指数族分布

Exponential family distribution

我真的不懂忧郁

Delft University of Technology

指数族分布

Exponential family distribution

by

我真的不懂忧郁

Student Name	Student Number
First Surname	1234567

Instructor:	I. Surname
Teaching Assistant:	I. Surname
Project Duration:	Month, Year - Month, Year
Faculty:	Faculty of Aerospace Engineering, Delft

TU Delft

Preface

A preface...

我真的不懂忧郁
Delft, May 2024

Summary

A summary...

目录

Nomenclature

If a nomenclature is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

Abbreviations

Abbreviation	Definition
ISA	International Standard Atmosphere
...	

Symbols

Symbol	Definition	Unit
V	Velocity	[m/s]
...		
ρ	Density	[kg/m^3]
...		

Chapter 1

背景

1.1. 先验分布和后验分布

1.2. 指数族分布的形式

指数族分布具有的形式

$$P(x|\eta) = h(x)exp(\eta^T\phi(x) - A(\eta)) \tag{1.1}$$

其中 η 为参数向量，$A(\eta)$ 为配分函数

充分统计量

对样本的加工就是统计量，例如样本均值，差；

充分统计量的好处：我们不用把所有的样本都记录下来，只需要记录统计量信息，起到压缩数据的例子；

共轭

第二个特点是共轭，共轭是计算上方便贝叶斯定理

$$p(x|z) = \frac{p(x|z)p(z)}{\int_z p(x|z)p(z)dz} \tag{1.2}$$

积分难。

共轭的概念朴素地理解给定先验分布，后验和先验有相同的形式。

$$p(z|x) \tag{1.3}$$

online learning

最大熵原理

无信息先验

广义线性模型

线性组合：$\omega^T x$
link funtion : 激活函数的反函数
指数族分布

Chapter 2

高斯分布

2.1. 高斯分布的指数族分布形式

把高斯分布写成指数族分布的形式

$$P(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \tag{2.1}$$

写成指数族分布的形式是

$$P(x|\theta) = exp\{\eta^T \phi(x) - A(\eta)\} \tag{2.2}$$

其中配分函数 $A(\eta) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{1}{2} log(-\frac{x}{\eta})$，$\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$

2.2. 配分函数与充分统计量

$$exp(A(\eta)) = \int h(x) \cdot exp(\eta^T \phi(x)) dx \tag{2.3}$$

结论：$A'(\eta) = E_{p(x|\eta)}[\phi(x)]$，$A''(\eta) = Var[\phi(x)]$
$A(\eta)$ 是凸函数

从极大似然的角度看充分统计量

从极大似然的角度来看这个 η 怎么求?

$$D = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\} \tag{2.4}$$

$$\eta_{MLE} = argmax\ log\{P(D|\eta)\} \tag{2.5}$$

结论：

$$A'(\eta_{MLE}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi(x_i) \tag{2.6}$$

充分统计量就体现在这里。

Chapter 3

从最大熵的角度看指数族分布

3.1. 熵

信息量什么意思呢？信息量和概率成反比

$$\text{信息量} = -logp \tag{3.1}$$

则熵定义为

$$H[p] = E[-logp(x)] = -\int p(x) \cdot logp(x)dx \tag{3.2}$$

最大熵：等可能；
没有任何已知的情况下，什么样的分布符合最大熵？

$$\begin{cases} maxH[p] \\ s.t. \sum_{i=1}^{K} p_i = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

这是一个最优化问题，由拉格朗日乘数法求解
结论：在没有任何已知情况下，均匀分布能够使得熵得到最大

3.2. 最大熵原理

在满足已知事实的情况下，是的熵达到最大的分布。

$$Data = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\} \tag{3.4}$$

经验分布

$$\hat{P}(X = x) = \hat{p}(x) = \frac{count(x)}{N} \tag{3.5}$$

即然是分布则可以求方差、期望等。

最大熵模型的优化问题

$$\begin{cases} min \ \sum\limits_{X} p(x) log\, p(x) \\ s.t. \sum\limits_{X} p(x) = 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

结论：$p(x)$ 是指数族分布。

References

[1] I. Surname, I. Surname, and I. Surname. "The Title of the Article". In: *The Title of the Journal* 1.2 (2000), pp. 123–456.

Chapter A

Source Code Example

Adding source code to your report/thesis is supported with the package `listings`*. An example can be found below. Files can be added using* `\lstinputlisting[language=<language>]{<filename>}`.

```python
"""
ISA Calculator: import the function, specify the height and it will return a
list in the following format: [Temperature,Density,Pressure,Speed of Sound].
Note that there is no check to see if the maximum altitude is reached.
"""

import math
g0 = 9.80665
R = 287.0
layer1 = [0, 288.15, 101325.0]
alt = [0,11000,20000,32000,47000,51000,71000,86000]
a = [-.0065,0,.0010,.0028,0,-.0028,-.0020]

def atmosphere(h):
    for i in range(0,len(alt)-1):
        if h >= alt[i]:
            layer0 = layer1[:]
            layer1[0] = min(h,alt[i+1])
            if a[i] != 0:
                layer1[1] = layer0[1] + a[i]*(layer1[0]-layer0[0])
                layer1[2] = layer0[2] * (layer1[1]/layer0[1])**(-g0/(a[i]*R))
            else:
                layer1[2] = layer0[2]*math.exp((-g0/(R*layer1[1]))*(layer1[0]-layer0[0]))
    return [layer1[1],layer1[2]/(R*layer1[1]),layer1[2],math.sqrt(1.4*R*layer1[1])]
```

Chapter B

Task Division Example

If a task division is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

表 **B.1:** Distribution of the workload

	Task	Student Name(s)
	Summary	
Chapter 1	Introduction	
Chapter 2		
Chapter 3		
Chapter *		
Chapter *	Conclusion	
	Editors	
	CAD and Figures	
	Document Design and Layout	