统计学眼中的线性回归模型

假设检验与置信区间

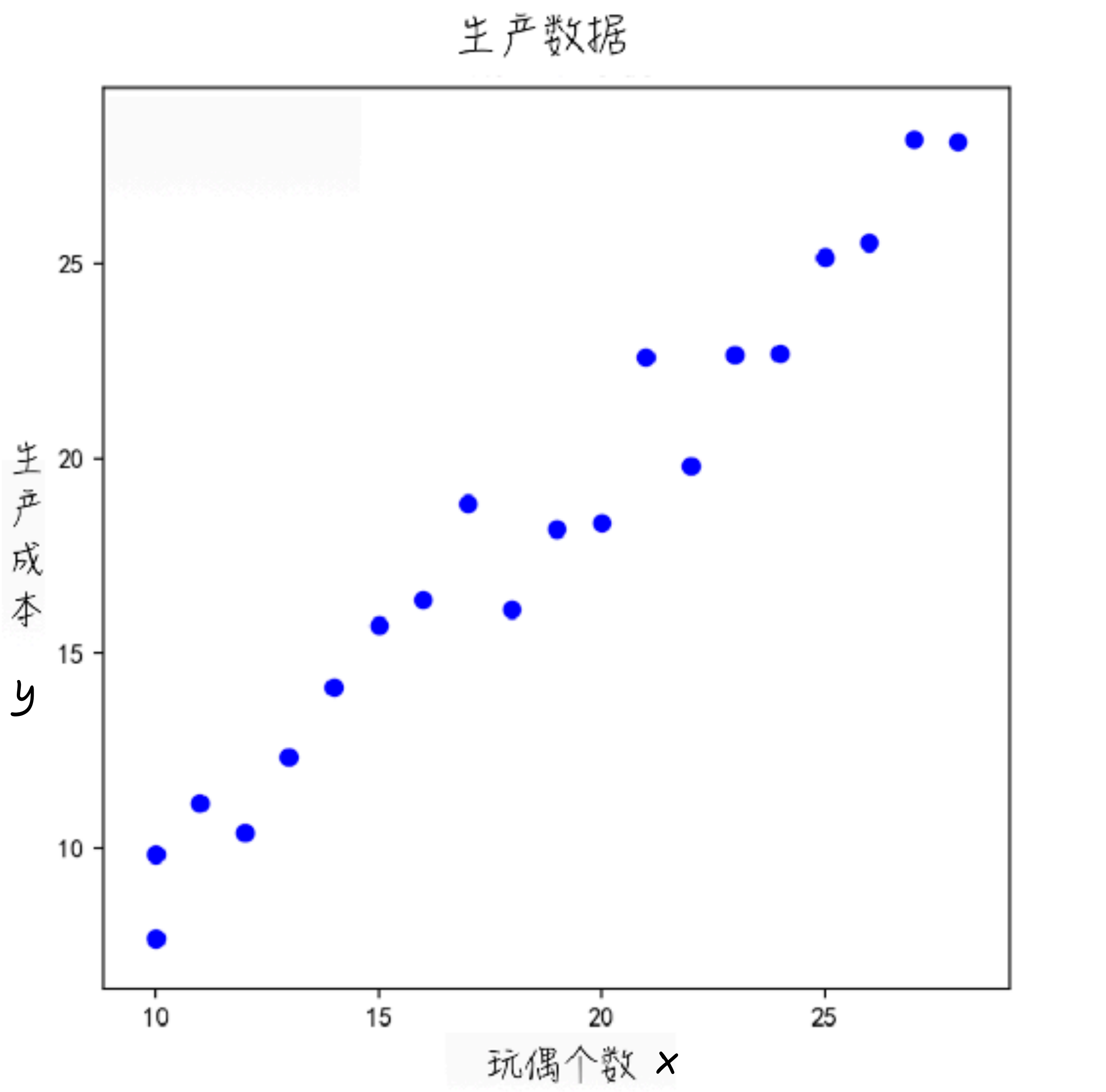
小胖

目录

重新审视模型

条件概率

站在统计学的角度出发，我们试图
弄清楚变量y和x之间的数学关系



x与y之间可近
似为线性关系

生产记事本

日期	玩偶个数	成本	第几天
04/01	10	7.7	1
04/02	10	9.87	2
04/03	11	10.87	3
04/04	12	12.18	4
04/05	13	11.43	5
04/06	14	13.36	6
04/07	15	15.15	7
04/08	16	16.73	8
04/09	17	17.4	9
...	...	...	...

生产记事本

日期	玩偶个数	成本	第几天
04/01	10	7.7	1
04/02	10	9.87	2

$(x_1=10,\ y_1=7.7)$
$(x_2=10,\ y_2=9.87)$

变量y似乎带有
某种随机性

于是假设：$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$

其中 ε_i 表示随时扰动项

重新审视模型

条件概率

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

在上面公式的基础上，进一步假设：

1. ε_i 服从正态分布 (期望等于0，方差等于 σ^2)
2. ε_i 之间相互独立 ?
3. ε_i与x_i相互独立 ?

生产记事本

日期	玩偶个数	成本	第几天
04/01	10	7.7	1
04/02	10	9.87	2

$(x_1=10,\ y_1=7.7)$

$(x_2=10,\ y_2=9.87)$

$+\ a,\ b,\ \sigma$ 已知

随机值　确定值　随机值

$$\boxed{\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} ax_1+b \\ ax_2+b \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix}}$$

$$y_1=7.7 \sim N(10a+b,\sigma^2)$$

$$y_2=9.87 \sim N(10a+b,\sigma^2)$$

相同的玩偶个数，不同的成本。因为成本y1，y2是同一正态分布的两次独立观测值

重新审视模型

参数估计公式

根据上面的模型假设

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

- 变量y是随机变量
- y_i之间相互独立，而且都服从正态分布

由于y是随机变量，定义参数的似然函数（likelihood function）

$$L = P(Y|a, b, X, \sigma^2)$$

- 似然函数其实就是y的联合条件概率
- y_i相互独立，因此可以将似然函数改写如下

$$L = \prod P(y_i|a, b, x_i, \sigma^2)$$

既然y是随机变量，那么模型参数估计的原则是**y出现的概率达到最大**

- 这就是最大似然估计法（Maximum Likelihood Estimation, MLE）

$$(\hat{a}, \hat{b}) = argmax_{a,b}L$$

$$(\hat{a}, \hat{b}) = argmax_{a,b} \ln L$$

$$\ln L = -0.5n\ln(2\pi\sigma^2) - (1/2\sigma^2)\sum_i (y_i - ax_i - b)^2$$

与机器学习里面线性回归模型（OLS）的参数估计公式一致

$$(\hat{a}, \hat{b}) = argmin_{a,b}\sum_i (y_i - ax_i - b)^2$$

目录

假设检验与置信区间

参数估计值的分布

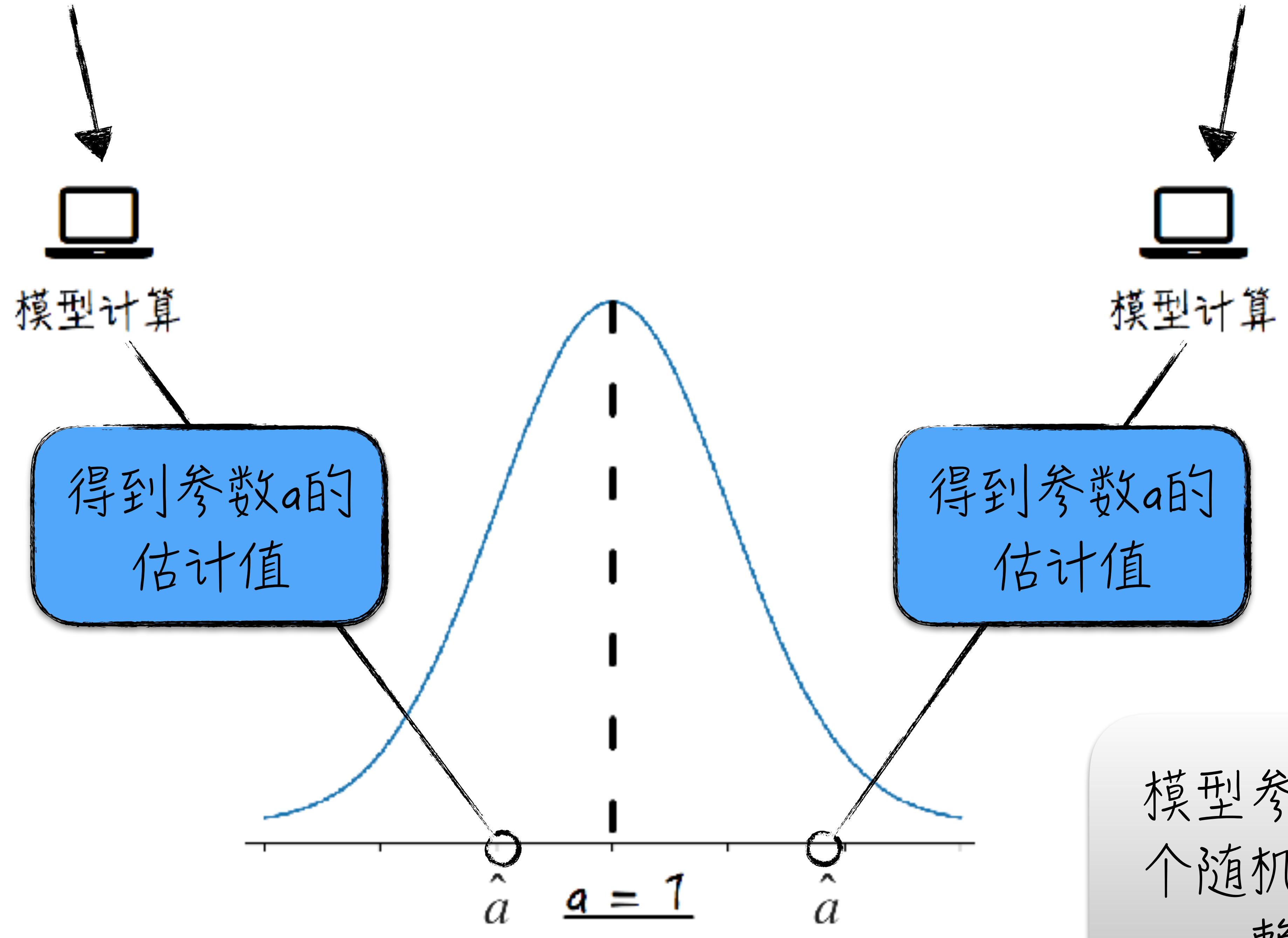
$$(\hat{a}, \hat{b}) = argmin_{a,b} \sum_i (y_i - ax_i - b)^2$$

根据模型参数的估计公式，可以得到参数a, b的估计值：

- 使用不同的数据训练模型，得到不同的参数估计值
- 数学上可以证明，参数估计值本身也是随机变量，而且服从正态分布

日期	玩偶个数	成本	第几天
04/01	10	7.7	1
04/02	10	9.87	2
04/03	11	10.87	3

日期	玩偶个数	成本	第几天
04/04	12	12.18	4
04/05	13	11.43	5
04/06	14	13.36	6

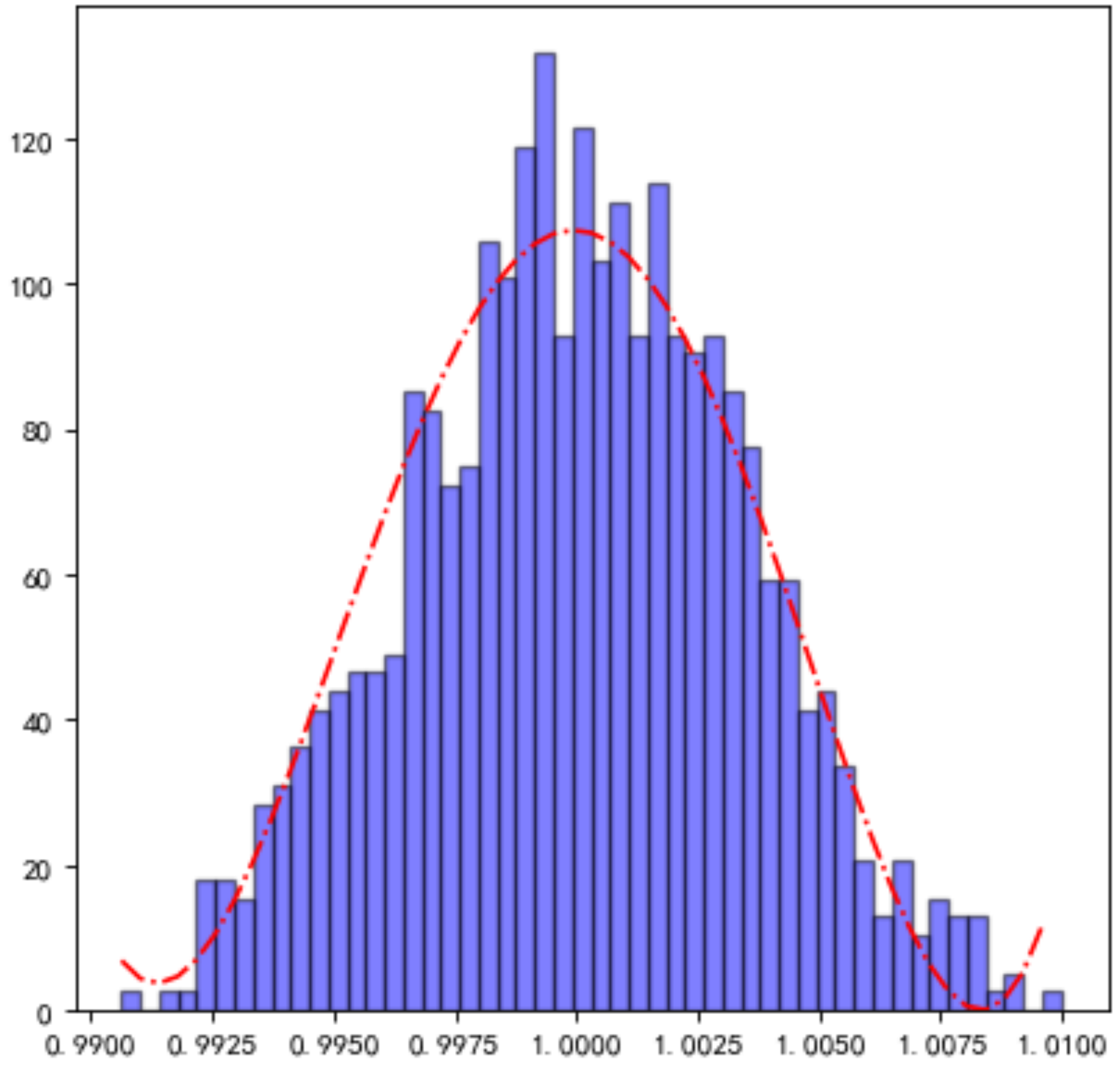


模型参数的估计值只是一个随机变量，具体数值依赖于使用的数据

假设检验与置信区间

实证例子

参数a的估计值分布



随机生成训练数据，x和y

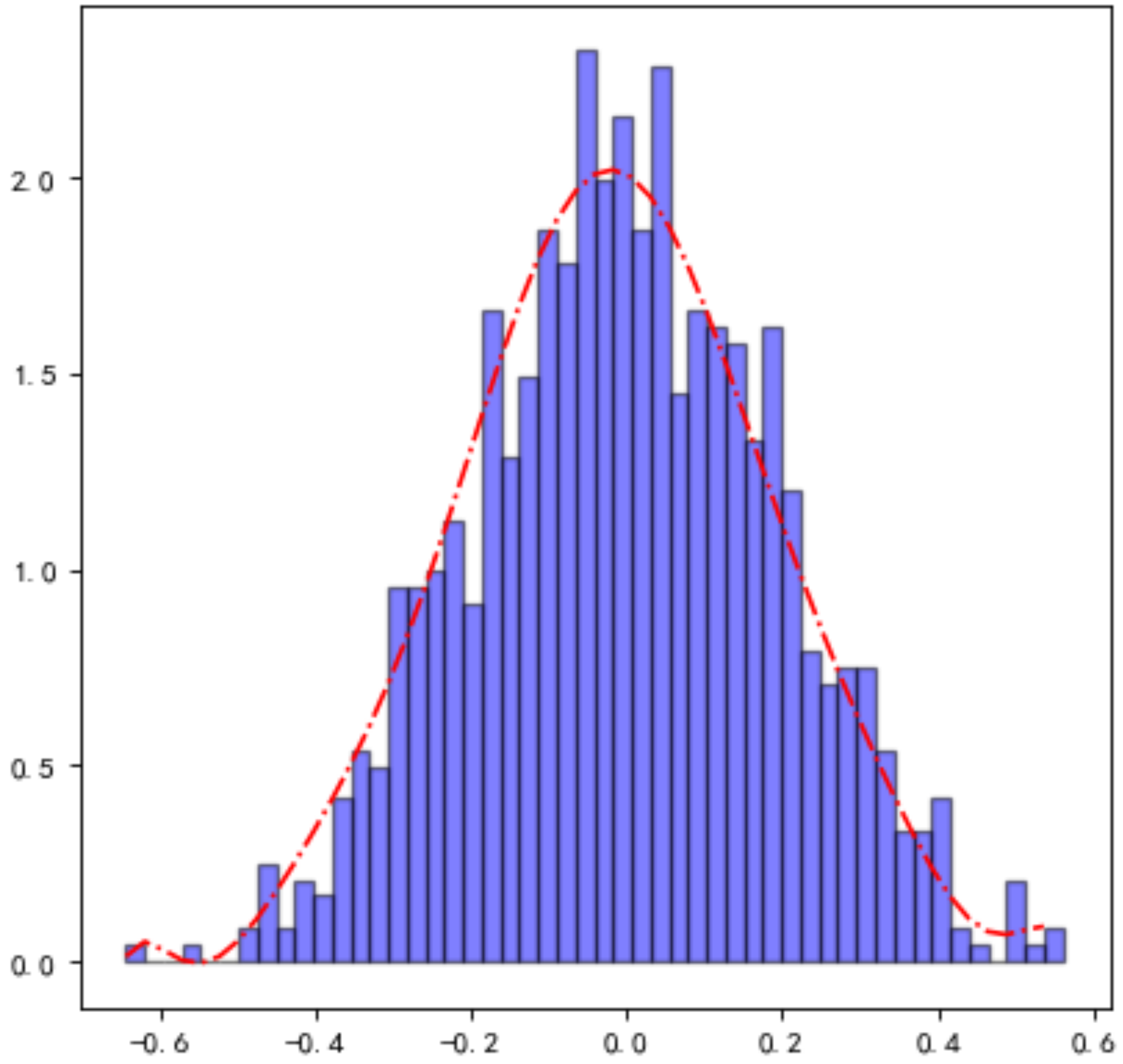
使用scikit-learn，训练模型

循环1000次

记录参数a、b的估计值

使用matplotlib，将模型结果可视化

参数b的估计值分布



假设检验与置信区间

置信区间

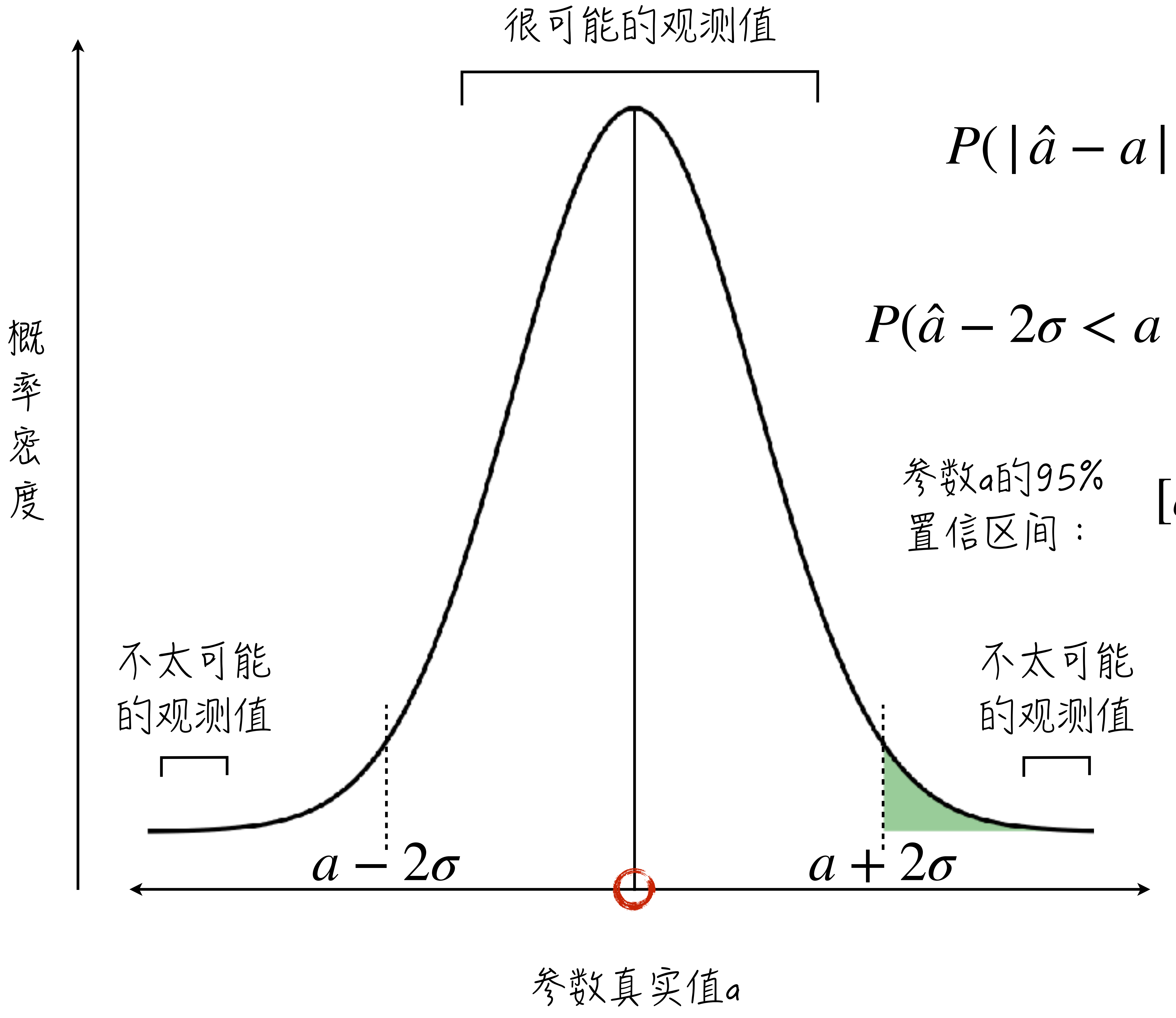
既然得到估计值只是随机变量的一次观测值

- 更关心估计值离真实值有多远?
- 解决方案：定义参数真实值的置信区间

95%的置信区间表示

- 重复100次的模型训练，并按公式得到置信区间，那么有95次，参数a的真实值将落在这个区间里
- ~~可以“通俗地”理解为参数a的大致取值范围~~

估计值 $\hat{a}$ 服从以真实值为期望的正态分布



$$P(|\hat{a}-a|<2\sigma)\approx 0.95$$

$$P(\hat{a}-2\sigma<a<\hat{a}+2\sigma)\approx 0.95$$

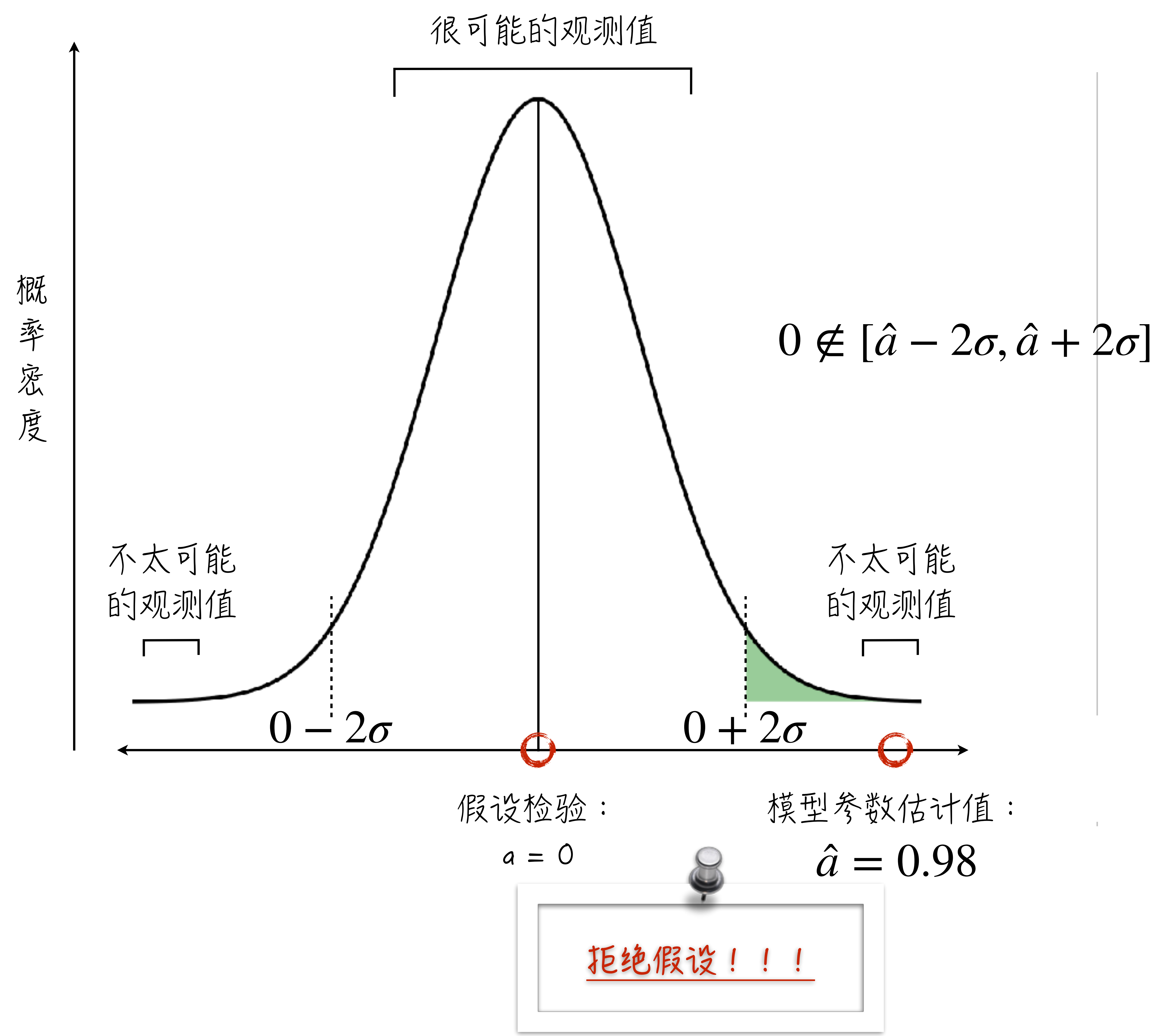
参数a的95%置信区间：$[\hat{a}-2\sigma,\hat{a}+2\sigma]$

假设检验与置信区间

假设检验

除了置信区间外，还可以使用假设检验来得到更有把握的结果

- 对单个参数的假设检验与置信区间比较类似
- 也可以对多个参数做组合的假设检验



THANK YOU