

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
Факультет информационных технологий и управления
Кафедра информационных технологий автоматизированных систем

Отчет по лабораторной работе № 3
«Анализ и оптимизация решений на основе
моделей массового обслуживания»
по дисциплине «Системный анализ и исследование операций»

Выполнили:
ст. группы 120602

П.С. Анашкевич
Р.И. Будный

Проверил:
ассистент

М.В. Прищепчик

Минск 2013

1 Цели работы

- получить теоретические сведения о системах массового обслуживания;
- рассчитать параметры СМО в соответствии с заданием;

2 Задание

На участке выпускаются детали двух видов. Интервалы времени между моментами поступления заготовок для выпуска деталей примерно постоянные и составляют 5 минут. Все заготовки обрабатываются на станке А; время обработки на станке составляет от 2 до 4 минут. 10% деталей, выпущенных на станке А, продаются как готовые изделия (детали типа 1). Остальные проходят дальнейшую обработку (из них выпускаются детали типа 2). Детали типа 1 со станка А поступают на два одинаковых станка (В1 и В2); время обработки одной детали на этих станках распределено по экспоненциальному закону и составляет в среднем 15 минут. Перед станками В1 и В2 установлен общий накопитель, вмещающий пять деталей; при его заполнении все поступающие детали типа 1 направляются на станок С, на котором обработка занимает в среднем 10 минут (экспоненциальная случайная величина).

Затраты (в денежных единицах), связанные с работой и простоями каждого станка (в минуту), приведены в таблице.

Таблица 2.1

| | А | В | С |
|---------|-----|-----|-----|
| Работа | 0,2 | 0,5 | 0,7 |
| Простой | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

Прочие расходы, связанные с выпуском деталей типа 1 и 2, составляют 3 и 10 д.е. соответственно. Детали типа 1 продаются по цене 8 д.е., типа 2 — 35 д.е.

2.1. Найти характеристики работы станка А (10.4, 10.7).

- 2.2. Найти характеристики работы группы станков В1-В2 (10.13, 10.4, 10.9). Поток деталей на эту группу станков считать пуассоновским.
- 2.3. Рассчитать характеристики работы станка С (10.13, 10.4, 10.7). Поток деталей на станок С считать пуассоновскими.
- 2.4. Найти прибыль от работы участка за 8 часов (10.6, 10.7, 10.9).
- 2.5. Найти вероятность того, что деталь, поступившая на станки В1-В2, сразу же начнет обрабатываться (не будет ждать в очереди) (10.5, 10.9, пример из 10.8).
- 2.6. Найти характеристики работы всех станков и прибыль от работы участка (за 8 часов) при следующих изменениях: заготовки поступают на обработку чаще (через каждые 4 минуты), а станок А заменен на новый (А1); время обработки одной детали на станке А1 — от 1 до 3 минут. Для нового станка А1 затраты на одну минуту работы и простоя — 0,4 и 0,2 д.е. соответственно. Определить, являются ли предлагаемые изменения целесообразными.

3 Ход работы

3.1 Расчет характеристик работы станка А

При расчете характеристик СМО используется величина, называемая нагрузкой на СМО:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}. \quad (3.1)$$

Коэффициент загрузки рассчитаем по формуле:

$$U = \rho(1 - P_{\text{отк}}). \quad (3.2)$$

Среднее число заявок на обслуживание (среднее число занятых каналов):

$$\bar{S} = mU. \quad (3.3)$$

Среднее число заявок в СМО:

$$\bar{k} = \bar{q} + \bar{S}. \quad (3.4)$$

Пропускная способность СМО:

$$\gamma = \mu\bar{S}. \quad (3.5)$$

Среднее время пребывания заявки в очереди (формула Литтла):

$$\bar{w} = \frac{\bar{q}}{\gamma}. \quad (3.6)$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t} = \bar{w} + \bar{x}. \quad (3.7)$$

Для расчёта одноканальных СМО без ограничений на очередь применяются следующие формулы.

Вероятность простоя:

$$P_0 = 1 - \rho. \quad (3.8)$$

Средняя длина очереди:

$$\bar{q} = \frac{\rho^2(v^2 + \varepsilon^2)}{2(1 - \rho)}, \quad (3.9)$$

где v — коэффициент вариации интервалов между заявками;
 ε — коэффициент вариации времени обслуживания.

Вероятности пребывания в СМО j заявок:

$$P_j = \rho^j(1 - \rho), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Вероятность того, что время пребывания заявки в СМО превысит некоторую заданную величину T :

$$P(t > T) = e^{-\mu(1-\rho)T}. \quad (3.11)$$

В итоге характеристика работы станка А (D/G/1):

$$\begin{aligned} m &= 1, \quad \bar{x} = 3 \text{ (мин)}, \quad \mu \approx 0,3333 \text{ (1/мин)}, \\ P_0 &= 0,4, \quad P_{\text{отк}} = 0, \quad P_{\text{обсл}} = 1, \\ \lambda &= 0,2, \quad \rho = 0,6 = U = \bar{S} \text{ (количество заявок)}, \\ \bar{q} &\approx 0,0167, \quad \bar{k} = 0,6167 \text{ (количество заявок)}, \\ \gamma &= 0,2, \text{ (1/мин)} \quad \bar{\omega} \approx 0,0835 \text{ (мин)}, \quad \bar{t} = 3,0835 \text{ (мин)}. \end{aligned}$$

3.2 Расчет характеристик работы группы станков В1-В2

Вероятность простоя СМО:

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{(m\rho)^i}{i!} + \frac{(m\rho)^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \right]^{-1} \quad (3.12)$$

где m — количество каналов СМО;

n — максимально допустимое количество заявок в очереди.

Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = \frac{(m\rho)^{m+n}}{m^n \cdot m!} \cdot P_0. \quad (3.13)$$

Средняя длина очереди:

$$\bar{q} = \frac{(m\rho)^{m+1} \cdot P_0}{m \cdot m!} \cdot \frac{1 - (n+1)\rho^n + n\rho^{n+1}}{(1 - \rho)^2}. \quad (3.14)$$

Вероятность пребывания в СМО j заявок:

$$P_j = \begin{cases} \frac{(m\rho)^j}{j!} \cdot P_0, & j = 1, \dots, m, \\ \frac{(m\rho)^j}{m^{j-m} m!} \cdot P_0, & j = m+1, \dots, m+n. \end{cases} \quad (3.15)$$

Учитывая формулы 3.1 – 3.9, получим **характеристику работы группы станков В1-В2 (М/М/2)**:

$$\begin{aligned} m &= 2, \quad \bar{x} = 15 \text{ (мин)}, \quad \mu \approx 0,0667 \text{ (1/мин)}, \quad n = 5, \\ P_0 &\approx 0,0181, \quad P_{\text{отк}} \approx 0,2958, \quad P_{\text{обсл}} = 0,7042, \\ \lambda &= 0,18, \quad \bar{q} \approx 3,1722, \quad \bar{k} = 5,0734 \text{ (количество заявок)}, \\ \rho &= 1,35, \quad U \approx 0,9506, \quad \bar{S} \approx 1,9012 \text{ (количество заявок)}, \\ \gamma &\approx 0,1267, \text{ (1/мин)} \quad \bar{\omega} \approx 25,0371 \text{ (мин)}, \quad \bar{t} = 40,0371 \text{ (мин)}. \end{aligned}$$

3.3 Расчет характеристик работы станка С

Аналогично п. 3.1. рассчитаем **характеристику работы станка С (М/М/1)**:

$$\begin{aligned}m &= 1, \quad \bar{x} = 10 \text{ (мин)}, \quad \mu = 0,1 \text{ (1/мин)} \\ \lambda &\approx 0,0532, \quad \bar{q} \approx 0,6062, \quad \bar{k} = 1,1386 \text{ (количество заявок)}, \\ P_0 &\approx 0,4676, \quad P_{\text{отк}} = 0, \quad P_{\text{обсл}} = 1, \\ \rho &= U = \bar{S} \approx 0,5324 \text{ (количество заявок)}, \\ \gamma &\approx 0,0532, \text{ (1/мин)} \quad \bar{w} \approx 11,3947 \text{ (мин)}, \quad \bar{t} = 21,3947 \text{ (мин)}.\end{aligned}$$

3.4 Расчет прибыли от работы участка за 8 часов

Выручка от обслуживания заявок в СМО в течение времени T :

$$V = \gamma \cdot C \cdot T, \quad (3.16)$$

где γ — пропускная способность СМО;

C — выручка от обслуживания одной заявки.

Затраты, связанные с обслуживанием заявок в СМО в течение времени T :

$$Z_{\text{обсл}} = \gamma \cdot C_{\text{обсл}} \cdot T, \quad (3.17)$$

где $C_{\text{обсл}}$ — выручка от обслуживания одной заявки.

Затраты, связанные с эксплуатацией СМО в течение времени T :

$$Z_{\text{эксп}} = (\bar{S}C_{\text{раб}} + (m - \bar{S})C_{\text{пр}})T, \quad (3.18)$$

где m — количество каналов в СМО;

\bar{S} — среднее число заявок на обслуживание (в каналах), или среднее число занятых каналов;

$C_{\text{раб}}$ — затраты, связанные с работой одного канала в течение единицы времени;

$C_{\text{пр}}$ — затраты, связанные с простоем одного канала в течение единицы времени.

Убытки, связанные с отказами в обслуживании за время T :

$$Z_{\text{отк}} = \lambda \cdot C_{\text{отк}} \cdot P_{\text{отк}} \cdot T, \quad (3.19)$$

где λ — интенсивность потока заявок;

$C_{\text{отк}}$ — убытки, связанные с отказом в обслуживании одной заявки;

$P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа.

Убытки за время T , связанные с пребыванием заявки в СМО (как в очереди, так и на обслуживании):

$$Z_{\text{пр}} = \bar{k} \cdot C_{\text{пр}} \cdot T, \quad (3.20)$$

где \bar{k} — среднее число заявок в СМО;

$C_{\text{пр}}$ — убытки, связанные с пребыванием заявки в СМО в течение единицы времени;

В итоге получаем следующую прибыль (в ден. ед.):

$$V_A = 0,2 \cdot 0,1 \cdot (8 - 5) \cdot 480 = 48,$$

$$V_B = 0,1267 \cdot (35 - 10) \cdot 480 = 1520,4,$$

$$V_C = 0,0532 \cdot (35 - 10) \cdot 480 = 638,4,$$

$$Z_{\text{обсл А}} = 0, \quad Z_{\text{обсл В}} = 0, \quad Z_{\text{обсл С}} = 0,$$

$$Z_{\text{экспл А}} = [0,6000 \cdot 0,2 + (1 - 0,6000) \cdot 0,1] \cdot 480 \approx 76,8,$$

$$Z_{\text{экспл В}} = [1,9012 \cdot 0,5 + (2 - 1,9012) \cdot 0,1] \cdot 480 \approx 461,0,$$

$$Z_{\text{экспл С}} = [0,5324 \cdot 0,7 + (1 - 0,5324) \cdot 0,1] \cdot 480 \approx 201,3.$$

Прибыль участка за 8 часов работы:

$$\begin{aligned} & V_A + V_B + V_C - \\ & - (Z_{\text{обсл A}} + Z_{\text{обсл B}} + Z_{\text{обсл C}}) - \\ & - (Z_{\text{экспл A}} + Z_{\text{экспл B}} + Z_{\text{экспл C}}) = 1467,6 \end{aligned}$$

3.5 Расчет вероятности того, что деталь, поступившая на станки В1-В2, сразу же начнет обрабатываться

Деталь, поступившая на станки В1-В2 сразу же начнет обрабатываться, если в момент поступления детали хотя бы один станок из группы В будет свободен. Вероятность этого события находится по формуле:

$$P(j \leq R) = \sum_{j=0}^R P_j. \quad (3.21)$$

Таким образом:

$$P(j \leq 1) = P_0 + P_1. \quad (3.22)$$

Вероятность P_1 найдём по формуле 3.10. В итоге:

$$\begin{aligned} P_1 &\approx 0,0489, \\ P(j \leq 1) &= 0,0670. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.6 Расчет характеристик от работы всех станков и прибыль от работы участка (за 8 часов) при некоторых изменениях

На участке внесены следующие изменения: заготовки поступают на обработку чаще (через каждые 4 минуты), а станок А заменен на новый (А1); время обработки одной детали на станке А1 — от 1 до 3 минут. Для нового станка А1 затраты на одну минуту работы и простоя — 0,4 и 0,2 д. е. соответственно.

Основные характеристики работы станка А (D/G/1):

$$\begin{aligned}m &= 1, \quad \bar{x} = 2 \text{ (мин)}, \quad \mu = 0,5 \text{ (1/мин)}, \\P_0 &= 0,4, \quad P_{\text{отк}} = 0, \quad P_{\text{обсл}} = 1, \\ \lambda &= 0,25, \quad \rho = 0,5 = U = \bar{S} \text{ (количество заявок)}, \\ \bar{q} &\approx 0,0208, \quad \bar{k} = 0,5208 \text{ (количество заявок)}, \\ \gamma &= 0,25, \text{ (1/мин)} \quad \bar{\omega} \approx 0,0833 \text{ (мин)}, \quad \bar{t} = 2,0833 \text{ (мин)}.\end{aligned}$$

Характеристика работы группы станков В1-В2 (M/M/2):

$$\begin{aligned}m &= 2, \quad \bar{x} = 15 \text{ (мин)}, \quad \mu \approx 0,0667 \text{ (1/мин)}, \quad n = 5, \\P_0 &\approx 0,0054, \quad P_{\text{отк}} \approx 0,4182, \quad P_{\text{обсл}} = 0,5818, \\ \lambda &= 0,225, \quad \bar{q} \approx 3,7479, \quad \bar{k} = 5,7117 \text{ (количество заявок)}, \\ \rho &= 1,6875, \quad U \approx 0,9819, \quad \bar{S} \approx 1,9638 \text{ (количество заявок)}, \\ \gamma &\approx 0,1309, \text{ (1/мин)} \quad \bar{\omega} \approx 28,6318 \text{ (мин)}, \quad \bar{t} = 43,6318 \text{ (мин)}.\end{aligned}$$

Характеристика работы станка С (M/M/1):

$$\begin{aligned}m &= 1, \quad \bar{x} = 10 \text{ (мин)}, \quad \mu = 0,1 \text{ (1/мин)} \\ \lambda &\approx 0,0941, \quad \bar{q} \approx 15,0082, \quad \bar{k} = 15,9492 \text{ (количество заявок)}, \\P_0 &\approx 0,0591, \quad P_{\text{отк}} = 0, \quad P_{\text{обсл}} = 1, \\ \rho &= U = \bar{S} \approx 0,9410 \text{ (количество заявок)}, \\ \gamma &= 0,0941, \text{ (1/мин)} \quad \bar{\omega} \approx 282,1090 \text{ (мин)}, \quad \bar{t} = 292,1090 \text{ (мин)}.\end{aligned}$$

Прибыль от работы участка за 8 часов:

$$V_A = 0,25 \cdot 0,1 \cdot (8 - 5) \cdot 480 = 60,$$

$$V_B = 0,131 \cdot (35 - 10) \cdot 480 = 1572,$$

$$V_C = 0,093 \cdot (35 - 10) \cdot 480 = 1116,$$

$$Z_{\text{обсл А}} = 0, \quad Z_{\text{обсл В}} = 0, \quad Z_{\text{обсл С}} = 0,$$

$$Z_{\text{экспл А}} = [0,5 \cdot 0,4 + (1 - 0,5) \cdot 0,2] \cdot 480 \approx 144,$$

$$Z_{\text{экспл В}} = [1,971 \cdot 0,5 + (2 - 1,971) \cdot 0,1] \cdot 480 \approx 474,$$

$$Z_{\text{экспл С}} = [0,935 \cdot 0,7 + (1 - 0,935) \cdot 0,1] \cdot 480 \approx 317.$$

Прибыль участка за 8 часов работы:

$$\begin{aligned} & V_A + V_B + V_C - \\ & - (Z_{\text{обсл А}} + Z_{\text{обсл В}} + Z_{\text{обсл С}}) - \\ & - (Z_{\text{экспл А}} + Z_{\text{экспл В}} + Z_{\text{экспл С}}) = 1812 \end{aligned}$$

4 Вывод

В ходе проведения лабораторной работы нами были получены теоретические сведения о системах массового обслуживания, а также рассчитаны параметры СМО в соответствии с заданием.