Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет информационных технологий и управления

Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

Расчетно-пояснительная записка
к курсовому проекту
по курсу «Системный анализ и исследование операций»
на тему «Разработка оптимального плана выращивания зерновых культур»

Выполнил
студент группы 120602
_________ Р. И. Будный
"___"_________ ______

Научный руководитель
_________ Т. В. Тиханович
"___"_________ ______

Минск 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций — наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее оптимального управления организационными системами.

Предмет исследования операций — системы организационного управления или организации, которые состоят из большого числа взаимодействующих между собой подразделений не всегда согласующихся между собой и могут быть противоположны.

Цель исследования операций — количественное обоснование принимаемых решений по управлению организациями

Решение, которое оказывается наиболее выгодным для всей организации называется **оптимальным**, а решение наиболее выгодное одному или нескольким подразделениям называется **субоптимальным**.

Основные этапы исследования операций:

– **Постановка задачи.** Происходит формирование концептуальной модели исследуемой системы (задачи), в которой в содержательной форме описывается состав системы, ее компоненты и их взаимосвязи, перечень основных показателей качества, переменных, контролируемых и неконтролируемых внешних факторов, а также их взаимосвязей с показателями качества системы, перечень стратегий управления (или решений), которые требуется определить в результате решения поставленной задачи.

– **Построение аналитической модели рассматриваемого объекта (процесса).** Происходит формализация цели управления объектом, выделение возможных управляющих воздействий, влияющих на достижение сформулированной цели, а также описание системы ограничений на управляющие воздействия.

– **Решение задач, сформулированных на базе построенной математической модели.** После достижения удовлетворительного уровня адекватности аналитической модели применяется соответствующий метод или алгоритм для нахождения оптимального (или субоптимального) решения задачи.

– **Реализация полученного решения на практике.** Это один из важнейших этапов, завершающий операционное исследование. Внедрение в практику найденного на модели решения можно рассмотреть как самостоятельную задачу, применив системный подход и анализ. Полученной на модели оптимальной стратегии управления необходимо предоставить соответствующую содержательную форму в виде инструкций и правил, которая была бы понятной для административного персонала и легкой для выполнения в производственных условиях.

Краеугольным камнем исследования операций является **математическое моделирование**. Хотя данные, полученные в процессе исследования математических моделей, являются основой для принятия решений, окончательный выбор обычно делается с учетом многих других «нематериальных» факторов, которые невозможно отобразить в математических моделях [1].

В исследовании операций нет единого общего метода решения всех математических моделей, которые встречаются на практике. Вместо этого выбор метода решения диктуют тип и сложность исследуемой математической модели. Наиболее известными методами исследования операций являются:

- методы линейного программирования;
- методы целочисленного программирования;
- методы динамического программирования;
- методы нелинейного программирования;
- методы исследования функций классического анализа;
- методы, основанные на использовании множителей Лагранжа;
- вариационное исчисление;
- принцип максимума;
- метод геометрического программирования.

Ниже приведена краткая характеристика указанных методов и областей их применения, что до некоторой степени может облегчить выбор того или иного метода для решения конкретной оптимальной задачи.

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование — направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

– критерий оптимальности;

– систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств.

Для решения большого круга задач линейного программирования имеется практически универсальный алгоритм — **симплексный метод**, позволяющий за конечное число итераций находить оптимальное решение подавляющего большинства задач. Тип используемых ограничений не сказывается на возможности применения указанного алгоритма. Дополнительной проверки на оптимальность для получаемых решений не требуется.

Как правило, практические задачи линейного программирования отличаются значительным числом независимых переменных. Поэтому для их решения обычно используют вычислительные машины, необходимая мощность которых определяется размерностью решаемой задачи.

Задачами нелинейного программирования называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и/или целевая функция, и/или ограничения в виде неравенств или равенств. Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции $F(x)$, функциями ограничений и размерностью вектора (вектора решений). Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует. В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции $F(x)$. Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут непропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Многие задачи нелинейного программирования могут быть приближены к задачам линейного программирования, и найдено решение, близкое к оптимальному. Встречаются **задачи квадратичного программирования**, когда функция $F(x)$ является полиномом второй степени относительно переменных, а ограничения линейны. В ряде случаев может быть применён **метод штрафных функций**, сводящий задачу поиска экстремума при наличии ограничений к аналогичной задаче при отсутствии ограничений, которая обычно решается проще. Но в целом задачи нелинейного программирования относятся к трудным вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным методам оптимизации. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

Динамическое программирование – вычислительный метод для решения задач определенной структуры. Возникло и сформировалось в 1950–1953 гг. благодаря работам Р. Беллмана над динамическими задачами управления запасами. В упрощенной формулировке динамическое программирование представляет собой направленный последовательный перебор вариантов, который обязательно приводит к глобальному максимуму.

Основные необходимые свойства задач, к которым возможно применить этот метод:

– задача должна допускать интерпретацию как n-шаговый процесс принятия решений;

– задача должна быть определена для любого числа шагов и иметь структуру, не зависящую от их числа;

– при рассмотрении k-шаговой задачи должно быть задано некоторое множество параметров, описывающих состояние системы, от которых зависят оптимальные значения переменных, причем это множество не должно изменяться при увеличении числа шагов;

– выбор решения на k-м шаге не должен оказывать влияния на предыдущие решения, кроме необходимого пересчета переменных.

В основе метода ДП лежит **принцип оптимальности**, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р. Э. Беллманом: каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге. При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш именно на данном шаге.

При решении задач методом динамического программирования, как правило, используют вычислительные машины, обладающие достаточным объемом памяти для хранения промежуточных результатов решения, которые обычно получаются в табличной форме.

Методы исследования функций классического анализа представляют собой наиболее известные методы решения несложных задач оптимизации, которые известны из курса математического анализа. Областью использования данных методов являются задачи с известным аналитическим выражением критерия оптимальности, что позволяет найти аналитическое выражение для производных.

Методы исследования при наличии ограничений на область изменения независимых переменных можно использовать только для отыскания экстремальных значений внутри указанной области. Это относится к задачам с большим числом независимых переменных (больше двух), в которых анализ значений критерия оптимальности на границе допустимой области изменения переменных становится весьма сложным.

Метод множителей Лагранжа применяют для решения задач такого же класса сложности, как и при использовании обычных методов исследования функций, но при наличии ограничений типа равенств на независимые переменные. В основном при использовании метода множителей Лагранжа приходится решать те же задачи, что и без ограничений. Некоторое усложнение в данном случае возникает лишь от введения дополнительных неопределенных множителей, вследствие чего порядок системы уравнений, решаемой для нахождения экстремумов критерия оптимальности, соответственно повышается на число ограничений. В остальном, процедура поиска решений и проверки их на оптимальность отвечает процедуре решения задач без ограничений.

Множители Лагранжа можно применять для решения задач оптимизации объектов на основе уравнений с частными производными и задач динамической оптимизации. При этом вместо решения системы конечных уравнений для отыскания оптимума необходимо интегрировать систему дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что множители Лагранжа используют также в качестве вспомогательного средства и при решении специальными методами задач других классов с ограничениями типа равенств, например, в вариационном исчислении и динамическом программировании. Особенно эффективно применение множителей Лагранжа в методе динамического программирования, где с их помощью иногда удается снизить размерность решаемой задачи.

Методы вариационного исчисления обычно используют для решения задач, в которых критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых служат неизвестные функции. Такие задачи возникают обычно при статической оптимизации процессов с распределенными параметрами или в задачах динамической оптимизации.

При наличии ограничений типа равенств, имеющих вид функционалов, применяют множители Лагранжа, что дает возможность перейти от условной задачи к безусловной. Наиболее значительные трудности при использовании вариационных методов возникают в случае решения задач с ограничениями типа неравенств. Заслуживают внимания **прямые методы решения задач оптимизации функционалов**, обычно позволяющие свести исходную вариационную задачу к задаче нелинейного программирования, решить которую иногда проще, чем краевую задачу для уравнений Эйлера.

Принцип максимума применяют для решения задач оптимизации процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений. Достоинством математического аппарата принципа максимума является то, что решение может определяться в виде разрывных функций; это свойственно многим задачам оптимизации, например задачам оптимального управления объектами, описываемыми линейными дифференциальными уравнениями.

Термин **геометрическое программирование**, появившийся в математической литературе сравнительно недавно, применяется для обозначения теории решения важного класса оптимизационных задач. Эти задачи можно сформулировать в терминах функций специального вида — так называемых «позиномов». Именно, это задачи отыскания наименьших значений позиномов в областях, описываемых неравенствами «позиномиального» вида. Оптимизационные задачи такого типа особенно важны для приложений. Они постоянно возникают при решении экономических задач, задач, связанных с проектированием разного рода сооружений и др.

В общем случае задачи геометрического программирования требуют для своего решения привлечения средств современной высшей математики и использования ЭВМ. Однако, если несколько упростить задачу, например, искать минимумы позиномов в области их определения, то можно разработать общие методы их нахождения, которые базируются на элементарной основе, т. е. не используют понятий и методов дифференциального исчисления.

Некоторые математические модели могут быть такими сложными, что их невозможно решить никакими доступными методами оптимизации. В этом случае остается только **эвристический подход**: поиск подходящего «хорошего» решения вместо оптимального решения. Эвристический подход предполагает наличие эмпирических правил, в соответствии с которыми ведется поиск подходящего решения.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Для посевов зерновых культур может использоваться 0,8 млн га земли в западной части некоторого региона и 0,6 млн га — в восточной. Данные об урожайности зерновых культур с одного гектара приведены в таблице 1.1. Прибыль от продажи одного центнера озимых составляет 8 ден. ед., от продажи одного центнера яровых — 7 ден. ед. Необходимо произвести не менее 20 млн центнеров озимых и не менее 6 млн центнеров яровых.

Требуется составить план использования земель, обеспечивающий максимальную прибыль от выращенного урожая.

Таблица 1.1 – Урожайность зерновых культур

Зерновая культура	Урожайность, ц/га	
	запад	восток
Озимые	20	25
Яровые	28	18

2 ПОСТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В соответствии с условием задания, требуется составить план использования земель, обеспечивающий максимальную прибыль от выращенного урожая. Принимая это во внимание, введем следующие переменные:

– $x_{11} \geq 0$ – площадь земель **западной части региона**, используемая для выращивание **озимых**, млн га;

– $x_{12} \geq 0$ – площадь земель **восточной части региона**, используемая для выращивание **озимых**, млн га;

– $x_{21} \geq 0$ – площадь земель **западной части региона**, используемая для выращивание **яровых**, млн га;

– $x_{22} \geq 0$ – площадь земель **восточной части региона**, используемая для выращивание **яровых**, млн га.

Определим ограничения математической модели в соответствии с данными, взятыми из условия задачи, а также из таблицы 1.1:

$$\begin{aligned} &20x_{11} + 25x_{12} \geq 20, \\ &28x_{21} + 18x_{22} \geq 6. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Неравенства (2.1) соответствуют минимально допустимым объемам выращенных культур, для озимых и яровых соответственно.

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{21} \leq 0{,}8, \\ &x_{12} + x_{22} \leq 0{,}6. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Неравенства (2.2) соответствуют ограничениям площади, доступной для засева в западной и восточной части региона соответственно.

Целевая функция определяется из требования максимальности выручки, полученной от продажи урожая:

$$\begin{aligned} E &= 8(20x_{11} + 25x_{12}) + 7(28x_{21} + 18x_{22}) \to \max = \\ &= 160x_{11} + 200x_{12} + 196x_{21} + 126x_{22} \to \max\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Приведем полную математическую модель рассматриваемой задачи:

$$
\begin{aligned}
E = 160x_{11} + 200x_{12} + 196x_{21} + 126x_{22} \to \max,\\
20x_{11} + 25x_{12} \geq 20,\\
28x_{21} + 18x_{22} \geq 6,\\
x_{11} + x_{21} \leq 0{,}8,\\
x_{12} + x_{22} \leq 0{,}6,\\
x_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

В данной задаче все переменные по своему физическому смыслу могут принимать дробные значения, поэтому ограничения целочисленности на них не накладываются.

3 ОБОСНОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

В данной задаче все ограничения и целевая функция линейны, следовательно для её решения можно использовать симплекс-метод.

В математической модели (2.4) присутствуют ограничения вида «больше или равно», следовательно, для решения задачи следует использовать один из методов исскуственного базиса. В данном случае будет применен двухэтапный метод.

Все переменные в задаче по своему физическому смыслу могут принимать дробные значения, поэтому применения методов целочисленного программирования не требуется.

4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

4.1 Приведение базовой аналитической модели к стандартной форме

Приведем математическую модель задачи (2.4) к стандартной форме. Для этого в ограничения «больше или равно» требуется ввести избыточные переменные, а в ограничения «меньше или равно» — остаточные:

$$20x_{11} + 25x_{12} - x_1 = 20, \tag{4.1}$$
$$28x_{21} + 18x_{22} - x_2 = 6, \tag{4.2}$$
$$x_{11} + x_{21} + x_3 = 0{,}8,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_4 = 0{,}6,$$
$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2,$$
$$x_k \geq 0, k = \overline{1, 4}.$$

В ограничениях (4.1) и (4.2) отсутствует базисная переменная (переменная, входящая только в это ограничение с коэффициентом, равным единице), поэтому следует ввести исскуственные переменные x_5 и x_6 соответственно:

$$\begin{aligned} 20x_{11} + 25x_{12} - x_1 + x_5 = 20,\\ 28x_{21} + 18x_{22} - x_2 + x_6 = 6. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Таким образом, в каждом ограничении имеется по базисной переменной (x_3, x_4, x_5, x_6). Остальные переменные — небазисные.

Составим искусственную целевую функцию, равную сумме искусственных переменных:

$$W = x_5 + x_6 \to \min. \tag{4.4}$$

Выразим искусственную целевую функцию через небазисные переменные. Для этого сначала выразим их через небазисные переменные:

$$\begin{aligned} x_5 &= 20 - 20x_{11} - 25x_{12} + x_1, \\ x_6 &= 6 - 28x_{21} - 18x_{22} + x_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Подставим (4.5) в исскуственную целевую функцию:

$$W = 26 - 20x_{11} - 25x_{12} - 28x_{21} - 18x_{22} + x_1 + x_2 \to \min\,. \tag{4.6}$$

Для приведения всей задачи к стандартной форме требуется перейти к искусственной целевой функции, подлежацей максимизации. Для этого умножим выражение (4.6) на минус один:

$$-W = -26 + 20x_{11} + 25x_{12} + 28x_{21} + 18x_{22} - x_1 - x_2 \to \max\,. \tag{4.7}$$

Приведем полную математическую модель задачи с искусственным базисом в стандартной форме:

$$\begin{aligned} E &= 160x_{11} + 200x_{12} + 196x_{21} + 126x_{12} \to \max, \\ -W &= -26 + 20x_{11} + 25x_{12} + 28x_{21} + \\ &\qquad + 18x_{22} - x_1 - x_2 \to \max\,. \end{aligned} \tag{4.8а}$$

$$\begin{aligned} 20x_{11} + 25x_{12} - x_1 + x_5 &= 20, \\ 28x_{21} + 18x_{22} - x_2 + x_6 &= 6, \\ x_{11} + x_{21} + x_3 &= 0{,}8, \\ x_{12} + x_{22} + x_4 &= 0{,}6, \\ x_{ij} \geq 0, i, j &= 1, 2, \\ x_k \geq 0, k &= \overline{1, 6}. \end{aligned} \tag{4.8б}$$

Составим первую симплекс-таблицу (таблица 4.2).

Приведенное в таблице 4.2 начальное решение $x_3 = 0{,}8, x_4 = 0{,}6, x_5 = 20, x_6 = 6, x_k = x_{ij} = 0$, при $i, j, k = 1{,}2$ является недопустимым,

Таблица 4.2

Базис	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
E	-160	-200	-196	-126	0	0	0	0	0	0	0
$-W$	-20	-25	-28	-18	1	1	0	0	0	0	-26
x_5	20	25	0	0	-1	0	0	0	1	0	20
x_6	0	0	28	18	0	-1	0	0	0	1	6
x_3	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0,8
x_4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0,6

так как оно не удовлетворяет начальной системе ограничений (2.4) — не выполняются условия (4.5).

Для поиска начального допустимого решения реализуется первый этап двухэтапного метода: максимизация искусственной целевой функции на основе процедур симплекс-метода.

4.2 Максимизация искусственной целевой функции

Выберем переменную для включения в базис: это переменная x_{21}, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке искусственной целевой функции. Столбец x_{21} — ведущий. Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдём симплексные отношения:

$$\frac{20}{0} = +\infty; \qquad \frac{6}{28} \approx 0{,}214; \qquad \frac{0{,}8}{1} = 0{,}8; \qquad \frac{0{,}6}{0} = +\infty. \tag{4.9}$$

Минимальное симплексное отношение соответствует переменной x_6, следовательно, эта переменная исключается из базиса. Строка x_6 — ведущая. Ведущий элемент находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки симплекс-таблицы. В нашем случае ведущий элемент принимает значение, равное 28.

В результате преобразований по правилам симплекс-метода[1] получим следующую симплекс-таблицу (таблица 4.3).

Таблица 4.3

Базис	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
E	-160	-200	0	0	0	-7	0	0	0	7	42
$-W$	-20	-25	0	0	1	0	0	0	0	1	-20
x_5	20	25	0	0	-1	0	0	0	1	0	20
x_{21}	0	0	1	0,64	0	-0,04	0	0	0	0,04	0,2143
x_3	1	0	0	-0,64	0	0,04	1	0	0	-0,04	0,5857
x_4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0,6

Как видно из таблицы 4.3, значение искусственной целевой функции не равно нулю, следовательно, требуется сделать ещё как минимум одну итерацию симплекс-метода.

Выберем переменную для включения в базис: это переменная x_{12}, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке искусственной целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдём симплексные отношения:

$$\frac{20}{25} = 0{,}8; \qquad \frac{0{,}21429}{0} = +\infty; \qquad \frac{0{,}58571}{0} = +\infty; \qquad \frac{0{,}6}{1} = 0{,}6. \qquad (4.10)$$

Минимальное симплексное отношение соответствует переменной x_4, следовательно, эта переменная исключается из базиса. В результате преобразований по правилам симплекс-метода получим следующую симплекс-таблицу (таблица 4.4).

[1] Правила преобразования симплекс-таблицы:
– в столбце «Базис» вместо переменной x_6 указывается переменная x_{21}.
– все элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент;
– все элементы ведущего столбца (кроме ведущего элемента) заменяются нулями;
– все остальные элементы таблицы (включая E-строку и столбец «Решение») пересчитываются по «правилу прямоугольника»: ведущий и пересчитываемый элемент образуют диагональ прямоугольника; находится произведение ведущего и пересчитываемого прямоугольника; из этого произведения вычитается произведение элементов, образующих противоположную диагональ прямоугольника; результат делится на ведущий элемент.

Таблица 4.4

Базис	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
E	-160	0	0	200	0	-7	0	200	0	7	162
$-W$	-20	0	0	25	1	0	0	25	0	1	-5
x_5	20	0	0	-25	-1	0	0	-25	1	0	5
x_{21}	0	0	1	0,64	0	-0,04	0	0	0	0,04	0,2143
x_3	1	0	0	-0,64	0	0,04	1	0	0	-0,04	0,5857
x_{12}	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0,6

Как видно из таблицы 4.4, значение искусственной целевой функции не равно нулю, следовательно, требуется сделать еще как минимум одну итерацию симплекс-метода.

Выберем переменную для включения в базис: это переменная x_{11}, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке искусственной целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, найдем симплексные отношения:

$$\frac{5}{20} = 0{,}25; \qquad \frac{0{,}2143}{0} = +\infty; \qquad \frac{0{,}5857}{1} = 0{,}5857; \qquad \frac{0{,}6}{0} = +\infty. \qquad (4.11)$$

Минимальное симплексное отношение соответствует переменной x_5, следовательно, эта переменная исключается из базиса. В результате преобразований по правилам симплекс-метода получим следующую симплекс-таблицу (таблица 4.5).

Таблица 4.5

Базис	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Решение
E	0	0	0	0	-8	-7	0	0	8	7	202
$-W$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_{11}	1	0	0	-1,25	-0,05	0	0	-1,25	0,05	0	0,25
x_{21}	0	0	1	0,64	0	-0,04	0	0	0	0,04	0,2143
x_3	0	0	0	0,61	0,05	0,04	1	1,25	-0,05	-0,04	0,3357
x_{12}	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0,6

Как видно из таблицы 4.5, искусственная целевая функция равна нулю, и в базисе нет искусственных переменных. Получено допустимое решение:

$$x_{11} = 0{,}25; \quad x_{12} = 0{,}6; \quad x_{21} = 0{,}2143; \quad x_3 = 0{,}3357; \tag{4.12}$$

$$x_k = x_{22} = 0, k = 1, 2, 4, 5, 6. \tag{4.13}$$

В том, что оно допустимо, нетрудно убедиться, подставив значения переменных в систему ограничений (2.4).

Таким образом, первый этап двухэтапного метода завершен. Искусственная целевая функция и искусственные переменные исключаются из симплекс-таблицы (таблица 4.6)

Таблица 4.6

Базис	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
E	0	0	0	0	-8	-7	0	0	202
x_{11}	1	0	0	-1,25	-0,05	0	0	-1,25	0,25
x_{21}	0	0	1	0,64	0	-0,04	0	0	0,2143
x_3	0	0	0	0,61	0,05	0,04	1	1,25	0,3357
x_{12}	0	1	0	1	0	0	0	1	0,6

4.3 Максимизация основной целевой функции

Полученное решение является допустимым, но не оптимальным: признак неоптимальности решения — наличие отрицательных коэффициентов в строке целевой функции E. Поэтому реализуется второй этап двухэтапного метода — максимизация основной целевой функции E.

Включим в базис переменную x_1, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычислим симплексные отношения:

$$\frac{0{,}21429}{0} = +\infty; \qquad \frac{0{,}3357}{0{,}05} = 6{,}714; \qquad \frac{0{,}6}{0} = +\infty. \tag{4.14}$$

Минимальное симплексное отношение соответствует переменной x_3, следовательно, эта переменная исключается из базиса. После преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (таблица 4.7).

Таблица 4.7

Базис	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
E	0	0	0	97,14	0	-1,29	160	200	255,7143
x_{11}	1	0	0	-0,64	0	0,04	1	0	0,5857
x_{21}	0	0	1	0,64	0	-0,04	0	0	0,2143
x_1	0	0	0	12,14	1	0,71	20	25	6,7143
x_{12}	0	1	0	1	0	0	0	1	0,6

Полученное решение также не является оптимальным, поэтому повторим процесс максимизации основной целевой функции E.

Включим в базис переменную x_2, так как ей соответствует максимальный по модулю отрицательный коэффициент в строке целевой функции. Для определения переменной, исключаемой из базиса, вычислим симплексные отношения:

$$\frac{0{,}5857}{0{,}04} = 14{,}6425; \qquad \frac{6{,}7143}{0{,}71} = 9{,}4568; \qquad \frac{0{,}6}{0} = +\infty. \qquad (4.15)$$

Минимальное симплексное отношение соответствует переменной x_1, следовательно, эта переменная исключается из базиса. После преобразований по правилам симплекс-метода будет получена новая симплекс-таблица (таблица 4.8), содержащая оптимальное решение (признак его оптимальности — отсутствие отрицательных элементов в строке целевой функции).

Таблица 4.8

Базис	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
E	0	0	0	119	1,8	0	196	245	267,8
x_{11}	1	0	0	-1,25	-0.05	0	0	-1,25	0,25
x_{21}	0	0	1	1,25	0,05	0	1	1,25	0,55
x_2	0	0	0	17	1,4	1	28	35	9,4
x_{12}	0	1	0	1	0	0	0	1	0,6

4.4 Анализ результатов оптимизации

В соответствии со значениями таблицы 4.8, основные переменные задачи приняли следующие значения:

$$x_{11} = 0{,}25; \;\; x_{12} = 0{,}6; \;\; x_{21} = 0{,}55; \;\; x_{22} = 0; \;\; x_k = 0, k = \overline{1,4}. \qquad (4.16)$$

Это означает, что для получения максимальной прибыли от продажи урожая следует составить следующий план использования земель:

– Засеять 0,25 млн га земель **западной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,6 млн га земель **восточной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,55 млн га земель **западной** части региона **яровыми**;
– Засеять 0 млн га земель **восточной** части региона **яровыми**.

В таком случае будут получены следующие результаты:

– Значение целевой функции $E = 267{,}8$ показывает, что прибыль при таком плане использования земель составит 267,8 млн. ден.ед.

– Избыточная переменная $x_1 = 0$ означает, что при рассчитанном плане использования земель урожай озимых будет равен минимальному ограничению плана.

– Избыточная переменная $x_2 = 9{,}4$ означает, что план урожайности яровых будет перевыполнен на 9,4 млн. центнеров (требуется не менее 6 млн. центнеров, а вырастет 15,4 млн. центнеров).

– Остаточные переменные $x_3 = x_4 = 0$ означают, что для засева будут использованы все доступные площади (то есть неиспользуемых земель не останется).

Рабочий лист с результатами решения задачи с использованием табличного процессора Microsoft Office Excel приведен в приложении А.

5 АНАЛИЗ БАЗОВОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

5.1 Статус и ценность ресурсов

В рассматриваемой задаче ресурсами являются площади, доступные для засева в западной и восточной части региона.

Как видно из значений остаточных переменных, доступные площади использованы в полной мере, т.е. все они являются дефицитными ресурсами. Таким образом, всякое изменение площади, доступной для засева в той или иной части региона, приведет к изменению оптимального плана — увеличение доступной площади приведет к увеличению прибыли, и наоборот.

Ценности ресурсов представляют собой коэффициенты E-строки при остаточных переменных, соответствующих остаткам ресурсов, в симплекс-таблице с оптимальным решением (таблица 4.8). Ценность земель западной части региона равна 196 млн ден. ед., ценность земель восточной части региона — 245 млн ден.ед. Это означает, что увеличение площади, доступной в западной части региона на 1 млн га приведет к увеличению прибыли в среднем на 196 млн ден. ед. Увеличение площади, доступной в восточной части региона на 1 млн га приведет к увеличению прибыли в среднем на 245 млн ден. ед. Уменьшение площадей, доступных для засева в западной или восточной части региона приведет к соответствующему снижению прибыли.

Из значений ценностей ресурсов можно также сделать следующий вывод: если имеется возможность увеличить площадь, доступную для засева только в одной части региона, то целесообразно увеличить площадь в восточной части региона.

5.2 Анализ на чувствительность к изменениям площадей, доступных для засева

Проанализируем, как влияют на оптимальный план земледелия изменения площади, доступной для засева в некоторой части региона, например, в **восточной**.

Пусть площадь, доступная для посева в восточной части региона изменилась на d млн га, т. е. составляет не $0{,}6$, а $0{,}6 + d$ млн га. Для определения нового оптимального решения при изменившейся доступной площади используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 4.8) из столбца остаточной переменной x_4 так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_{11} = 0{,}25 - 1{,}25d, \quad x_{12} = 0{,}6 + d, \\ &x_{21} = 0{,}55 + 1{,}25d, \quad x_2 = 9{,}4 + 35d. \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$E = 267{,}8 + 245d. \tag{5.2}$$

Пусть, например, площадь, доступная для засева в восточной части региона равна не 0,6, а 0,8 млн га. Найдем новое оптимальное решение:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0{,}25 - 1{,}25 \cdot 0{,}2 = 0, \\ x_{12} &= 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8, \\ x_{21} &= 0{,}55 + 1{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}8, \\ x_2 &= 9{,}4 + 35 \cdot 0{,}2 = 16{,}4, \\ E &= 267{,}8 + 245 \cdot 0{,}2 = 316{,}8. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Таким образом, в новых условиях следует использовать следующий план использования земель:

– Засеять 0 млн га земель **западной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,8 млн га земель **восточной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,8 млн га земель **западной** части региона **яровыми**;
– Засеять 0 млн га земель **восточной** части региона **яровыми**.

В таком случае будут получены следующие результаты:

– Значение целевой функции $E = 316{,}8$ показывает, что прибыль при таком плане использования земель составит 316,8 млн. ден.ед.

– Избыточная переменная $x_2 = 16{,}4$ означает, что план урожайности яровых будет перевыполнен на 16,4 млн. центнеров (требуется не менее 6 млн. центнеров, а вырастет 22,4 млн. центнеров).

– Избыточная переменная $x_1 = 0$ означает, что при рассчитанном плане использования земель урожай озимых будет равен минимальному ограничению плана.

– Остаточные переменные $x_3 = x_4 = 0$ означают, что для засева будут использованы все доступные площади (то есть неиспользуемых земель не останется).

Вывод: увеличение площади, доступной для засева в восточной части региона позволит увеличить прибыль от продажи выращенного урожая.

Пусть теперь площадь, доступная для засева в восточной части региона равна не 0,6, а 0,4 млн га. Найдем новое оптимальное решение:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0{,}25 - 1{,}25 \cdot (-0{,}2) = 0{,}5, \\ x_{12} &= 0{,}6 + (-0{,}2) = 0{,}4, \\ x_{21} &= 0{,}55 + 1{,}25 \cdot (-0{,}2) = 0{,}3, \\ x_2 &= 9{,}4 + 35 \cdot (-0{,}2) = 2{,}4, \\ E &= 267{,}8 + 245 \cdot (-0{,}2) = 218{,}8. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Таким образом, в новых условиях следует использовать следующий план использования земель:

– Засеять 0,5 млн га земель **западной** части региона **озимыми**;

– Засеять 0,4 млн га земель **восточной** части региона **озимыми**;

– Засеять 0,3 млн га земель **западной** части региона **яровыми**;

– Засеять 0 млн га земель **восточной** части региона **яровыми**.

В таком случае будут получены следующие результаты:

– Значение целевой функции $E = 218{,}8$ показывает, что прибыль при таком плане использования земель составит 218,8 млн. ден.ед.

– Избыточная переменная $x_2 = 2{,}4$ означает, что план урожайности яровых будет перевыполнен на 2,4 млн. центнеров (требуется не менее 6 млн. центнеров, а вырастет 8,4 млн. центнеров).

– Избыточная переменная $x_1 = 0$ означает, что при рассчитанном плане использования земель урожай озимых будет равен минимальному ограничению плана.

– Остаточные переменные $x_3 = x_4 = 0$ означают, что для засева будут использованы все доступные площади (то есть неиспользуемых земель не останется).

Вывод: уменьшение площади, доступной для засева в восточной части региона уменьшит прибыль от продажи выращенного урожая.

Рассмотрим случай, когда площадь, доступная для засева в восточной части региона равна не 0,6, а 0,3 млн га. Попробуем найти новое оптимальное решение, подставив значение $d = -0{,}3$ в систему уравнений (5.1):

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0{,}25 - 1{,}25 \cdot (-0{,}3) = 0{,}625, \\ x_{12} &= 0{,}6 + (-0{,}3) = 0{,}3, \\ x_{21} &= 0{,}55 + 1{,}25 \cdot (-0{,}3) = 0{,}175, \\ x_2 &= 9{,}4 + 35 \cdot (-0{,}3) = -1{,}1, \\ E &= 267{,}8 + 245 \cdot (-0{,}3) = 194{,}3. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Таким образом, одна из переменных приняла отрицательное значение, что недопустимо по её физическому смыслу.

Вывод: для поиска оптимального решения в новых условиях требуется решить задачу заново, изменив ограничение на максимальную площадь используемых земель в восточной части региона следующим образом: $x_{12} + x_{22} \leq 0{,}3$.

Определим диапазон изменений площади, доступной для засева в восточной части региона, при которых состав переменных в оптимальном базисе останется прежним (т. е. базис оптимального решения будет состоять из переменных $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_2$). Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0{,}25 - 1{,}25d \geq 0, \\ x_{12} &= 0{,}6 + d \geq 0, \\ x_{21} &= 0{,}55 + 1{,}25d \geq 0, \\ x_2 &= 9{,}4 + 35d \geq 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-0{,}268 \leq d \leq 0{,}2$.

Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_2$, если площадь, доступная для засева в восточной части региона будет составлять от $0{,}6 - 0{,}268$ до $0{,}6 + 0{,}2$ млн га (т.е. от 0,332 до 0,8 млн га).

Вывод: для любой величины площади, доступной для засева в восточной части региона, входящей в диапазон от 0,332 до 0,8 млн га, новое оптимальное решение можно найти из уравнений (5.1). Если площадь, доступная для засева в восточной части региона составит менее 0,332 или более 0,8 млн га, то для определения оптимального решения потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на величину площади, доступной для засева в восточной части региона).

5.3 Анализ на чувствительность к изменениям минимально допустимой величины урожая

Проанализируем, как влияют на оптимальный план земледелия изменения минимально допустимого объёма выращенных **озимых**.

Пусть минимально допустимый объём выращенных озимых изменился на d млн центнеров, т. е. составляет не 20, а $20+d$ млн центнеров. Для определения нового оптимального решения при изменившейся доступной площади используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 4.8) из столбца избыточной переменной x_1 так как эта переменная входит в изменившееся ограничение. Так как ограничение, для которого выполняется анализ на чувствительность, имеет вид «больше или равно», коэффициенты из столбца избыточной переменной используются с обратными знаками. Новое оптимальное решение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0{,}25 + 0{,}05d, \quad x_{12} = 0{,}6 - 0d, \\ x_{21} &= 0{,}55 - 0{,}05d, \quad x_2 = 9{,}4 - 1{,}4d, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$E = 267{,}8 - 1{,}8d. \tag{5.8}$$

Пусть, например, минимально допустимый объём выращенных озимых равен не 20, а 22 млн центнеров. Найдем новое оптимальное решение:

$$\begin{aligned}
x_{11} &= 0{,}25 + 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}35,\\
x_{12} &= 0{,}6 - 0 \cdot 2 = 0{,}6,\\
x_{21} &= 0{,}55 - 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}45,\\
x_2 &= 9{,}4 - 1{,}4 \cdot 2 = 6{,}6,\\
E &= 267{,}8 - 1{,}8 \cdot 2 = 264{,}2.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Таким образом, в новых условиях следует использовать следующий план использования земель:

– Засеять 0,35 млн га земель **западной** части региона **озимыми**;

– Засеять 0,6 млн га земель **восточной** части региона **озимыми**;

– Засеять 0,45 млн га земель **западной** части региона **яровыми**;

– Засеять 0 млн га земель **восточной** части региона **яровыми**.

В таком случае будут получены следующие результаты:

– Значение целевой функции $E = 264{,}2$ показывает, что прибыль при таком плане использования земель составит 264,2 млн. ден.ед.

– Избыточная переменная $x_2 = 6{,}6$ означает, что план урожайности яровых будет перевыполнен на 6,6 млн. центнеров (требуется не менее 6 млн. центнеров, а вырастет 12,6 млн. центнеров).

– Избыточная переменная $x_1 = 0$ означает, что при рассчитанном плане использования земель урожай озимых будет равен минимальному ограничению плана.

– Остаточные переменные $x_3 = x_4 = 0$ означают, что для засева будут использованы все доступные площади (то есть неиспользуемых земель не останется).

Вывод: увеличение минимально допустимого объёма выращенных озимых снизит прибыль от продажи выращенного урожая.

Пусть минимально допустимый объём выращенных озимых равен не 20, а 18 млн центнеров. Найдем новое оптимальное решение:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0{,}25 + 0{,}05 \cdot (-2) = 0{,}15, \\ x_{12} &= 0{,}6 - 0 \cdot (-2) = 0{,}6, \\ x_{21} &= 0{,}55 - 0{,}05 \cdot (-2) = 0{,}65, \\ x_2 &= 9{,}4 - 1{,}4 \cdot (-2) = 12{,}2, \\ E &= 267{,}8 - 1{,}8 \cdot (-2) = 271{,}4. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Таким образом, в новых условиях следует использовать следующий план использования земель:

– Засеять 0,15 млн га земель **западной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,6 млн га земель **восточной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,65 млн га земель **западной** части региона **яровыми**;
– Засеять 0 млн га земель **восточной** части региона **яровыми**.

В таком случае будут получены следующие результаты:

– Значение целевой функции $E = 271{,}4$ показывает, что прибыль при таком плане использования земель составит 271,4 млн. ден.ед.

– Избыточная переменная $x_2 = 12{,}2$ означает, что план урожайности яровых будет перевыполнен на 12,2 млн. центнеров (требуется не менее 6 млн. центнеров, а вырастет 12,2 млн. центнеров).

– Избыточная переменная $x_1 = 0$ означает, что при рассчитанном плане использования земель урожай озимых будет равен минимальному ограничению плана.

– Остаточные переменные $x_3 = x_4 = 0$ означают, что для засева будут использованы все доступные площади (то есть неиспользуемых земель не останется).

Вывод: уменьшение минимально допустимого объёма выращенных озимых позволит увеличить прибыль от продажи выращенного урожая.

Определим диапазон изменений минимально допустимого объёма выращенных озимых, при котором состав переменных в оптимальном базисе останется прежним (т. е. базис оптимального решения будет состоять из переменных $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_2$). Этот диапазон находится из условия неотрицательности всех переменных:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0{,}25 + 0{,}05d \geq 0, \\ x_{12} &= 0{,}6 - 0d \geq 0, \\ x_{21} &= 0{,}55 - 0{,}05d \geq 0, \\ x_2 &= 9{,}4 - 1{,}4d \geq 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-5 \leq d \leq 6{,}71$.

Это означает, что базис оптимального решения будет состоять из переменных $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_2$, если минимально допустимый объём выращенных озимых будет составлять от $20 - 5$ до $20 + 6{,}71$ млн центнеров (т.е. от 15 до 26,71 млн центнеров).

Вывод: Для любой величины минимально допустимого объёма выращенных озимых, входящей в диапазон от 15 до 26,71 млн центнеров, новое оптимальное решение можно найти из уравнений (5.7). Если величина минимально допустимого объёма выращенных озимых составит менее 15 или более 26,71 млн центнеров, то для определения оптимального решения потребуется решать задачу заново (с новым ограничением на минимально допустимый объём выращенных озимых).

5.4 Анализ на чувствительность к изменениям прибыли от продажи урожая

Проанализируем, как влияют на оптимальный план земледелия изменения прибыли от продажи одного центнера урожая.

Заметим, что изменение цены за один центнер выращенных озимых или яровых представляет собой изменение общего множителя, находящегося за скобками, в целевой функции базовой аналитической модели (2.3).

Например, пусть стоимость центнера озимых изменилась на d, а стоимость центнера яровых изменилась на t. Тогда целевая функция в базовой аналитической модели, примет следующий вид:

$$E = (8 + d)(20x_{11} + 25x_{12}) + (7 + t)(28x_{21} + 18x_{22}) \to \max\,. \tag{5.12}$$

Как видно из выражения (5.12), **изменение цены на урожай влияет на значение двух переменных**. Следовательно, **при всяком изменении цены за урожай нам потребуется делать полный перерасчет задачи с учетом изменившейся целевой функции**.

С другой стороны, мы можем провести анализ на чувствительность на изменение коэффициента, влияющего на одну переменную в целевой функции. Для этого нам потребуется записать целевую функцию (2.3) в следующем виде:

$$E = 8 \cdot 20x_{11} + 8 \cdot 25x_{12} + 7 \cdot 28x_{21} + 7 \cdot 18x_{22} \to \max\,. \qquad (5.13)$$

Пусть прибыль от продажи одного центнера яровых, выращенных в западной части региона изменилась на d единиц, т. е. составляет не 7, а $7 + d$ ден. единиц.

Для анализа влияния этих изменений на оптимальное решение используются коэффициенты окончательной симплекс-таблицы (таблица 4.8) из строки переменной x_{21}, так как для этой переменной изменился коэффициент целевой функции. Новые значения коэффициентов -строки при небазисных переменных для окончательной симплекс-таблицы (т. е. при переменных x_{22}, x_1, x_3, x_4), а также новое оптимальное значение целевой функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{22} &= 119 + 1{,}25d, & F_1 &= 1{,}8 + 0{,}05d,\\ F_3 &= 196 + d, & F_4 &= 245 + 1{,}25d. \end{aligned} \qquad (5.14)$$

$$E = 267{,}8 + 0{,}55d. \qquad (5.15)$$

Пусть, например, прибыль от продажи одного центнера яровых, выращенных в западной части региона снизилась на 1 ден. ед., т. е. составляет не 7, а 6 ден. ед. ($d = -1$). Найдем новые значения коэффициентов E-строки при небазисных переменных для окончательной симплекс-таблицы и новое оптимальное значение целевой функции:

$$\begin{aligned} F_{22} &= 119 + 1{,}25 \cdot (-1) = 117{,}75 \\ F_1 &= 1{,}8 + 0{,}05d \cdot (-1) = 1{,}75, \\ F_3 &= 196 + d \cdot (-1) = 195, \\ F_4 &= 245 + 1{,}25d \cdot (-1) = 243{,}75, \\ E &= 267{,}8 + 0{,}55d \cdot (-1) = 267{,}25. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Видно, что коэффициенты E-строки остались неотрицательными. Это значит, что оптимальное решение не изменяется: $x_{11} = 0{,}25, x_{12} = 0{,}6, x_{21} = 0{,}55, x_{22} = 0, x_1 = 0, x_2 = 9{,}4, x_3 = 0, x_4 = 0.$

Определим диапазон изменений прибыли от продажи одного центнера яровых, выращенных в западной части региона, при которых остается оптимальным решение, найденное для исходной постановки задачи (система (4.16)). Условием оптимальности решения является неотрицательность всех коэффициентов E-строки:

$$\begin{aligned} F_{22} &= 119 + 1{,}25d \geq 0, \\ F_1 &= 1{,}8 + 0{,}05d \geq 0, \\ F_3 &= 196 + d \geq 0, \\ F_4 &= 245 + 1{,}25d \geq 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Решив эту систему неравенств, получим: $-36 \leq d \leq +\infty$. Это означает, решение, найденное для исходной постановки задачи, оптимально, если прибыль от продажи одного центнера яровых, выращенных в западной части региона, будет составлять как минимум $7 - 36 = -29$ д. е.

Вывод: Для любой величины прибыли от продажи одного центнера яровых в западной части региона, большей минус 26 д. е, оптимальный план использования земель не изменится. Если же убыток составит меньше 29 д. е., то для получения оптимального решения потребуется решить задачу заново, используя симплекс-метод. Новое оптимальное решение будет отличаться от прежнего не только значениями, но и составом переменных в оптимальном базисе.

6 ПОСТРОЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДИФИКАЦИИ

Проанализировав результаты решения задачи оптимизации (см. раздел 3), можно выделить следующие особенности в разработанном плане использования земель:

– Все используемые ресурсы являются дефицитными, то есть все земли используются. Эта особенность носит позитивный характер.

– Земли восточной части региона не будут засеваться яровыми. В некоторых случаях эта особенность может принимать негативный характер, например, если восточная часть региона нуждается не только в озимых, но и в яровых.

Рассмотрим различные варианты модификации базовой аналитической модели (2.4) с целью исправления неравномерности использования площадей для засева:

– Изменение объема доступных ресурсов. В нашем случае это означает внесение правок в распределение площадей земель, доступных для засева, надо полагать, в сторону увеличения. На практике такая возможность редко встречается.

– Изменение величин, входящих в минимальные требования к объемам выращенного урожая. Такая возможность также представляется маловероятной, так как на практике такие требования не зависят от субъекта, отвечающего за его выполнения.

– Увеличение урожайности культур на используемых землях. Как правило, урожайность зависит от многих факторов, и в ряде случаев принципиально не может быть увеличена, к тому же прогнозы изменения урожайности зачастую носят случайных характер.

– Изменение прибыли от выращенного урожая. Как правило, субъект имеет возможность влиять на прибыль от выращенного урожая (путем изменения стоимости). Рассмотрим подробнее этот вариант.

Исходя из условия задачи (таблица 1.1) можно сделать вывод, что для получения желаемого плана использования земель следует либо увеличивать прибыль от выращивания яровых, либо уменьшать прибыль от выращивания озимых. Заметим также, что уменьшение прибыли от выращивания культур нежелательно, так как это негативно сказывается на общей прибыли от урожая. Таким образом, мы пришли к выводу, что **изменение плана использования земель путем варьирования прибыли от продажи урожая сводится к увеличению стоимости центнера яровых, выращенных в восточной части региона**.

Далее, получим граничное значение цены яровых, выращенных в восточной части региона, при которой происходит перераспределение используемых площадей. Для этого введем параметр d в базовую математическую модель задачи (2.4), отражающий изменение прибыли от продажи центнера яровых, выращенных в восточной части региона:

$$E = 160x_{11} + 200x_{12} + 196x_{21} + (7 + d) \cdot 18x_{22} \to \max . \qquad (6.1)$$

Последовательно увеличивая параметр $d \in \boldsymbol{Z}$, будем отслеживать, как будет изменяться решение задачи. Для расчетов будем использовать табличный процессор Microsoft Office Excel.

При значении $d = 7$ происходит искомое перераспределение, сопровождающееся увеличением целевой функции. Переменные при таком решении имеют следующие значения: $x_{11} = 0{,}8, x_{12} = 0{,}16, x_{21} = 0, x_{22} = 0{,}44$.

Таким образом, модифицированный план использования земель будет иметь следующий вид:

– Засеять 0,8 млн га земель **западной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,16 млн га земель **восточной** части региона **озимыми**;
– Засеять 0,0 млн га земель **западной** части региона **яровыми**;
– Засеять 0,44 млн га земель **восточной** части региона **яровыми**.

Целевая функция E примет значение, равное $270{,}88$, таким образом, прибыль при таком плане использования земель составит 270,88 млн. ден.ед, что на $3{,}08$ ден. ед. больше, чем в исходном плане.

К сожалению, измененному плану присущ ряд недостатков:

– Для перераспределения площадей импольхуемых земель, используемых под засев, потребовалось изменить стоимость центнера яровых, выращенного в восточной части региона на семь ден. ед., что представляет собой **увеличение стоимости в два раза**.

– Модифицированный план предусматривает, что земли западной части региона не будут засеваться яровыми, то есть нам снова **придется решать аналогичную проблему для западной части региона**.

Таким образом, следует признать, что **изменение величины прибыли от продажи яровых, выращенных в восточной части региона не является подходящим выходом из сложившейся ситуации**.

Рассмотрим еще одну возможность влияния на использование доступных земель. Исходя из задачи модификации плана использования земель, нам требуется, чтобы каждая культура выращивалась в каждой из доступных частей региона. Исходя из этого, введем дополнительные ограничения в базовую математическую модель (2.4), отражающие минимальные размеры площадей различных частей региона, используемых для выращивания культур:

$$
\begin{gathered}
E = 160x_{11} + 200x_{12} + 196x_{21} + 126x_{22} \to \max, \\
x_{11} \geq 0{,}2, x_{12} \geq 0{,}15, x_{21} \geq 0{,}2, x_{22} \geq 0{,}15, \\
20x_{11} + 25x_{12} \geq 20, \\
28x_{21} + 18x_{22} \geq 6, \\
x_{11} + x_{21} \leq 0{,}8, \\
x_{12} + x_{22} \leq 0{,}6.
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

Ограничения, накладываемые на значения переменных $x_{ij}, i,j = 1,2$ выбраны из следующих рассуждений. На практике площадь используемых земель пропорциональна той части региона, в которой эти земли расположены. Спрос на сельскохозяйственную продукцию пропорционален численности населения, проживающей в некоторой части региона, а численность населения при равномерном заселении территории прямо пропорциональна площади проживания. Таким образом, нам **следует взять ограничения на минимльный объем выращенных культур, прямо пропорциональный площади используемых земель**. Условимся, что для удовлетворения спроса жителей части региона достаточно использования 25 процентов земель каждой части региона для каждой из культур. Отсюда получим левые части соответствующих ограничений: $0{,}8 \cdot 0,25 = 0{,}2, 0{,}6 \cdot 0,25 = 0{,}15$.

Получим решение модифицированной математической модели (6.2), используя Microsoft Office Excel: $x_{11} = 0{,}6, x_{12} = 0{,}45, x_{21} = 0,2, x_{22} = 0{,}15$. Целевая функция E примет значение, равное $270{,}88$, таким образом, прибыль при таком плане использования земель составит $245{,}4$ млн. ден.ед, что на $22{,}4$ ден. ед. меньше, чем в исходном плане.

Сравнительная характеристика двух планов использования земель (в базовом и новом варианте) приведена в таблице 6.9.

Таблица 6.9 – Сравнительная характеристика планов использования земель

Показатели	Базовый вариант	Новый вариант
Площади используемых земель, млн га:		
озимые в западной части региона	0,25	0,6
озимые в восточной части региона	0,6	0,45
яровые в западной части региона	0,55	0,2
яровые в восточной части региона	0	0,15
Объём выращенных культур, млн центнеров:		
озимые	20	23,25
яровые	15,4	8,3
Неиспользованные площади, млн га:		
западная часть региона	0	0
восточная часть региона	0	0
Прибыль, млн ден. ед.:	267,8	245,4

Видно, что введение дополнительных ограничений на использование земель для засева различных культур приводит к снижению прибыли.

Рабочий лист с результатами решения модифицированной задачи с использованием табличного процессора Excel приведен в приложении Б.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате решения поставленной задачи было получено следующее оптимальное решение:

– Засеять 0,25 млн га земель **западной** части региона **озимыми**;

– Засеять 0,6 млн га земель **восточной** части региона **озимыми**;

– Засеять 0,55 млн га земель **западной** части региона **яровыми**;

– Засеять 0 млн га земель **восточной** части региона **яровыми**.

В результате будут использованы все доступные площади земель, а выручка составит 267,8 ден. ед.

Данное решение не изменится при следующих изменениях исходных данных:

– изменение величины площади, доступной для засева в восточной части региона, входящей в диапазон от 0,332 до 0,8 млн га;

– изменение величины минимально допустимого объёма выращенных озимых, входящей в диапазон от 15 до 26,71 млн центнеров;

– изменение величины прибыли от продажи одного центнера яровых в западной части региона, большее, чем минус 26 д. е.

В разработанном плане использования земель был обнаружена особенность: земли восточной части региона не будут засеваться яровыми. Были проанализированы различные пути её устранения, рассмотрен наиболее реалистичный. В рамках его реализации были введены дополнительные ограничения на характер использования доступных земель, построена модифицированная математическая модель задачи, получено её решение, а также сформирован модифицированный план засева земель с учетом данной особенности.

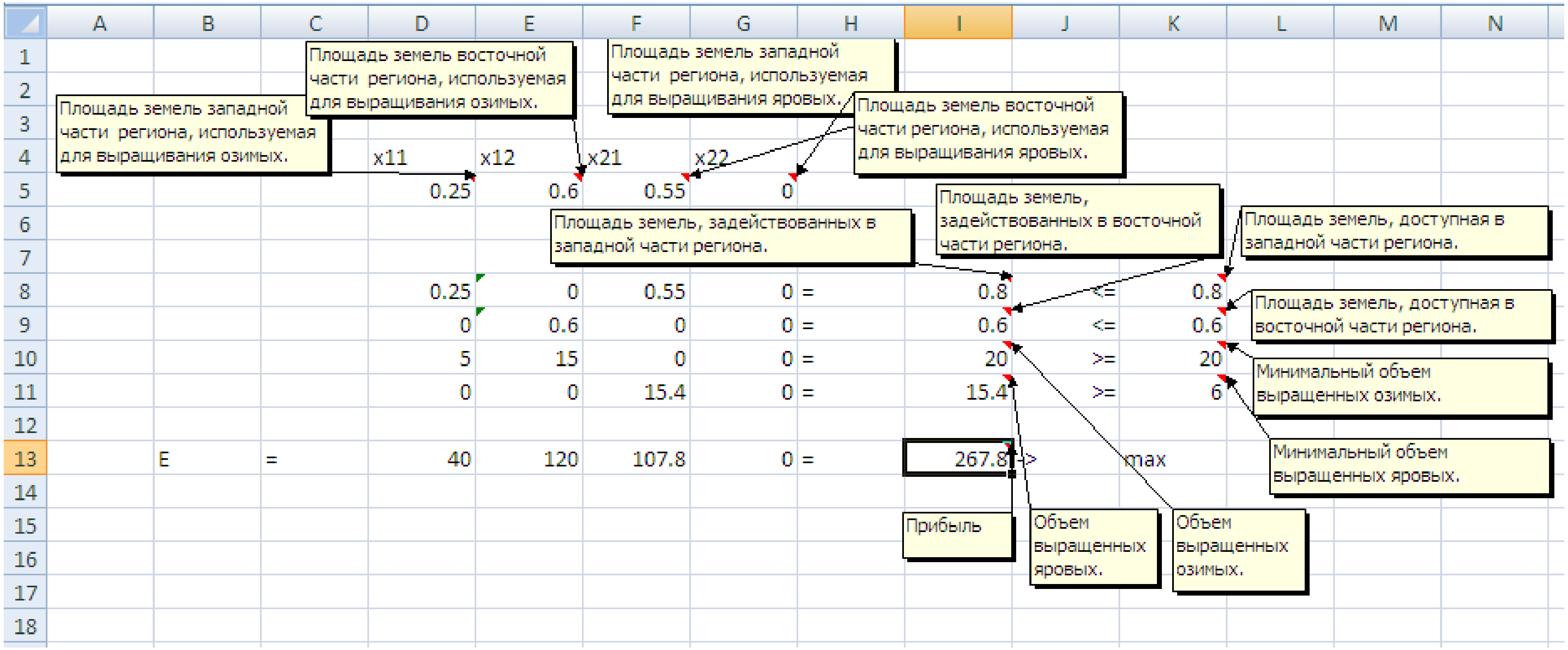
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Х. Таха, А. Хемди. Введение в исследование операций [Текст] / А. Хемди Х. Таха. — [Б. м.] : Издательский дом “Вильямс”, 2005. — С. 912.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Рабочий лист Excel с результатами решения базовой задачи линейного программирования



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
4				x11	x12	x21	x22				
5				0.25	0.6	0.55	0				
8				0.25	0	0.55	0	=	0.8	<=	0.8
9				0	0.6	0	0	=	0.6	<=	0.6
10				5	15	0	0	=	20	>=	20
11				0	0	15.4	0	=	15.4	>=	6
13		E	=	40	120	107.8	0	=	267.8	->	max

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(справочное)

Рабочий лист Excel с результатами решения модифицированной задачи линейного программирования