t - k\tau) = \sin(2\pi t/\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{u}(t - k\tau). \tag{36.8}$$

Добијени члан који представља амплитуду синусоиде, периоде τ, мења се степенасто у тренуцима $k\tau$, тако да се график одзива може скицирати као што је приказано на слици 36.3. На слици је сивом бојом приказан сигнал $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{u}(t - k\tau)$ који представља степенасто мењање амплитуде синусоиде.



Слика 36.3

***37.** Посматра се систем првог реда чији је импулсни одзив дат изразом $h(t) = \mathrm{e}^{-at}\mathrm{u}(t)$, где је $a > 0$ позната константа. Одредити принудни одзив овог система на простопериодичну побуду облика (а) $x(t) = \cos(\omega_0 t)\mathrm{u}(t)$, односно (б) $x(t) = \sin(\omega_0 t)\mathrm{u}(t)$.

<u>Решење:</u> (а) Слична идеја се може искористити као у задатку 27, потраживањем одзива на комплексну експоненцијалну побуду $\underline{x}(t) = \cos(\omega_0 t) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$, помоћу конволуције $\underline{y}(t) = \underline{x}(t) * h(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} * \mathrm{e}^{-at}$ Добијена конволуција експоненцијалних сигнала одређују се као у задатку 33б, одакле се има $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} * \mathrm{e}^{-at} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-at}}{\mathrm{j}\omega_0 + a}$, па се онда појединачни одзиви простопериодичне побуде одређују растављањем овог израза до реалног и имагинарног дела. Израз у имениоцу запишимо у поларном облику[14] као $\mathrm{j}\omega_0 + a = \sqrt{\omega_0^2 + a^2}\exp(\mathrm{j}\psi)$, где је $\psi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega_0}{a}$. Заменом и даљим сређивањем добија се коначно

$$\underline{y}(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-at}}{\mathrm{j}\omega_0 + a} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-at}}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}\exp(\mathrm{j}\psi)} = \frac{\cos(\omega_0 t + \psi) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 t + \psi) - \mathrm{e}^{-at}\exp(-\mathrm{j}\psi)}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}} \tag{37.1}$$

$$= \underbrace{\frac{\cos(\omega_0 t + \psi) - \mathrm{e}^{-at}\cos(\psi)}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}}}_{\text{Реални део, Одзив на } \cos} + \mathrm{j}\underbrace{\frac{\sin(\omega_0 t + \psi) + \mathrm{e}^{-at}\sin(\psi)}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}}}_{\text{Имагинарни део, Одзив на } \sin}, \qquad \psi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{a}. \tag{37.2}$$

Уколико за тиме постоји потреба, члан уз e^{-at} може се даље расписати применом тригонометријских идентитета $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Преостало сређивање израза препушта се читаоцу.

38. Полазећи од дефиниције конволуције два континуална сигнала, $x = x(t)$ и $y = y(t)$, доказати да је $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(x * y)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{d}t\right)$, под условом да оба интеграла са десне стране конвергирају.

<u>Решење:</u> Конволуција по дефиницији је $x * y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$, па се заменом у дати интеграл има: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$. Добијени двојни интеграл може се решити техником раздвајања променљивих будући да су τ и t међусобно независни, чиме се има

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x * y)\,\mathrm{d}t = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{d}\tau \int_{\tau=-\infty}^{\infty} y(t-\tau)\mathrm{d}t = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathrm{d}\tau \int_{t=-\infty}^{\infty} y(t-\tau)\mathrm{d}(t-\tau) \tag{38.1}$$

[14]Користи се растављање комплексног броја у поларни облик $a + \mathrm{j}b = \sqrt{a^2+b^2}\exp(j\operatorname{arctg} b/a)$, за $a > 0$.

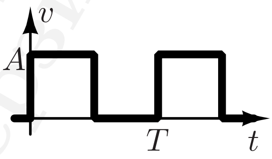
У првом интегралу у добијеном изразу може се извршити преименовање променљиве $\tau \mapsto t$, док је други интеграл заправо исказ смене $u = t - \tau$ чиме се не мењају границе интеграције па се добија коначно:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x * y)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\mathrm{d}t, \tag{38.2}$$

што је и требало доказати.

39. За периодичне сигнале са основним периодом T може се дефинисати операција *периодичне конволуције* као

$$x \circledast y = \int_{0}^{T} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$



Слика 39.1

Периодична поворка униполарних правоугаоних импулса једнаког трајања импулса и паузе, $v = v(t)$, приказана је на слици. Параметре A и сматрати познатим. Одредити $v \circledast v$.

<u>Резултат:</u> Тражени израз је $v \circledast v = \dfrac{A^2 T}{2} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{tri}\left(\frac{2(t-kT)}{T} - 1\right)$.

***40.** Отпорник отпорности $R = 50$ [Ω] прикључен је на идеалан генератор простопериодичног напона облика $v_{\mathrm{g}}(t) = V_{\mathrm{m}} \cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$, где су $V_{\mathrm{m}} = 10$ [V], $\omega_0 = 2\pi f$, и $f = 5$ [Hz]. Загревање отпорника описано је термичким процесом као LTI систем првог реда описан диференцијалном једначином $\tau \dfrac{\mathrm{d}(\theta - \theta_0)}{\mathrm{d}t} + (\theta - \theta_0) = R_\theta p_{\mathrm{R}}$, где је $\theta = \theta(t)$ тренутна температура отпорника, $p_R = p_R(t)$ тренутна снага отпорника, параметар $\tau = 100$ [ms] је временска константа тог термичког процеса, параметар $R_\theta = 20$ [°C/W] назива се термичком отпорношћу отпорника, а θ_0 је температура амбијента. (а) Ако је у почетном тренутку температура отпорника једнака температури амбијента $\theta(0) = \theta_0 = 25$ [°C], одредити снагу отпорника у зависности од времена, и скицирати њен график. (б) Израчунати амплитуду варијације температуре отпорника по успостављању устаљеног режима.

<u>Решење:</u> Тренутна снага отпорника одређена је изразом $p_R(t) = \dfrac{v_{\mathrm{g}}^2(t)}{R} = \dfrac{V_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(\omega_0 t)}{R}\mathrm{u}(t)$, што се може записати[15] као

$$p_R(t) = P_{\mathrm{m}}\big(1 + \cos(2\omega_0 t)\big)\,\mathrm{u}(t), \tag{40.1}$$

где је $P_{\mathrm{m}} = \dfrac{V_{\mathrm{m}}^2}{2R} = 1$ [W]. Овај сигнал представља побуду система датог диференцијалном једначином у задатку. Том приликом, за одзив система сматраћемо прираштај температуре отпорника у односу на температуру амбијента $\Delta\theta = \theta - \theta_0$. У наставку потражићемо импулсни одзив тог система.

Карактеристични полином дате диференцијалне једначине је $\tau\lambda + 1$, чији је једини корен $\lambda_0 = -1/\tau$, па је одговарајући импулсни одзив облика $h(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{u}(t)$. На основу поступка описаног у додатку В имамо да је $A = \dfrac{R_\theta}{\tau}$, одакле је импулсни одзив

$$h(t) = \frac{R_\theta}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{u}(t). \tag{40.2}$$

[15] Користи се тригонометријски идентитет: $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Одзив система на побуду налази се конволуцијом побуде (40.1) са одређеним импулсним одзивом (40.2) чиме се применом својстава дистрибутивности конволуције налази[16]:

$$\begin{aligned}\Delta\theta(t>0) = p_R(t) * h(t) =& P_\mathrm{m}\big(1+\cos(2\omega_0 t)\big) * \frac{R_\theta}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} && (40.3)\\ =& \frac{P_\mathrm{m}R_\theta}{\tau}\Big[\big(1+\cos(2\omega_0 t)\big) * \mathrm{e}^{-t/\tau}\Big] && (40.4)\\ =& \frac{P_\mathrm{m}R_\theta}{\tau}\Big[1 * \mathrm{e}^{-t/\tau} + \cos(2\omega_0 t) * \mathrm{e}^{-t/\tau}\Big]. && (40.5)\end{aligned}$$

Добијени конволуциони интеграли могу се израчунати на начин како је показано у задацима 33 и 37, чиме се добијају међурезултати

$$1 * \mathrm{e}^{-t/\tau} = \mathrm{e}^{0t} * \mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{\mathrm{e}^{0t} * \mathrm{e}^{-t/\tau}}{0-(-1/\tau)} = \tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}) \tag{40.6}$$

$$\cos(2\omega_0 t) * \mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{\cos(2\omega_0 t+\psi) - \mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\psi)}{\sqrt{4\omega_0^2+\tau^{-2}}}, \qquad \psi = \operatorname{arctg} 2\omega_0\tau. \tag{40.7}$$

Коначно, заменом у резултат (40.5) и даљим сређивањем има се:

$$\Delta\theta(t) = \frac{P_\mathrm{m}R_\theta}{\tau}\left[\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}) + \frac{\cos(2\omega_0 t+\psi) - \mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\psi)}{\sqrt{4\omega_0^2+\tau^{-2}}}\right]\mathrm{u}(t) \tag{40.8}$$

$$= P_\mathrm{m}R_\theta\left[(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}) + \frac{\cos(2\omega_0 t+\psi) - \mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\psi)}{\underbrace{\tau\sqrt{4\omega_0^2+\tau^{-2}}}_{1/n}}\right]\mathrm{u}(t) \tag{40.9}$$

$$= P_\mathrm{m}R_\theta\Big[(1-(1+n\cos(\psi))\mathrm{e}^{-t/\tau}) + n\cos(2\omega_0 t+\psi)\Big]\,\mathrm{u}(t), \qquad n = \frac{1}{\sqrt{(2\omega_0\tau)^2+1}}. \tag{40.10}$$

Заменом вредности датих у задатку су $P_\mathrm{m}R_\theta = 20°\mathrm{C}$, $\cos(\psi) \approx n \approx 8\%$, добија се приближни израз[17] за температуру отпорника $\theta(t) \approx 25°\mathrm{C} + 20°\mathrm{C}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau} - 8\%\sin(2\omega_0\mathrm{t}+\psi))$, чији график је приказан на слици 40.1.

(б) У устаљеном режиму, сматрамо да је $\mathrm{e}^{-at} \to 0$, док преостаје простопериодична компонента, тако да је устаљени одзив посматраног система дат као

$$\Delta\theta_\mathrm{ss}(t) = 20°\mathrm{C}(1-8\%\sin(2\omega_0\mathrm{t}+\psi)). \tag{40.11}$$

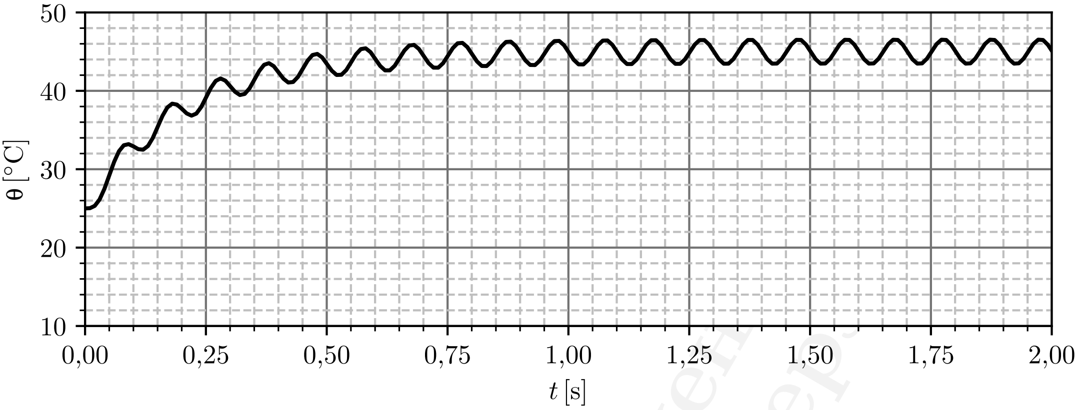
па је амплитуда ове варијације једнака $\theta_\mathrm{m} = 20°\mathrm{C}\cdot 8\% = 1{,}6°\mathrm{C}$.

****41.** Отпорност отпорника чија је толеранција 5% представља насумичну променљиву функције расподеле густине вероватноће, која се може сматрати да је униформна, у опсегу $\pm 5\%$ своје средње вредности R_0. (а) Одредити функцију расподеле густине вероватноће отпорности два таква редно везана отпорника, отпорности $R_0 = 1$ [kΩ]. (б) Упоредити добијену расподелу са расподелом једног отпорника отпорности $2R_0 = 2$ [kΩ].

Решење: Функција расподеле густине вероватноће једног отпорника је дата изразом $p(R) = \operatorname{rect}\left(\dfrac{R-R_0}{0{,}1\,R_0}\right)$. Отпорност редне везе једнака је збиру појединачних отпорности

[16] Подразумевамо да су сви сигнали каузални, и да су све конволуције због тога са границама интеграције $\int_0^\infty$

[17] Коришћене су апроксимације: $1+0{,}08 \approx 1; 0{,}08^2 \approx 0; \psi = 85° \approx 90°$.



Слика 40.1: График температуре отпорника у зависности од времена

$R = R_1 + R_2$. Да бисмо одредити функцију расподеле густине ове вероватноће запишимо то као $R = r + \underbrace{(R-r)}_{R_2}$, где је r једна реализација отпорности првог отпорника. Одатле за густину вероватноће збира важи

$$\mathrm{d}p_\Sigma(R) = \underbrace{p(r)\mathrm{d}r}_{\text{Први отпорник}} \cdot \underbrace{p(R-r)\mathrm{d}r}_{\text{Други отпорник}}, \tag{41.1}$$

при чему се вероватноће множе јер су то међусобно независни догађаји. Даље се дељењем обе стране са $\mathrm{d}r$ па потом интеграцијом по r налази:

$$\frac{\mathrm{d}p_\Sigma(R)}{\mathrm{d}R} = p(r)\cdot p(R-r)\mathrm{d}r \Rightarrow p_\Sigma(R) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(r)\cdot p(R-r)\mathrm{d}R}_{\text{Конволуциони интеграл}}, \tag{41.2}$$

где идентификујемо *конволуциони интеграл* па се овај резултат може записати и као $p_\Sigma(R) = p(R) * p(R)$.

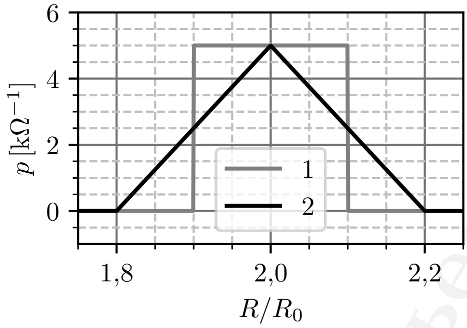
Сада функцију густине вероватноће можемо одредити применом особина конволуције. Приметимо да је $p(R) = \dfrac{1}{0{,}1R_0}\operatorname{rect}\left(\dfrac{R-R_0}{0{,}1\,R_0}\right) = \operatorname{rect}\left(\dfrac{R}{0{,}1R_0}\right) * \delta(R-R_0)$, па се даље има

$$p_\Sigma(R) = \underbrace{\frac{1}{0{,}1R_0}\operatorname{rect}\left(\frac{R}{0{,}1R_0}\right) * \delta(R-R_0)}_{p(R)} * \underbrace{\frac{1}{0{,}1R_0}\operatorname{rect}\left(\frac{R}{0{,}1R_0}\right) * \delta(R-R_0)}_{p(R)} \tag{41.3}$$

$$= \left(\frac{1}{0{,}1R_0}\right)^2 \operatorname{rect}\left(\frac{R}{0{,}1R_0}\right) * \operatorname{rect}\left(\frac{R}{0{,}1R_0}\right) * \underbrace{\delta(R-R_0) * \delta(R-R_0)}_{\delta(R-2R_0)}, \tag{41.4}$$

$$= \left(\frac{1}{0{,}1R_0}\right)\operatorname{tri}\left(\frac{R}{0{,}1R_0}\right) * \delta(R-2R_0) = \left(\frac{1}{0{,}1R_0}\right)\operatorname{tri}\left(\frac{R-2R_0}{0{,}1R_0}\right) \tag{41.5}$$

пре чему је у првом кораку употребљена асоцијативност конволуције а у другом је примењено својство скалирања аргумента $x(t) * x(t) = y(t) \Rightarrow x(kt) * x(kt) = \dfrac{1}{k}y(kt)$, уз табличну трансформацију $\operatorname{rect}(t) * \operatorname{rect}(t) = \operatorname{tri}(t)$.



Слика 41.1: Расподела густине вероватноће за: 1 – један отпорник отпорности 2 [kΩ]; и 2 – редну везу два отпорника отпорности 1 [kΩ].

,

(б) Тражено поређење је приказано на слици 41.1.

2 Фуријеови редови континуалних и дискретних сигнала

2.1 Фуријеови редови континуалног сигнала

42. За сигнал описан у задатку 21 познато је $D = 25\%$ и $f = 1$ [kHz]. Одредити средњу снагу сигнала $v(t)$. Одредити развој овог сигнала у комплексан Фуријеов ред, $V[k]$, на основном периоду T.

Решење: Развој у Фуријеов ред се може потражити по дефиницији применом аналитичке релације $V[k] = \int\limits_{\langle T\rangle} v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_{\mathrm{F}}t}\,\mathrm{d}t$, поступком[18]

$$V[k] = \int\limits_0^T v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{DT} V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t}\,\mathrm{d}t = -\frac{V_{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}t}\Bigg|_{t=0}^{t=DT} = V_{\mathrm{m}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k2\pi D}}{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}} \tag{42.1}$$

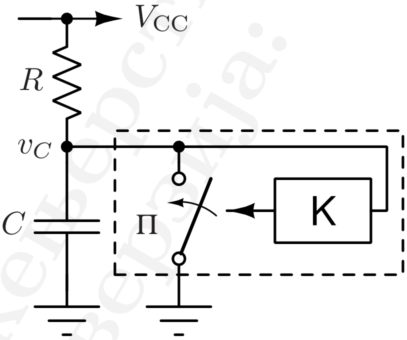
Добијени облик може се поједноставити примедбом $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{\mathrm{j}2} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2x}}{\mathrm{j}2}$, односно, $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2x}}{\mathrm{j}2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}\sin(x)$, одакле се може писати

$$V[k] = V_{\mathrm{m}}DT\underbrace{\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(k\pi D)}}{\mathrm{j}2}}_{=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi D/2}\sin(k\pi D)}\cdot\frac{1}{k\pi D} = V_{\mathrm{m}}DT\frac{\sin(k\pi D)}{k\pi D}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi D/2} = V_{\mathrm{m}}DT\,\mathrm{sinc}(k\pi D)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi D/2}. \tag{42.2}$$

[18]Користи се резултат $\int e^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}e^{x} + C$

Добијени резултат може се одредити и таблично којом приликом ће се члан $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\pi D/2}$ појавити услед кашњења у времену периодичне поворке правоугаоних импулса симетричне око ординате.

43. У колу са слике познато је $R = 1$ [kΩ], $C = 1$ [μF] и напон напајања $V_{\mathrm{CC}} = 5$ [V]. Систем „K“ управља идеалним прекидачем П на основу напона v_C. Прекидач П је иначе отворен, уколико напон v_{C} достигне вредност mV_{CC}, где је $0 \leqslant m \leqslant 1$ позната константа, контролни систем „K“ тренутно и *краткотрајно* затвара прекидач. У почетном тренутку је $v_{\mathrm{C}}(0) = 0$.



Слика 43.1

(а) Одредити напон на кондензатору у зависности од времена, и нацртати његов временски дијаграм за $m = \dfrac{1}{2}$; и

(б) одредити спектралне коефицијенте тог напона на његовом основном периоду у устаљеном сложенопериодичном режиму.

Решење:

(а) Кондензатор се пуни струјом из извора напајања, напона V_{CC}, преко отпорника отпорности R. Израз за напон кондензатора у том случају је

$$v_C(t) = V_{\mathrm{CC}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right), \tag{43.1}$$

где је $\tau = RC$ временска константа посматраног система првог реда. Пуњење кондензатора траје све док је $v_C(t) < mV_{\mathrm{CC}}$. У граничном случају је, $v_C(T) = mV_{\mathrm{CC}}$, одатле се може одредити тренутак T када се први пут затвара прекидач. Има се резултат

$$\cancel{V_{\mathrm{CC}}}\left(1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}\right) = m\cancel{V_{\mathrm{CC}}} \Rightarrow \ln(1-m) = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow T = \tau \ln\left(\frac{1}{1-m}\right). \tag{43.2}$$

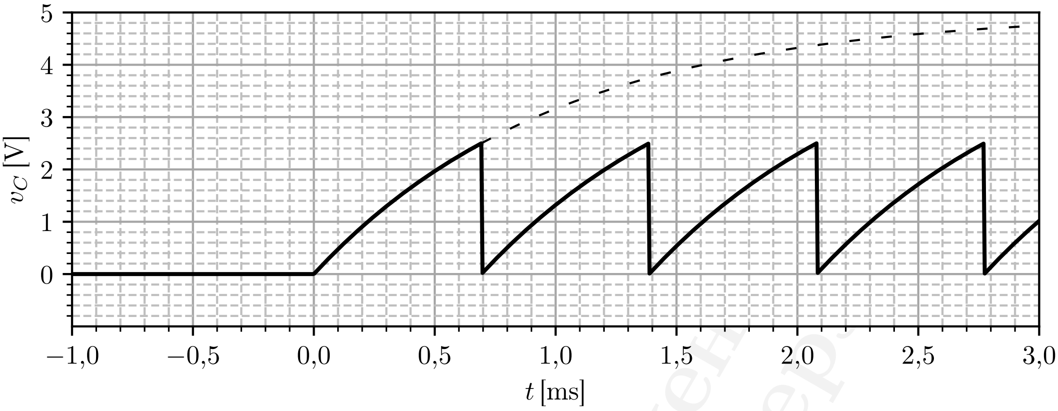
Након затварања прекидача је $v_C(T^+) = 0$, односно, краткотрајно затварање идеалног прекидача у потпуности растерећује кондензатор, након чега се пређашњи процес понавља. Односно, процес описан изразом (43.1) у домену $0 < t < T = \tau \ln\left(\dfrac{1}{1-m}\right)$, представља основни период напона на кондензатору.

Уколико се замене дате вредности има се да је временска константа $\tau = 1$ [ms], и да је $T = \tau \ln 2 \approx 0{,}69$ [ms]. Тражени временски дијаграм приказан је на слици 43.2. На истом дијаграму, испрекиданом линијом приказан је и продужетак дијаграма првобитног пуњења кондензатора – који илуструје да би у недостатку прекидача тај напон асимптотски растао до напона напајања.

(б) Развој у Фуријеов ред може се поједноставити применом особине суперпозиције

$$\mathcal{FS}\left\{v_C(t)\right\} = \mathcal{FS}\left\{V_{\mathrm{CC}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\right\} = V_{\mathrm{CC}}\left(\mathcal{FS}\left\{1\right\} - \mathcal{FS}\left\{\mathrm{e}^{-t/\tau}\right\}\right) = V_{\mathrm{CC}}\left(\delta[k] - \mathcal{FS}\left\{\mathrm{e}^{-t/\tau}\right\}\right).$$

Развој преосталог члана, експоненцијалног сигнала, у Фуријеов ред може се обавити по



Слика 43.2: Пример временског дијаграма за $m = \frac{1}{2}$, $V_{\mathrm{CC}} = 5$ [V].

дефиницији[19], за $\omega_{\mathrm{F}} = \omega_0$ решавањем интеграла[20]

$$\mathcal{FS}\left\{\mathrm{e}^{-t/\tau}\right\} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathrm{e}^{-(\mathrm{j}k\omega_0+1/\tau)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-\left(\mathrm{j}k\cancelto{2\pi}{\omega_0 T}+T/\tau\right)}-1}{\mathrm{j}k\cancelto{2\pi}{\omega_0 T}+T/\tau}. \tag{43.3}$$

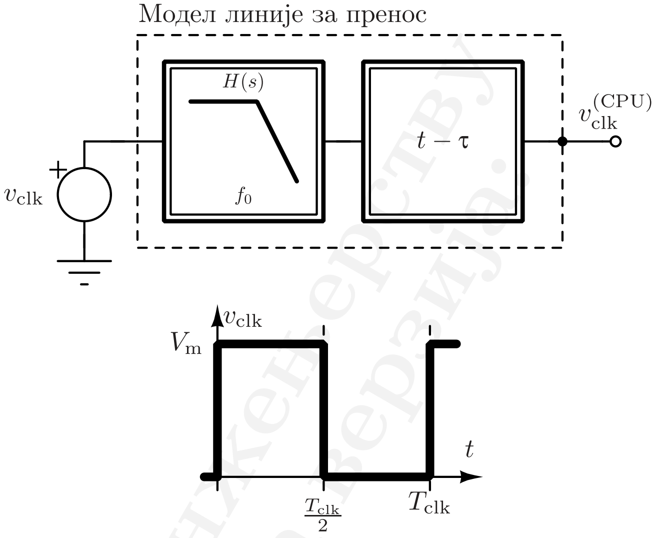
Приметимо да је $\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}2\pi k+T/\tau)} = \cancelto{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k}} + 1 - m = 2 - m$, па се коначно има: $\mathcal{FS}\left\{\mathrm{e}^{-t/\tau}\right\} = \frac{m-1}{\mathrm{j}2\pi k - \ln(1-m)}$. Коначно, добија се да је развој траженог сигнала у Фуријеов ред дат изразом $V_C[k] = V_{\mathrm{CC}}\left(\delta[k] - \frac{m-1}{\mathrm{j}2\pi k - \ln(1-m)}\right)$.

Представљени систем представља једно принципско решење за пројектовање осцилатора (тзв. *релаксациони осцилатор*). Променом границе укључења контролера који практично ресетује напон кондензатора, односно променом параметра m, мења се учестаност осциловања. Систем за контролу „K“ може се реализовати са једним операционим појачавачем који се понаша као компаратор, док је прекидач могуће реализовати као нпр. MOS транзистор.

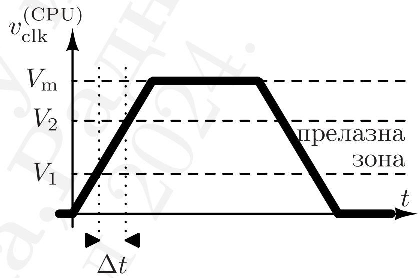
[19] Развој у Фуријеов ред по дефиницији $\mathcal{FS}\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int\limits_{\langle T\rangle} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_{\mathrm{F}}t}\mathrm{d}t$.

[20] Користи се интеграл $\int e^{kx}\mathrm{d}x = e^{kx}/k + C$.

***44.** На слици 44.1 је представљена принципска шема система за генерисање и довођење сигнала такта до одговарајућег прикључка дигиталног процесора. Генератор такта је идеалан напонски генератор симетричне униполарне поворке правоугаоних импулса учестаности $f_{\mathrm{clk}} = \dfrac{1}{T_{\mathrm{clk}}} = 4$ [MHz] и амплитуде $V_{\mathrm{m}} = 5$ [V]. Линија за пренос такта моделује се као као каскадна веза идеалног блока за кашњење, кашњења $\tau = 125$ [ns], и идеалног филтра пропусника ниских учестаности,чија је фреквенцијска преносна карактеристика $H(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{\omega}{2\omega_0}\right)$, где је ω_0 непознати параметар. Према спецификацији употребљеног процесора, при преласку напона такта са ниског на високи ниво, дозвољено је да у прелазној зони између $V_1 = 1{,}5$ [V] и $V_2 = 3{,}5$ [V], доведени сигнал такта проведе највише $\Delta t_{\max} = 5$ [ns], као што је илустровано на слици 44.2.



Слика 44.1



Слика 44.2

(а) Одредити развоје генерисаног сигнала такта, $v_{\mathrm{clk}}(t)$, и сигнала такта на улазу у процесор $v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}(t)$ у комплексан Фуријеов ред у зависности од параметра ω_0. (б) Одредити коефицијенте развоја сигнала $\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}(t)}{\mathrm{d}t}$ у комплексан Фуријеов ред. (в) Одредити параметар ω_0 тако да буде задовољена наведена спецификација датог процесора.

Напомена. Приликом прорачуна времена које сигнал такта проводи у прелазној зони, претпоставити да је нагиб сигнала такта $\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}(t)}{\mathrm{d}t}$ практично константан и да има максималну вредност.

Решење: Генерисани сигнал такта јесте периодична поворка правоугаоних импулса. Спектар такве поворке, на основном периоду T_{clk}, на основу резултата задатка **??** је $V_{\mathrm{clk}}[k] = (-\mathrm{j})^k \dfrac{V_{\mathrm{m}}}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{k}{2}\right)$. Модел линије за пренос сачињен је из каскадне везе идеалног филтра и линије за кашњење $T[k] = \mathrm{rect}\left(\dfrac{k\omega_{\mathrm{clk}}}{2\omega_0}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_{\mathrm{clk}}\tau} = \mathrm{rect}\left(\dfrac{k\omega_{\mathrm{clk}}}{2\omega_0}\right)\cdot(-1)^k$. Спектар напона на улазу у процесор онда је коначног облика

$$V_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}[k] = T[k]\cdot V_{\mathrm{clk}}[k] = \frac{\mathrm{j}^k V_{\mathrm{m}}}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{k\omega_{\mathrm{clk}}}{2\omega_0}\right)\cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \tag{44.1}$$

(б) Применом правила извода[21] добија се резултат

$$\mathcal{FS}\left\{\frac{v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}\right\}[k] = \frac{\mathrm{j}^{k+1}\, k\omega_{\mathrm{clk}}\, V_{\mathrm{m}}}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{k\omega_{\mathrm{clk}}}{2\omega_0}\right)\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \tag{44.2}$$

(в) Због симетрије, током преласка кроз средину прелазне зоне, сигнал има максималан нагиб у тренутку $t = \tau$, будући да је и ивица сигнала за толико закашњена. По претпоставци из напомене са таквим нагибом нагибом треба да пређе целу прелазну зону за највише време $\Delta t_{\max}$. Односно треба да важи

$$\frac{v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}(\tau) > \frac{\Delta V}{\Delta t_{\max}} = 0{,}4\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{ns}}\right] \tag{44.3}$$

Вредност извода у том тренутку потражује се на основу синтетичке релације[22] Фуријеовог реда као

$$\frac{v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}(\tau) = \sum_{k=\infty}^{\infty}\mathcal{FS}\left\{\frac{v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}\right\}[k]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_{\mathrm{clk}}\tau} = \mathcal{FS}\left\{\frac{v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}\right\}[k]\,(-1)^k \tag{44.4}$$

$$= \sum_{k=\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathrm{j}^{k+1}k\omega_{\mathrm{clk}}\, V_{\mathrm{m}}}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{k\omega_{\mathrm{clk}}}{2\omega_0}\right)\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right). \tag{44.5}$$

За израчунавање суме распишимо да је $k\,\mathrm{sinc}\,\dfrac{k}{2} = \cancel{k}\dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{\cancel{k}\pi}{2}}$, те приметимо да је $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases}(-1)^m, & k = 2m+1\\ 0, & k = 2m\end{cases}$. Заменом добијених резултата у (44.5) и сређивањем помоћу $(-1)^k\mathrm{j}^{k+1}\Big|_{k=2m+1} = (-1)^{2m+1}\mathrm{j}^{2m+2} = (-1)^m$,има се $\dfrac{v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}(\tau) = \displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty\\k=2m+1}}^{\infty}\frac{\omega_{\mathrm{clk}}\, V_{\mathrm{m}}}{\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{k\omega_{\mathrm{clk}}}{2\omega_0}\right)$.

Величина под сумом је парна функција па се може одговарајућа[23] трансформација. Добијена сума се онда може може средити изражавањем правоугаоног импулса у облику $\mathrm{rect}\left(\dfrac{k\omega_{\mathrm{clk}}}{2\omega_0}\right) = \begin{cases}1, & k < \dfrac{\omega_0}{\omega_{\mathrm{clk}}}\\[2ex] 0, & k > \dfrac{\omega_0}{\omega_{\mathrm{clk}}}\end{cases}$, што се може искористити за постављање горње границе кочне суме: $\dfrac{v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}(\tau) = \displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty\\k=2m+1}}^{k<\omega_0/\omega_{\mathrm{clk}}}\frac{2\omega_{\mathrm{clk}}\, V_{\mathrm{m}}}{\pi}$. Број чланова добијене суме јесте , број непарних бројева између 0 и $\dfrac{\omega_0}{\omega_{\mathrm{clk}}}$, а који има смисао броја непарних хармоника сигнала такта које пропушта филтар.

---

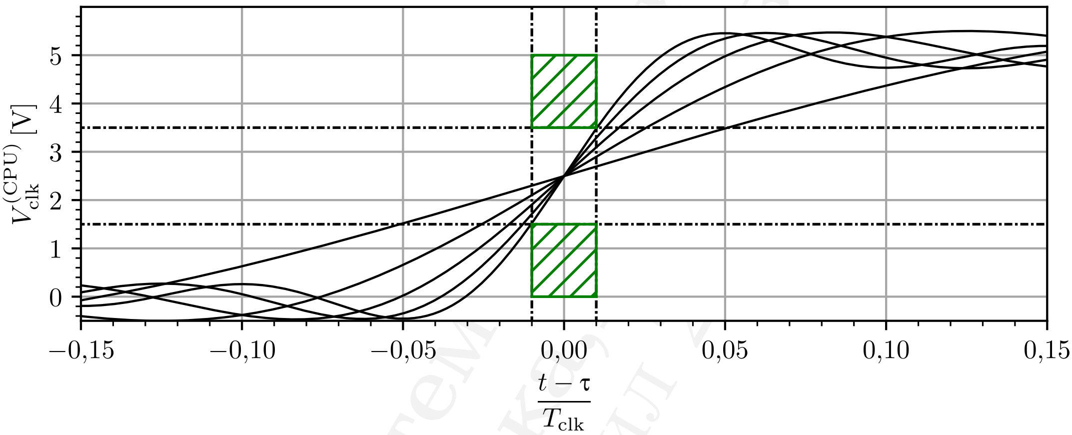
[21]Правило извода је $\mathcal{FS}\left\{\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathrm{j}k\omega_0\mathcal{FS}\left\{x(t)\right\}$

[22]Користи се у облику $x(\tau) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_{\mathrm{F}}\tau}$

[23]Трансформација за парни сигнал $a[k]$ је $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}a[k] = a[0] + 2\sum_{k=1}^{\infty}a[k]$.

Одавде се има $\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}(\tau) = M\dfrac{2\omega_{\mathrm{clk}}\,V_{\mathrm{m}}}{\pi}$, на основу услова из (44.3), заменом бројевних вредности налази се услов за број непарних хармоника које филтар треба да пропусти. Одавде се има услов да је $M = \dfrac{\pi}{2\omega_{\mathrm{clk}}\,V_{\mathrm{m}}}\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{clk}}^{(\mathrm{CPU})}}{\mathrm{d}t}(\tau) > 12{,}5\left[\dfrac{\mathrm{ns}}{\mathrm{V}}\right]\cdot 0{,}4\left[\dfrac{\mathrm{nV}}{\mathrm{s}}\right] = 5$. Односно, филтар мора да пропусти *барем* 5 *непарних* хармоника побудног сигнала, а то су ω_{clk}, $3\omega_{\mathrm{clk}}$, $5\omega_{\mathrm{clk}}$, $7\omega_{\mathrm{clk}}$, и $9\omega_{\mathrm{clk}}$, односно, мора бити да је $\omega_0 > 9\omega_{\mathrm{clk}}$, или $f_0 > 9f_{\mathrm{clk}} = 36$ [MHz].

У овом задатку је илустровано, да је стрмина ивице правоугаоних импулса сразмерна броју хармоника које пропушта филтар. На слици 44.3 илустрован је резултат. Црвеним областима обележени су габарити унутар којих сигнал не сме да пролази, односно назначене су границе прелазне зоне по времену и по напону. Нацртани су сигнали са 1–5 непарних хармоника, и на слици може да се види да су са најмање 5 непарних хармоника задовољени тражени габарити.

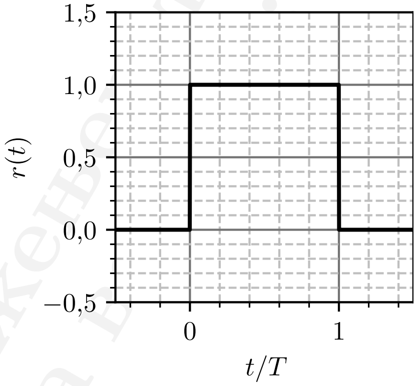


Слика 44.3

3 Фуријеова трансформација континуалних и дискретних сигнала

3.1 Фуријеова трансформација континуалног сигнала

45. На слици 45.1 приказан је правоугаони импулс јединичне амплитуде ширине T, са почетком у нули. Одредити Фуријеову трансформацију тог сигнала.



Слика 45.1

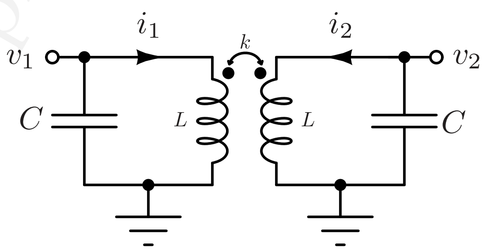
Решење: Дати сигнал се може записати у облику $x(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-T)$. Применом особине померања у времену Фуријеове трансформације[24] и табличног резултата $\mathcal{FT}\{\mathrm{u}(t)\} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$, има се резултат $X(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega) - \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}{\mathrm{j}\omega} - \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\delta(\omega) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}{\mathrm{j}\omega} + \cancelto{0}{\pi(\underbrace{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}_{=0 \text{ за } \omega=0})\delta(\omega)}$, где је у последњем кораку примењено својство еквиваленције Дираковог импулса. Коначно је $X(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}{\mathrm{j}\omega}$

3.2 Фуријеова трансформација дискретног сигнала

4 Лапласова трансформација

4.1 Системи диференцијалних једначина

*__46.__ У колу са слике познати су L, C и коефицијент магнетске спреге $k \ll 1$. У почетном тренутку су познати $i_2(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$ и $i_1(0) = I_0$. Поставити (а) систем интегро-диференцијалних једначина кола по струјама i_1 и i_2. Помоћу Лапласове трансформације (б) одредити струју $i_1(t)$. Скицирати (в) временски дијаграм добијеног одзива $i_1(t)$ за $t > 0$.



Слика 46.1

Решење: Напоне v_1 и v_2 са једне стране повезују струјно-напонске карактеристике спрегнутих калемова дата је системом једначина

$$v_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{46.1}$$

$$v_2 = L_{21}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{46.2}$$

При чему су, по услову задатка, $L_1 = L_2 = L$ и $L_{12} = L_{21} = kL$. Са друге стране, напон и струја су повезани према карактеристици кондензатора[25] при неусклађеним референтним

[24]Својство померања ФТ је $\mathcal{FT}\{x(t-T)\} = \mathcal{FT}\{x(t)\}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}$.

[25]Полазећи од израза за струја што се може записати у интегралној форми као $v_1 = -\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1\mathrm{d}\tau$, односно

смеровима резултата, у систем једначина спрегнутих калемова и даљим сређивањем добија се

$$-\frac{1}{C}\int_0^t i_1 \mathrm{d}\tau = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + kL\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + k\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\int_0^t i_1\,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{46.3}$$

$$-\frac{1}{C}\int_0^t i_2 \mathrm{d}\tau = kL\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad k\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\int_0^t i_2\,\mathrm{d}\tau = 0, \tag{46.4}$$

где је $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Добијени систем интегро-диференцијалних једначина описује понашање посматраног система

(б) Добијени систем једначина преводи се у фреквенцијски домен применом правила диференцирања уз почетни услов и правила интеграљења[26]. Нека су $I_1 = I_1(s)$ и $I_2 = I_2(s)$, онда је

$$sI_1 - I_0 + ksI_2 + \frac{\omega_0^2}{s}I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (s^2+\omega_0^2)I_1 + ks^2I_2 = I_0 s \tag{46.5}$$

$$ksI_1 - kI_0 + sI_2 + \frac{\omega_0^2}{s}I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad ks^2I_1 + (s^2+\omega_0^2)I_2 = kI_0 s \tag{46.6}$$

Решавањем добијеног система једначина по непознатим струјама добијају се резултати:

$$I_1 = \frac{I_0 s\big(s^2\left(k^2-1\right)-\omega_0^2\big)}{\big(s^2\left(k-1\right)-\omega_0^2\big)\left(s^2\left(k+1\right)+\omega_0^2\right)} \tag{46.7}$$

$$I_2 = -\frac{I_0\omega_0^2 ks}{\big(s^2\left(k-1\right)-\omega_0^2\big)\left(s^2\left(k+1\right)+\omega_0^2\right)} \tag{46.8}$$

Добијени резултати за струје се растављају на парцијалне разломке у односу на променљиву s^2 (практично се уводи смена). Прво се раставља израз за струју I_1 на парцијалне разломке као

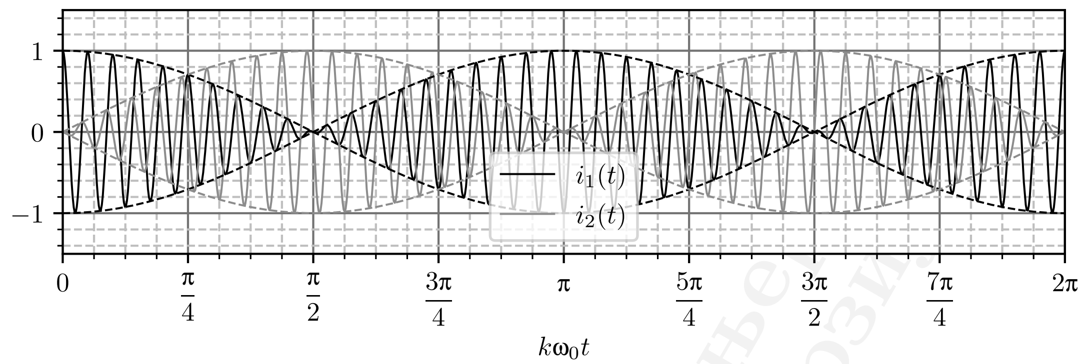
$$I_1 = \frac{A}{s^2(1-k)+\omega_0^2} + \frac{B}{s^2(1+k)+\omega_0^2} \tag{46.9}$$

$$\begin{cases} A = \left.\dfrac{I_0 s\big(s^2\left(k^2-1\right)-\omega_0^2\big)}{\cancel{\big(s^2\left(k-1\right)-\omega_0^2\big)}\left(s^2\left(k+1\right)+\omega_0^2\right)}\right|_{s^2=\frac{\omega_0^2}{k-1}} = -I_0 s\dfrac{1-k}{2} \\ B = \left.\dfrac{I_0 s\big(s^2\left(k^2-1\right)-\omega_0^2\big)}{\big(s^2\left(k-1\right)-\omega_0^2\big)\cancel{\left(s^2\left(k+1\right)+\omega_0^2\right)}}\right|_{s^2=-\frac{\omega_0^2}{1+k}} = I_0 s\dfrac{1+k}{2} \end{cases} \tag{46.10}$$

Коначно се добија поједностављен облик струје $I_1 = \dfrac{I_0}{2}\left(\dfrac{s}{s^2+\dfrac{\omega_0^2}{k+1}} + \dfrac{s}{s^2+\dfrac{\omega_0^2}{1-k}}\right)$, а

$v_2 = -\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2 \mathrm{d}\tau$. Заменом у израз за струју кондензатора $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$, интеграљењем обе стране се добија коришћена напонско-струјна карактеристика.

[26] Правило диференцирања $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right\} = sX(s) - x(0^+)$; Правило интеграљења $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_{0^-}^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \dfrac{1}{s}F(s)$.



Слика 46.2: Илустрација резултата.

облик у временском домену се одређује непосредном идентификацијом табличних транформација[27] $i_1(t) = \frac{I_0}{2}\left(\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}t\right) + \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}t\right)\right)$.

Друга струја се налази на сличан аналоган начина растављањем израза (46.8) на парцијалне разломке:

$$I_2 = \frac{A}{s^2(1-k)+\omega_0^2} + \frac{B}{s^2(1+k)+\omega_0^2} \tag{46.11}$$

$$\begin{cases} A = \left.\dfrac{I_0\omega_0^2 ks}{\cancel{\left(s^2\left(k-1\right)-\omega_0^2\right)}\left(s^2\left(k+1\right)+\omega_0^2\right)}\right|_{s^2=\frac{\omega_0^2}{k-1}} = I_0 s\dfrac{1-k}{2} \\ B = \left.\dfrac{I_0\omega_0^2 ks}{\left(s^2\left(k-1\right)-\omega_0^2\right)\cancel{\left(s^2\left(k+1\right)+\omega_0^2\right)}}\right|_{s^2=-\frac{\omega_0^2}{1+k}} = I_0 s\dfrac{1+k}{2} \end{cases} \tag{46.12}$$

Одакле се има резултат $I_2 = \frac{I_0}{2}\left(\frac{s}{s^2+\frac{\omega_0^2}{k+1}} - \frac{s}{s^2+\frac{\omega_0^2}{1-k}}\right)$. Примећујемо да се резултат за ову струју разликује само по знаку једног члана од комплексне струје I_1, самим тим, резултат у временском домену је $i_2(t) = \frac{I_0}{2}\left(\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}t\right) - \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}t\right)\right)$.

(в) Уколико се по претпоставци усвоји да је $k \ll 1$ онда се може апроксимирати[28] да је $\frac{1}{\sqrt{1\pm k}} = 1 \mp \frac{1}{2}k$. Погоднији облик струја се може добити изражавањем збира, односно разлике косинуса преко производа[29]. има се приближни резултат:

$$i_1(t) \approx I_0\cos(2\omega_0 t)\cos(k\omega_0 t), \tag{46.13}$$
$$i_2(t) \approx -I_0\sin(2\omega_0 t)\sin(k\omega_0 t). \tag{46.14}$$

[27] Релевантна таблична трансформација је $\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

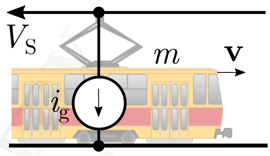
[28] Користи се апроксимација првим чланом Тејлоровог развоја $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$, за $\alpha = -\frac{1}{2}$.

[29] Одговарајући тригонометријски идентитети јесу $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, и $\cos x - \cos y = -\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Добијени резултати приказани су на графику на слици 46.2. На слици пуном линијом су приказани одговарајући сигнали. Испрекиданим линијама приказане су анвелопе тих сигнала, које илуструју процес „шетања“ енергије између једног и другог осцилаторног кола. Појава која је добијена дешава се у општем случају у систему спрегнутих осцилатора.

4.2 Преносне функције LTI система

47. На слици 47.1 приказан је упрошћени модел електричног трамваја масе $m = 20$ [t] који се креће по равној прузи. Трамвај се напаја из мреже константног напона $V_\mathrm{S} = 650$ [V]. Мотор трамваја се представља идеалним струјним генератором, струје $i_\mathrm{g} = i_\mathrm{g}(t)$, која се може контролисати. Претпоставити да се сва снага коју мрежа предаје мотору, без губитака, претвара у механичку енергију посредством механичке силе. На трамвај делује и сила отпора ваздуха дата изразом $\mathbf{F}_\mathrm{ov} = -b\mathbf{v}$, где је $b = 150\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{km/h}}\right]$ а $v = v(t)$ је брзина трамваја. Посматрамо систем чији једини улаз представља струја i_g а једини излаз тренутна брзина v трамваја. Ако је познато да се тај систем може представити као каскадна веза једног линеарног система чија је функција преноса $H(s)$ и једног нелинеарног система без меморије чија је статичка преносна карактеристика $f(u)$, одредити једно решење за $H(s)$ и $f(u)$. Објаснити да ли је посматрани систем линеаран. Скицирати временски дијаграм тренутне брзине трамваја ако је управљачка струја дата изразом $i_\mathrm{g} = I_0 \operatorname{rect}\left(\dfrac{t}{T} - 1\right)$, где су $I_0 = 250$ [A] и $T = 20$ [s], а трамвај полази из мировања.



Слика 47.1

Помоћ. Снага механичке силе F која делује на круто тело које се креће брзином v равна је $P = Fv$.

Решење: (а) Укупна механичка снага која делује на трамвај разлика је снаге коју улаже генератор и снаге губитака на отпор ваздуха,

$$P_\mathrm{meh} = P_\mathrm{g} - P_\mathrm{ov}. \tag{47.1}$$

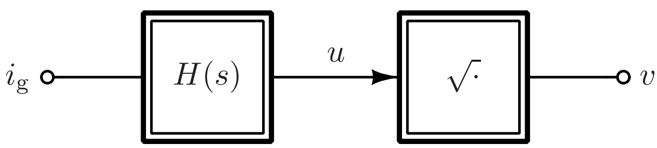
Снагом генератора се управља индиректно помоћу управљачке струје, $P_\mathrm{g} = V_\mathrm{S} i_\mathrm{g}$ док је снага губитака на рачун отпора ваздуха $P_\mathrm{ov} = F_\mathrm{ov} v = -bv^2$. Пошто се трамвај креће по равној прузи механички рад претвара се у кинетичку енергију па је $P_\mathrm{meh} = \dfrac{\mathrm{d}W_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{m}{2}\dfrac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}$. Заменом свих одређених снага у израз добија се диференцијална једначина (47.1):

$$\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t} = V_\mathrm{S} i_\mathrm{g} - bv^2 \tag{47.2}$$

Добијена диференцијална једначина по v није линеарна, али се може приметити да је линеарна по v^2 што користимо увођењем одговарајуће смене $u = v^2$, чиме се добија диференцијална једначина на основу које се лако може наћи преносна функција $H(s) = \dfrac{U(s)}{I_\mathrm{g}(s)}$ као

$$\frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = V_\mathrm{S} i_\mathrm{g} - bu\Big|_{\mathcal{L}} \Rightarrow \frac{sm}{2}U(s) = V_S I_\mathrm{g}(s) - bU(s) \Rightarrow H(s) = \frac{V_\mathrm{S}}{\dfrac{m}{2}s + b} \tag{47.3}$$

Одговарајућа смена се може третирати као нелинеарни систем без меморије, па је тако у целини дати систем представљен каскадном везом линеарног система функције преноса



Слика 47.2

$H(s)$ и нелинеарног система без меморије статичке преносне карактеристике $f(u) = \sqrt{u}$ као на слици 47.2.

(б) Линеарност система проверава се испитивањем хомогености и адитивности. Систем је хомоген уколико, вреди $O\{kx(t)\} = kO\{x(t)\}$. Посматраћемо брзину у устаљеном стању, односно када је $\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} \to 0$, тада важи да је $V_\mathrm{S} i_\mathrm{g}(\infty) - bv(\infty)^2 \to 0$, односно $v(\infty) = \sqrt{\dfrac{V_\mathrm{S} i_\mathrm{g}(\infty)}{b}}$. На основу израза се види да је $v(\infty) \propto i_\mathrm{g}(\infty)$ па систем није хомоген, а самим тим ни линеаран. Нагласимо да у општем случају каскадна веза линеарног и нелинеарног система није линеаран систем, ипак, постоје практичне примене у којима се користе нелинеарни системи за изградњу система који су у целини линеарни (нпр. транслинеарна кола у аналогној електроници).

(в) Одзив на задату побуду одредићемо одређивањем međурешења $u(t)$. Побуда се може записати у облику $i_\mathrm{g} = I_0(u(t) - u(t-T))$. Тако да ће одзив бити $u(t) = I_0(g(t) - g(t-T))$, где је $g(t)$ одскочни одзив система $H(s)$, због његове линеарности. Одскочни одзив одређујемо у комплексном домену, растављањем на парцијалне разломке

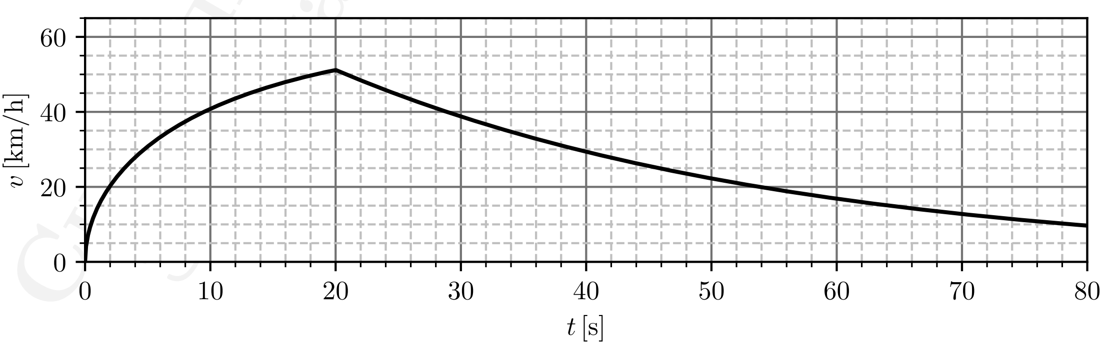
$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\mathcal{L}\{\mathrm{u}(t)\}} \cdot \underbrace{\frac{V_\mathrm{S}}{\frac{m}{2}s + b}}_{H(s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\frac{m}{2}s + b} = \begin{cases} A = \left.\dfrac{V_\mathrm{S}}{\cancel{s}\left(\frac{m}{2}s + b\right)}\right|_{s=0} = \dfrac{V_\mathrm{S}}{b} \\ B = \left.\dfrac{V_\mathrm{S}}{s\,\cancel{\left(\frac{m}{2}s + b\right)}}\right|_{s=-\frac{2b}{m}} = -\dfrac{mV_\mathrm{S}}{2b} \end{cases} \tag{47.4}$$

Сређивањем добијеног израза добија се $G(s) = \dfrac{V_\mathrm{s}}{b}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s + \frac{2b}{m}}\right)$ па се инверзном Лапласовом трансформацијом налази $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \dfrac{V_\mathrm{S}}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\right)\mathrm{u}(t)$, сређивањем се даље налази

$$u(t) = \frac{I_0 V_\mathrm{S}}{b}\left(\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\right)\mathrm{u}(t) - \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}(t-T)}\right)\mathrm{u}(t-T),\right) \tag{47.5}$$

што се може расписати и као

$$u(t) = \frac{I_0 V_\mathrm{S}}{b} \cdot \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}, & 0 < t < T \\ (\mathrm{e}^{2bT/m} - 1)\mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}, & t > T \end{cases} \tag{47.6}$$



Слика 47.3

па је израз за брзину са израчунатим константама:

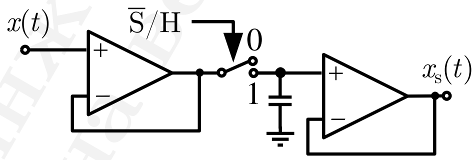
$$v(t) \approx 62{,}5 \left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right] \cdot \sqrt{\begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t/18\,[\mathrm{s}]}, & 0 < t < T \\ 2{,}04\,\mathrm{e}^{-t/18\,[\mathrm{s}]}, & t > T \end{cases}} \tag{47.7}$$

Добијени резултат приказан је на слици.

5 Одабирање и реконструкција сигнала

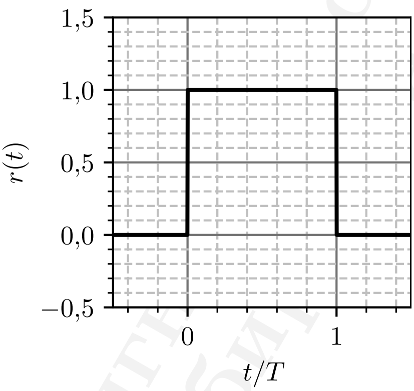
5.1 „Памти-прати“ (SH) кола

48. Сигнал $x(t) = 2\sin(\omega_0 t)$, где је $\omega_0 = 100\pi$, доводи се на улаз кола са слике. Прекидач у колу је отворен, осим у тренуцима $t = kT$ када је *краткотрајно* затворен ($k \in \mathbb{Z}$). Познато је $T = \dfrac{2\pi}{\omega_s}$, $\omega_s = 800\pi$. Ако се излазни сигнал кола, $x_s(t)$ обради идеалним филтром функције преноса $H(\mathrm{j}\omega) = a\,\mathrm{rect}\left(\dfrac{\omega}{4\omega_0}\right)$, израчунати константу a тако да се као резултат добије тачно $y(t) = \sin(\omega_0 t + \phi)$, и том приликом израчунати угао $0 \leqslant \phi < 2\pi$.

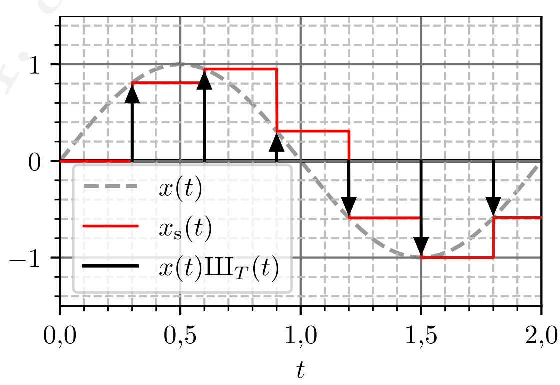


Слика 48.1

Решење: Операциони појачавачи у колу повезани су у конфигурацију два јединична бафера. Сигнал на излазу левог операционог појачавача једнак је сигналу $x(t)$, док је напон на кондензатору једнак напону на излазу кола $x_s(t)$. Када је прекидач отворен, напон кондензатора се не мења, док при краткотрајном затварању у тренуцима kT, напон кондензатора прима вредност $x(kT)$. Ово доводи до степеничастог напона, израђеног од низа правоугаоних импулса.



(а) $r(t)$



(б) Уз пример, $T = 0{,}3$.

Слика 48.2

Такав сигнал се може изградити помоћу низа померених правоугаоних јединичних импулса облика $r(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t - T)$, приказаних на слици 48.2а. Облик излазног сигнала се онда може представити као $x_{\mathrm{s}}(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot r(t-kT)$. Пошто се онда конволуција са Дираковим импулсом може користити за померање у времену, односно важи $r(t-kT) = r(t) * \delta(t-kT)$, добијени израз се може трансформисати поступком[30]

$$x_{\mathrm{s}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot r(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot r(t) * \delta(t-kT) = r(t) * x(t)\text{Ш}_T(t). \quad (48.1)$$

Тако добијени израз даје основу за фреквенцијску анализу сигнала. Одређивањем спектра таквог сигнала, применом теорема о трансформацији конволуције и производа, налазимо резултат:

$$X_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{FT}\{x_{\mathrm{s}}(t)\} = R(\mathrm{j}\omega) \cdot \frac{1}{\cancel{2\pi}} \left(X(\mathrm{j}\omega) * \underbrace{\frac{\cancel{2\pi}}{T}}_{\omega_0} \text{Ш}_{\omega_s}(\omega) \right) = \frac{1}{T} R(\mathrm{j}\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}(\omega - k\omega_s)) \quad (48.2)$$

Излаз након филтрирања идеалним филтром је онда облика $X_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{f})}(\mathrm{j}\omega) = X_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{T} R(\mathrm{j}\omega) \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}(\omega - k\omega_s)) \cdot a\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4\omega_0}\right)$. Пошто је задовољена теорема одабирања ($\omega_{\mathrm{s}} > 2\omega_0$) не долази до преклапања спектралних реплика, па тако идеални филтар који одбацује све чланове ван опсега $\left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$ задржава само централну спектралну реплику, за $k = 0$, тиме остаје резултат филтрирања $X_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{f})}(\mathrm{j}\omega) = X_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) \cdot H(\mathrm{j}\omega)$, односно $X_{\mathrm{s}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{a}{T} R(\mathrm{j}\omega) X(\mathrm{j}(\omega))$. Практично, може се сматрати да се цео систем од улаза до излаза, у општијем случају под претпоставком задовољења теореме одабирања, може представити једном функцијом преноса облика

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{X_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{f})}}{X(\mathrm{j}\omega)} = \frac{aR(\mathrm{j}\omega)}{T}. \quad (48.3)$$

Заменом резултата за спектар датог правоугаоног импулса из задатка 45 и спектра простопериодичног сигнала налазимо конкретан резултат за функцију преноса $G(\mathrm{j}\omega) = a \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}{\mathrm{j}\omega T}$. Одређивањем функције преноса на учестаности побуде $\omega = \omega_0$ налазе се појачање амплитуде и фазни померај излазног сигнала.

$$|G(\mathrm{j}\omega_0)| = a \left| \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}{\mathrm{j}\omega T} \right| = \frac{a\sqrt{2\big(1 - \cos(\omega_0 T)\big)}}{\omega_0 T} \quad (48.4)$$

$$\arg G(\mathrm{j}\omega_0) = \frac{\omega_0 T - \pi}{2} \quad (48.5)$$

Пошто је према услову задатка $\omega_0 T = \frac{\pi}{4}$ коначно се добија да је $|G(\mathrm{j}\omega_0)| = \frac{4a}{\pi}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ и $\phi = -\frac{3\pi}{8}$. Према услову задатка, амплитуда побудног и одзивног сигнала је иста, то мора бити $|G(\mathrm{j}\omega_0)| = 1$ па је $a = \frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

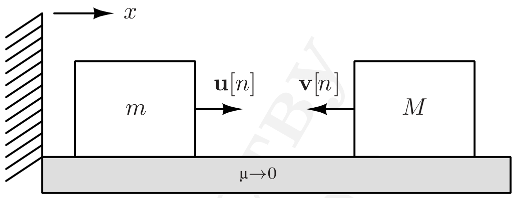
[30] Користи се правило еквиваленције $x(kT)\delta(t-kT) = x(t)\delta(t-kT)$.

Скренимо пажњу на општи закључак. Уколико је теорема одабирања задовољена, односно, уколико не долази до преклапања спектралних реплика, онда се резултат 48.3 може сматрати општим. Односно, он показује како облик реконструкционог импулса $r(t)$, утиче на спектар одзивног сигнала.

Читаоцу се препоручује да размотри какав се сигнал јавља на излазу целог система, уколико се уместо датог идеалног филтра пропусника ниских учестаности, $H(\mathrm{j}\omega)$ искористи филтар пропусник опсега учестаности, централне кружне учестаности $2\omega_0$.

6 $\mathcal{Z}$–трансформација

6.1 Системи диференцних једначина



Слика 49.1

***49.** У механичком систему са слике познат је однос маса крутих блокова $\alpha = \dfrac{M}{m}$. Зид са леве је веома масиван и практично непокретан, а са десне стране подлога се протеже у бесконачност. Занемарити трење између подлоге и блокова, $\mu \to 0$. У почетном тренутку су вектори брзина блокова $\mathbf{v} = v_0 \mathrm{i}_x$ и $\mathbf{u} = 0$ ($v_0 > 0$).
Након k међусобних судара блокова су њихови алгебарски интензитети брзина $v[k]$ и $u[k]$. (а) Одредити низове $v[k]$ и $u[k]$. Одредити (б) укупан број судара између блокова у процесу, N, ако је $\alpha = 400^m$, где је m цео број. Сматрати да су сви судари у систему *апсолутно еластични*.

Помоћ. Након апсолутно еластичног судара, дуж правца, између блокова масе m_1 и m_2 почетних алгебарских интензитета брзина u_1 и u_2 њихови нови алгебарски интензитети брзина су $v_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2$ и $v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2$ редом. Референтни смерови брзина блокова су један ка другом.

Решење: Пошто се судари дешавају у дискретним временским тренуцима док је између њих стање система непроменљиво, процес представљен у задатку се може сматрати *дискретним* у односу на текући број судара. Стање након k-тог судара описано је системом датих диференцних једначина као

$$v[k+1] = \frac{M-m}{M+m} v[k] + \frac{2m}{M+m}(-u[k]) \tag{49.1}$$

$$u[k+1] = \frac{2M}{M+m} v[k] + \frac{m-M}{M+m}(-u[k]), \tag{49.2}$$

Важно је нагласити да се у једначинама појављује $-u[k]$ будући да леви блок у судару учествује *након* одбијања о зид са леве стране што доводи до промене знака брзине тог блока. Елиминисањем конкретних маса преко задатог параметра α има се

$$v[k+1] = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} v[k] - \frac{2}{\alpha+1} u[k] \tag{49.3}$$

$$u[k+1] = \frac{2\alpha}{\alpha+1} v[k] - \frac{1-\alpha}{\alpha+1} u[k] \tag{49.4}$$

(б) Одређивање одзива система обавља се применом $\mathcal{Z}$-трансформације уз уважавање почетних услова[31] чиме се добија

$$z(V(z) - \cancelto{v_0}{v[0]}) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} V(z) - \frac{2}{\alpha+1} U(z) \tag{49.5}$$

$$z(U(z) - \cancel{u[0]}) = \frac{2\alpha}{\alpha+1} V(z) - \frac{1-\alpha}{\alpha+1} U(z) \tag{49.6}$$

Сређивањем израза у форму система алгебарских једначина по $V(z)$ и $U(z)$ има се.

$$-zv[0] = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} - z\right) V(z) - \frac{2}{\alpha+1} U(z) \tag{49.7}$$

$$0 = \frac{2\alpha}{\alpha+1} V(z) - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha+1} + z\right) U(z) \tag{49.8}$$

[31] Користи се теорема $\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = z(\mathcal{Z}\{x[n]\} - x[0])$.

Решавањем система једначина налазе се резултати:

$$U(z) = \frac{2\alpha v_0 z}{z^2 + 2z\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} + 1} \tag{49.9}$$

$$V(z) = \frac{v_0 z\left(z + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)}{z^2 + 2z\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} + 1} \tag{49.10}$$

Непосредном идентификацијом, одређујемо инверзну $\mathcal{Z}$-трансформацију добијених резултата: $u[k] = v_0\sqrt{\alpha}\sin(k\Omega_0)$ и $v[k] = v_0\cos(k\Omega_0)$, где је $\Omega_0 = \arccos\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$.

Блокови ће наставити сударање све док након k судара брзина десног блока у десно не постане већа од брзине левог блока – односно, када након одбијања левог блока о зид он не буде могао да сустигне већи блок. То је изражено условом у облику $-v[k] \geqslant u[k]$. Гранично решење потражимо у скупу реалних бројева сменом $k \mapsto t$ као

$$-\cancel{v_0}\cos(t\Omega_0) = \cancel{v_0}\sqrt{\alpha}\sin(t\Omega_0) \Rightarrow \cos(t\Omega_0) = -\sqrt{\alpha}\sin(t\Omega_0) \Rightarrow \tan(t\Omega_0) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{49.11}$$

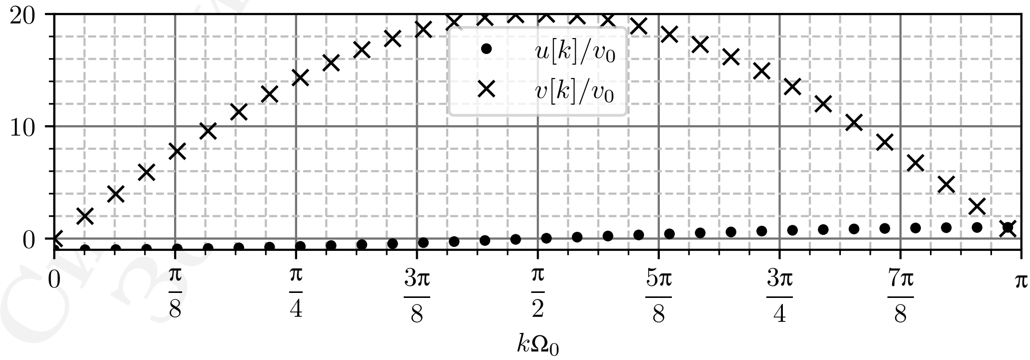
$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{\Omega_0}\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \pi\right) \tag{49.12}$$

$$\Rightarrow \quad k_{\max} = N = \lfloor t \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\Omega_0}\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \pi\right)\right\rfloor \tag{49.13}$$

Размотримо шта се дешава када α постаје велико. Тада је $\arctan\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \to 0$, а добијена дискретна кружна учестаност се може апроксимирати у околини јединице помоћу Тејлоровог развоја[32] поступком

$$\Omega_0 = \arccos\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) = \arccos\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \tag{49.14}$$

Заменом добијене апроксимације у израз 49.13 добија се резултат: $N = \lfloor \pi\sqrt{\alpha}/2 \rfloor$. Односно, уколико је $\alpha = 400^m$ онда је $N = \lfloor 10^m\pi \rfloor$, дакле, првих m цифара броја π (!) На слици 49.2 приказан је један пример сигнала $v[k]$ и $u[k]$ за $\alpha = 400$.



Слика 49.2: Пример за $\alpha = 400$, укупно $N = \lfloor 10\pi \rfloor = 31$ судара.

[32] Када је $x \to 0$ тада је $\arccos(1-x) \approx \sqrt{2x}$

Додатак А

Решавање диференцних једначина

1 Увод

Диференцне једначине су једначине које су дефинисане над бројевним низовима $x[n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Називају се још и *рекурентним једначинама* будући да дају везу између n-тог члана и преосталих чланова низа (рекурентна/рекурзивна веза). У том смислу, диференцна једначина k-тог реда је, на пример, једначина облика:

$$\Phi(x[n], x[n-1], \ldots, x[n-k]) = 0. \tag{A.1}$$

Еквивалентно, овакве једначине могу се формулисати и дефинисањем текућег у односу на претходне и наредне чланове низа. Додатно, за јединствено решење диференцне једначине k-тог реда потребно је познавати k вредности низа, на пример. $x[0], x[-1], \ldots, x[-k+1]$ (тзв. помоћне вредности) што је еквивалентно почетним условима диференцијалних једначина. Решења диференцне једначине се у општем случају не налазе једноставно (налик на диференцијалне једначине). Ипак, постоји поступак решавања за конкретан облик диференцних једначина погодан за примену у анализи линеарних система о коме ће бити речи и у овом документу.

Најједноставнија диференцна једначина је једначина

$$x[n] = kx[n-1], \tag{A.2}$$

где је $k \in \mathbb{R}$ позната константа. Уколико усвојимо да је $x[0] = a$ лако се уочава шема:

$$\begin{aligned} x[1] &= kx[0] = ka && \text{(A.3)} \\ x[2] &= kx[1] = k \cdot ka = k^2 a && \text{(A.4)} \\ x[3] &= kx[2] = k \cdot k^2 a = k^3 a && \text{(A.5)} \\ &\vdots && \text{(A.6)} \end{aligned}$$

Односно, уочава се да је решење $x[n] = k^n a$. Практично, на основу формулације такве диференцне једначине поставља се као природно решење скалирана експоненцијална функција $x[n] = Ck^n$. Ово је слично као у случају диференцијалних једначина где су природна решења облика $e^{\lambda x}$. У оба случаја, заједничко је то да под трансформацијом која дефинише једначину (у случају диференцијалне једначине то је извод, а у случају диференцне једначине то је *кашњење*) природно решење *не мења облик*:

$$e^{\lambda t} \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \quad \lambda e^{\lambda t} \quad \sim \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{A.7}$$

$$\lambda^n \xrightarrow{n \mapsto n-1} \quad \lambda^{n-1} = \frac{1}{\lambda}\lambda^n \quad \sim \lambda^n \tag{A.8}$$

Односно, као што решења линеарних диференцијалних једначина треба тражити у облику $\mathrm{e}^{\lambda x}$ тако решења линеарних диференцних једначина треба тражити у облику λ^n.

2 Линеарне хомогене диференцне једначине са константним коефицијентима

Обична линеарна хомогена диференцна једначина k-тог реда са константним реалним коефицијентима је једначина облика:

$$a_k x[n] + a_{k-1}x[n-1] + a_{k-2}x[n-2] + \dots a_0 x[n-k] = 0, \qquad (a_j \in \mathbb{R}) \tag{A.9}$$

или у еквивалентном облику

$$a_k x[n+k] + a_{k-1}x[n+k-1] + \dots a_0 x[n] = 0 \qquad (a_j \in \mathbb{R}) \tag{A.10}$$

Где је познато k вредности за $x[n]$. Претпостављајући облик решења у облику $x[n] = \lambda^n$ и заменом у (A.10) има се:

$$a_k\lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + a_0\lambda^n = 0 \Rightarrow \tag{A.11}$$

$$\lambda^n(a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0) = 0. \tag{A.12}$$

Члан у загради у изразу (A.12) назива се *карактеристичним полиномом* диференцне једначине:

$$P(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0 \tag{A.13}$$

Добијени полином је исти и за другу варијанту диференцне једначине као из израза (A.9). Степен полинома одговара реду диференцне једначине $\deg P = k$, и једнак је броју линеарно независних партикуларних решења диференцне једначине. Зависно од структуре скупа коренова овог полинома $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ одређују се и сама партикуларна решења полазне диференцне једначине. Пошто је посматрана диференцна једначина линеарна, њено опште решење јесте свака линеарна комбинација њених партикуларних решења, односно:

$$x[n] = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n. \tag{A.14}$$

Уколико су неки од коренова вишеструки, јасно је онда да сви чланови λ_i^n нису линеарно независни. На пример, уколико је $\lambda_i = \lambda_j$ онда је $C_i\lambda_i + C_j\lambda_j = (C_i + C_j)\lambda_i$ само једно партикуларно решење. Показује се да је друго партикуларно решење у том случају $n\lambda_i^n$, односно, двоструком корену карактеристичног полинома λ_i одговарају два партикуларна решења λ_i^n и $n\lambda_i^n$. У општем случају корена λ_i вишеструкости q њему одговарају q партикуларних решења и то $\{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \dots, n^{q-1}\lambda_i^n\}$.

Будући да су разматрани коефицијенти карактеристичног полинома реални, то његови евентуално комплексни корени $\underline{\lambda}_i = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$ морају имати комплексно конјуговани пар $\underline{\lambda}_j = \underline{\lambda}_i^* = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}$. Овим двома комплексним коренима одговарају и два линеарно независна партикуларна решења диференцне једначине и то су $\underline{\lambda}_i^n$ и $\underline{\lambda}_i^{*n}$. То се може записати и на следећи начин, применом тригонометријског облика комплексног броја:

$$C_i\underline{\lambda}_i^n + C_j\underline{\lambda}_i^{*n} = C_i\rho^n(\cos(n\phi) + \mathrm{j}\sin(n\phi)) + C_j\rho^n(\cos(n\phi) - \mathrm{j}\sin(n\phi)) \tag{A.15}$$

$$= \underbrace{(C_i + C_j)}_{\underline{C}_i'}\rho^n\cos(n\phi) + \underbrace{\mathrm{j}(C_i - C_j)}_{\underline{C}_j'}\rho^n\sin(n\phi) \tag{A.16}$$

Дакле, као еквивалентан пар линеарно независних решења могу се посматрати и $\{\rho^n \cos(n\phi), \rho^n \sin(n\phi$
На сличан начин, множењем са n^i, се могу добити и партикуларна решења за вишеструке комплексно конјуговане полове као у претходном случају.

2.1 Резиме

За једначине облика (A.10) или (A.9) дефинише се карактеристични полином (A.12) чији скуп коренова одређује партикуларна решења према обрасцу:

- Сваком једноструком реалном корену λ_i одговара тачно једно партикуларно решење λ_i^n.
- Сваком вишеструком реалном корену λ_i вишеструкости q одговара тачно q партикуларних решења $\{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{q-1}\lambda_i^n\}$
- Сваком пару комплексно конјугованих коренова $\underline{\lambda}_i$ и $\underline{\lambda}_j = \underline{\lambda}_i^*$ одговарају два партикуларна решења и то $\{\rho^n \cos(n\phi), \rho^n \sin(n\phi)\}$.
- Сваком пару вишеструкости p комплексно конјугованих коренова $\underline{\lambda}_i$ и $\underline{\lambda}_j = \underline{\lambda}_i^*$ одговарају $2p$ партикуларних решења и то

$$\{\rho^n \cos(n\phi), n\rho^n \cos(n\phi), n^2\rho^n \cos(n\phi), \ldots, n^{p-1}\rho^n \cos(n\phi), \},$$

и

$$\{\rho^n \sin(n\phi), n\rho^n \sin(n\phi), n^2\rho^n \sin(n\phi), \ldots, n^{p-1}\rho^n \sin(n\phi), \}.$$

тиме је исцрпљен скуп могућности за коренове карактеристичног полинома. Имајући свих k линеарно независних партикуларних решења $x_{\mathrm{p},i}[n]$ има се коначно опште решење диференцне једначине у облику:

$$x[n] = C_1 x_{\mathrm{p},1}[n] + C_2 x_{\mathrm{p},2}[n] + \cdots + C_k x_{\mathrm{p},k}[n]. \tag{A.17}$$

2.2 Примери

Пример 1. Одредити решење диференцне једначине

$$x[n] - 4x[n-1] + 5x[n-2] - 4x[n-3] + 4x[n-4] = 0 \tag{A.18}$$

ако су познате помоћне вредности $x[0] = 0$, $x[1] = 1$, $x[2] = 11$, $x[3] = 41$.

Решење: Карактеристични полином је $P(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4$. Коренове полинома степена већег од два у општем случају није лако наћи. Ипак, постоје неке препоруке за „погађање" корена. На пример, уколико су сви корени целобројни, онда морају делити слободни члан. Дакле, потенцијални кандидати за целобројне корене су у овом случају $\{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$. Лако се проверава да су $P(1) = 1$, $P(-1) = 18$, $P(2) = 0$, $P(-2) = 80$, $P(4) = 68$, $P(-4) = 612$. Односно, један од коренова је 2. Да би се пронашли остали корени, потребно је полином поделити са $(\lambda - 2)$ што се може извести на више начина а најефикаснији је применом Хорнерове шеме:

	λ^4	λ^3	λ^2	λ^1	1	
	1	-4	5	-4	4	
$\boxed{2}$	1	-2	1	-2		$\Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2$

Поново се утврђује провером да је целобројни корен овог полинома 2, односно, поступак треба поновити још једном:

	λ^3	λ^2	λ^1	1	
	1	-2	1	-2	
$\boxed{2}$	1	0	1		$\Rightarrow \lambda^2+1$

Преостали су још само корени полинома λ^2+1 што су $\{\mathrm{j},-\mathrm{j}\}$.

Коначно, сви корени карактеристичног полинома су [2,2,j,−j]. Двоструком корену $\lambda_1=2$ одговарају два партикуларна решења и то $x_{\mathrm{p},1}[n]=2^n$ и $x_{\mathrm{p},2}[n]=n2^n$. Конјугованом пару $\{\mathrm{j},-\mathrm{j}\}$ одговарају два партикуларна решења. $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ Опште решење је облика:

$$x[n]=C_1 2^n+C_2 n2^n+C_3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+C_4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{A.19}$$

Заменом помоћних вредности у добијено опште решење добија се систем једначина:

$$\begin{aligned} x[0]&=0= C_1+C_3\\ x[1]&=1= 2C_1+2C_2+C_4\\ x[2]&=11= 4C_1+8C_2-C_3\\ x[3]&=41= 8C_1+24C_2-C_4. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Решавањем добијеног система једначина добијају се непознате константе $C_1=-1$, $C_2=2$, $C_3=1$, $C_4=-1$. Заменом у опште решење и сређивањем добија се коначни резултат

$$x[n]=(2n-1)2^n+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{A.21}$$

■

Пример 2. Одредити решење диференцне једначине

$$x[n]+x[n-1]-x[n-2]-x[n-3]=0 \tag{A.22}$$

које задовољава $x[0]=2$, $x[1]=-1$ и $x[2]=3$.

<u>Решење</u>: Карактеристични полином је $P(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1$. Полином се може директно факторисати

$$\begin{aligned} P(\lambda)&=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1 && \text{(A.23)}\\ &=\lambda^2(\lambda+1)-(\lambda+1) && \text{(A.24)}\\ &=(\lambda^2-1)(\lambda+1) && \text{(A.25)}\\ &=(\lambda-1)(\lambda+1)^2. && \text{(A.26)} \end{aligned}$$

Такав карактеристични полином има корене $[1,-1,-1]$ на основу чега има опште решење:

$$x[n]=C_1+(C_2+C_3 n)(-1)^n. \tag{A.27}$$

Заменом помоћних вредности добија се систем једначина:

$$\begin{aligned} x[0]&=2=C_1+C_2\\ x[1]&=-1=C_1-C_2-C_3\\ x[2]&=3=C_1+C_2+2C_3 \end{aligned}$$

Решења овог система једначина су $C_1=\frac{3}{4}$, $C_2=\frac{5}{4}$, $C_3=\frac{1}{2}$. Коначно решење примера је:

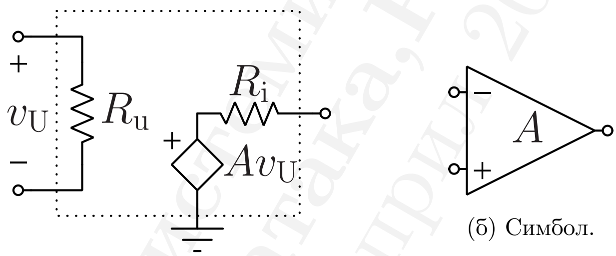
$$x[n]=\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}n\right)(-1)^n \tag{A.28}$$

Додатак Б

Операциони појачавач и индуктивни елементи

3 Напонски диференцијални појачавач

Поједностављен модел реалног напонског диференцијалног појачавача без меморије, приказан на слици Б.1а, карактерисан је својом улазном отпорношћу R_u, излазном отпорношћу R_i и напонским појачањем A напонски контролисаног напонског генератора. Има



(а) Унутрашња структура.

(б) Симбол.

Слика Б.1: Уз диференцијални појачавач

два улаза, један инвертујући (обележен са „-“) и један неинвертујући (обележен са „+“). Шематски симбол представљен је на слици Б.1б. Добар диференцијални напонски појачавач задовољава да су $R_\mathrm{u} \to \infty$, $R_\mathrm{i} \to 0$. Такав диференцијални појачавач практично представља идеалан напоном контролисан напонски генератор, када је $v_\mathrm{I} = Av_\mathrm{U}$.

4 Негативна повратна спрега

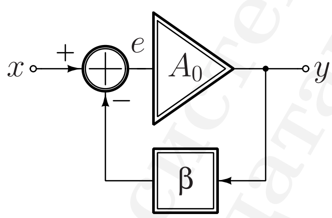
Концепт који суштински мења начин употребе диференцијалног појачавача је са принцип реакције (повратне спреге). Блеков модел система са реакцијом приказан је блок дијаграмом на слици Б.2а. У овом моделу, главни појачавач има појачање A_0 а мрежа повратне спреге појачање β. Појачање целокупног система се добија на основу блок дијаграма:

$$e = x - \beta y \tag{Б.1}$$

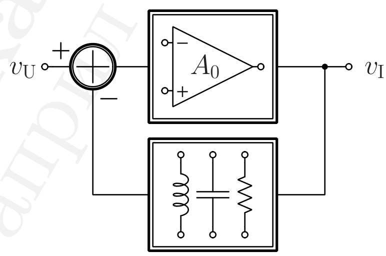
$$y = A_0 e, \tag{Б.2}$$

одакле се сређивањем добија појачање целог система $A = \dfrac{y}{x} = \dfrac{A_0}{1+\beta A_0}$. Сигнал e назива се још и *сиīналом īрешке*, а може се изразити преко улазног сигнала као $e = \dfrac{1}{1+\beta A_0}x$. Повратна спрега посебно добија на вредности када се размотри главни појачавач са веома великим појачањем, $A_0 \to \infty$. У том случају су $A_\infty = \lim\limits_{A_0\to\infty} \dfrac{A_0}{1+\beta A_0} = \dfrac{1}{\beta}$ и $e_\infty = \lim\limits_{A_0\to\infty} \dfrac{1}{1+\beta A_0} = 0$. Односно, за довољно велико појачање главног појачавача, карактеристике система са повратном спрегом диктира мрежа повратне спреге. Посебно, ова топологија се може реализовати, на пример, помоћу операционог појачавача са пасивном мрежом повратне спреге, што је илустровано на слици Б.2б. Према пређашњој дискусији, карактеристике оваквог система зависиће само од мреже повратне спреге ако је напонско појачање оваквог доброг диференцијалног појачавача веома велико. Такав диференцијални појачавач, ког кога је још и $A_0 \to \infty$, назива се **идеални операциони појачавач**. Идеални операциони појачавач најчешће обележавамо изостављањем ознаке напонског појачања. Разлика улазног и повратног сигнала која се појачава, у ваљано одабраној топологији (нпр. слика Б.2в), мора бити разлика напона на улазима операционог појачавача, на основу чега резултат да је $e_\infty \to 0$ повлачи то да се у оваквом режиму изједначавају напони инвертујућег и неинвертујућег улаза. Важно је нагласити, да ово није једина тополошка опција, већ да се улазни и излазни сигнал могу одузимати и на другачије начине, што се може видети на разним примерима (нпр. инвертујући појачавач).

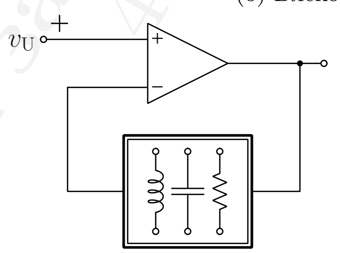
Коначно, уколико је операциони појачавач примењен у режиму повратне спреге онда се он може анализирати помоћу три правила која следе из пређашње анализе:



(а) Блеков модел.



(б) Блеков модел, са ОП.

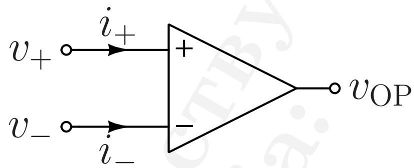


(в) Операциони појачавач, пример.

Слика Б.2: Уз увођење принципа операционог појачавача.

Идеалан операциони појачавач

- $i_+ = i_- = 0$ (јер је $R_\mathrm{u} \to 0$)
- $v_+ = v_-$ (јер је $e_\infty \to 0$)
- Излаз има произвољну вредност, тако да су задовољени пређашњи услови, $-\infty < v_\mathrm{OP} < \infty$.



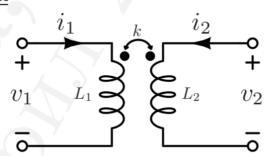
5 Индуктивни трансформатори

5.1 Спрегнути калемови

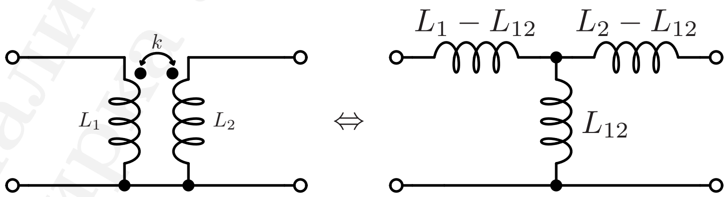
Физички модел на коме су утемељени индуктивни трансформатори је модел спрегнутих калемова. Магнетска спрега два посматрана линеарна намотаја, индуктивности L_1 и L_2 описује се међусобном индуктивношћу $L_{12} = L_{21}$ (за реципрочне средине). Коефицијент магнетске спреге се дефинише као апсолутна вредност међусобне индуктивности сведена на јединицу геометријске средине индуктивности појединих намотаја: $k = \dfrac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}}$, за знак међусобне индуктивности је одређен и смером мотања намотаја и шематски се обележава тачкама. Без додатних услова овакав пар спрегнутих калема описан је једначинама у временском домену:

Пар спрегнутих калемова

- $v_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$
- $v_2 = L_{12} \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$



За решавање проблема са спрегнутим калемовима, уколико су калемови кратко спојени са једне стране неретко је веома згодно прво обавити *распрезање калемова* трансфигурацијом у еквивалентну Т–мрежу као на слици Б.3. Будући да је ово трансфигурација, то подразумева да су ове две мреже еквивалентне у сваком смислу.



Слика Б.3: Уз распрезање калемова.

5.2 Савршени трансформатор

Уколико је магнетска спрега трансформатора савршена, односно уколико нема магнетског расипања, $k = 1$, односно $L_{12} = \pm\sqrt{L_1 L_2}$, такав трансформатор се назива **савршеним**. Без умањења општости, претпоставимо да су референтни смерови напона намотаја одабрани тако да је $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$. Тада се елиминацијом струја из модела спрегнутих калемова може показати да важи $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$. Пошто је сопствена индуктивност намотаја сразмерна квадрату броја навојака $L_i \propto N_i^2$, онда је и

$$\boxed{\frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2}} \tag{Б.3}$$

5.3 Идеални трансформатор

Уколико посматрамо савршени трансформатор и за контуру средње линије језгра напишемо Уопштени Амперов закон имамо једначину

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = \frac{Bl}{\mu_0 \mu_r}, \tag{Б.4}$$

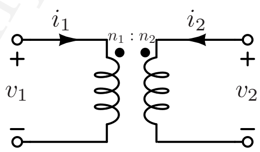
где су B интензитет вектора магнетске индукције у језгру, l дужина средње линије језгра и μ_r релативна пермеабилност материјала од кога је израђено језгро. Представимо број навојака оба намотаја нормализовано као $N_i = n_i N_0$ и заменимо у израз (Б.4). Тада n_i представља релативни број навојака у односу на нормализациони фактор N_0. За N_0 се може одабрати, на пример, ред величине броја навојака оба намотаја. Уколико су $N_1 = 1000$ и $N_2 = 2000$ онда се може одабрати на пример $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$ за $N_0 = 1000$. Другим речима, са n_i кодификујемо релативан број навојака намотаја а са N_0 њихов ред величине. Са тиме у виду једначину (Б.4) можемо записати и као:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \frac{Bl}{\mu_0 N_0 \mu_r} \tag{Б.5}$$

Сада, приметимо да уколико је $\mu_r N_0 \to \infty$ онда једначина постаје $\boxed{n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0}$. Тиме се добија модел **идеалног** трансформатора описан са две **алгебарске** једначине:

Идеални трансформатор

- $\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2}$
- $i_1 n_1 + i_2 n_2 = 0$



Иако се материјал језгра при пројектовању може одабрати тако да μ_r буде велико, на пример трафо-лимови ($\mu_r \sim 100$), доступни материјали постављају неку горњу границу пермеабилности. Са друге стране, инжењерским одабиром при пројектовању трансформатора може се одабрати велики број навојака намотаја тако да овај услов буде што боље задовољен. На пример, уколико се пројектује трансформатор који треба да удвостручава напон, одабир $(N_1, N_2) = (200, 100)$ је бољи од одабира $(N_1, N_2) = (20, 10)$. То је углавном разлог зашто су скоро сви практични трансформатори са веома великим бројем намотаја, јер је често циљ направити што *идеалнији* трансформатор. Ипак, постоје и неки нарочити изузеци, као на пример Теслин трансформатор. За тачно одређивање потребног броја навојака постоје и други критеријуми, али ћемо се зауставити на овој илустрацији.

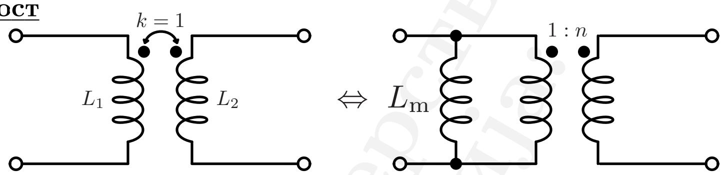
5.4 Магнетизациона индуктивност

Савршен трансформатор може се представити и помоћу идеалног трансформатора и једне индуктивности. Положај те индуктивности се може одабрати тако да се решавање кола највише поједностави (са примарне или секундарне стране). Без доказа наводимо трансфигурацију:

Магнетизациона индуктивност

$L_\mathrm{m} = L_1$

$n = \sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}$



Додатак В

Одређивање импулсног одзива континуалних *LTI* система

Циљ додатка је да обједини и појасни на примерима методе за одређивање импулсног одзива континуалних *LTI* система.

6 Поједностављење опште форме

Посматрајмо континуални *LTI* систем описан диференцијалном једначином облика

$$P(\mathrm{D})y(t) = Q(\mathrm{D})x(t), \tag{В.1}$$

где су $x(t)$ и $y(t)$ побуда и одзив система редом, а $P(\mathrm{D})$ и $Q(\mathrm{D})$ произвољни полиноми по оператору диференцирања D. Импулсни одзив овог система $h = h(t)$ представља одзив система на јединичну импулсну побуду $x(t) = \delta(t)$, односно решење једначине

$$P(\mathrm{D})h(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t). \tag{В.2}$$

Уколико применимо смену

$$\boxed{h(t) = Q(\mathrm{D})h_1(t)} \tag{В.3}$$

и заменимо у израз (В.2), даље се може писати

$$P(\mathrm{D})h(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t) \;\Leftrightarrow\; P(\mathrm{D})Q(\mathrm{D})h_1(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t) \;\Leftrightarrow\; Q(\mathrm{D})P(\mathrm{D})h_1(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t). \tag{В.4}$$

У последњем кораку, начињена је замена редоследа примене оператора, $P(\mathrm{D})Q(\mathrm{D}) \equiv Q(\mathrm{D})P(\mathrm{D})$, која је оправдана на основу линеарности. У последњем кораку се може на обе стране применити оператор $Q^{-1}(\mathrm{D})$, чију егзистенцију овде нећемо дискутовати, након чега преостаје резултат:

$$\boxed{P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t).} \tag{В.5}$$

На основу претходно изнесеног поступка, могуће је одредити импулсни одзив система описаног једначином (В.1) тако што се одреди помоћни одзив $h_1(t)$ помоћног система описаног једначином (В.5) а потом трансформацијом добијеног помоћног одзива у одзив полазног система помоћу (В.3)

Додатно, из практичних разлога постоји ограничење у степенима полинома $\deg P \geqslant \deg Q$. Уколико се импулсни одзив помоћног система запише у облику $h_1(t) = g(t)\,\mathrm{u}(t)$, онда се могу разликовати случајеви:

$$h(t) = \begin{cases} Q(D)\big(g(t)\mathrm{u}(t)\big), & \deg P = \deg Q \\ Q(D)\big(g(t)\big)\,\mathrm{u}(t), & \deg P > \deg Q \end{cases} \tag{B.6}$$

7 Одређивање импулсног одзива за поједностављену форму

На основу претходне дискусије, потребно је и довољно одредити решење једначине $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$. Препоручена метода за решавање овог проблема је (i) диференцирањем одскочног одзива (дискутовано на предавањима), али се може користити и (ii) поједностављена метода уклапања импулса (енг. *impulse matching*, дискутовано на вежбама).

Прва метода утемељена је на својству линеарности система. Нека је $s_1(t) = O\{\mathrm{u}(t)\}$ одскочни одзив посматраног система, онда се диференцирањем обе стране изналази

$$\frac{\mathrm{d}s_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}O\{\mathrm{u}(t)\} = O\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t)\right\} = O\{\delta(t)\} = h_1(t), \tag{B.7}$$

при чему је у другом кораку замењен редослед примене оператора диференцирања и система због линеарности. Коначно се има закључак $\boxed{\frac{\mathrm{d}s_1(t)}{\mathrm{d}t} = h_1(t)}$, односно, **импулсни одзив се добија диференцирањем одскочног одзива**. Одређивање одскочног одзива представља решавање диференцијалне једначине $P(\mathrm{D})s_1(t) = \mathrm{u}(t)$. Велика предност у решавању на овај начин у односу на директно решавање једначине (B.5) јесте то да у њој нема импулса што за последицу има то да је одскочни одзив непрекидан, тако да су једнаке преиницијалне и постиницијалне вредности за $s_1(t)$. Будући да се одскочни одзив одређује за преиницијалне услове равне нули то повлачи да су онда и постиницијални услови равни нули. Одскочни одзив добија се као збир хомогеног и партикуларног дела $s_1 = s_{1\mathrm{h}} + s_{1\mathrm{p}}$. Хомогени део се одређује на начин показан на часу. Партикуларни део представља устаљени одзив на експоненцијалну побуду $\mathrm{e}^{0\cdot t}\mathrm{u}(t)$ и на основу дискусије са часа вежби једнак је $s_{1\mathrm{p}} = \dfrac{1}{P(0)}$.

Друга метода утемељена је на особини линеарне независности различитих извода Дираковиx импулса. Може се показати да једначина облика:

$$a_0\delta(t) + a_1\delta'(t) + a_2\delta''(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t) = 0, \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{B.8}$$

по непознатим коефицијентима $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ има само тривијално решење $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. У контексту решавања диференцијалне једначине облика $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$ то значи да: (i) пошто се са десне стране налази делта импулс мора се налазити и са леве стране и (ii) пошто се са десне стране не налазе изводи делта импулса њега не може бити ни са леве стране. На основу тога, у изразу $P(\mathrm{D})h_1(t)$ се мора појавити делта импулс и не сме се појавити његов први извод. Претпоставимо да се сабирак $f(t)\delta(t)$ јавља у k-том изводу импулсног одзива, $h_1^{(k)}(t)$, у том случају се у $(k+1)$-вом изводу импулсног одзива мора наћи сабирак облика $f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$. Односно, да се не би са леве стране појавио извод Дираковог импулса, неопходно је да се импулс појављује тек у највишем изводу импулсног одзива који се јавља у једначини а то је $h^{(\deg P)}(t)$, где је $\deg P$ степен полинома P – ред диференцијалне једначине. Будући да се импулс јавља у $h^{(\deg P)}(t)$ то се Хевисајдова одскочна функција мора јављати у $h^{(\deg P-1)}(t)$, односно до прекида долази у $(\deg P - 1)$-вом изводу. Будући да су интеграли Хевисајдове функције непрекидни, то је онда тај и једини извод импулсног одзива који има прекид. На основу тога, ако распишемо оператор система као $P(\mathrm{D}) = c_0 + c_1\mathrm{D} + c_2\mathrm{D}^2 + \cdots + c_2\mathrm{D}^n$ једначина се може писати као

$$(c_0 + c_1\mathrm{D} + c_2\mathrm{D}^2 + \cdots + c_2\mathrm{D}^n)h_1(t) = \delta(t) \tag{B.9}$$

$$c_0 h_1(t) + c_1 h_1'(t) + c_2 h_1''(t) + \cdots + c_n h_1^{(n)}(t) = \delta(t) \tag{B.10}$$

Ако интегралимо обе стране добијене једначине $\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}$ у произвољно „уским“ границама, $\varepsilon \to 0$, приметивши да онда интеграли свих ограничених функција теже нули преостаје само члан са импулсом:

$$\cancel{c_0 \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1(t)\,\mathrm{d}t} + \cancel{c_1 \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1'(t)\,\mathrm{d}t} + \cdots + \cancel{c_{n-1} \int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1^{(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t} = \underbrace{\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t}_{=1,\text{по деф.}} \Rightarrow$$

$$c_n h_1^{(n-1)}(0^+) - c_n h_1^{(n-1)}(0^-) = 1 \tag{B.11}$$

Како су преиницијални услови приликом тражења импулсног одзива равни нули то преостаје $h_1^{(n-1)}(0^+) = \dfrac{1}{c_n}$. **Коначно су непосредно познати сви постиницијални услови импулсног одзива**

$$\boxed{h_1(0^+) = 0,\;\; h_1^{'}(0^+) = 0,\;\; h_1^{''}(0^+) = 0, \ldots,\;\; h_1^{(n-2)}(0^+) = 0,\;\; h_1^{(n-1)}(0^+) = \frac{1}{c_n},} \tag{B.12}$$

где је c_n коефицијент уз највиши извод у диференцијалној једначини а n је ред диференцијалне једначине.

Пример 1. Одредити одзив система описаног диференцијалном једначином $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 2x(t)$, на побуду $x(t) = 2e^t\,\mathrm{u}(t-2)$.

Решење. Одзив на дату побуду $x(t)$ може се одредити конволуцијом. За примену конволуције потребно је прво одредити импулсни одзив система. Систем се може записати у облику (B.1) за $P(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^2 + 3\mathrm{D} + 2$ и $Q(\mathrm{D}) = \mathrm{D} + 2$. Потражимо импулсни одзив помоћног система $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$.

1. метода (*диференцирањем импулсног одзива*). Импулсни одзив помоћног система тражимо као решење једначине

$$P(\mathrm{D})s_1(t) = \mathrm{u}(t). \tag{B.13}$$

Импулсни одзив има хомогени део одређен коренима полинома P и то $\lambda \in \{-2, -1\}$. Облик хомогеног решења је онда $s_{1,\mathrm{h}} = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$. Партикуларни део је $s_{1,\mathrm{p}} = \dfrac{1}{P(0)} = \dfrac{1}{2}$. Коефицијенти у општем облику једначине одскочног одзива налазе се на основу постиницијалних почетних услова који су из раније наведених разлога равни нули.

$$s_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} \Rightarrow \quad s_1(0) = 0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \tag{B.14}$$

$$s_1'(t) = -C_1\mathrm{e}^{-t} - 2C_2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow \quad s_1'(0) = 0 = -C_1 - 2C_2. \tag{B.15}$$

Решавањем добијеног система једначина по непознатим коефицијентима добија се $C_1 = -1$, $C_2 = \dfrac{1}{2}$. Одакле се коначно налази одскочни одзив $s_1(t) = \left(-\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{u}(t)$.

Диференцирањем добијеног одскочног одзива добија се и импулсни одзив помоћног система $\boxed{h_1(t) = \left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\, \mathrm{u}(t)}$

2. метода (*поједностављеном методом уклапања импулса*) Непосредно се решава једначина $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$. Општи облик импулсног одзива одређен је коренима полинома P на исти начин као у претходној методи, $h_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$. На основу закључка методе познати су постиницијални почетни услови као $h_1(0^+) = 0$, $h_1'(0^+) = 1$. Заменом у општи облик добија се:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow &\quad h_1(0^+) &= 0 = C_1 + C_2 && \text{(B.16)}\\ h_1'(t) &= -C_1\mathrm{e}^{-t} - 2C_2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow &\quad h_1'(0^+) &= 1 = -C_1 - 2C_2, && \text{(B.17)}\\ &&&&& \text{(B.18)} \end{aligned}$$

решавањем добијеног система имају се $C_1 = -C_2 = 1$, одакле је $\boxed{h_1(t) = \left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\, \mathrm{u}(t)}$

Имајући импулсни одзив помоћног система, импулсни одзив полазног система налази се на основу (B.3), одакле је

$$h(t) = Q(\mathrm{D})h_1(t) \Rightarrow \boxed{h(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)}. \tag{B.19}$$

Одзив на побуду може се потражити конволуцијом

$$y_\mathrm{p}(t) = h(t) * x(t). \tag{B.20}$$

У овом случају је најефикасније применити својства конволуције. Побудни сигнал се може записати и као $x(t) = 2\mathrm{e}^{t-2+2}\,\mathrm{u}(t-2) = 2\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{t-2}\mathrm{u}(t-2)$. Приметимо да је побудни сигнал временски померен и скалиран у односу на сигнал $x_1 = e^t\,\mathrm{u}(t)$. Да би се израчунала конволуција (B.20) згодно је искористити ово својство тако да се конволуција одговарајућим трансформацијама своди на табличну, или једноставнију конволуцију. На основу таблице је $y_{\mathrm{p},1} = h(t) * x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t) * \mathrm{e}^t\mathrm{u}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\mathrm{u}(t) = \sinh(t)\,\mathrm{u}(t)$. На основу линеарности и временске инваријантности, пошто важи $x(t) = 2\mathrm{e}^2 x_1(t-2)$ то је и $y_\mathrm{p}(t) = 2\mathrm{e}^2 y_{\mathrm{p},1}(t-2)$ одакле је

$$\boxed{\boxed{y_\mathrm{p}(t) = 2\mathrm{e}^2\sinh(t-2)\,\mathrm{u}(t-2)}} \tag{B.21}$$

■