

4.3 曲线

4.3.1 曲线的分类

在本节我们将证明 1 维流形的分类定理：

定理 4.3.1. (一维流形的分类定理)

在同胚意义下，仅有两种不同的连通 1-维流形： S^1 和 \mathbb{R}^1 .



注 4.3.2.

- (1) 根据流形的定义，如果 M 是一个 1 维流形，那么对于任意 $x \in M$ ，都存在 x 附近的一个坐标卡 (φ, U, V) ，其中 U 是 x 的开邻域， V 是 \mathbb{R} 的开子集而 $\varphi: U \rightarrow V$ 是一个同胚. 因为开区间同胚于 \mathbb{R} ，所以我们总可以取 $V = \mathbb{R}$.⁷ 我们把这种 $V = \mathbb{R}$ 类型的坐标卡简写为 (φ, U) .
- (2) 类似地，对于带边 1 维拓扑流形，我们有

定理 4.3.3. (带边一维流形的分类)

在同胚意义下，仅有两种不同的边界非空的连通 1 维带边流形： $[0, 1]$ 和 $[0, 1)$.



于是，对于连通 1 维（带边或不带边）流形，通过它是否紧致以及是否带边，我们就可以把它完全确定下来.

下面我们证明定理 4.3.1，其证明思路是清晰的：将“相邻的坐标卡”粘合成更大的坐标卡，直至无法进一步粘合. 稍微探索一下我们不难发现，粘合两段同胚于 \mathbb{R} 的坐标卡时，有两种可能性：第一种是两个坐标卡的交集是连通的，此时我们可以把它们粘成一个“更长”的同胚于 \mathbb{R} 的坐标卡；第二种是两个坐标卡的交集是各自的两段，此时我们可以把它们粘合为 S^1 .

¶ 两个坐标卡的交集

我们首先刻画两个坐标卡的交集：

引理 4.3.4. (两个 1 维坐标卡的交集)

设 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 为 1 维流形 M 的两个坐标卡，满足 $U_1 \not\subset U_2$ 和 $U_2 \not\subset U_1$. 设 $W \subset U_1 \cap U_2$ 是一个连通分支， $\varphi_1(W) = (a, b)$ 且 $\varphi_2(W) = (c, d)$ ，其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 此外，假设“转移映射”

$$\varphi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, b) \rightarrow (c, d)$$

是单调递增的. 那么我们有

$$a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R} \quad \text{或者} \quad a = -\infty, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d = +\infty.$$



⁷同样的，对于 n 维流形我们也总是可以取 V 为 \mathbb{R}^n 本身，因为总可以缩小 U 使得 V 是 n 维开球，而 n 维开球是同胚于 \mathbb{R}^n 的.

证明 我们需要排除其他的情况. 我们知道

$$a, c < +\infty \quad \text{和} \quad b, d > -\infty,$$

而从条件 “ $U_1 \not\subset U_2$ 和 $U_2 \not\subset U_1$ ” 我们知道

$$(a, b) \neq (-\infty, +\infty) \quad \text{且} \quad (c, d) \neq (-\infty, +\infty).$$

需要排除的其余情况是

- $a, c \in \mathbb{R}$: 此时 $\varphi_1^{-1}(a)$ 和 $\varphi_2^{-1}(c)$ 都是 M 中定义好的点.

首先我们断言在这种情况下, 必有 $\varphi_1^{-1}(a) = \varphi_2^{-1}(c)$. 假设 $\varphi_1^{-1}(a) \neq \varphi_2^{-1}(c)$. 那么对于 $\varphi_1^{-1}(a)$ 的任意充分小的邻域 U_a , $\varphi_1(U_a)$ 是 a 的一个开邻域. 类似地, 对于 $\varphi_2^{-1}(c)$ 任意充分小的邻域 U_c , $\varphi_2(U_c)$ 是 c 的一个小邻域. 因为 $\varphi_{12} : (a, b) \rightarrow (c, d)$ 是一个单调递增的同胚, 它必然将任意小的集合 $(a, a + \varepsilon_1)$ 映射到某个集合 $(c, c + \varepsilon_2)$. 由此可得

$$\varphi_{12}(\varphi_1(U_a) \cap (a, b)) \cap \varphi_2(U_c) \neq \emptyset.$$

这说明

$$\varphi_2(U_a \cap \varphi_1^{-1}((a, b))) \cap \varphi_2(U_c) \neq \emptyset,$$

从而 $U_a \cap U_c \neq \emptyset$. 这与 M 是 (T2) 空间矛盾.

于是我们有 $\varphi_1^{-1}(a) = \varphi_2^{-1}(c)$, 故 $\varphi_1^{-1}(a)$ 是 U_2 的一个内点, 从而也是 $U_1 \cap U_2$ 的内点. 因此 a 是 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 的一个内点, 这导致了矛盾, 因为 a 是 $\varphi_1(W)$ 的一个边界点, 而 $\varphi_1(W)$ 是 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 的一个连通分支. 因此我们不能有 $a, c \in \mathbb{R}$.

- $b, d \in \mathbb{R}$: 用和以上相同的论证, 我们将会得到矛盾. \square

¶ 区间上的映射

要研究 1 维流形, 我们必然需要先研究区间上的映射. 以下引理的证明都是初等的, 将被留作习题:

引理 4.3.5

任意连续单射 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 必然是严格单调的. \diamond

引理 4.3.6. (坐标卡粘法 I)

设 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 是两个坐标卡, 满足

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a, +\infty) \quad \text{且} \quad \varphi_2(U_1 \cap U_2) = (-\infty, d).$$

如果

$$\varphi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, +\infty) \rightarrow (-\infty, d)$$

是单调递增的, 那么存在一个同胚 $\varphi : U = U_1 \cup U_2 \rightarrow \mathbb{R}$. \diamond

引理 4.3.7. (坐标卡粘法 II)

设 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 为两个坐标卡并且 $U_1 \cap U_2$ 由两个连通分支 W_1, W_2 组成. 如果存在 $f < a$ 以及 $d < g$ 使得

$$\begin{aligned}\varphi_1(W_1) &= (a, +\infty), & \varphi_2(W_1) &= (-\infty, d), \\ \varphi_1(W_2) &= (-\infty, f), & \varphi_2(W_2) &= (g, +\infty),\end{aligned}$$

那么存在一个同胚 $\varphi: U_1 \cup U_2 \rightarrow S^1$.

**坐标卡的粘合**

现在我们可以粘合:

命题 4.3.8. (坐标卡的粘合)

假设 M 是 1 维流形, (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 是两个坐标卡, 则 $U_1 \cap U_2$ 至多有两个连通分支, 且

- (1) 如果 $U_1 \cap U_2$ 是连通的, 那么存在一个坐标卡 (φ, U) 使得 $U = U_1 \cup U_2$.
- (2) 如果 $U_1 \cap U_2$ 有两个连通分支, 那么 $U_1 \cup U_2$ 同胚于 S^1 .



证明 若 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, 命题自动成立. 我们剩下三种情况需要讨论, 即 $U_1 \cap U_2$ 由一个, 两个或至少三个连通分支构成.

情形 1. $U_1 \cap U_2$ 是连通的.

如果 $U_1 \subset U_2$ 或 $U_2 \subset U_1$, 结论是显然的. 因此我们假设 $U_1 \not\subset U_2$ 且 $U_2 \not\subset U_1$. 因为 $U_1 \cap U_2$ 是连通开集, 像集 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 和 $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ 是 \mathbb{R} 的连通开子集. 故

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a, b), \quad \varphi_2(U_1 \cap U_2) = (c, d),$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 由此可知 “转移映射”

$$\varphi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, b) \rightarrow (c, d)$$

是一个同胚. 由引理 4.3.5, φ_{12} 是单调的. 不失一般性, 我们可以假设 φ_{12} 是单调递增的 (否则我们可以用 $-\varphi_1$ 取代 φ_1).

由引理 4.3.4, 我们必然有

$$a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R} \quad \text{或} \quad a = -\infty, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d = +\infty.$$

因此不失一般性, 我们可以假设

$$a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R},$$

否则我们只需要交换 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) . 【注意在对调 φ_1 与 φ_2 时, 不改变 φ_{12} 的单调性, 即: 若 φ_{12} 是单调递增的, 那么对调后得到的 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{-1}$ 依然是单调递增的. 所以此处的 “不失一般性” 操作不会破坏前面的 “不失一般性”.】这样, 由引理 4.3.6 就得到欲证的结论.

情形 2. $U_1 \cap U_2$ 有两个连通分支.

分别记 $U_1 \cap U_2$ 的两个连通分支为 W_1 和 W_2 . 先考虑 W_1 . 跟情形 1 类似, 通过两个

“不失一般性”我们可以把条件化归为

$$\varphi_1(W_1) = (a, +\infty), \quad \varphi_2(W_1) = (-\infty, d),$$

并且 $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, +\infty) \rightarrow (-\infty, d)$ 是单调递增的. 由连通性, 我们有

$$\varphi_1(W_2) = (e, f), \quad \varphi_2(W_2) = (g, h).$$

因为 $(a, +\infty) \cap (e, f) = \emptyset$, 我们必然有 $f \in \mathbb{R}$. 同理 $g \in \mathbb{R}$. 这蕴含着 $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (e, f) \rightarrow (g, h)$ 是单调递增的, 因为否则我们有 $(-\varphi_2) \circ \varphi_1^{-1} : (e, f) \rightarrow (-h, -g)$ 是单调递增的, 并且 $f, -g \in \mathbb{R}$, 这与引理4.3.4矛盾. 因此我们可以对 W_2 应用引理4.3.4得到

$$\varphi_1(W_2) = (-\infty, f), \quad \varphi_2(W_2) = (g, +\infty).$$

注意到我们有 $f < a$ 以及 $d < g$, 于是应用引理4.3.7就可以得到欲证的结论.

情形 3. $U_1 \cap U_2$ 至少有三个连通分支.

这种情况不会发生. 事实上, 若 W_1, W_2 和 W_3 是 $U_1 \cap U_2$ 的连通分支, 那么 $\varphi(W_i)$ 中的某一个是有界区间. 运用引理4.3.4并重复情形2中的论证可以得到矛盾. \square

¶ 分类定理的证明

【定理4.3.1的证明】

证明 因为 M 是 (A2) 的, 可以找到可数多个坐标卡 (φ_k, U_k) 覆盖 M . 定义 $\widetilde{U}_1 = U_1$, 然后归纳地定义

$$\widetilde{U}_{n+1} = \widetilde{U}_n \cup U_{k(n)},$$

其中 $k(n)$ 是使得 $U_k \cap \widetilde{U}_n \neq \emptyset$ 且 $U_k \not\subset \widetilde{U}_n$ 的最小下标 k .

事实. 我们有 $\bigcup_n \widetilde{U}_n = M$.

证明 记 $\widetilde{M} = \bigcup_n \widetilde{U}_n$. 根据构造, \widetilde{M} 是 M 的连通开集. 假设 $\widetilde{M} \neq M$. 取任意 $x \in M \setminus \widetilde{M}$. 取使得 $x \in U_m$ 的最小下标 m . 我们断言 $U_m \cap \widetilde{M} = \emptyset$.

事实上, 如果存在 n 使得 $U_m \cap \widetilde{U}_n \neq \emptyset$, 则对于任意 $n' > n$ 都有 $U_m \cap \widetilde{U}_{n'} \neq \emptyset$. 因此存在 $l \leq m$ 使得 $U_{k(n+l)} = U_m$.

因此 $M \setminus \widetilde{M}$ 是开集. 这与 M 的连通性矛盾. \square

现在我们应用命题4.3.8进行粘合.

情形 1: 存在 n 使得 $\widetilde{U}_n \cap U_{k(n)}$ 有两个连通分支.

我们取使得 $\widetilde{U}_n \cap U_{k(n)}$ 有两个连通分支的最小的 n . 因为从 \widetilde{U}_1 开始, 在应用命题4.3.8(1)粘合 $n-1$ 次后, 我们得到一个将 \widetilde{U}_n 映为 \mathbb{R} 的坐标卡, 所以可以应用命题4.3.8(2)粘合 \widetilde{U}_n 和 $U_{k(n)}$ 后所得的 \widetilde{U}_{n+1} 同胚于 S^1 . 于是 \widetilde{U}_{n+1} 是紧集, 从而在 (T2) 空间 M 中也是闭集. 但由构造, \widetilde{U}_{n+1} 是 M 中的开子集. 所以由 M 的连通性, 我们得到 $M = \widetilde{U}_{n+1} \simeq S^1$.

情形 2: 对每个 n , $\widetilde{U}_n \cap U_{k(n)}$ 都仅有一个连通分支.

此时我们得到了坐标卡的一个递增序列

$$\widetilde{U}_1 \subset \widetilde{U}_2 \subset \widetilde{U}_3 \subset \cdots$$

以及相应的坐标卡映射 $\tilde{\varphi}_n: \tilde{U}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

情形 2.1: 如果在有限步以后这个序列停止了, 那么我们应用命题 4.3.8(1) 进行有限次粘合就完成了证明.

情形 2.2: 如果该序列一致持续下去, 那么我们先选择一个同胚 $\phi_1: \tilde{U}_1 \xrightarrow{\sim} (0, 1)$. 在定义 $\phi_n: \tilde{U}_n \xrightarrow{\sim} (a_n, b_n)$ 之后, 我们可以归纳定义 $\phi_{n+1}: \tilde{U}_{n+1} \xrightarrow{\sim} (a_{n+1}, b_{n+1})$ 使得 (请读者自行写出该同胚)

$$\text{要么 } (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n - 1, b_n) \quad \text{要么 } (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n + 1),$$

并且使得 ϕ_{n+1} 和 ϕ_n 在 \tilde{U}_n 上相同. 我们记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (它们是整数或者 $\pm\infty$), 并定义 $\varphi: M = \cup \tilde{U}_n \rightarrow (a, b)$ 如下:

$$\text{若 } x \in \tilde{U}_n, \text{ 则令 } \varphi(x) = \phi_n(x).$$

则 φ 是从 M 到 (a, b) 的同胚 (请读者验证: 它为什么是良定的以及为什么是同胚?). 最后, 若区间 $(a, b) \neq \mathbb{R}$, 则我们再复合一个从 (a, b) 到 \mathbb{R} 的同胚. 总之, 我们可以得到从 M 到 \mathbb{R} 的同胚. 这样就完成了证明. \square

4.3.2 纽结和链环初步

¶ 纽结

根据分类定理, 在同胚意义下, 圆周 S^1 是唯一的连通紧致 1 维流形. 似乎在拓扑上对紧 1 维流形的研究到此为止了. 然而, 事实并非如此!

事实上, 数学中有一个目前依然非常活跃的领域, 叫做**纽结理论** (knot theory), 研究的就是如何在空间 \mathbb{R}^3 中放置圆周 S^1 .⁸ 下面我们对扭结做一个非常简要的介绍.

定义 4.3.9. (扭结)

我们称任何一个嵌入 $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的像集 K 为一个**纽结** (knot).



这里有一些纽结的简单例子:

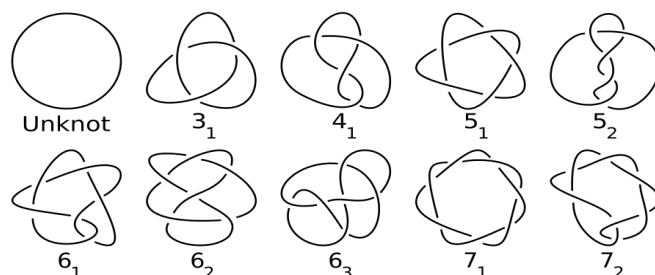


图 4.1: 部分不超过 7 个交叉点的扭结表

⁸我们都知道, 在远古时代的中国, 人们就会使用纽结 (绳结) 计数和记事. 纽结的数学理论最早是在 1771 年由法国数学家 A. Vandermonde 所发展的: 在讨论跟位置的几何相关的纽结的性质时, 他明确注意到了其拓扑特性的重要性. 在 1833 年, 也许是受其地磁场研究的启发, Gauss 在他的日记的一个简短注记中引入了计算两个链环的**环绕数** (linking number) 的**环绕积分** (linking integral), 但并没有给出推导. 在 1860 年代, 英国数学物理学家、热力学之父开尔文勋爵 (Lord Kelvin) 提出了“原子打结涡旋理论”, 即原子是以太中的纽结, 不同的元素可能是由不同的纽结决定的. 虽然这个物理理论被证明是错误的, 但它启发苏格兰数学物理学家 P. Tait 制作史上第一张扭结表, 开始对纽结进行数学上的分类).

(此处数字表示“交叉点”数,而下标并无具体含义,只是它们在最早的扭结表中出现的次序. 7 个交叉点的扭结共有 7 个, 8 个交叉点的扭结共有 21 个, 而 9 个交叉点的扭结则有 36 个.)

如果一个扭结是 \mathbb{R}^3 中有限条线段的并, 则我们称它是一个**多边形扭结** (polygonal knot), 例如:



图 4.2: 多边形扭结

¶ 扭结等价

像绝大多数的数学理论一样, 我们需要在扭结之间定义“等价”这个概念, 并且对不同的扭结进行分类. 粗略地讲, 两个扭结是等价的是指我们可以将一个扭结在 \mathbb{R}^3 中“形变”到另外一个扭结, 并且在这个形变过程中始终不破坏扭结本身.

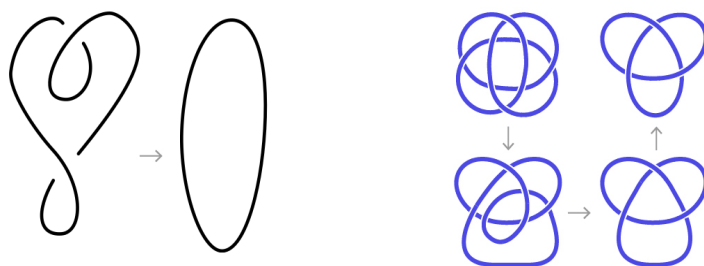


图 4.3: 扭结形变

因此在定义扭结的“等价”这个概念时, 我们并不是要寻找两个像集 K_1 和 K_2 之间的同胚 (它们都同胚于 S^1), 而是尝试寻找背景空间 \mathbb{R}^3 中的一族同胚, 使得沿着这族背景空间上的同胚, 一个扭结可被形变成另外一个.

定义 4.3.10. (等价扭结)

设 K_1 和 K_2 是两个扭结. 如果存在一个连续映射 $H : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 使得

- (1) 对于每个 $t \in [0, 1]$, 映射 $H(t, \cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 都是同胚.
- (2) $H(0, \cdot) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
- (3) $H(1, K_1) = K_2$.

则我们称 K_1 和 K_2 是**等价的** (equivalent), 并称 H 为**背景同痕** (ambient isotopy). ♣

注 4.3.11. 根据 Jordan-Schoenflies 定理, 嵌入 \mathbb{R}^2 的 S^1 一定可以同痕到标准的单位圆. 而在本节习题中我们看到, 嵌入 \mathbb{R}^n ($n \geq 4$) 的 S^1 也都可以同痕到标准的 S^1 . 这就是为什么我们仅考虑 \mathbb{R}^3 中的扭结 (当然, 这等价于在 S^3 中研究扭结. 也有人研究可嵌入特定曲面的扭结.)

为了简单起见, 我们只考虑**驯顺纽结** (tamed knots), 即等价于多边形纽结的纽结. 特别地, 我们不考虑如下图所示的“野纽结” (wild knot)

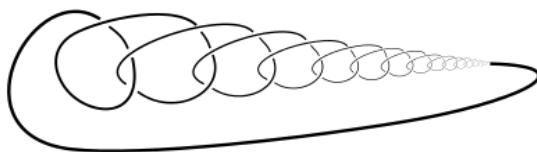


图 4.4: 野纽结

¶ 纽结群

那么, 我们如何区分不同的纽结呢? 因为纽结作为像集都是同胚的, 所以研究 $\pi_1(K)$ 是没有意义的. 然而由定义 4.3.10 我们很容易看到, 等价的纽结在 \mathbb{R}^3 中的补集是同胚的⁹. 作为推论, 等价纽结的补集的基本群是同构的. 因此很自然地定义

定义 4.3.12. (扭结群)

设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 为一个纽结. 我们称 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 为 K 的**扭结群** (knot group).



例 4.3.13. 我们已经在习题 3.5 中通过同伦形变的方法得到平凡结的扭结群是

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1\}) \cong \mathbb{Z}.$$

下面我们用 van Kampen 定理给出该结论一个简单的证明: 记

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, z) \mid y^2 + z^2 = 1\}.$$

考虑

$$U = X \cap \{z > -1/2\}, \quad V = X \cap \{z < 1/2\}.$$

则不难发现

$$\pi_1(U) = \langle a \rangle, \quad \pi_1(V) = \langle b \rangle, \quad \pi_1(U \cap V) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

且

$$(j_1)_*(\alpha) = a, \quad (j_1)_*(\beta) = a^{-1}, \quad (j_2)_*(\alpha) = b, \quad (j_2)_*(\beta) = b^{-1}.$$

于是我们发现 $\pi_1(U \cap V)$ 的两个生成元所给出的两个关系中, 有一个是多余的, 也就是我们只有一个“有效”关系 $ab^{-1} = 1$, 从而

$$\pi_1(X) = \langle a, b \mid ab^{-1} = 1 \rangle = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

一般来说, 有一个非常简单的方式计算驯顺纽结 K 的扭结群, 最早由 Wirtinger¹⁰给出: 不妨设 K 是多边形纽结. 把 K 放置在上半空间中“好的位置”, 使得 K 在平面 $z = 0$ 上有“好的”投影: K 上任意三点都不能经投影而重合于一点, 经投影而重合的点只对只

⁹反过来, H. Tietze 在 1908 年提出如下猜想: \mathbb{R}^3 中的两个纽结等价 (即存在背景同痕) 当且仅当它们的补空间之间有保持定向的同胚. 该猜想在 1987 年最终被美国拓扑学家 C. Gordon 和 J. Luecke 证明.

¹⁰W. Wirtinger (维尔丁格, 1865-1945), 奥地利数学家, 其工作涉及复分析、几何、代数、数论、李理论、扭结理论等多个领域.

有有限对. 根据投影, 我们可以如图所示地将纽结分为“过街天桥”和“地下通道”:

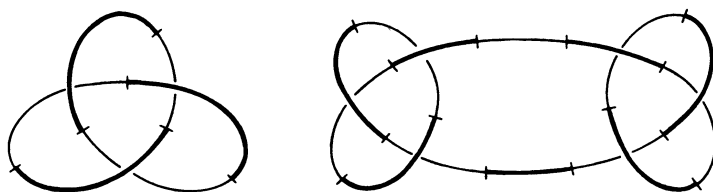


图 4.5: 三叶结与正方结

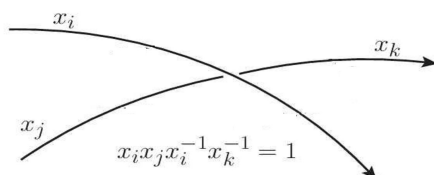
因为扭结同胚于 S^1 , 我们可以给它指定一个方向. 对于每段“过街天桥”, 我们作一个环绕它的小圆圈, 并按照右手法则赋予它一个方向 (即右手握拳, 拇指伸出朝向扭结线段的方向, 则右手剩余手指环绕的方向该圆圈的方向), 我们把这样得到的小圆圈记为 x_1, \dots, x_m (准确地说, 我们还需要事先取定一个“上帝视角”的点作为基点, 并把所有小圆圈连接到该基点. 下面总默认如此并且不再赘述.). 它们是纽结群的生成元.

下面观察所有的“地下通道”: 每个“地下通道”都连接了两段“过街天桥”, 且绝大部分“地下通道”上方都有一段“过街天桥”.

- 若一段“地下通道”连接了 x_j 和 x_k 这两个“过街天桥”, 且其上方还有“过街天桥” x_i , 则我们写出一个关系

$$x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1} = 1.$$

直观地说, 这表示 $x_i x_j$ 与 $x_k x_i$ 所代表的圈在基本群里是同一个元素, 如下图所示.



- 若一段“地下通道”连接了 x_j 和 x_k 这两个“过街天桥”, 但其上方没有“过街天桥”, 则我们写出关系

$$x_i x_k^{-1} = 1.$$

这表示 x_i 和 x_k 所代表的圈在基本群里是同一个元素, 其意义是明显的.

因为“过街天桥”和“地下通道”是交错出现的, 于是我们总共得到 n 个关系. 稍微细致研究一下会发现, 这些关系中任意 $n-1$ 个蕴含了第 n 个, 因此有效的关系总共有 $n-1$ 个, 我们将其记为 r_1, \dots, r_{n-1} . 现在我们可以写下纽结 K 的纽结群的一个表现:

定理 4.3.14. (扭结群的 Wirtinger 表现)

任意一个驯顺纽结 K 的纽结群是一个有限表现群

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

其中 $x_1, \dots, x_n, r_1, \dots, r_{n-1}$ 如上描述.



证明 【不难想见, 证明的核心工具是 van Kampen 定理. 不过真正计算时还是需要一些技巧以使得相应子空间的基本群便于计算.】因为我们所考虑的是驯顺扭结, 所以不妨假设它是一个多边形扭结. 首先我们注意到, 根据同伦不变性, 可以把该扭结的“地下通道”都“加厚”成“方形管子”, 其纵截面是边长为 ε 的正方形. 为了便于计算, 在放置扭结时, 我们把“地下通道”全部摆平, 使得地下通道都是宽度和厚度均为 ε 的长方体方块, 且恰好位于 $0 \leq z \leq \varepsilon$ 区域里, 而“过街天桥”则全部在 $z \geq \varepsilon$ 区域. 如前所述, 我们总共有 n 个“过街天桥”和 n 个“地下通道”.

下面取 U 为 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中 $z > 0$ 部分, 而 V 为 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中 $z < \varepsilon$ 部分. 则由构造, $\pi_1(V) = \{e\}$, 因为该区域同伦等价于 \mathbb{R}^3 中的 $z < 0$ 部分. 因为 $U \cap V$ 为 \mathbb{R}^3 中“薄片”即 $0 < z < \varepsilon$ 部分, 且挖掉了 n 个对应于“地下通道”的上下通透的洞, 所以它同伦等价于挖掉 n 个洞的平面, 从而其基本群为

$$\pi_1(U \cap V) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle,$$

其中 α_i 为“围绕第 i 个地下通道”的圈. 类似地, 我们可得

$$\pi_1(U) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle,$$

其中 x_i 为“围绕第 i 个‘过街天桥’”的圈. 为了应用 Van Kampen 定理, 我们还需要计算每个 α_i 在 $\pi_1(U)$ 中诱导的元素. 为此, 对每个“地下通道”, 我们按照其上方是否有“过街天桥”进行讨论:

- 若某个“地下通道”连接了圈 x_j 和 x_k 所绕的两个“过街天桥”, 且其上方还有圈 x_i 所绕的“过街天桥”, 则由下图可知

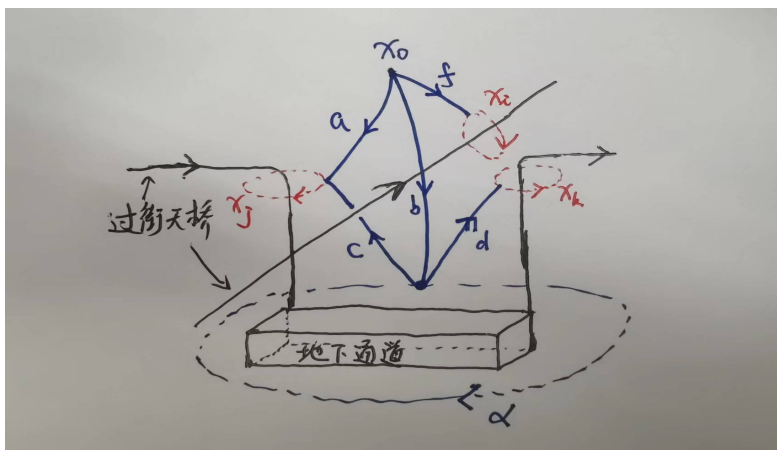


图 4.6: 关系示意图

$$\begin{aligned} b * \alpha * \bar{b} &\sim b * c * x_j * \bar{c} * d * \bar{x}_k * \bar{d} * \bar{b} \\ &\sim (b * c * \bar{a}) * (a * x_j * \bar{a}) * (a * \bar{c} * \bar{b}) * (b * d * \bar{x}_k * \bar{d} * \bar{b}) \\ &\sim (f * x_i * \bar{f}) * (a * x_j * \bar{a}) * (f * \bar{x}_i * f) * (b * d * \bar{x}_k * \bar{d} * \bar{b}) \end{aligned}$$

即在 $\pi_1(U, x_0)$ 中, 圈 α 所代表的圈跟 $x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1}$ 是一致的. 因为在 V 中 α 所代

表的的圈是可缩的, 所以我们得到关系

$$x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1} = 1.$$

- 若某个“地下通道”连接了圈 x_j 和 x_k 所绕的两个“过街天桥”, 且其上方没有“过街天桥”, 则通过同样但跟简单的分析, 显然有

$$x_i x_k^{-1} = 1.$$

最后我们要说明, 所有这 n 个关系中, 我们可以略去其中任意一个. 事实上, 在选定 $\pi_1(U \cap V)$ 的生成元时, 我们可以做一个小小的变动: 我们只要选定前 $n-1$ 为生成元分别为绕某 $n-1$ 个“地下通道”的圈, 然后选定第 n 个生成元为绕所有 n 个地下通道的“大圈”. 则这个元素不仅在 V 中是可缩的, 而且在 U 中也是可缩的, 从而并不会给我们新的关系. 于是定理证明完毕. \square

我们举两个简单的例子:

例 4.3.15.

- (1) 上述三叶结的扭结群为

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) &\cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_3 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1, x_2 x_1 x_2^{-1} x_3^{-1} = 1 \rangle \\ &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} = 1 \rangle \end{aligned}$$

这说明三叶结跟平凡结是不等价的.

- (2) 考虑“五角星”扭结 5_1 . 则我们得到

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus 5_1) \cong \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid x_1 x_3 = x_4 x_1 = x_2 x_4 = x_5 x_2 = x_3 x_5 \rangle.$$

我们可以解出 x_2, x_4, x_5 如下

$$x_5 = x_3^{-1} x_1 x_3, \quad x_4 = x_1 x_3 x_1^{-1}, \quad x_2 = x_5^{-1} x_1 x_3 = x_3^{-1} x_1 x_3 x_1 x_3.$$

代入 $x_1 x_3 = x_2 x_4$, 最后得到

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus 5_1) \cong \langle x_1, x_3 \mid x_3 x_1 x_3 x_1 = x_1 x_3 x_1 x_3 x_1 x_3 \rangle.$$

遗憾的是, 一般而言并没有简单的办法判定两个用生成元和关系给出的群是否同构. 事实上, 对于扭结群, 我们无法像对于曲面那样, 通过阿贝尔化来区分它们的扭结群: 所有扭结群的阿贝尔化都同构于 \mathbb{Z} (见习题).

除了扭结群之外, 人们还陆陆续续发现了扭结的很多不变量, 用于区分不同的扭结, 例如美国数学家 J. Alexander 在 1923 年发现的 Alexander 多项式, 以及新西兰数学家 V. Jones 在 1984 年发现的 Jones 多项式等 (该多项式很快被用于解决 Tait 在 19 世纪所提出的关于扭结的若干猜想) 并因此而在 1990 年荣获 Fields 奖. 另一位 Fields 奖获得者、美国数学家和理论物理学家 E. Witten 则在 20 世纪 80 年代末发现了 Jones 型扭结多项式跟 Chern-Simons 理论¹¹关系密切.

¹¹该理论最早可追溯至中国数学家陈省身先生跟他的学生、数学家和金融大鳄 J. Simons 在 1974 年所引入的 Chern-Simons 形式.

¶ 链环

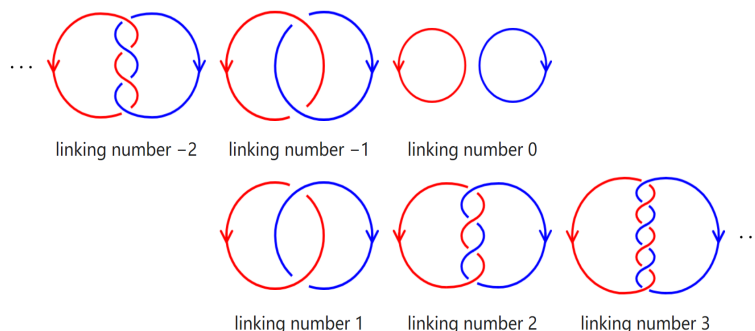
至今为止, 当研究流形或其他简单类型的拓扑空间时, 我们往往会说一些类似于“不失一般性, 我们假设我们所研究的对象是连通的, 因为不连通的对象仅仅是它的连通分支的并集 (并且当我们的研究对象是紧的时候, 这个并集还是有限并). 但是事实上, 在研究 \mathbb{R}^3 中的紧曲线时, 考虑不连通的曲线会导致很多复杂而有趣的现象.

定义 4.3.16. (链环)

我们称有限多个不交的圆周嵌入到 \mathbb{R}^3 时的像集 L 为**链环 (link)**.



下面是一些两个圆周构成的链环:



正如纽结的情形一样, 我们可以定义链环的等价并计算基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$, 且其计算方法跟纽结群一样.

例 4.3.17.

(1) 设 L 为两个圆组成的平凡链环, 即图中环绕数为 0 的链环. 它的补集的基本群为

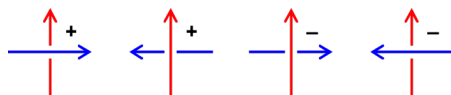
$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \langle x_1, x_2 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

(2) 设 L 为 Hopf 链环, 即图中环绕数为 1 的链环. 它的补集的基本群为

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \langle x_1, x_2 | x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

特别地, 我们发现 Hopf 链环跟平凡链环不等价.

给定一个由两个圆周组成的链环 (由嵌入给出自然的定向), 我们可以定义一个被称为**环绕数 (linking number)** 的数值不变量. 粗略地说, 如果我们将两个圆周构成的链环放在一个“好的”位置, 那么交错处存在四种可能的构型. 我们根据下图将每处交错标记为 +1 或 -1, 并定义为环绕数 (linking number) 为所标记值之和的一半.



神奇的是, 环绕数可以通过一个二重积分计算. 因为该公式最早是由 Gauss 发现的, 因此被称作 **Gauss 环绕积分 (Gauss linking integral)**:

定理 4.3.18. (Gauss 环绕积分)

设 $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为 S^1 在 \mathbb{R}^3 中的不交嵌入, 则它们的环绕数为

$$\text{Link}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S^1 \times S^1} \frac{\det(\dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_2(t), \gamma_1(s) - \gamma_2(t))}{|\gamma_1(s) - \gamma_2(t)|^3} ds dt$$

