Functional Analysis

learning note For reading translation

我真的不懂忧郁

Delft University of Technology

Functional Analysis

learning note For reading translation

by

我真的不懂忧郁

Student Name	Student Number
First Surname	1234567

Instructor:	I. Surname
Teaching Assistant:	I. Surname
Project Duration:	Month, Year - Month, Year
Faculty:	Faculty of Aerospace Engineering, Delft

Cover: Canadarm 2 Robotic Arm Grapples SpaceX Dragon by NASA under CC BY-NC 2.0 (Modified)
Style: TU Delft Report Style, with modifications by Daan Zwaneveld

TU Delft

Preface

A preface...

我真的不懂忧郁
Delft, September 2024

Summary

A summary...

目录

Nomenclature

If a nomenclature is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

Abbreviations

Abbreviation	Definition
ISA	International Standard Atmosphere
...	

Symbols

Symbol	Definition	Unit
V	Velocity	[m/s]
...		
ρ	Density	[kg/m^3]
...		

Chapter 1

Lebesgue Measure and *L^p Space*

1.1. 外测度

我们试图用一些开集来覆盖集合，然后把每个盒子的体积都加起来用来描述集合的测度。

definition 1.1.1: 如果 Ω 是集合，我们定义它的外测度$m^*(\Omega)$ 为

$$m^*(\Omega) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} vol(B_j) : (B_j)_{j=1}^{\infty} 覆盖 \Omega\} \tag{1.1}$$

外测度的性质如下

1. (空集零性) $m^*(\emptyset) = 0$;
2. (正性);
3. (单调性);
4. (有限次可加性);
5. (可数次可加性);
6. (平移不变性);

proposition 1.1.1: *(闭集的外测度)* 对于每个闭盒子

$$B = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i], i \leqslant i \leqslant n\} \tag{1.2}$$

我们有

$$m^*(B) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \tag{1.3}$$

proof. □

我们来计算 $\mathbb{R}$ 的一维外测度，由于对于一切 $r>0$，$(-r,r)\subset\mathbb{R}$

$$m^*(\mathbb{R})\geqslant m^*((-r,r))=2r \tag{1.4}$$

令 $r\to\infty$，就得到 $m^*(\mathbb{R})=\infty$。
计算 $\mathbb{Q}$ 的一维外测度，对于每个比例数 q，单点集 $\{q\}$ 有外测度 $m^*(\{q\})=0$，所以

$$m^*(\mathbb{Q})\leqslant\sum_{q\in\mathbb{Q}}m^*(\{q\})=\sum_{q\in\mathbb{Q}}0=0 \tag{1.5}$$

单位区间 $[0,1]$ 的一维外测度是 1。

1.2. 外测度不是加性的

proposition 1.2.1: *(可数加性不成立) 存在 $\mathbb{R}$ 的可数的互不相交的子集族 $(A_j)_{j\in J}$，使得*

$$m^*(\bigcup_{j\in J}A_j)\neq\sum_{j\in J}m^*(A_j) \tag{1.6}$$

proof. □

1.3. *Lebesgue* 测度

1.4. 可测集

definition 1.4.1: ***(Lebesgue* 可测)** *设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集合，如果对于 $\mathbb{R}^n$ 的每个子集 A 都成立*

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\backslash E) \tag{1.7}$$

则我们称 E 是 ***Lebesgue* 可测或可测的**。*我们定义 $m(E)=m^*(E)$*

换句话说，E 可测指的是：当我们用 E 把任意集合 A 划分成两部分时，可加性保持。

lemma 1.4.1: *可测集的性质*

1. *如果 E 可测，那么 $\mathbb{R}^n\backslash E$ 也可测；*
2. *(平移不变性) 如果 E 是可测的，而且 $x\in\mathbb{R}^n$，那么 $x+E$ 也是可测的，并且 $m(x+E)=m(E)$；*
3. *如果 E_1 和 E_2 都是可测的，那么 $E_1\cap E_2$ 和 $E_1\cup E_2$ 也是可测的；*
4. *(Boole 代数性质) 如果 $E_1,\cdots,E_N$ 是可剩的，那么 $\cup_{j=1}^N E_j$ 和 $\cap_{j=1}^N E_j$ 是可测的；*
5. *每个开盒子和每个闭盒子都是可测的；*
6. *任何外测度为零的集合 E 都是可测的；*

proof. □

lemma 1.4.2: *(有限可加性)* 设 $(E_j)_{j\in J}$ 是互不相交的可测集的有限族，而 A 是任意的一个集合 *(不必可测)*，那么

$$m^*(A\cap(\cup_{j\in J}E_j)) = \sum_{j\in J} m^*(A\cap E_j) \tag{1.8}$$

还有

$$m(\cup_{j\in J}E_j) = \sum_{j\in J}^{m(E_j)} \tag{1.9}$$

proof. □

lemma 1.4.3: *(可数加性)*

proof. □

lemma 1.4.4: *(σ 代数性质)*

proof. □

lemma 1.4.5: 每个开集可以写成可数个或有限个开盒子的并

proof. □

lemma 1.4.6: *(Borel 性质)* 每个开集以及每个闭集都是 *Lebesgue* 可测集

1.5. 可测函数

definition 1.5.1: *(可测函数)* 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，并设 $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 是函数，如果每个开集 $V\subseteq\mathbb{R}^m$ 的逆像 $f^{-1}(V)$ 是可测的，则称 f 是可测的。

lemma 1.5.1: *(连续函数是可测的)*

proof. □

还有另一种描述可测函数的方式

lemma 1.5.2: *(广义实数系中的可测函数)* 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的可测子集，并设 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 是函数，那么 f 是可测的当且仅当对于每个实数 a，$f^{-1}((a,\infty))$ 可测。

proof. □

lemma 1.5.3: *(可测函数序列的极限是可测函数)*

Chapter 2

Distance Space

2.1. 距离空间

我们在集合中定义描述**距离**的函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$，$d$ 应该满足

1. 非负性；
2. 对称性；
3. 三角不等式；
4. 严格正：$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$

2.2. 开集与连续映射

分析学中连续性的定义其实就是拓扑连续定义加上度量的情况。

theorem 2.2.1: 设 $\mathcal{T}:(X,d)\to(X_1,d_1)$，$\mathcal{T}$ 是连续映射 $\iff$ 对于任意 (X_1,d_1) 中的开集，其原像在 (X,d) 中仍然是开集。

1. 证明 $\Rightarrow$。

   设 S_1 是 (X_1,d_1) 中的开集，S_1 的原像 S 是 (X,d) 中开集。所以存在开球 $B(\mathcal{T}x_0,\varepsilon)\subset S_1$。由于 $\mathcal{T}$ 连续，所以

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ s.t.\ \forall x\in X,\ d(x,x_0)<\delta\to d_1(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x_0)<\varepsilon \tag{2.1}$$

   所以对于任意 S_1 中的开球 $B(\mathcal{T}x_0,\varepsilon)$，根据 $\mathcal{T}$ 的连续性，存在 $B(x_0,\delta)$，只要能证明这个开球属于 S，由于 $B(\mathcal{T},\varepsilon)$ 的任意性，我们可以说明 S 是一个开集。下面我们证明 $B(x_0,\delta)\subset S$。

   如果 $B(x_0,\delta)\not\subseteq S$，那么至少存在一点 $x\in B(x_0,\delta)$，但 $x\notin S$，那么 $\mathcal{T}x\notin S_1$，则 $\mathcal{T}x\notin B(\mathcal{T}x_0,\varepsilon)$，则 $d_1(x,x_0)>\varepsilon$，这与 $\mathcal{T}$ 的连续性矛盾。

   因此对于所有的 S_1 中的开球，都能在 S 中找到开球 $B(x_0,\delta)$，因此 S 是一个开集。

2. 证明 $\Leftarrow$

对于任意 (X_1, d_1) 中的开集，其原像在 (X, d) 中仍然是开集。对于任意 $B(\mathcal{T}x_0, \varepsilon) \in X_1$，$\mathcal{T}^{-1}B(Tx_0, \epsilon)$ 属于 X 中的一个开集，因此存在 $B(x_0, \delta) \in \mathcal{T}^{-1}B(Tx_0, \epsilon)$，即 $\mathcal{T}B(x_0, \delta) \subset B(\mathcal{T}x_0, \varepsilon)$，则 $\mathcal{T}$ 连续。

□

theorem 2.2.2: 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$，则 A 是闭集当且仅当 A 中收敛点列 $\{x_n\} \subset A$ 的极限属于 A。

proof.

□

2.3. 距离空间的可分性和列紧性

可分距离空间

设 A, B 是距离空间 X 中的点集，如果 $A \subset \overline{B}$，则称 B 在 A 中**稠密**。因为 $A \subset \overline{B}$，所以 $x \in \overline{B}$，所以任意 $x \in A$ 都存在一个开球 $B(x, \varepsilon)$ 使得

$$B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset \tag{2.2}$$

也就是说 A 中的每一个点都可以用 B 中的点来逼近[1]。如果 X 是距离空间，如果 X 中存在一个可数稠密子集，则称 X 是可分的，对于子集 $A \subset X$，如果 X 中存在可数子集 B，使得 B 在 A 中稠密，则称 A 是**可分的**。

实数空间中，有理数是稠密的，有理数是可数的，任何一个实数都可以用有理数列来逼近。

example 2.3.1: $A = [0, 1]$，B 是 $[0, 1]$ 中全体有理数，$\overline{B} = [0, 1]$，$A \subset \overline{B}$，所以 B 在 A 中稠密。

proposition 2.3.1: 距离空间 (X, d) 是可分的当且仅当存在 X 中的一个具有下列性质的可数集 $\{x_n\}$：

$$\forall\, x \in X \; and \; \forall\, \varepsilon > 0,\; \exists\, x_k \in \{x_n\},\; s.t.\; d(x_k, x) < \varepsilon \tag{2.3}$$

proof. 首先证明必要性。

如果 (X, d) 是可分的，则存在一个可数稠密子集 D，那么对于每一个 $x \in X$，取可数集 $\{\frac{1}{n}\}$，总存在一个开球 $B(x, \frac{1}{n})$，

$$B(x, \frac{1}{n}) \cap D \neq \emptyset \tag{2.4}$$

所以取 $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap D$，对于每个 $n = 1, 2, \cdots$，我们都选择一个 x_n，最终我们得到一个序列 $\{x_k\}$，现在我们证明 $\{x_k\}$ 收敛到 x，由于 x_k 在求 $B(x, \frac{1}{n})$ 内部，因此 x 到 x_k 的距离肯定小于球的半径，所以对于任意的 $\varepsilon > 0$，必然存在一个 $N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时

$$d(x_n, x) \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon, \tag{2.5}$$

下面是充分性证明。

[1]注意是每一个点，以这个点为圆心的任意开球都和稠密集有交集

对于每个 $x \in X$ 都存在一个数集 $\mathcal{A}_k = \{x_k\}$，因此我们令 $\mathcal{L}$ 为所有 $x \in X$ 的这样的数集的集合，那么 $\mathcal{L} = X$，则 $\mathcal{L}$ 是 X 中一个可数稠密子集（因为每个 $\{x_k\}$ 都可数）。

□

关于必要性的证明，为什么我会选择 $\{\frac{1}{n}\}$，因为我们想要构造一系列一个包一个越来越小的开球，每个开球里取一个点，

列紧距离空间

设 A 是距离空间 X 中的一个子集，如果 A 中的每一个无穷点列都有一个收敛子列，则称 A 为**列紧集合**，闭列紧集称为**自列紧集**。

theorem 2.3.2: 设 X 是一个距离空间，$A \subset X$ 是列紧集，则 A 是有界集。

theorem 2.3.3: *(Arzela 定理)* $C[a,b]$ 中的子集 A 是列紧的当且仅当 A 中的函数满足

1. 一致有界
2. 等度连续

2.4. 距离空间完备化

完备化的过程中，“扩充”一个空间 X 到 $\overline{X}$，最大的困难就在于如何用原来空间中的元素来刻画新加进来的元素。

theorem 2.4.1: 任何距离空间 (X,d) 都存在一个完备的距离空间 $(\overline{X},\overline{d})$，使得 (X,d) 和 $(\overline{X},\overline{d})$ 的稠密子集等距，且在等距的意义下，这样的空间 $(\overline{X},\overline{d})$ 是唯一的，称 $(\overline{X},\overline{d})$ 为 (X,d) 的完备化空间

proof.

□

2.5. 完备距离空间的应用

闭球套定理

Banach 不动点定理

Chapter 3

Distance Space Eexscrise

3.1. 度量

Question 1: 设 (X, d) 是距离空间，令 $\rho(x, y) = d(x, y)/1 + d(x, y)$，证明 (X, ρ) 也是距离空间。

分析: 距离需要满足: (1) 非负性; (2) 对称性; (3) 自反性; (4) 满足三角不等式;

proof. 只要验证 ρ 满足距离的性质

1. 非负、自反和对称: 由于 (X, d) 是距离空间，$d : X \times X \to \mathbb{R}$ 是距离，所以 $\rho = d(x, y)/1 + d(x, y)$ 自然满足非负性;

2. 三角不等式: 我们主要来验证一下三角不等式，假设 $x, y, z \in X$，我们要证明 $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$。

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = \frac{1}{1/d(x, z) + 1} \\ \rho(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{1}{1/d(x, y) + 1} \\ \rho(y, z) &= \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = \frac{1}{1/d(y, z) + 1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

由于

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \tag{3.2}$$

所以

$$\begin{aligned} \rho(x, z) = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} &\leqslant \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leqslant \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leqslant \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\ &\leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \ \square \end{aligned} \tag{3.3}$$

Question 2: 由闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数组成的集合上，定义

$$d_1(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt \tag{3.4}$$

$$d_2(x,y)=(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

证明 $d_1(x,y),d_2(x,y)$ 是距离。

分析: d_2 三角不等式的证明来源于 $Minkowski$ 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.6}$$

proof.

1. 证明 $d_1: X\times X\to\mathbb{R}$ 是距离;

   (a) 正定性:

   $$d_1(x,y)\geqslant 0 \tag{3.7}$$

   (b) 对称性

   $$d_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt=\int_a^b|y(t)-x(t)|dt=d_1(y,x) \tag{3.8}$$

   (c) 自反性

   $$d_1(x,x)=\int_a^b|x(t)-x(t)|dt=0 \tag{3.9}$$

   (d) 三角不等式

   $$\begin{aligned} d_1(x,z)&=\int_a^b|x(t)-z(t)|dt\\ &=\int_a^b|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|dt\\ &\leqslant\int_a^b|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|dt=d(x,y)+d(y,z)\end{aligned} \tag{3.10}$$

2. 证明 $d_2: X\times X\to\mathbb{R}$ 是距离;

   (a) 正定性: 同上
   (b) 对称性: 同上
   (c) 自反性: 同上
   (d) 三角不等式

   $$\begin{aligned} d_2(x,z)&=\left(\int_a^b|x(t)-z(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b|y(t)-z(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=d_2(x,y)+d_2(y,z)\qquad\square\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2. 距离空间可分性

Question 3: 证明距离空间是可分的，则它的任意子空间也是可分的，反之，如果距离空间不可分，他的子空间是否可分?

分析：如果距离空间 X 可分的，如果 X 存在可数个稠密子集,D 在 X 中稠密意味着 $\overline{D}=X$

proof. 假设 X 是距离空间，则 X 存在可数稠密子集 D，假设 $Y \subset X$ 是 X 的一个子空间，$D_Y = D \cap Y$，我们来证明 D_Y 是 Y 的一个可数稠密子集。

1. 可数性：由于 D 是可数集，可数集的任意交都可数，所以 D_Y 是可数集；
2. 稠密性：如果 D_Y 在 Y 中稠密，则 $Y \subset \overline{D_Y}$，即只要证明对于 $\forall\, y \in Y$，$\forall\, \varepsilon > 0$，总存在 $B(y,\varepsilon)$，$B(y,\varepsilon)\cap D_Y \neq \emptyset$。($d : X \times X \to \mathbb{R}$ 为 X 上的度量)

由于 D 在 X 中稠密，所以对于 $y \in Y \subset X$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，总存在开球 $B(y,\varepsilon)\cap D \neq \emptyset$，由于 $D_Y = D \cap Y$，$y \in Y$ 因此 $y \in D_Y$，因此 $B(y,\varepsilon)\cap D_Y \neq \emptyset$，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，总能找到一个包含 Y 中元素的开球与 D_Y 相交，因此 D_Y 在 Y 中稠密。

□

Question 4: 令

$$X = \{\, x(t) \mid \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt < \infty \,\} \tag{3.12}$$

在 X 上定义距离

$$d(x,y) = (\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)-y(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \tag{3.13}$$

证明 (X,d) 是不可分距离空间。

proof. □

3.3. 列紧

Question 5: 设 X 是距离空间，$M \subset X$ 是自列紧集，$f : M \to \mathbb{R}$ 是连续函数，则 $f(x)$ 在 M 上一致连续。

proof. □

Question 6: 证明集合 $M = \{\sin\, nx | n = 1, 2, \cdots\}$ 在空间 $C[0,\pi]$ 中是有界集，但不是列紧集合

proof. □

3.4. 完备距离空间

Question 7: 在一个距离空间 (X, d) 中，求证 *Cauchy* 列是收敛列当且仅当其中存在一个收敛子列

proof. □

Question 8: 证明完备距离空间的闭子集是一个完备子空间，而任意距离空间中的完备子空间必然是闭子集

proof. □

3.5. 不动点

Question 9: 证明存在闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数，使得

$$x(t) = \frac{1}{2} sin\, x(t) - \alpha(t) \tag{3.14}$$

其中 $\alpha(t)$ 是给定的 $[0, 1]$ 上的连续函数。

proof. □

Question 10: 考虑积分方程

$$x(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds = y(t) \tag{3.15}$$

其中 $y(t) \in C[0, 1]$，λ 为常数且 $|\lambda|$，证明存在唯一解 $x(t) \in C[0, 1]$

Chapter 4

Normed Vector Space

4.1. *Banach* 空间

4.2. 赋范空间完备性

4.3. 重要的赋范函数空间： L^p

4.4. 重要的赋范函数空间： L^∞

4.5. 重要的赋范函数空间： l^p

4.6. 赋范空间的几何结构

lemma 4.6.1: *(Riesz 引理)* 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间, X_0 是 X 真的闭子空间, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, x_0 \in X$， 使得 $\|x_0\| = 1$， 且 $\forall\, x \in X_0$

$$\|x - x_0\| > 1 - \epsilon \tag{4.1}$$

4.7. 有限维

Chapter 5

Normed Vector Space Exescrise

5.1. 范数

Question 11: 设线性空间 X 中定义的距离 d 满足平移不变性和相似性，即 $d(x+z, y+z) = d(x, y), d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$，令 $\|x\| = d(x, 0)$，证明 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间

proof. 如果 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，只要证明 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数，只要证明满足三角不等式

$$\begin{aligned} \|x+z\| &= d(x+z, -z+z) \\ &= d(x, 0) + d(-z, 0) \\ &= d(x, 0) - d(z, 0) \leqslant d(x, 0) + d(z, 0) = \|x\| + \|z\| \end{aligned} \tag{5.1}$$

PS：由两边之差小于第三边，两边之和大于第三边。

□

5.2. *Banach* 空间

Question 12: 在 $\mathbb{C}^n$ 中定义范数 $\|x\| = \max_i |x_i|$，证明他是 *Banach* 空间。

proof. 如果 $\mathbb{C}^n$ 是 *Banach* 空间，则对于 $\mathbb{C}^n$ 应该是完备的赋范空间，即 $\mathbb{C}^n$ 中的所有 *Cauchy* 列都依范数收敛。因此只要证明：$\forall \varepsilon > 0$，存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有的 $k, m > N$

$$\|x_k - x_m\| \leqslant \varepsilon \tag{5.2}$$

其中 $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots, x_k^{(n)}), x_m = (x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \cdots, x_m^{(n)}) \in \mathbb{C}^n$。下面我们来证明，根据问题范数的定义

$$\|x_k - x_m\| = \max_i \, (x_k^{(i)} - x_m^{(i)}) \tag{5.3}$$

问题就变成了 $\mathbb{C}$ 中 *Cauchy* 序列收敛性问题，由于 $\mathbb{C}$ 是完备的，因此总存在这样一个 N 使得问题满足。

□

> **Question 13:** 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，$X \neq \{0\}$，证明 X 为 $Banach$ 空间的充要条件是 X 中单位球面 $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 是完备的。

分析：(1) 假设 $\{x_k\} \in S$ 是单位球面上的 *Cauchy* 列，有 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$，注意 $Cauchy$ 列和收敛的区别。(2) X 中任意的向量相当于单位向量的缩放：$v = x/\|x\|$

proof. 首先证明必要性。X 是 *Banach* 空间，对于任意 $S \subset X$ 上的 *Cauchy* 列，必然是收敛的。

再证明充分性。我们证明 X 中所有的 *Cauchy* 列收敛，取 $\{y_n\}$ 是 X 中一组 *Cauchy* 列，由于 S 是完备的，则 $\forall\, \varepsilon > 0$，总存在 n 满足

$$\|x_n - x\| = \|\frac{y_n}{\|y_n\|} - x\| < \frac{\varepsilon}{\|y_n\|} \tag{5.4}$$

根据范数的齐次性

$$\|y_n - \|y_n\| \cdot x\| < \|y_n\| \cdot \frac{\varepsilon}{\|y_n\|} = \varepsilon \tag{5.5}$$

□

> **Question 14:** 设 H 是在直线 $\mathbb{R}$ 上平凡可积，导数也平方可积的连续函数集合，对于每个 $x \in H$，定义
>
> $$\|x\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|^2 dt\right) \tag{5.6}$$
>
> 证明 H 是 *Banach* 空间。

proof.

> **Question 15:** 设 $0 < p < 1$，考虑空间 $L^p[0,1]$, 其中
>
> $$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty,\ \ x \in L^p[0,1] \tag{5.7}$$
>
> 证明 $\|x\|$ 不是 $L^p[0,1]$ 上的范数，但 $d(x,y) = \|x - y\|$ 是 $L^p[0,1]$ 上的距离。

proof.

> **Question 16:** 证明 $l^p(1 < p < \infty)$ 是可分的 *Banach* 空间。

分析：(1) l^p 空间定义为 p 次方可求和的数列，

$$l^p = \{x = \{\xi_n\} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\} \tag{5.8}$$

(2) 可分：空间 X 可分意味着 X 中存在可数稠密子集 D，即 $X = \overline{D}$，即对于任意 $x \in X$，以 x 为圆心任意半径的开球和 D 都有交集，即对于 X 中的每一个点都能用 D 中的序列去逼近。(3) l^p 空间中可以赋予范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5.9}$$

proof.

1. 证明 l^p 是 *Banach* 空间;

如果 l^p 是 *Banach* 空间，则它应该是完备赋范空间，即对于任意的 l^p 中的 *Cauchy* 列，应该依照范数收敛于 l^p 中的某个值。，考虑 l^p 空间中的一个 *Cauchy* 序列 $\{x^{(n)}\}$，其中 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots)$。所以对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N$，使得 $\forall\, m, n > N$ 有

$$\|x^{(m)} - x^{(n)}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{5.10}$$

对于每个 i, $\{x_i^{(n)}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 *Cauchy* 序列, 所以它在 $\mathbb{C}$ 中收敛于某个 x_i, 定义 $x = (x_1, x_2, \cdots)$, 我们证明 $x \in l^p$，只要证明 x 的 p 次方可和。由于 $x_1, x_2, \cdots$ 是有界数列，因此 $x \in l^p$

2. 证明 l^p 是可分的；设 D 为所有具有有限非零分量且分量是有理数的序列的集合，我们证明 D 在 l^p 中是可数稠密的。

   (a) 由于有理数可数，所以 D 肯定是可数的;

   (b) 证明 D 是稠密的，即证明对于任意 $x \in X$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $y \in D$，使得 $\|x - y\| < \varepsilon$。

$$\|x - y\| < \|x - x^{(n)}\| + \|x^{(n)} - y\| \tag{5.11}$$

□

5.3. 凸集

> **Question 17:** 证明线性空间 X 中任何一族凸集的交集仍然是凸集；对任何 $x_0 \in X$，凸集 A"移动"x_0 后所得的集合 $A + x_0 = \{y + x_0 \mid y \in A\}$ 仍然是凸集

proof.

5.4. 等距同构

> **Question 18:** 设 $C[0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 的全体，令
>
> $$\|x\| = \sup\{x(t) \mid 0 < t < 1\} \tag{5.12}$$
>
> 证明：
>
> *1.* $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 空间上的范数;
>
> *2.* l^∞ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间等距同构;

proof.

5.5. 赋范空间上的连续映射

Question 19: 设 X 是一个赋范线性空间，且 X 中任意线性映射 $L: X \to Y$ 连续，证明 X 是有限维的。

proof.

5.6. 最佳逼近

Question 20: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，Y 是 X 的子空间，对于 $x \in X$，令

$$\delta = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \tag{5.13}$$

如果存在 $y_0 \in Y$，使得 $\|x - y_0\| = \delta$，称 y_0 是 x 的最佳逼近

1. 证明：如果 Y 是 X 的有限维子空间，则对于每个 $x \in X$，存在最佳逼近；
2. 证明：Y 不是有限维空间时，上一个结论不成立；
3. 证明：对于每一个点 $x \in X$，x 关于子空间 Y 的的最佳逼近点集是凸集；

proof.

5.7. 等价范数

Question 21: 设 $(X_1, \|x\|_1), (X_2, \|x\|_2)$ 是赋范空间，在乘积线性空间 $X_1 \times X_2$ 中定义

$$\|z\|_1 = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2,\ \|z\|_2 = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_2\}, \tag{5.14}$$

其中 $z \in X_1 \times X_2$，$z = (x_1, x_2)$，证明 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 $X_1 \times X_2$ 上的等价范数。

5.8. 赋范空间稠密与可分

Question 22: 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，X_0 是 X 中的稠密子集，证明对于每个 $x \in X$，存在 $\{x_n\} \subset X_0$，使得

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{5.15}$$

并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \tag{5.16}$$

proof.

Question 23: 设 X 是赋范线性空间，M 是 X 闭子空间，证明若 X 可分，则 X/M 也可分。任取 $y \in \overbrace{x}$，证明 $\|\overbrace{x}\| = d(y, M)$。

proof.

Question 24: 设 X 是赋范线性空间，M 是 X 的闭子空间，如果 M 以及 X/M 是 $Banach$ 空间，证明 X 也是 $Banach$ 空间。

proof.

Chapter 6

Hilbert Space

本章的叙述思路为

6.1. 由内积生成范数

lemma 6.1.1: *(Schwarz 不等式)* $|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y)$

proof. 该证明是构造性的方法，思路是想办法构造出 $|(x,y)|^2$ 和 $(x,x),(y,y)$ 的关系。取任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，$x,y \in \mathcal{H}$ 都满足

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \lambda(x,y) + \overline{\lambda}(x,y) + |\lambda|^2(y,y) \geqslant 0 \tag{6.1}$$

由 λ 的任意性，取 $\lambda = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$

$$(x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geqslant 0 \tag{6.2}$$

稍微移项就可以得到结论。□

theorem 6.1.2: 内积诱导内积空间上的范数

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{6.3}$$

按照上面的范数，每个内积空间$\mathcal{H}$ 构成一个赋范空间。

6.2. 内积与范数之间的关系

在内积可以诱导 *Hilbert Space* 上的范数，范数、和内积的关系在于：首先内积可以无条件诱导出范数，然后这些由内积诱导的范数可以通过一些特殊的构造诱导出内积 (因为由内积诱导的范数

必定满足平行四边形法则)。但内积并不等同于范数，因为有一类特殊的线性赋范空间存在，它存在范数，但这个范数不满足平行四边形公式，构造不出内积。

lemma 6.2.1: H 是内积空间，对于任意的 $x,y \in H$

1. 平行四边形法则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{6.4}$$

2. 极化恒等式

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \tag{6.5}$$

proof.

□

平行四边形的几何意义为：平行四边形对角线的平方和等于四条边的平方和。这个结果是有点奇怪但是挺现实的，想像一下一个正方形，根据勾股定理很容易满足平行四边形法则，问题是你会发现任意的平行四边形都可用一个正方形改变角度得到。

图 6.1: 我可以抓着矩形一条边，平行拉动，这就变成了平行四边形，只不过角度变了

theorem 6.2.2: 设 X 是一个赋范空间，如果范数满足平行四边形法则，则可以在 X 中定义一个内积，使得由这个内积产生的范数正好是 X 原来的范数。

proof. 这个问题在于：**怎么利用范数去构造一个双线性函数，使得这个双线性函数满足的定义。**

□

本节的主定理告诉我们：当这个赋范空间上的范数满足平行四边形法则，才能定义其上的一个内积。

6.3. 完备的内积空间—*Hilbert Space*

当内积空间中每一个 *Cauchy sequence* 都收敛，即满足完备性，我们称这样的空间为 ***Hilbert Space***。

6.4. 正交、正交补与正交分解

对于内积我们自然关心其正交性，如果两个向量 $x,y \in \mathcal{H}$，如果满足 $(x,y)=0$，我们称之为**正交**。如果 $M,N \subset \mathcal{H}$，对于 $\forall x \in M, y \in N$，都有 $(x,y)=0$，则我们称这两个**集合正交**。

下面我们定义所谓**正交补空间**，设 X 是 *Hilbert* 空间，M 是 X 子集，M 的正交补空间定义为

$$M^{\perp} = \{\, x \in X \mid (x,y) = 0, \forall\, y \in M \,\} \tag{6.6}$$

正交补有如下的性质，比较直观因此不作证明

1. $0 \in M^{\perp}$;
2. 如果 $0 \in M$，则 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$，否则 $M \cap M^{\perp} = \emptyset$;
3. $\{0\}^{\perp} = X$，$X \perp = \{0\}$;
4. 如果 $B(a,r) \subset M$，其中 $B(a,r)$ 是以 $a \in X$ 为中心，r 为半径的开球，那么 $M^{\perp} = \{0\}$，更进一步，如果 M 是一个非空的开集，则 $M^{\perp} = \{0\}$;
5. 如果 $N \subset M$，那么 $M^{\perp} \subset N^{\perp}$;
6. $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$;

本节主要定理有两个

theorem 6.4.1: 设 X 是内积空间，M 是 X 的任意子集，则 $M^{\perp}$ 是 X 中闭子空间;

proof.□

theorem 6.4.2: 设 M 是内积空间 X 的一个线性子空间，则 $x \in M^{\perp}$ 当且仅当对于任意的 $y \in M$，有 $\|x - y\| \geqslant \|x\|$

proof.□

6.5. 最佳逼近

theorem 6.5.1: 内积空间是严格凸的赋范空间。

proof.

theorem 6.5.2: 设 M 是 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}$ 中的非空闭凸集，则对于任意 $x \in \mathcal{H}$，存在唯一的最佳逼近点 $x_0 \in M$ 使得

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\} \tag{6.7}$$

proof.

6.6. *Hilbert* 空间的正交分解定理

三维的欧几里德空间可以分解为三个一维子空间的正交和(类似三维空间中的受力分解到 xyz)，我们把这一想法推广到一半的 *Hilbert* 空间。

theorem 6.6.1: *(正交分解定理)* 设 $\mathcal{H}$ 是 *Hilbert* 空间，M 是 $\mathcal{H}$ 中的闭子空间，则对于任意的 $x \in \mathcal{H}$，存在唯一的 $x_0 \in M$ 以及 $y \in M^{\perp}$，使得

$$x = x_0 + y \tag{6.8}$$

并且

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \|y\|^2 \tag{6.9}$$

proof.

6.7. 正交系

上面说的正交补空间是两个子集之间的元素相互正交，如果希尔伯特空间的一个子集 M 子集的元素之间相互正交，那么我们称 M 为**正交系**，如果 M 中每一个元素的范数（由内积诱导的）都等于 1，则我们称 M 为**标准正交系**

正交系是线性无关的

theorem 6.7.1: 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 是内积空间 X 中的正交系，则 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 是线性无关的，如果 X 是 k 维的，且 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 是标准正交系，则任何的 $x \in X$ 都可以表示为

$$x = \sum_{n=1}^{k} (x, e_n) e_n \tag{6.10}$$

proof.

6.8. *Fouries Series*

6.9. 正交基

设 $\{x_\alpha\}$ 是 X 中正交系，如果它长成的子空间的闭包是全空间 X，那么我们称 $\{x_\alpha\}$ 为**正交基**。

6.10. 可分的 *Hilbert* 空间

线性无关组的正交化算法

theorem 6.10.1: 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 $\mathcal{H}$ 中的可数子集，则在 $\mathcal{H}$ 中存在标准正交列 $\{e_n\}$，使得 $\{e_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 张成的子空间相同。

proof.

可分的 *Hilbert* 空间与 l^2 等构同距

theorem 6.10.2: 设 $\mathcal{H}$ 是一个 *Hilbert* 空间，则 $\mathcal{H}$ 是可分的当且仅当 $\mathcal{H}$ 中有至多可数的标准正交基 S。

Chapter 7

Hilbert Space Exescrise

稍微记录一下：度量和内积的关系在于，由于度量描述的是距离，对于任意两个点之间的距离都应该用一个正数表示，内积是有可能是负的，代表角度大于 90 度；度量是一个泛函而内积是一个双线性泛函，就是说度量不一定满足线性；同时度量遵守的是三角不等式量定义了“距离”并且必须满足最基本的几何直觉，即从一处到另一处的直接距离不能超过绕道的距离和，而内积遵守平行四边形不等式，内积不仅定义了距离，还定义了角度和正交性。平行四边形不等式是由向量加法和内积定义的范数之间的关系决定的，它描述了内积空间中的几何对称性。

总结：由度量 $d(\cdot,\cdot)$ 诱导的范数只能描述距离，而内积诱导的范数可以描述角度和距离。

$$(x, y) = \|x\|\|y\| \cos\theta \tag{7.1}$$

7.1. 用内积生成的范数

Question 25: 至少举例两个线性赋范空间 X，使得在 X 上的范数不能由内积生成

proof.

□

7.2. *Hilbert* 空间收敛性

Question 26: 设 $\{x_n\}$ 为内积空间 H 中点列，$x \in H$，若 $\|x_n\| \to \|x\|$，且 $\forall\, y \in H$，$(x_n, y) \to (x, y)\ (n \to \infty)$，证明：$x_n \to x\ (n \to \infty)$

proof.

□

Question 27: 设 H 是 *Hilbert* 空间，$\{x_n\} \subset H$，满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 H 中收敛。

proof.

□

7.3. 可分的 *Hilbert* 空间

Question 28: 证明在可分的内积空间，任意标准正交系最多为一可数集

proof.

□

Question 29: 证明在可分的 *Hilbert* 空间中，任一完备的标准正交系必定是可数集

proof.

□

7.4. *Hilbert* 空间正交系与正交基

Question 30: 设 E_n 是 n 为实线性空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E_n 的一个基，$(\alpha_{ij})(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是正定矩阵，对 E_n 中的元素 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ 以及 $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$，定义

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \alpha_{ij} y_j \tag{7.2}$$

证明：$(\cdot, \cdot)$ 是 E_n 上的一个内积，反之，设 $(\cdot, \cdot)$ 是 E_n 上的一个内积，则必定存在正定矩阵 (α_{ij}) 使得 $(x, y) = \sum x_i \alpha_{ij} y_j$ 成立。

分析: *(1)* 内积本质上是一个双线性函数，满足正定性，共轭对称性，线性性；(2) 正定矩阵：如果一个 $n \times n$ 的实对称矩阵是正定的，当且仅当对于所有的非零实系数向量 z，都有 $z^T M z > 0$;

proof. 证明如下

step 1. 首先证明 $(\cdot, \cdot) : E_n \times E_n \to \mathbb{R}$ 是 E_n 上的一个内积。将内积形式写成矩阵形式，令 $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$

$$(x, y) = xAy \tag{7.3}$$

1. 正定性：取 $x \in E_n$，由于 A 是正定实对称矩阵

$$xAx^T \geqslant 0 \tag{7.4}$$

当且仅当 $\|x\| = 0$ 时等号满足

2. 线性性：

$$\begin{aligned}(\alpha x, \beta y) &= (\alpha x)A(\beta y) = \alpha(xAy)\beta = a \\ (x+z, y) &= (x+z)Ay = xAy + zAy = (x,z) + (x,y)\end{aligned} \tag{7.5}$$

3. 对称性：由于 $(\cdot,\cdot)$ 是一个双线性函数，输出是一个实数，转置前后结果不变，同时 A 对称，所以

$$(x,y) = xAy = (xAy)^T = y^T A x^T = (y,x) \tag{7.6}$$

step 2. 如果 $(\cdot,\cdot)$ 是 E_n 上的一个内积，对于任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in E_n$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) \quad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i (e_i, e_j) y_j \tag{7.7}$$

令 $\alpha_{ij} = (e_i, e_j)$，再令

$$A = \begin{bmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \cdots & (e_1,e_n) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & \cdots & (e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n,e_1) & (e_n,e_2) & \cdots & (e_n,e_n) \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

下面只要证明 A 是一个正定矩阵，首先注意到 A 是一个实对称矩阵，如果 A 是一个正定矩阵，则 $\forall\, \mathbf{z} \in E_n$

$$\mathbf{z}A\mathbf{z}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i \alpha_{ij} z_j = (\mathbf{z},\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|^2 > 0(\text{由内积诱导范数}) \tag{7.9}$$

PS: 上面的矩阵 A 实系数下称为 Gram 矩阵。

□

Question 31: 称 $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ 为 *Hermite* 多项式，令

$$e_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{7.10}$$

证明 $\{e_n\}$ 组成 $L^2(-\infty,\infty)$ 中的一个完备标准正交基

proof.

□

Question 32: 令 $L_n(t)$ 为 *Laguerre* 函数 $e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$，证明 $\{\frac{1}{n!} e^{-\frac{1}{2}} L_n(t)\}(n = 1, 2, \cdots)$ 组成的 $L^2(0,\infty)$ 中的一个完备的标准正交基

proof.

□

7.5. 正交补空间

Question 33: 设 $M=\{x|x=\{\xi_n\}\in l^2,\xi_{2n}=0,n=1,2,\cdots\}$，证明 M 是 l^2 的闭子空间，且求出 $M^{\perp}$

分析： 证明 l^p 空间完备性的时候，是证明 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$ 的每一个分量 ξ_i 在 $\mathbb{C}$ 中的收敛性，根据点集拓扑学中积空间的讨论，l^p 可以看作 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots$ 笛卡尔积的形式，根据点集拓扑学中积空间的讨论，如果 x 的分量 ξ_i 在 $\mathbb{C}$ 中收敛，那么 x 在 l^p 收敛。

proof. 首先证明 M 是 l^2 是闭集；首先 l^2 空间上的范数定义为

$$\|x\|:=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.11}$$

如果 M 是闭集，则对于任意 $x\in M$，那么存在任意的 $B(x,\varepsilon)$ 和 M 的交集都不为空，也就是说存在一个序列 $\{x^{(k)}\}\in M$，使得

$$\|x^{(k)}-x\|<\varepsilon,\quad \forall\,\varepsilon>0 \tag{7.12}$$

其中 $x^{(k)}=(\xi_1^{(k)},0,\xi_3^{(k)},0,\cdots)$，$x=(\xi_1,0,\xi_3,0,\cdots)$，根据依照范数收敛的定义，上面写成

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{2n-1}^{(k)}-\xi_{2n-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \tag{7.13}$$

同时知道 l^p 空间在范数拓扑的情况下可分，因此 l^p 空间的任意一个点都至少存在一个收敛到它的序列。假设存在 $\{y^{(k)}\}\in l^2$ 刚好收敛到 x，其中 $y^{(k)}=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\xi_3^{(k)},\xi_4^{(k)},\cdots)$ 则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(k)}-\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \tag{7.14}$$

这相当于是填补了偶数项，所以

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_{2n-1}^{(k)}-\xi_{2n-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(k)}-\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \tag{7.15}$$

所以对于任意的 $x\in M$，包含 x 所有的开球 $B(x,\varepsilon)\cap M\neq\emptyset$。所以 M 闭。

下面求 M 的正交补空间。定义 l^2 上的内积为

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\overline{\xi_n} \tag{7.16}$$

正交补空间的定义为

$$M^{\perp}=\{x\in l^2|(x,y)=0,\forall\,y\in M\} \tag{7.17}$$

令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in M$，其中 y 的偶数项全都为 0，我们来找 x

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_{2n-1}\overline{\xi_{2n-1}}=0 \tag{7.18}$$

因为奇数项全部为 0，所以上面只有奇数项，而奇数项 ξ_i 又不全为 0，所以上式如果对于任意的 y 都满足，当且仅当 x 在奇数的分量全部为 0。所以

$$M^{\perp}=\{x\in l^2|x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\},\xi_{2n-1}=0,n=1,2,\cdots\} \tag{7.19}$$

□

Question 34: 设 X 是内积空间，$A \subset X$，证明 $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$

分析：注意正交补空间的定义是，在正交补空间中每一个元素和原子空间的每个元素都相互正交

proof. A 的正交补空间定义为

$$A^{\perp} = \{x \in X | (x, y) = 0, \forall y \in A\} \tag{7.20}$$

$$\overline{A}^{\perp} = \{x \in X | (x, y) = 0, \forall y \in \overline{A}\} \tag{7.21}$$

1. 证明 $A^{\perp} \subseteq \overline{A}^{\perp}$;

如果 $A^{\perp} \subseteq \overline{A}^{\perp}$，则对于所有的 $y \in A^{\perp}$，任意取在 X 中收敛的数列 $\{x_k\} \subseteq A$,

$$(x_k, y) = 0 \tag{7.22}$$

令 $k \to \infty$，根据内积的连续性

$$\lim_{k\to\infty}(x_k, y) = \lim_{k\to\infty}(x_k, y) = (x, y) = 0 \tag{7.23}$$

因为 $\overline{A}$ 包含 A 和 A 的所有的极限点，所以 $x \in \overline{A}$。也就是说 $y \in \overline{A}^{\perp}$, 由于 y 的任意性，所以

$$A^{\perp} \subseteq \overline{A}^{\perp} \tag{7.24}$$

2. 证明 $\overline{A}^{\perp} \subseteq A^{\perp}$;

假设 $y \in \overline{A}^{\perp}$，对于任意的 $x \in \overline{A}$，都有

$$(x, y) = 0 \tag{7.25}$$

由于 $A \subseteq \overline{A}$，所以对于任意的 $z \in A$，也都有

$$(z, y) = 0 \tag{7.26}$$

也就是说 $y \in A^{\perp}$，所以 $\overline{A}^{\perp} \subseteq A^{\perp}$。

综上所述，$A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$

□

Question 35: 设 M, N 是内积空间 H 的子空间，$M \perp N$，$L = M \bigoplus N$，证明 L 是闭子空间的充分必要条件是 M, N 均为闭子空间 (充分性部分假定 H 完备)。

proof.

□

7.6. *Fouries* 级数

Question 36: 试证：$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\ nt\right\}$ 构成 $L^2[0,2\pi]$ 的正交基，但不是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的正交基。

proof.

□

Question 37: 设 H 表示如下的函数 $x(t)$ 的全体

$$x(t) \in L[0,2\pi], x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{7.27}$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < \infty \tag{7.28}$$

令

$$\|x\|_H = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.29}$$

证明 H 是 *Hilbert* 空间。

proof.

□

7.7. 凸性

Question 38: 赋范线性空间 X 被称为一致凸的，如果 X 中任意满足 $\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \|x_n + y_n\| \to 2$ 的序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 有 $\|x_n - y_n\| \to 0$，证明：

1. 任何内积空间都是一致凸的；
2. $C[a,b]$ 不是一致凸的；
3. $L^1[a,b]$ 不是一致凸的；
4. 一致凸赋范空间必然是严格凸的；

proof.

□

7.8. 正交投影与最佳逼近

Question 39: 证明在严格凸的赋范空间中，对于每个 $xinX$，x 关于任意闭子空间 Y 的最佳逼近都是唯一的。

Question 40: 设 H 是 *Hilbert* 空间，若 $E \subset H$ 是线性子空间并且对于任意的 $x \in H$，x 在 E 上的投影存在，则 E 是闭的。

7.9. 补充

Question 41: 设 $\{e_\alpha\}(\alpha \in I)$ 是内积空间 H 中的标准正交系，证明对于每个 $x \in H$，x 关于这个标准正交系的 *Fouries* 系数 $\{(x, e_\alpha)|\alpha \in I\}$ 中最多有可数个不为零。

proof.

□

Chapter 8

有界线性算子

8.1. 有界线性算子

definition 8.1.1: *(有界线性算子)* 设 X,X_1 是赋范空间，$\mathcal{L}(T) \subset X$ 是一个线性子空间，T 是从 $\mathcal{L}(T)$ 到 X_1 的映射，满足

$$\begin{aligned} T(x+y) &= Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx \end{aligned} \tag{8.1}$$

其中 $x, y \in \mathcal{L}(T)$，$\alpha \in \mathbb{K}$，则称 T 是从 X 到 X_1 的**线性算子**，$\mathcal{L}$ 称为 T 的**定义域**。

definition 8.1.2: *(有界线性算子)* 设 T 是从 X 到 X_1 的线性算子，若存在常数 $M > 0$，使得

$$\|Tx\|_1 \leqslant M\|x\|, \quad \forall\, x \in X \tag{8.2}$$

则称 T 为**有界线性算子**。

有界线性算子把有界集映射成有界集。

对线性算子连续性的刻画

theorem 8.1.1: 设 X,X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 的线性算子，如果 T 在 y 点连续，则 T 在 X 上连续。

对于线性算子来说，一点连续意味着每个点都连续。

theorem 8.1.2: 设 X, X_1 为赋范空间，T 是从 X 到 X_1 的线性算子，则 T 是连续的当且仅当 T 是有界的。

8.2. 有界线性算子赋范空间

我们定义所有 $X \to X_1$ 有界线性算子组成的空间为 $\mathcal{L}(X, X_1)$，尝试定义 $\mathcal{L}(X, X_1)$ 的范数

definition 8.2.1: *(有界线性算子 T 的范数)* 设 T 是从赋范空间 X 到 X_1 的有界线性算子，即存在 $M > 0$，使得

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad \forall\, x \in X \tag{8.3}$$

令

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{8.4}$$

称为有界线性算子的范数。

验证 $\|T\|$ 作为范数的三个条件：正定性、齐次性、三角不等式。

8.3. 有界线性算子赋范空间的收敛性和完备性

一致收敛

设 $A_n, A \in \mathcal{L}(X, X_1)$，如果 $\|A_n - A\| \to 0\ (n \to \infty)$，则称有界线性算子列 $\{A_n\}$ **按范数收敛到有界线性算子** A 或者称**一致收敛到** A。

theorem 8.3.1: 空间 $\mathcal{L}(X, X_1)$ 中线性算子列按范数收敛等价于线性算子列在 X 中单位球面 S 上一致收敛。

proof. □

逐点收敛

definition 8.3.1: *(逐点收敛)* 设 $T_n, T \in \mathcal{L}(X, X_1)\ (n = 1, 2, \cdots)$，如果 $\forall\, x \in X$，$T_n x \to Tx\ (n \to \infty)$，即

$$\|T_n x - Tx\| \to 0\ (n \to \infty) \tag{8.5}$$

则称 $\{T_n\}$ 逐点收敛到 T 或称 $\{T_n\}$ 强收敛到 T。

完备性

theorem 8.3.2: 设 X 是赋范空间，X 是 *Banach Space*，则 $\mathcal{L}(X, X_1)$ 是 *Banach Space*。

8.4. 一致有界原理

首先引入一些概念，如果 E 不在 X 中任何非空开集中稠密，则 E 为**稀疏集合**。如果集合 E 可以表示为至多可数个疏集的并，即

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \tag{8.6}$$

则称 E 为**第一纲集**，不是第一纲集的集合称为**第二纲集**

Baire 纲定理

theorem 8.4.1: *(Baire 纲定理)* 完备距离空间是第二纲集。

proof. 反证法。如果不然，则

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \tag{8.7}$$

其中 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 是疏集，于是

1. 对于任何开球 S，E_1 在 S 中不稠密 ($S\nsubseteq\overline{E}_1$)，即存在 S 中的点不在 $\overline{E}_1$ 中（和 $\overline{E}_1$ 有正距离）。由于 S 是开球，所以存在一个闭球 $\overline{S}_1\subseteq S$，使得

$$\overline{S}_1\bigcap E_1=\emptyset \text{ 且 } \overline{S}_1 \text{ 的半径小于}1 \tag{8.8}$$

2. 同样，E_2 在 S_1 中不稠密，存在 $\overline{S}_2\subseteq S_1$ 使得

$$\overline{S}_2\bigcap E_2=\emptyset \text{ 且 } \overline{S}_2 \text{ 的半径小于}\frac{1}{2} \tag{8.9}$$

3. 一直做下去，我们就得到闭球套

$$\overline{S}_1\supset\overline{S}_2\supset\cdots\supset\overline{S}_n\supset\cdots\text{ ，且 }\overline{S}_n\text{ 的半径小于}\frac{1}{2^{n-1}} \tag{8.10}$$

4. 因 X 完备，$r_n\to 0$，由闭球套定理知存在唯一的点

$$x_0\in X,x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n \tag{8.11}$$

但 $\overline{S}_n\cap E_n=\emptyset$，由于 $\forall n$，$x_0\in\overline{S}_n$，所以 $x_0\notin E_n$，这于 $X\bigcup_{k=1}^{\infty}E_n$ 矛盾

所以 X 不是第一纲集，即 X 是第二纲集。
□.

proposition 8.4.2: *Banach* 空间就是第二纲集。

Banach-Steinhaus 一致有界原则

theorem 8.4.3: *(Banach-Steinhaus 一致有界原则)* 设 $\{T_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是 *Banach* 空间，X 上到赋范空间 X_1 中的有界线性子族，如果 $\forall\, x\in X$，

$$\sup_{\alpha}\|T_\alpha x\|<\infty \tag{8.12}$$

则 $\{\|T_\alpha\|\mid\alpha\in I\}$ 为有界集。

proof. □

theorem 8.4.4: *(共鸣定理)* 如果 $\{T_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是 *Banach* 空间 X 上到赋范空间 X_1 中的有

界线性算子族，$\sup_\alpha \|T_\alpha\| = \infty$，则存在 $x_0 \in X$，使得

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x_0\| = \infty \tag{8.13}$$

共鸣定理实际上是 *Banach-Steinhaus* 一致有界原则的逆否命题。

强收敛意义下的完备性

共鸣定理的应用——*Fourier* 级数的发散

由一致有界原则，如果 $\|f_n\| \to \infty\ (n \to \infty)$，则存在 x_0，使得 $|f_n(x_0)| \to \infty$ 发散，据此下面证明：存在连续函数，在它某一连续点 t_0，其 *Fourier* 级数是发散的。

8.5. 开映射定理和逆算子定理

设 T 是从线性空间 X 到线性空间 X_1 中的线性算子，如果存在 X_1 到 X 中的线性算子 T_1 使得

$$\begin{aligned} &x \in \mathcal{L}(T) \subset X,\ T_1 T x = x \\ &y \in \mathcal{R}(T) \subset X_1,\ T T_1 y = y \end{aligned} \tag{8.14}$$

则称 T_1 为 T 的**逆算子**

开映射定理

theorem 8.5.1: 设 T 是 *Banach* 空间X 上到 *Banach* 空间X_1 上的有界线性算子，则 T 是开映射。

逆算子定理

theorem 8.5.2: ***(Banach* 逆算子定理*)*** 设 T 是从 *Banach* 空间X 上到 *Banach* 空间X_1 上的一对一的有界线性算子，则 T 的逆算子存在，且 T^{-1} 有界。

proof.

1.

□

8.6. 闭算子和闭图像定理

设 X, X_1 是赋范空间，T 是从 X 到 X_1 到线性算子，积空间

$$X \times X_1 = \{(x, y) \mid x \in X, y \in X_1\} \tag{8.15}$$

上定义范数：对于任意的 $z = (x, y) \in X \times X_1$，令

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \tag{8.16}$$

可以验证 $X \times X_1$ 是赋范空间，如果 X 和 X_1 是 *Banach* 空间，则 $X \times X_1$ 也是 *Banach* 空间。

$$G(T) = \{(x, Tx) \in X \times X_1 \mid x \in \mathcal{L}(T)\} \tag{8.17}$$

称为**算子 T 的图像**。如果 $G(T)$ 在 $X \times X_1$ 中是闭集，则 T 称为**闭算子**。

theorem 8.6.1: *T 是闭算子当且仅当 $\forall \{x_n\} \subset \mathcal{L}(T)$，$x_n \to x \in X$ 以及 $Tx_n \to y \in X_1$，必有 $x \in \mathcal{L}(T)$ 且 $y = Tx$。*

proof. 充分性：证明 $\forall (x, y) \in \overline{G(T)} \Rightarrow (x, y) \in G(T)$。$\forall (x, y) \in \overline{G(T)}$，存在 $(x_n, y_n) \in G(T)$ 使得

$$(x_n, y_n) \to (x, y)\ (n \to \infty) \tag{8.18}$$

因 (x_n, y_n) 在 T 的图像中，故 $y_n = Tx_n$，即

$$(x_n, Tx_n) \in G(T),\ (x_n, Tx_n) \to (x, y)\ (n \to \infty) \tag{8.19}$$

根据乘积空间范数的定义

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \to 0\ (n \to \infty) \tag{8.20}$$

所以

$$\|x_n - x\| \to 0,\ \|Tx_n - y\| \to 0\ (n \to \infty) \tag{8.21}$$

即

$$x_n \to x,\ \ Tx_n \to y \tag{8.22}$$

由定理中的条件

$$x \in \mathcal{D}(\mathcal{T}),\ y = Tx \tag{8.23}$$

故 $(x, y) \in G(T)$，这就证明 T 是闭算子。
必要性：即证明 $\forall \{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$，$x_n \to x$，$Tx_n \to y\ (n \to \infty)$，则有 $x \in \mathcal{D}(T)$，$y = Tx$.
由条件

$$\|x_n - x\| + \|tx_n - y\| \to 0\ (n \to \infty) \tag{8.24}$$

因此

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \tag{8.25}$$

因此 T 是闭的，即 $G(T)$ 是闭的故 $(x, y) \in G(T)$，即

$$x \in \mathcal{D}(T),\ \ y = Tx \tag{8.26}$$

□

theorem 8.6.2: *(闭图像定理) 设 T 是 Banach 空间X 到 Banach 空间X_1 上的闭线性算子，则 T 是有界线性算子。*

proof. 因为 X, X_1 是 *Banach* 空间，故 $X \times X_1$ 是 *Banach* 空间。由于 T 是闭的，故 $G(T)$ 是 $X \times X_1$ 中的闭子空间，定义从 $G(T)$ 上到 X 中的线性算子

$$\tilde{T} : (x, Tx) \to x \tag{8.27}$$

$\tilde{T}$ 是一对一在上的线性算子（因为 $\mathcal{D}(T) = X$），所以 $\tilde{T}^{-1}$ 存在，

$$\tilde{T}^{-1} : x \to (x, Tx) \tag{8.28}$$

由 *Banach* 空间逆算子定理，$\tilde{T}^{-1} : x \to (x, Tx)$ 是有界的。于是

$$\|(x, Tx)\| = \|\tilde{T}^{-1}(x)\| \leqslant \|\tilde{T}^{-1}\|\|x\| \tag{8.29}$$

因为 $\|(x, Tx)\| = \|x\| + \|Tx\|$，所以

$$\|Tx\| \leqslant (\|\tilde{T}^{-1}\| - 1)\|x\| \tag{8.30}$$

□

Chapter 9

Boundary Linear Operator Exescrise

9.1. 有界线性泛函

Question 42: 设 X 是赋范线性空间，则 X 上的范数 $\|\cdot\|$ 定义了一个从 X 到 $\mathbb{R}$ 的泛函

$$f(x) = \|x\| : X \to \mathbb{R} \tag{9.1}$$

证明 f 不是一个线性泛函。

proof.

□

Question 43: 设 G 是赋范空间 X 的子空间，证明 $x_0 \in \overline{G}$ 当且仅当对于 X 上任意满足 $f(x) = 0(x \in G)$ 的有界线性泛函 f 必有 $f(x_0) = 0$.

proof.

□

Question 44: 证明 X 是赋范线性空间，并且任何线性映射 $L : X \to Y$ 是连续的，证明 X 是有限维的。

proof.

□

Question 45: 证明有限维线性赋范空间上的每个线性算子都是有界的。

proof.

□

9.2. 算子方程

Question 46: 设 X, Y, Z 是 *Banach* 空间，若 $T_1 \in \mathcal{B}(X, Z), T_2 \in \mathcal{B}(Y, Z)$，且 $\forall x \in X$，算子方程 $T_1 x = T_2 y$ 有唯一解 $y = Tx$，证明 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

proof.

□

9.3. 有界线性算子的连续性

Question 47: 设 $\alpha(\cdot)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数，令

$$(Tx)(t) = \alpha(t)x(t) \ (x \in C[a, b]) \tag{9.2}$$

则 T 是由 $C[a, b]$ 到其自身的有界线性算子的充要条件是 $\alpha(\cdot)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

proof.

□

9.4. 算子范数

Question 48: 对于每个 $\alpha \in L^\infty[a, b]$，定义线性算子 $T : L^p[a, b] \to L^p[a, b]$，

$$(Tx)(t) = \alpha(t)x(t), \ \forall\, x \in L^p[a, b] \tag{9.3}$$

求 T 的范数。

proof.

□

Question 49: 对于 $f \in L[a, b]$，定义

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{9.4}$$

证明：

1. 若 T 为 $L[a, b] \to C[a, b]$ 的算子，则 $\|T\| = 1$;
2. 若 T 为 $L[a, b] \to L[a, b]$ 的算子，则 $\|T\| = b - a$;

proof.

□

Question 50: 在 $C[0,1]$ 上定义线性泛函

$$f(x)\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt \tag{9.5}$$

证明：

1. f 是连续的；
2. $\|f\| = 1$;
3. 不存在 $x \in C[0,1]$，$\|x\| \leqslant 1$，使得 $f(x) = 1$;

proof.

□

Question 51: 设 $x(t) \in C[a,b]$，$f(x) = x(a) - x(b)$，证明 f 是 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函，并且 $\|f\|$;

proof.

□

Question 52: 设 $\phi(t) \in C[0,1]$，在 $C[0,1]$ 上定义泛函

$$\psi(f) = \int_0^1 \phi(t)f(t)dt,\ \forall\ f \in C[0,1] \tag{9.6}$$

求 $\|\psi\|$

proof.

□

9.5. 算子的强收敛性和完备性

Question 53: 设 X, Y 是赋范线性空间, $L_n(n = 1, 2, \cdots)$ 是从 X 到 Y 的连续线性算子, 假定 L 是从 X 值 Y 的映射, 并且对任意的 $n = 1, 2, \cdots$, 存在 $M_n \geqslant 0$ 使得 $\|Lx - L_n x\| \leqslant M_n\|x\|$, 对于所有的 $x \in X$。另外 $M_n \to 0(n \to \infty)$。证明 L 是从 X 到 Y 的连续线性映射。*(题目说明如果序列 $\{L_n\}$ 一致收敛，则它的极限必然是连续的、线性的)*。

proof.

□

Question 54: 接上一题，如果

$$\forall\ x \in X,\ \lim_{n\to\infty} \|L_n x - Lx\| = 0 \tag{9.7}$$

即若 L_n 强收敛于 L，则 L 是线性的。

proof.

□

Question 55: 设 X, Y 是线性赋范空间，证明若 Y 不是完备的且 $X \neq \{0\}$，则 $\mathcal{B}(X,Y)$ 不完备。

proof.

□

9.6. *Baire* 纲

Question 56: 设 X, Y 是线性赋范空间，$T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$，A 是使得 $\sup_{n\geqslant 1}\|T_n x\| < \infty$ 的点 x 的全体，证明要么 $A = X$，要么 A 是 X 中的第一纲集。

proof.

□

Question 57: 考虑序列空间 $\varphi = \{x | x = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots), \forall x_i \in \mathbb{R}, n \geqslant 1\}$，其中的每个元素 x 是至多有限多个不为 0 的数字构成的无穷序列，并且 $\|x\| = \sup_{n\geqslant 1}|x_n|$，$\forall\, x \in \varphi$。对于 φ 上的算子列 $T_m : \varphi \to \varphi$，$T_m(x) = (0, \cdots, 0, m x_m, 0, \cdots)$

1. 计算 $\|T_m\|$;
2. 证明对于每个 $x \in \varphi$，$\sup_{m\geqslant 1}\|T_m x\| < \infty$;
3. 证明 φ 自身不是第二纲的；

proof.

□

9.7. 一致有界原则

Question 58: 设 $\{T_n\}$ 是赋范空间 X 到 *Banach* 空间 X_1 中的有界线性算子列，如果

1. $\{\|T_n\|\}$ 有界；
2. G 是 X 的稠子集，且 $\forall\, y \in G$，$\{T_n y\}$ 收敛，则存在有界线性算子 $T(T \in \mathcal{B}(X, X_1))$，使得

$$T_n \xrightarrow{strong} T(n \to \infty), \quad \|T\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\|T_n\| \tag{9.8}$$

proof.

□

9.8. 开映射定理和逆算子定理

Question 59: 设 X 是 *Banach* 空间，X_0 是 X 闭子空间，定义映射 $\phi : X \to X/X_0$ 为 $\phi : x \to [x], \forall x \in X$，其中 $[x]$ 表示含 x 的商类，证明 ϕ 是开映射。

proof.

□

Question 60: 设 X 是 l^∞ 中只有有限多非零项的序列构成的子空间，定义 $T: X \to X, x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \to y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots)$，式子中 $y_k = \frac{1}{k} x_k$，证明

1. $T \in \mathcal{B}(X)$，并计算 $\|T\|$;
2. T^{-1} 无界;
3. 这是否和 *Banach* 逆算子定理矛盾?

proof.

□

9.9. 闭算子和闭图像定理

Question 61: 设 X, Y 是线性赋范空间，D 是 X 的线性子空间，$T: D \to Y$ 是线性映射，证明

1. 若 T 连续，D 是闭算子，则 T 是闭算子;
2. 若 T 连续且是闭算子，则 Y 完备蕴含 D 闭;

proof.

□

Question 62: 设 X, Y 为线性赋范空间，$T: X \to Y$ 为线性算子，若 T 为闭算子且逆算子 $T^{-1}: Y \to X$ 存在，证明 T^{-1} 也是闭算子。

proof.

□

Question 63: 设 X, Y 为线性赋范空间，若 $T_1 : X \to Y$ 是闭算子且 $T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$，证明 $T_1 + T_2$ 闭算子。

proof.

□

Chapter 10

共轭空间和共轭算子

本章节需要研究的课题

1. *Hahn-Banach* 定理;
2. L^p 的对偶空间定理;
3. *Riesz* 表示定理

10.1. Hahn-Banach 定理

theorem 10.1.1: ***(Hahn-Banach* 定理*)*** 设 X 是一个复赋范空间，G 是 X 的子空间，f 是 G 上有界线性泛函，则 f 可以保持范数不变地延拓到全空间 X 上，即存在 X 上的有界线性泛函 F，使得

1. $\forall\, x \in G, F(x) = f(x)$;
2. $\|F\| = \|f\|_G$，其中 $\|f\|_G$ 作为 G 上有界线性泛函的范数;

proof. □

Hahn-Banach 定理的推论

proposition 10.1.2: 设 X 是一个赋范空间，$\forall\, x_0 \in X$，$x_0 \neq 0$，存在 X 上的有界线性泛函 f，使得 $\|f\| = 1$，$f(x_0) = \|x_0\|$。

proof. □

corollary 10.1.3: 设 X 是一个赋范空间，$\forall\, x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，一定存在线性泛函 $f(x)$

使得 $\|f\|=1$，且

$$f(x_1)\neq f(x_2) \tag{10.1}$$

proof. □

corollary 10.1.4: 设 X 是一个赋范空间，如果对于 X 的任何有界线性泛函 f，都有

$$f(x_0)=0 \tag{10.2}$$

则 $x_0=0$

proof. □

线性泛函和闭集分离

设 X 是一个赋范空间，f 是 X 上的有界线性泛函，称

$$L_f^k=\{\, x\in X \mid f(x)=k\} \tag{10.3}$$

为 X 中的**超平面**。

proposition 10.1.5: 设 $\overline{B}=\{x|\|x\|\leqslant\mathbb{R}\}$ 是赋范空间 X 中的闭球，则在球面 $S(0,\mathbb{R})=\{x|\|x\|=\mathbb{R}\}$ 上的每一点处，存在支撑球的超平面 $L_f^{\mathbb{R}}$

proof. □

10.2. 共轭空间

设 X 是一个赋范空间，我们记 $X^*=\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$，其中

$$\mathcal{B}(X,\mathbb{K})=\{X\text{上有界线性泛函全体}\} \tag{10.4}$$

则称 X^* 为 X 的**共轭空间**。

$L^p[a,b]$ 的共轭空间

theorem 10.2.1: 设 f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $y(t)\in L^p[a,b]$，$(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt,\ \ \forall\, x\in L^p[a,b] \tag{10.5}$$

且

$$\|fVert=\|y\|_q=\left(\int_a^b|y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

10.3. Hilbert 空间的共轭空间

theorem 10.3.1: *(Riesz 表示定理)* 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，f 是 H 上定义的有界线性泛函，则存在唯一的 $y_f \in H$，使得

$$f(x) = (x, y_f), \quad \forall\, x \in H \tag{10.6}$$

并且

$$\|f\| = \|y_f\| \tag{10.7}$$

由 *Riesz* 表示定理，我们可以定义 *Hilbert* 空间的共轭空间，任意的 $f \in H^*$，对应唯一的 $y_f \in H$，使得 $f(x) = (x, y_f)$，并且 $\|f\| = \|y_f\|$。另一方面，对于任意的 $y \in H$，令

$$f_y(x) = (x, y), \ \forall\, x \in H \tag{10.8}$$

显然 f_y 是 H 上的连续线性泛函，即 $f_y \in H^*$。
于是我们定义了一个映射 $\tau : H^* \to H$

$$\tau(f) = y_f, \ \forall\, f \in H^* \tag{10.9}$$

τ 是 H^* 到 H 的一一对应的保范映射，*tau* 不是线性的，但是是共轭线性的，即

$$\tau(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\tau(f_1) + \beta\tau(f_2) \tag{10.10}$$

在 H^* 中规定内积

$$(f_1, f_2) = (y_{f_1}, y_{f_2}), \ \forall\, f_1, f_2 \in H^* \tag{10.11}$$

theorem 10.3.2: 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，则 $H^* = H$ 在共轭同构意义下看成与 H 等同。

proof. □

Hilbert 空间上的共轭算子

Hilbert 空间空间上的共轭线性算子 A^*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \ \forall\, x, y \in H \tag{10.12}$$

有如下的性质: 设 A, B 是 *Hilbert* 空间上的有界线性算子，则

1. 共轭算子 A^* 是有界线性算子，并且 $\|A^*\| = \|A\|$;
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$;
3. $(AB)^* = B^*A^*$;
4. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$;
5. 若 A^{-1} 存在且有界，则 $(A^*)^{-1}$ 也存在且有界，且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;
6. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2 = \|A^*\|^2$;
7. 设 A 是从 *Hilbert* 空间 H 到 H 的有界线性算子，那么

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \{\mathcal{N}(A^*)\}^{\perp} \tag{10.13}$$

$$\{\mathcal{N}(A)\}^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(A^*)} \tag{10.14}$$

其中 $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{N}(A)$ 分别表示 A 的值域和零空间。

10.4. 自共轭有界线性算子

如果 A 是 *Hilbert* 空间 H 到 H 的有界线性算子，如果 $A = A^*$，则我们称 A 是**自共轭**的。在 $\mathbb{R}^n$ 中，A 是自共轭的充分必要条件是矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是对称的。

自共轭算子的性质

theorem 10.4.1: 自共轭算子的性质

1. *Hilbert* 空间H 上的全体自共轭算子组成的集合是 $\mathcal{B}(H)$ 中的一个闭集；
2. 设 A, B 是 *Hilbert* 空间的有界自共轭算子，则 AB 是自共轭的充要条件是 $AB = BA$。
3. 设 A 是 *Hilbert* 空间中的有界自共轭算子，则

$$\|A\| = \sup_{x\in H}\{|(Ax, x)|\|x\| = 1\} = \sup_{x\in H, y\in H}\{|(Ax, y)|\|x\| = \|y\| = 1\} \tag{10.15}$$

proof. □

Cartestian 分解

theorem 10.4.2: 设 H 是一个 *Hilbert* 空间，$T \in \mathcal{B}(H)$，则 T 可以分解成

$$T = A + iB \tag{10.16}$$

其中 A, B 是 *Hilbert* 空间中的自共轭算子，并且这种分解唯一。

proof. □

10.5. Banach 空间上的共轭算子 弱收敛

设 X_1, X_2 是 *Banach* 空间，$T \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$，对于 $f \in X_2^*$，令

$$(T'f)(x) = f(Tx),\ \forall\, x \in X_1 \tag{10.17}$$

称 T' 是 T 的 *Banach* 共轭算子。

自反性

设 $x \in X$，$f \in X^*$，如果把 x 固定，f 取遍 X^*，这样 $f(x)$ 定义了 X^* 上的一个有界线性泛函，即对于每一个 $x \in X$，对英语 X^{**} 中的一个元素 F_x，$F_x(f) = f(x)$ $(f \in X^*)$，我们称映射

$$F_x\ :\ X \to X^{**} \tag{10.18}$$

为**典型映射**。在典型映射下 X 与 X^{**} 的一个子空间等距同构，如果 X 是 *Banach* 空间，则可以把 X 看成是 X^{**} 的一个闭子空间，一般地，典型映射下 $X \neq X^{**}$。

下面我们定义自反性。设 X 是一个赋范空间，如果在典型映射的意义下 $X = X^{**}$，则称 X 是**自反的**。

下面是一些自反空间的例子

example 10.5.1: $\mathbb{R}^n$ 是自反的。

example 10.5.2: $L^p(1<p<\infty)$ 是自反的，$l^p(1<p<\infty)$ 是自反的。

弱收敛

设 X 是赋范空间, $x_0, x_n \in X(n=1,2,\cdots)$, 如果对于任意的 $f \in X^*$, $f(x_n) \to f(x_0)\,(n\to\infty)$，则称 $\{x_n\}$ 是**弱收敛**到 x_0。

Chapter 11

Dual Space Exescrise

Question 64: 设 X 是 *Banach* 空间，G 是 X 的闭子空间，T 是由 G 到有界数列空间 m 的有界线性算子，则 T 一定可以延拓为 X 到 m 的有界线性算子 $\widetilde{T}$，且满足 $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$;

proof.

□

11.1. 零空间

Question 65: 设 X 是线性赋范空间，f 是 X 上的有界线性泛函，则存在 $x_0 \in X$，使得 $f(x_0) \neq 0, X = \mathcal{N} \bigoplus \{\alpha x_0\}$，这里 α 是实或者复数，其中 $\mathcal{N}$ 是 f 的零空间。

proof.

□

11.2. 共轭算子

Question 66: 设 L 是从 l^2 到 l^2 的线性算子，即 $(y_1, y_2, \cdots) = L(x_1, x_2, \cdots)$，其中

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n^2} \tag{11.1}$$

证明 L 是有界线性算子且 $\|L\| \leqslant (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}$，并求出 L^*。

proof.

□

11.3. 对偶空间

Question 67: 设 X 为线性赋范空间，证明：当 X 为无限维空间，X^* 也是无限维空间；

proof.

□

Question 68: 设 X 为一个 *Banach* 空间，线性算子 $A : X \to X, \mathcal{L}(A) = X$，线性算子 $B : X^* \to X^*, \mathcal{L}(B) = X^*$，如果

$$(Bf)(x) = f(Ax), \forall\, x \in X, f \in X^* \tag{11.2}$$

证明 A, B 都是有界线性算子；

proof.

□

Question 69: 设 X 是 *Hilbert* 空间，令 $f_k(x) = (x, y_k), k = 1, 2, x, y_k \in X$，在 X^* 中定义

$$(f_1, f_2) = \overline{(y_1, y_2)} \tag{11.3}$$

证明 X^* 也是 *Hilbert* 空间。

proof.

□

11.4. 等距同构

Question 70: 设 H 是 *Hilbert* 空间，并设在 H 中 $x_n \to x_0, y_n \xrightarrow{w} y_0$，证明 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$*;*

proof.

□

Question 71: 设 L 是 *Hilbert* 空间 H 到 H 上的有界线性算子，证明 L 是等距的当且仅当 L^* 是等距的。

proof.

□

11.5. 自共轭算子

Question 72: 设 T 是 *Hilbert* 空间 H 中的自共轭算子且有有界逆算子，证明 T^{-1} 也是自共轭算子；

proof.

□

Question 73: 设 $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ 由 $(Tx)(t) \to tx(t)$，证明 T 是自共轭的有界线性算子;

proof.

□

Question 74: 设 X 为 *Banach* 空间，$\{f_i\} \subset X^*$，证明对任何 $x \in X$，$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| < \infty$ 的充要条件是对任何 $F \in X^{**}$，$\sum_{i=1}^{\infty} |F(f_i)| < \infty$.

proof.

□

Question 75: 设 X, Y 是 *Banach* 空间，T 是 X 到 Y 的线性算子；又设 $\forall\, f \in Y^*, x \to f(Tx)$ 是 X 上的有界线性泛函，证明 T 是连续的。

proof.

□

11.6. 自反性

Question 76: 证明自反的 *Banach* 空间 X 是可分的充要条件是 X^* 是可分的。

Question 77: 证明任何有限维赋范空间都是自反的;

proof.

□

11.7. 弱收敛

Question 78: 证明 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 的充分必要条件是存在常数 M，使得 $\|x_n\| \leqslant M, \forall\, n$，并且 $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$，$\forall\, t \in [a,b]$。

proof.

□

Question 79: 证明 l^1 中任何弱收敛的点列必然是强收敛的;

proof.

□

Question 80: 设 X 是赋范线性空间，M 为 X 的闭子空间，证明：如果 $\{x_n\} \subset M$，并且当 $n \to \infty$ 时 $x_0 = w - \lim_{n\to\infty} x_n$，则 $x_0 \in M$.

proof.

□

Chapter 12

线性算子的谱理论

谱理论关心的一些基本问题

1. $T_\lambda x = 0$ 有非零解，即 λ 是 T 的特征值；
2. $T_\lambda x = 0$ 无非零解

12.1. 谱集和正则点集

谱点和正则点

definition 12.1.1: *(正则点)* 如果是 X 是复的 *Banach* 空间，T 是从 $\mathcal{L}(X) \subset X$ 到 X 的线性算子，λ 称为**正则点**。如果 $\lambda I - T$ 的值域 $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ 在 X 中稠密，并且 $\lambda I - T$ 有连续逆算子，这样的 λ 全体称为 T 的正则点集，记为 $\rho(T)$，有时把逆算子 $(\lambda I - T)^{-1}$ 简记为 $R_\lambda(T)$，称其为 T 的预解式。

definition 12.1.2: *(谱集和谱点)* 正则点集 $\rho(T)$ 的补集称为 T 的**谱集**，记为 $\sigma(T)$，即

$$\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(T) \tag{12.1}$$

如果 $\lambda \in \sigma(T)$，则称 λ 为 T 的**谱点**。

definition 12.1.3: *(点谱、连续谱和剩余谱)* 设 $\sigma(T)$ 是线性算子 T 的谱集

(1) 如果 $\lambda I - T$ 不是一一对应的，λ 称为 T 的**点谱**，点谱全体记为 $\sigma_p(T)$；

(2) 如果 $\lambda I - T$ 是一一对应的，且 $\lambda I - T$ 的值域在 X 中稠密，但是它的逆算子是不连续的，λ 称为 T 的**连续谱**，连续谱全体记为 $\sigma_c(T)$；

(2) 如果 $\lambda I - T$ 是一一对应的，但是 $\lambda I - T$ 的值域在 X 中不稠密，则称 λ 为 T 的**剩余谱**，剩余谱全体记为 $\sigma_r(T)$；

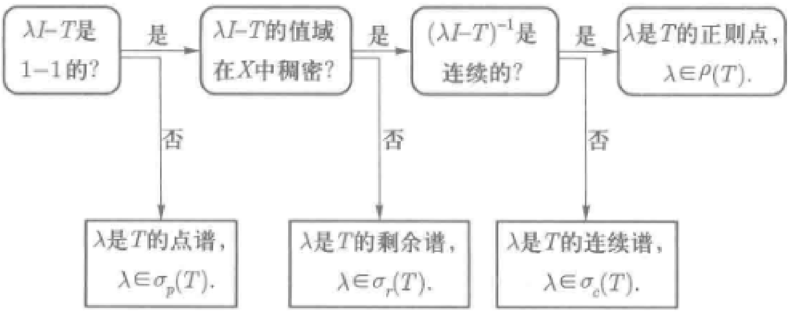

图 12.1: T 的谱集

theorem 12.1.1: 设 H 是 *Hilbert* 空间，$T \in \mathcal{B}(H)$，则

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} | \lambda \in \sigma(T)\} \tag{12.2}$$

proof. 对 $\lambda \in \rho(T)$，

$$R_{\overline{\lambda}}(T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1} = [(\lambda I - T)^{-1}]^* = (R_\lambda(T))^T \tag{12.3}$$

特征值和特征元素

T 的零空间 $\mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为 T 关于 λ 的**特征子空间**，它包括零元素和 T 的全体关于 λ 的特征元素，T 关于 λ 的特征子空间的维数 $\dim \mathcal{N}(\lambda I - T)$ 称为特征值 λ 的**几何重数**。

example 12.1.1: 设 $H = L^2(-\infty, \infty)$，$T : H \to H$，$y = Tx$，其中

$$y(t) = \int_{\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} d\tau \tag{12.4}$$

当 $\mathcal{D}(T) = H$，$\mathcal{R}(T) \subset H$，当 $x(t) = e^{i\omega t}$ 时

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} e^{i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-t} e^{(1+i\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{1+i\omega} e^{i\omega t} \tag{12.5}$$

但这并不意味着 $1/(1+i\omega)$ 是算子 T 的连续谱，事实上 $x(t) = e^{i\omega t} \notin L^2(-\infty, \infty)$，可以证明 $1/(1+i\omega)$ 是算子 T 的连续谱。

proposition 12.1.2: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是线性算子 T 的互不相关的特征值，$x_1, \cdots, x_n$ 是对应的特征元素，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是线性无关的。

theorem 12.1.3: 证明：$dim(\mathcal{N}(\lambda I - T)) + dim(\mathcal{R}(\lambda I - T)) = dimX$

闭算子的正则点

theorem 12.1.4: 设 X 是 *Banach* 空间，T 是从 $\mathcal{D}(T) \subset X$ 到 X 的闭线性算子，那么对于所有的 $\lambda \in \rho(T)$，$(\lambda I - T)^{-1}$ 是一个定义在全空间上的有界线性算子。

12.2. 有界线性算子的谱集

有界线性算子的谱集是有界集

theorem 12.2.1: 设 X 是 *Banach* 空间，$T \in \mathcal{B}(X)$，如果 $\|T\| < 1$，则算子 $I - T$ 有有界逆算子，并且

$$\begin{aligned} (I-T)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} T^n \\ \|(I-T)^{-1}\| &\leqslant \frac{1}{1-\|T\|} \end{aligned} \tag{12.6}$$

theorem 12.2.2: 设 X 是 *Banach* 空间，$T \in \mathcal{B}(X)$，则 $\sigma(T)$ 是有界集

有界线性算子的谱集是闭集

theorem 12.2.3: 设 T 是 *Banach* 空间X 到 X 的线性算子，$\lambda \in \rho(T)$，且 $|\mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$，则 $\lambda + \mu \in \rho(T)$，即 $\rho(T)$ 是一个开集。

有界线性算子谱集非空

lemma 12.2.4: 设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$，

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T) \tag{12.7}$$

theorem 12.2.5: 在正则集 $\rho(T)$ 中，预解式

$$R_\lambda(T) : \lambda \in \rho(T) \subset \mathbb{C} \to \mathcal{B}(X) \tag{12.8}$$

是关于 λ 的算子值解析函数。

theorem 12.2.6: 设 T 是有界线性算子，则 $\sigma(T) \neq \emptyset$

有界线性算子的谱半径

我们称 $r_\sigma(T) = \inf_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}$ 为有界线性算子 T 的**谱半径**。

theorem 12.2.7: 设 $T \in \mathcal{B}(X)$，则极限

$$r_\sigma(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = \inf \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \tag{12.9}$$

存在

theorem 12.2.8: $T \in \mathcal{B}(X)$，则 $r_\sigma(T) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$

12.3. 有界子共轭线性算子的谱

12.4. 紧线性算子的谱

Chapter 13

Exescrise 6

习题六，p218，所有

References

[1] I. Surname, I. Surname, and I. Surname. “The Title of the Article”. In: *The Title of the Journal* 1.2 (2000), pp. 123–456.

Chapter A

Source Code Example

Adding source code to your report/thesis is supported with the package listings. *An example can be found below. Files can be added using* \lstinputlisting[language=<language>]{<filename>}.

```python
"""
ISA Calculator: import the function, specify the height and it will return a
list in the following format: [Temperature,Density,Pressure,Speed of Sound].
Note that there is no check to see if the maximum altitude is reached.
"""

import math
g0 = 9.80665
R = 287.0
layer1 = [0, 288.15, 101325.0]
alt = [0,11000,20000,32000,47000,51000,71000,86000]
a = [-.0065,0,.0010,.0028,0,-.0028,-.0020]

def atmosphere(h):
    for i in range(0,len(alt)-1):
        if h >= alt[i]:
            layer0 = layer1[:]
            layer1[0] = min(h,alt[i+1])
            if a[i] != 0:
                layer1[1] = layer0[1] + a[i]*(layer1[0]-layer0[0])
                layer1[2] = layer0[2] * (layer1[1]/layer0[1])**(-g0/(a[i]*R))
            else:
                layer1[2] = layer0[2]*math.exp((-g0/(R*layer1[1]))*(layer1[0]-layer0[0]))
    return [layer1[1],layer1[2]/(R*layer1[1]),layer1[2],math.sqrt(1.4*R*layer1[1])]
```

Chapter B

Task Division Example

If a task division is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

表 **B.1:** Distribution of the workload

	Task	Student Name(s)
	Summary	
Chapter 1	Introduction	
Chapter 2		
Chapter 3		
Chapter *		
Chapter *	Conclusion	
	Editors	
	CAD and Figures	
	Document Design and Layout	