本科必修课讲义

实分析讲义

郝成春

实分析讲义

郝成春

中科院数学所

Email: hcc@amss.ac.cn

目录

第零章 预备知识

§ 0.1 集论初步

§ 0.1.1 集及其运算

先引进一些常用数集的记号:

$\mathbb{N}$:=正整数集　　　　$\mathbb{N}_0$:=$\mathbb{N}\cup\{0\}$ = 自然数集 (包含 0)

$\mathbb{Z}$:=整数集　　　　$\mathbb{Q}$:=有理数集

$\mathbb{I}$:=无理数集　　　　$\mathbb{R}$:=$\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$ = 实数集

$\overline{\mathbb{R}}$:=$\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ = 扩充实数集　　　　$\mathbb{C}$:=复数集

$\mathbb{R}$ 上的算术运算可以部分地扩充到 $\overline{\mathbb{R}}$:

$$x\pm\infty=\pm\infty\ (x\in\mathbb{R}),\qquad \infty+\infty=\infty,\quad -\infty-\infty=-\infty,$$
$$x\cdot(\pm\infty)=\pm\infty\ (x>0)\qquad x\cdot(\pm\infty)=\mp\infty\ (x<0).$$

我们不试图定义 $\infty-\infty$, 但我们遵守这样的约定 (除非另有说明):

$$0\cdot(\pm\infty)=0.$$

我们回顾在中学数学以及数学分析中就已学过的关于集合中的一些常用符号, 基本概念和基本运算.

- $\varnothing=$ 空集.
- 幂集: $\mathcal{P}(X)=2^X=\{E: E\subset X\}=X$ 的所有子集构成的集簇，其中 “包含于” 记号 $E\subset X$ 不排除 $E=X$ 的可能性, 不表示 “真包含” 的意思.
- 若 I 是一个指标集, $\mathcal{E}=\{E_\alpha:\alpha\in I\}=\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一集簇, 它的元素的并集和交集定义为

  并集: $\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha=\{x:\text{存在某个}\alpha\in I\text{使}x\in E_\alpha\}$.

  交集: $\bigcap\limits_{\alpha\in I}E_\alpha=\{x:\text{对任意}\alpha\in I\text{有}x\in E_\alpha\}$.

  分配律: $E\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}E_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(E\cap E_\alpha), E\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}E_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(E\cup E_\alpha)$.

  若只要 $\alpha\neq\beta$ 就有 $E_\alpha\cap E_\beta=\varnothing$，则称集簇 $\{E_\alpha\}$ 互不相交.
- 当考虑的指标集为正整数集 $\mathbb{N}$ 时, 集簇也用 $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $\{E_n\}_1^\infty$ 表示, 相应的并集和交集也有类似的表示. 此时, 集列的上限集(lim sup 或 $\overline{\lim}$) 和下限集(lim inf 或 $\underline{\lim}$) 分别定义为:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}E_n=&\bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{n=k}^\infty E_n\\=&\{x:\forall k\in\mathbb{N},\exists n\geqslant k, s.t.\, x\in E_n\}\\=&\{x:\text{存在无穷多个}n,\text{使}x\in E_n\}.\\ \liminf_{n\to\infty}E_n=&\bigcup_{k=1}^\infty\bigcap_{n=k}^\infty E_n\\=&\{x:\exists k\in\mathbb{N}, s.t.\,\forall n\geqslant k\text{均有}x\in E_n\}\\=&\{x:\text{当 }n\text{ 充分大以后均有}x\in E_n\}.\end{aligned}$$

  显然, $\liminf E_n\subset\limsup E_n$. 若上、下限集相等, 则说 $\{E_n\}$ 的极限集存在并等于上限集或下限集, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n$.
- 单调集列: 设 $\{A_k\}$ 是一集列, 若 $\forall k$, 有 $A_k\supset A_{k+1}$, 则称此集列为递减集列, 此时称其交集 $\bigcap\limits_{k=1}^\infty A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k$; 若 $\forall k$, 有 $A_k\subset A_{k+1}$, 则称此集列为递增集列, 此时称其并集 $\bigcup\limits_{k=1}^\infty A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的极限集, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k$.
- 差集与补集: 设 E,F 为两个集合, E 与 F 的差集记为

$$E\setminus F=\{x\in E:\ x\notin F\},$$

  读作 E 减 F, 或记为 $E-F$, 它是由在集合 E 中而不在集合 F 中的一切

元素构成的集合. 当 F 是 E 的子集时, 称 $E \setminus F$ 为集合 F 相对于 E 的补集或余集. 当 E 为所考虑问题的全集时, $F^c := \{x \in E : x \notin F\}$ 简称为F 的补集或余集, 即 $F^c = E \setminus F$.

回顾一个重要的法则, 它提供了一种对偶方法, 将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上:

命题 0.1 (De Morgan (德摩根) 法则).

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} (E_\alpha)^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} (E_\alpha)^c.$$

- 对称差: 设 E, F 为两个集合, 称集合 $(E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ 为E 与 F 的对称差, 记为 $E \triangle F$. 它是由既属于 E, F 之一但又不同时属于两者的所有元素所构成的集合. 由定义立知, $E \cup F = (E \cap F) \cup (E \triangle F)$. 因此, 对称差表示并集中除去公共元素后的部分.
- 集合的直积: 设 X, Y 是两个集合, 所有有序 "元素对" (x, y) (其中 $x \in X$, $y \in Y$) 形成的集合称为 X 与 Y 的Descartes (笛卡尔) 积, 记为 $X \times Y$, 即
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\},$$
其中 $(x, y) = (x', y')$ 是指 $x = x'$, $y = y'$. $X \times X$ 也记为 X^2. 例如, $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ 为平面上单位闭正方形.
- 映射. 映射$f : X \to Y$ 是从 X 到 Y 的一个对应关系，使得 $\forall x \in X$, $\exists! y \in Y$, s.t. $y = f(x)$. 当 Y 是 $\mathbb{C}$ 或其子集时也称 f 为函数. X 称为 f 的定义域 (domain); Y 称为 f 的陪域 (或到达域 (codomain)); 若 $D \subset X$ 和 $E \subset Y$, 定义 D 关于映射 f 的像为
$$f(D) = \{f(x) : x \in D\},$$
$f(X)$ 称为 f 的值域 (range), 定义 E 关于 f 的原像为
$$f^{-1}(E) = \{x : f(x) \in E\}.$$
易验证由此式定义的映射 $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ 与并、交和补运算可交换:
$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(E_\alpha),$$
$$f^{-1}(E^c) = \left(f^{-1}(E)\right)^c.$$
像映射 $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ 与并运算可交换, 但一般与交或补运算不可交换.

  若 $f(x_1) = f(x_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时成立, 则称 f 是单射; 若 $f(X) = Y$, 则称为满射; 若既是单射又是满射, 则称为双射 (或一一对应).

若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 为映射, 记 $g \circ f$ 为它们的复合:

$$g \circ f: X \to Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

若 f 为双射, 则存在逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 使得 $f^{-1} \circ f$ 和 $f \circ f^{-1}$ 分别是 X 和 Y 上的恒同映射. 若 $A \subset X$, 记 $f|_A$ 为 f 在 A 上的限制:

$$(f|_A): A \to Y; \quad (f|_A)(x) = f(x), x \in A.$$

§ 0.1.2 集的势

一个集合 A 中所包含的元素的个数称为 A 的势 (cardinality) 或基数, 记为 $\text{card}(A)$.

设 A, B 是两个集合, 若存在一个从 A 到 B 上的一一对应, 则称集合 A 与 B 对等, 记为 $A \sim B$, 它们具有相同的势 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$. 对等是一种等价关系, 它对于无限集的研究非常重要. 易验证对等具有下列性质:

(i) (自反性) $A \sim A$;

(ii) (对称性) 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

(iii) (传递性) 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

若 $A \sim C \subset B$, 则称 $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$; 若 $A \sim C \subset B$ 但 A 不与 B 对等, 则称 $\text{card}(A) < \text{card}(B)$.

定理 0.2 (Schröder-Bernstein (施罗德-伯恩斯坦) 定理). 设 A, B 是两个非空集合. 若 $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$, $\text{card}(B) \leqslant \text{card}(A)$, 则 $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

由该定理可知, 对任何两个势 α 和 β, 三个关系

$$\alpha < \beta, \ \alpha = \beta, \ \alpha > \beta$$

中不可能有两者同时成立 (这里未断言必有一个成立). 事实上, 若 $\alpha = \beta$, 则其余两式已不可能成立; 若 $\alpha < \beta$ 与 $\alpha > \beta$ 同时成立, 则由 Schröder-Bernstein 定理的证明知 $\alpha = \beta$, 矛盾. 实际上, 上述关系有且仅有一个成立 (cf. [Fol13, 命题 0.7])

定理 0.3 (无最大势定理). 对任意 (非空) 集合 A, $\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A))$.

该定理表明, 不存在具有最大势的集.

记正整数集的势 $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. 若 $\text{card}(A) = \aleph_0$, 则称 A 是可列集 (或可数

集).[1] 把不是可列的无限集称为不可列集. 有限集和可列集可统称为至多可列集.

定理 0.4. 任意无限集必包含一个可列子集.

由该定理可得: 凡无限集必与它的一个真子集对等. 事实上, 设 A 为给定的无限集, 由定理 0.4存在可列子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 令 $B = A \setminus \{a_1\}$, 则 B 是 A 的真子集. 作如下对应:

$$\begin{aligned} &a \leftrightarrow a, && 对 a \in A \setminus \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \\ &a_k \leftrightarrow a_{k+1}, && 对 k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

易见此为 A 与 B 之间的一一对应, 因此 A 与它的一个真子集 B 对等.

定理 0.5. 可列个可列集的并集仍是可列集.

由上述定理的证明亦可得: 若 A_k $(k = 1, \cdots, n)$ 是可列集, 则 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 是可列集.

区间 $[0,1]$ 不是可列集: 记 $\text{card}([0,1]) = \aleph$, 有 $\aleph > \aleph_0$. 若 $A \sim [0,1]$, 则称 A 具有连续统的势.[2]

§ 0.1.3 有序集

本节我们讨论与有序集概念相关联的一系列概念.

定义 0.6. 对于给定的非空集 X, 若在它的元之间能引进关系 "$\leqslant$"(这里作为序的记号, 可读为 "小于或等于"), 满足序公理:

(i) 自反性: $a \leqslant a$;

(ii) 传递性: 若 $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, 则 $a \leqslant c$;

(iii) 反对称性: 若 $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, 则 $a = b$,

其中 $a, b, c \in X$, 则称 X 为赋予半序 "$\leqslant$" 的半序集(或偏序集, partially ordered set, 有时也称为 poset), 记作 $(X, \leqslant)$. 若对半序集 X 的任意两个元 a, b, 还满足条件:

(iv) 关系式 $a \leqslant b$ 与 $b \leqslant a$ 二者必居其一,

则称 X 为带有序 "$\leqslant$" 的全序集 (或线性序集). 半序集中的链 (chain)是指全序子集, 即链的任何两个元素均满足 (iv).

[1]需注意, 不同的书对可数和可列的定义并不相同.

[2]1874 年 Cantor 猜测在可列集势和实数势之间没有别的势 (即 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间没有其它势), 这就是著名的连续统假设. 记 $2^{\aleph_0}$ 为可列集的所有子集所构成的集合的势, 则有 $\aleph = 2^{\aleph_0}$, 是下一个势. 它又被称为 Hilbert 第一问题, 在 1900 年第二届国际数学家大会上, Hilbert 把 Cantor 的连续统假设列入 20 世纪有待解决的 23 个重要数学问题之首 (尚未得到完全解决).

"$a \leqslant b$" 也可写成 "$b \geqslant a$", 用记号 "$a < b$" 表示 "$a \leqslant b$ 但 $a \neq b$".

定义 0.7. 设 $(X, \leqslant)$ 为半序集, 若 $x \in X$ 是满足 $x \leqslant y$ (resp. $x \geqslant y$) 的唯一 $y \in X$ 是 x 自身, 则称 x 是 X 的一个极大 (resp. 极小) 元. 极大和极小元不一定存在, 也不一定唯一 (除非是全序的情形).

设 $E \subset X$. 若 $b \in X$ 满足: 对所有 $x \in E$ 均有 $x \leqslant b$, 则称 b 为 E 的一个上界. 若 b 为 E 的一个上界, 且对 E 的任一上界 b', 均有 $b \leqslant b'$, 则称 b 为 E 的上确界. 可类似定义 E 的下界和下确界. E 的上、下确界分别记为 $\sup E$ 和 $\inf E$. E 的上界不一定属于 E, E 的极大元不一定是 E 的一个上界 (除非 E 是全序集).

定义 0.8. 若 X 是带有序 "$\leqslant$" 的全序集, X 的每个非空子集含有一个极小元, 则称 X 关于序 "$\leqslant$" 是良序的, "$\leqslant$" 称为 X 上的一个良序.

接下来, 引入集论中的一个基本原理并推导一些结论.

定理 0.9 (Hausdorff (豪斯多夫) 极大原理, 1914)**.** 每个半序集都含有极大全序子集.

此原理的另一版本如下:

引理 0.10 (Zorn (佐恩) 引理, 1935)**.** 设 $(X, \leqslant)$ 为非空半序集, 若 X 的每个非空全序子集均有上界, 则 X 有极大元.

定理 0.11 (良序原理)**.** 任何非空集 X 都能被良序化.

定理 0.12 (Zermelo (策梅洛) 选择公理)**.** 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一族互不相交的非空集, 则存在一个集 $E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, 使得对每个 $\alpha \in A$, $E \cap X_\alpha$ 是单点集. 换言之, 存在一个集 E, 使得 E 是由每个 X_α 中选取一个元构成的.

实际上, 上述四个结论是等价的, 请自行证明或查阅相关书籍.

§ 0.2 度量空间

下面, 我们回顾关于度量 (或距离) 的概念(cf. [Zor16, 第 9-10 章]). 度量是 "距离" 这个概念的抽象化, 最早由法国数学家 Fréchet 引入.

定义 0.13. 设 X 为一非空集合, 若函数 $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ 满足

(i) 非退化性: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(iii) 三角不等式: $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y), \forall z \in X$,

则称 ρ 是 X 上的一个度量(或距离),[a] 而称 X 是以 ρ 为度量的度量空间, 记为 (X,ρ). 在不引起混淆的情况下, 将 (X,ρ) 简记为 X.

若 (X,ρ) 是度量空间, Y 是 X 的一个非空子集, 则 (Y,ρ) 也是一个度量空间, 称为 (X,ρ) 的子空间.

[a] 不难发现, $\rho(x,y) \geqslant 0$ 是其他几条公理的直接推论, 故亦可去掉, i.e., $0 = \rho(x,x) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,x) = 2\rho(x,z), \forall z \in X$. 有时, 也可将 (ii)-(iii) 改成一个条件: $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z), \forall z \in X$.

例 0.14. i) Euclid 距离

$$\rho(x,y) = |x-y| := \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个度量. 此外, 在 $\mathbb{R}^n$ 中还可以用下面方法定义其他的度量:

$$\rho_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

由此可知, 在一个集合中引入度量的方法不限于一种.

ii) 在 $[0,1]$ 上的连续函数所构成的空间 $\mathcal{C}([0,1])$ 上,

$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad \text{和 } \rho_\infty(f,g) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)|$$

均为度量.

iii) 若 ρ 是 X 上的度量, $A \subset X$, 则 $\rho|_{A\times A}$ 是 A 上的一个度量.

iv) 若 (X_1,ρ_1) 和 (X_2,ρ_2) 是度量空间, $X_1 \times X_2$ 上的乘积度量 ρ 为

$$\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max(\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)).$$

$X_1 \times X_2$ 上其他度量有, 如

$$\rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2), \quad [\rho_1(x_1,y_1)^2 + \rho_2(x_2,y_2)^2]^{1/2}.$$

设 (X,ρ) 为度量空间. 若 $x \in X$, $r > 0$, 以 x 为中心 r 为半径的(开) 球为

$$B(r,x) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}.$$

设 $E \subset X$, 若对任意的 $x \in E$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(r,x) \subset E$, 则称 E 为开集, 若 E^c 为开集, 则称 E 为闭集. 例如, 每个球 $B(r,x)$ 为开集, 因为若 $y \in B(r,x)$ 且 $\rho(x,y) = s$, 则 $B(r-s,y) \subset B(r,x)$.

- X 和 $\varnothing$ 既是开集也是闭集.
- 任意开集族的并为开集, 从而任意闭集族的交为闭集.
- 任意有限个开 (闭) 集的交 (并) 是开 (闭) 集. (事实上, 若 $U_1, \cdots, U_n$ 是

开集, 对 $x \in \bigcap_{1}^{n} U_j$, 对每个 j 存在 $r_j > 0$ 使得 $B(r_j, x) \subset U_j$, 那么 $B(r, x) \subset \bigcap_{1}^{n} U_j$, 其中 $r = \min(r_1, \cdots, r_n)$, 因此 $\bigcap_{1}^{n} U_j$ 是开集.)

注记 0.15. 后两条性质可以通过 De Morgan 法则 (i.e., 定理0.1) 推导. 需要指出的是, 无限多个开集的交未必是开集, 例如 $I_n = \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ 是开集, 但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1]$ 是闭集. 另外, 任意多个闭集的并不一定是闭集, 例如, $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right], n = 3, 4, \cdots$, 则 F_n 是闭集, 而 $\bigcup_{n=3}^{\infty} F_n = (0,1)$ 不是闭集.

设 $E \subset X$, 所有开集 $U \subset E$ 的并是包含在 E 内的最大开集, 称为 E 的内部, 记为 $\mathring{E}$.

设 $x \in X$, 若存在 E 中的互异点列 $\{x_k\}$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x_k, x) = 0,$$

则称 x 为 E 的聚点 (或极限点), E 的聚点全体记为 E', 称为 E 的导集. 注意, E 的聚点不一定属于 E. 称 $E \setminus E'$ 中的点为 E 的孤立点. E 的闭包是指集 $E \cup E'$, 记为 $\overline{E}$. E 的闭包一定是闭集. 若 $E' = E$, 则称 E 为完全集. 若 $E \subset E'$, 则称 E 是自密集, 换句话说, 当集合中的点均是该集的聚点时, 这个集即为自密集; 或者说没有孤立点的集就是自密集. 显然, 完全集是自密闭集.

若 $\overline{E} = F$, 则称 E 在 F 中稠密, 若 $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$, 则称 E 是稀疏集 (或无处稠密集). (应当注意, 在稠密性的定义中, 并不要求 $E \subset F$, E 与 F 甚至可以没有公共点. 比如, 有理数集在无理数集中稠密.) 若 X 有可数稠密子集, 则称 X 是可分的. 例如, $\mathbb{Q}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的可数稠密子集. 对 X 中序列 $\{x_n\}$ 及 $x \in X$, 若 $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$, 则称 x_n 收敛到 x, 记为 $x_n \to x$ 或 $\lim x_n = x$.

命题 0.16. 设 X 是度量空间, $E \subset X$, $x \in X$, 下列叙述是等价的:

(i) $x \in \overline{E}$.

(ii) 对所有 $r > 0$, $B(r, x) \cap E \neq \varnothing$.

(iii) 存在序列 $\{x_n\} \subset E$ 收敛到 x.

若 (X_1, ρ_1) 和 (X_2, ρ_2) 为度量空间, 称映射 $f : X_1 \to X_2$ 在 $x \in X_1$ 处连续, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\rho_1(x, y) < \delta$ 时 $\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, 换句话说, 使得 $f^{-1}(B(\varepsilon, f(x))) \supset B(\delta, x)$. 若 f 在每个点 $x \in X_1$ 处连续, 则称 f 连续, 除此之外, 若连续性定义中的 δ 能被选取得不依赖于 x, 则称 f 一致连续.

命题 0.17. $f : X_1 \to X_2$ 连续当且仅当对任意开集 $U \subset X_2$ 有 $f^{-1}(U)$ 是 X_1 中的开集.

度量空间 (X, ρ) 中序列 $\{x_n\}$ 称为Cauchy 列, 若当 $n, m \to \infty$ 时 $\rho(x_n, x_m) \to$

0. X 的子集 E 称为完备的, 若 E 中的每个 Cauchy 列收敛且其极限属于 E. 例如, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ 是完备的, 而 $(\mathbb{Q}^n, |\cdot|)$ 不是.

命题 0.18. 完备度量空间的闭子空间是完备的, 任意度量空间的完备子集是闭的.

在度量空间 (X, ρ) 中能够定义点到集合的距离和两个集合间的距离. 即, 若 $x \in X, E, F \subset X$,

$$d(x, E) = \inf\{\rho(x, y) : y \in E\},$$
$$d(E, F) = \inf\{\rho(x, y) : x \in E, y \in F\} = \inf\{\rho(x, F) : x \in E\}.$$

由命题 0.16, 观察到 $\rho(x, E) = 0$ 当且仅当 $x \in \overline{E}$. 定义 $E \subset X$ 的直径为

$$\operatorname{diam} E = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}.$$

若 $\operatorname{diam} E < \infty$, 则称 E 是有界的.

若 $E \subset X$ 和集簇 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 满足 $E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$, 称 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 E 的覆盖, 称 E 被 V_α 等覆盖. 若对每个 $\varepsilon > 0$, E 能被有限多个半径为 ε 的球覆盖, 则称 E 是全有界的. 每个全有界集是有界的, 因为若 $x, y \in \bigcup\limits_1^n B(\varepsilon, z_j)$, 比如 $x \in B(\varepsilon, z_1)$ 和 $y \in B(\varepsilon, z_2)$, 则

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z_1) + \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, y) \leqslant 2\varepsilon + \max\{\rho(z_j, z_k) : 1 \leqslant j, k \leqslant n\}.$$

(反过来一般是不对的, 但在 $\mathbb{R}^n$ 中是对的.) 若 E 是全有界的, 则 $\overline{E}$ 也是, 因为若 $E \subset \bigcup\limits_1^n B(\varepsilon, z_j)$, 则 $\overline{E} \subset \bigcup\limits_1^n B(2\varepsilon, z_j)$.

定理 0.19. 若 E 是度量空间 (X, ρ) 的子集, 下面叙述是等价的:

(i) E 是完备的和全有界的.

(ii) (Bolzano-Weierstrass (波尔查诺-魏尔斯特拉斯) 性质) E 中每个序列存在收敛于 E 中某个点的子列.

(iii) (Heine-Borel (海涅-博雷尔) 性质) 若 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 E 的开覆盖, 则存在有限集 $F \subset A$ 使得 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ 覆盖 E.

具有定理 0.19的性质 (i)-(iii) 的集合 E 被称为紧集. 根据命题 0.18, 每个紧集都是闭集且有界; 在一般情况下, 反之不成立, 但在 $\mathbb{R}^n$ 中成立.

命题 0.20. $\mathbb{R}^n$ 中每个有界闭集是紧集.

如果在集合 X 上有两个度量 ρ_1 和 ρ_2, 若存在常数 $C, C' > 0$, 满足 $C\rho_1 < \rho_2 < C'\rho_1$, 则称这两个度量等价. 容易验证, 等价的度量定义了相同的开集、闭集和紧集, 相同的收敛序列和 Cauchy 序列, 以及相同的连续和一致连续映射. 因此, 关于度量空间的大多数结果不依赖于选择的具体度量, 而只依赖于其等

价类.

§ 0.3 σ-代数

在测度论中经常遇到具有某些运算封闭性的集类, 下面主要介绍代数和 σ-代数两种集类. 以下设 X 是一给定的非空集.

定义 0.21. 设 $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. 若 $\varnothing \in \mathscr{A}$, 并且 $\mathscr{A}$ 对并运算和补运算封闭, 则称 $\mathscr{A}$ 为代数.

命题 0.22. 设 $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$. 则

(i) 若 $\varnothing \in \mathscr{A}$, 并且 $\mathscr{A}$ 对交运算和补运算封闭, 则 $\mathscr{A}$ 是代数.

(ii) 若 $\mathscr{A}$ 是代数, 则 $\mathscr{A}$ 对交运算和差运算封闭.

结合代数的定义和命题 0.22可知, 若 $\mathscr{A}$ 是代数, 则 $\mathscr{A}$ 对有限并、有限交、差运算和补运算封闭.

定义 0.23. 设 $\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(X)$. 若 $\varnothing \in \mathscr{F}$, 并且 $\mathscr{F}$ 对可列并和补运算封闭, 则称 $\mathscr{F}$ 为σ-代数.

例 0.24. X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 是一个 σ-代数, 这是 X 上最大的 σ-代数. 由 $\varnothing$ 和 X 两个集构成的集类 $\{\varnothing, X\}$ 也是一个 σ-代数. 另一方面, 若 $\mathscr{F}$ 是 X 上的 σ-代数, 则必有 $\{\varnothing, X\} \subset \mathscr{F}$ (这是由于 $\varnothing \in \mathscr{F}$ 并且 $\mathscr{F}$ 对补运算封闭, 故 $X = \varnothing^c \in \mathscr{F}$). 因此, $\{\varnothing, X\}$ 是 X 上的最小的 σ-代数.

命题 0.25. 设 $\mathscr{F}$ 是 σ-代数. 则

(i) $\mathscr{F}$ 是代数.

(ii) $\mathscr{F}$ 对并运算、交运算、差运算和可列交运算封闭.

结合 σ-代数的定义和命题 0.25可知, 若 $\mathscr{F}$ 是一个 σ-代数, 则 $\mathscr{F}$ 对有限并和可列并、有限交和可列交、补运算和差运算都封闭. 因此 σ-代数具有很好的运算封闭性.

设 $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ 非空, 则 $\mathscr{P}(X)$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数. 这表明至少存在一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数. 令 $\mathscr{F}$ 是所有包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数的交. 容易证明 $\mathscr{F}$ 满足以下两条性质:

(i) $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数;

(ii) 若 $\mathscr{F}'$ 是一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数, 则 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$.

换言之, $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-代数, 称为由集类 $\mathscr{C}$生成的 σ-代数, 记为 $\sigma(\mathscr{C})$.

定义 0.26. 由度量空间 X 中开集族生成的 σ-代数称为 X 上的 Borel σ-代数, 记作 $\mathscr{B}_X$. 它的成员被称为 Borel 集.

显然, $\mathscr{B}_X$ 包括开集、闭集、开集的至多可列交、闭集的至多可列并等等.

若记 S 为包含 X 中所有开集的任意 σ-代数, 则 $\mathscr{B}_X \subset S$, 即 $\mathscr{B}_X$ 是 S 中最小的 σ-代数. 因 σ-代数的任意交 (不必可列) 亦为 σ-代数, 故可以定义 $\mathscr{B}_X$ 为包含开集类的所有 σ-代数的交集. 这也说明了 Borel σ-代数的存在性和唯一性.

从开集和闭集这两种最简单的 Borel 集开始, 可以根据复杂性 (递增) 列出所有的 Borel 集. 比如, 接下来即开集的可列交或它们的补集, 即闭集的可列并.

定义 0.27. 可列个开集的交集称为G_δ 集; 可列个闭集的并集称为F_σ 集; 可列个 G_δ 集的并集称为$G_{\delta\sigma}$ 集; 可列个 F_σ 集的交集称为$F_{\sigma\delta}$ 集; 等等. (δ 和 σ 代表德语中的 Durchschnitt 和 Summe, 即交集和并集.)

例如, $\mathbb{R}^n$ 中全体有理点所构成的集合为 F_σ 集. 当然, F_σ 集不一定是闭集, G_δ 集也不一定是开集, 但它们都是 Borel 集.

§ 0.4 $\mathbb{R}^n$ 中开集的构造

$\mathbb{R}^n$ 中的 (闭) 长方体 R 由 n 个 1 维有界闭区间的乘积给出:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n],$$

其中 $a_j \leqslant b_j$ 为实数, $j = 1, \cdots, n$. 即

$$R = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, \forall j = 1, \cdots, n\}.$$

注意: 在此定义中, 长方体是有界闭集, 且各边平行于坐标轴. 在 $\mathbb{R}$ 中, 长方体就是有界闭区间或点, $\mathbb{R}^2$ 中就是有界长方形, $\mathbb{R}^3$ 中即为有界闭长方体, 当然均包含低维的长方体.

R 的边长为 $b_1 - a_1, \cdots, b_n - a_n$. R 的体积, 记为 $|R|$, 定义为 $|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. 当然, $n = 1$ 时即为长度, $n = 2$ 时就是面积.

开长方体是开区间的乘积, 长方体 R 的内部则为

$$(a_1, b_1) \times \cdots (a_n, b_n).$$

方体是边长相等的长方体. 因此, 若 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 是边长为 ℓ 的方体, 则其体积 $|Q| = \ell^n$.

长方体的并称为几乎互不相交的当且仅当其内部互不相交.

本章中, 长方体和方体覆盖起着重要的角色, 这里先给出两个重要的引理.

引理 0.28. 若一个长方体是有限多个其它长方体的几乎互不相交并, 即 $R=\bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$, 则

$$|R|=\sum_{k=1}^{N}|R_k|.$$

稍微做一下更改, 则有

引理 0.29. 若 $R, R_1, \cdots, R_N$ 均为长方体, 且 $R\subset\bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k$, 则

$$|R|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|R_k|.$$

主要想法仍是延长各长方体的边, 但此时相应于 J_k 的集合不一定是互不相交的, 证明从略.

现在, 我们用方体来描述开集的结构, 先从 1 维开始.

定理 0.30 ($\mathbb{R}$ 中开集构造定理). $\mathbb{R}$ 中的每个开子集 $\mathcal{O}$ 能被唯一地表示成至多可列个互不相交开区间的并集. (注: 这里的开区间可以是 $(-\infty, a)$, (b,∞), $(-\infty,\infty)$ 这样的区间.)

自然地, 若 $\mathcal{O}$ 是开集且 $\mathcal{O}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, 其中 I_j 是互不相交的开区间, 则 $\mathcal{O}$ 的测度应该为 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|I_j|$. 因这种表示是唯一的, 故我们能够将它作为开集测度的定义. 我们将注意到只要 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 是开集且互不相交, 那么它们的并的测度就是它们的测度之和. 虽然这为开集提供了一个自然的测度概念, 但还不清楚如何推广到 $\mathbb{R}$ 中的其他集合. 类似的方法在高纬情形, 甚至定义开集的测度也遇到了困难, 这是由于类似定理 0.30的结果不成立(cf. [SS05, Ex.1.12]). 然而, 有一个可以替代的结果.

定理 0.31 ($\mathbb{R}^n$ 中开集构造定理). 设 $n\geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ 中的每个开子集 $\mathcal{O}$ 可以表示成至多可列个几乎互不相交的闭方体的并集.

若 $\mathcal{O}=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} R_j$, 其中 R_j 为几乎互不相交的长方体, 则规定 $\mathcal{O}$ 的测度为 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|R_j|$ 是合理的. 这也是自然的, 因为每个长方体的边界的体积应为 0, 长方体的重叠部分不影响 $\mathcal{O}$ 的体积. 然而, 上面分成长方体的分解不是唯一的, 并不

知道这个和是否依赖于这个分解. 因此, 在 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 中体积或面积的概念, 即使是对开集而言, 也更加地微妙.

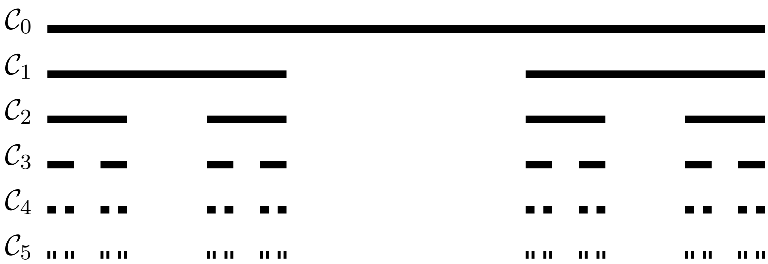
§ 0.5 Cantor (三分) 集

Cantor 集在集合论以及一般的分析学中扮演着重要的角色. 它和它的变体为许多启发性的例子提供了丰富的源泉. 早在 [Zor15, 第 2 章] 就学过, 我们在此再回顾一下.

从单位闭区间 $\mathcal{C}_0 = [0,1]$ 开始, 令 $\mathcal{C}_1$ 为从 $\mathcal{C}_0$ 去掉中间 $\frac{1}{3}$ 的开区间后余下的部分, 即 $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. 然后对 $\mathcal{C}_1$ 的每个子区间重复这个过程, 得到

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

之后再对 $\mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_k$ 重复以上过程.



这个过程产生了一个单调递减紧集列 $\{\mathcal{C}_k\}_{k=0}^{\infty}$, 其中 $\mathcal{C}_k$ 是 2^k 个长度为 3^{-k} 的闭区间的并. 下限集

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$$

称为Cantor 集. 尽管 Cantor 集的构造很简单, 但它具有许多拓扑和解析性质, 可以归结为: Cantor 集是一个总长度为零且势为 $\aleph$ 的完全不连通的有界稀疏完全集. 类似地, 如果保证每次移除区间所用的比例都是一样的, 那总能得到移除的区间长度总和为 1(“具恒定分割的 Cantor 集”[SS05, Ex. 1.3(a)]).

Cantor 三分集是由德国数学家 Cantor 于 1883 年构造的, 并没有现实原型, 是理性思维的产物, 很难用传统的几何学术语言进行描述, 它是一个新的几何对象.

第一章

测度论

本章主要讲 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度的构造, 以及相应的可测函数类的研究. 测度论是实分析的基础.

§ 1.1 外测度

§ 1.1.1 外测度的定义

我们先从外测度的定义和基本性质讲起. 大致地说, 外测度 m_* 是赋予 $\mathbb{R}^n$ 中任何子集的第一个尺寸概念；很多例子表明这个概念与我们早期的直观想法是一致的. 然而, 我们也将会看到, 外测度缺少一些想要的性质, 比如当取互不相交集的并集时的可加性, 为了改进这个问题, 就需要在下一节中引进可测集的概念.

顾名思义, 外测度就是试图用集合 E 的外部逼近来描述它的体积. 假设 E 被方体覆盖, 若此覆盖越精细、越少的方体重叠, 则 E 的体积就越接近于这些方体的体积之和. 由此直观的描述, 我们可以引进下列定义.

定义 1.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, E 的外测度定义为

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|, \tag{1.1}$$

这里的下确界对所有由闭方体构成的可数覆盖 $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset E$ 取值. 一般地, $m_* \in [0,\infty]$.

注记 1.2. (i) 若 $m_*(E)$ 中换成有限和, 则是不够的. 若只考虑 E 的有限覆盖, 则得到的量一般比 $m_*(E)$ 大. (1 维的例子(cf. [SS05, Ex.1.14]))

(ii) 若将方体覆盖换成长方体覆盖, 则二者是相同的(cf. [SS05, Ex.1.15]). 若换成球覆盖, 二者的等价性就没那么显然了(cf. [SS05, Ex.3.26]).

下面来看几个例子.

例 1.3. 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则 $m_*(\{x_0\}) = 0$. 这是因为 $\{x_0\} \subset \{x_0\}$. 另外, $m_*(\varnothing) = 0$.

例 1.4. 设 $Q \subset \mathbb{R}^n$ 为闭方体, 则 $m_*(Q) = |Q|$.

例 1.5. 若 Q 为开方体, 则 $m_*(Q) = |Q|$ 仍成立.

例 1.6. 若 R 为长方体, 则 $m_*(R) = |R|$.

例 1.7. $m_*(\mathbb{R}^n) = \infty$.

例 1.8. 设 $\mathcal{C}$ 为 Cantor 集, 则 $m_*(\mathcal{C}) = 0$.

§ 1.1.2 外测度的性质

前面几个例子对外测度的定义提供了一些直观认识. 由 m_* 及下确界的定义即知:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{闭方体覆盖} \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset E,\ \text{ s.t. } \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leqslant m_*(E) + \varepsilon.$$

下面, 我们证明外测度的 5 个性质, 作为一系列的观察给出.

观察 1.1 (单调性). $E_1 \subset E_2 \implies m_*(E_1) \leqslant m_*(E_2)$.

特别地, 单调性意味着 $\mathbb{R}^n$ 的每个有界子集均有有限外测度.

观察 1.2 (可列次可加性). $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \implies m_*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.

观察 1.3. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $m_*(E) = \inf_{\text{开}\mathcal{O}\supset E} m_*(\mathcal{O})$, 其中下确界关于所有包含 E 的开集 $\mathcal{O}$ 取值.

观察 1.4. 若 $E = E_1 \cup E_2$, 且 $d(E_1, E_2) > 0$, 则

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

观察 1.5. 若 E 是几乎互不相交方体的可列并, $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$, 则

$$m_*(E)=\sum_{j=1}^{\infty}|Q_j|.$$

观察 1.5说明, 若一集合能被分成可列个几乎互不相交的方体, 则它的外测度等于方体体积之和. 特别地, 由定理 0.31可得开集的外测度等于其分解中的方体体积之和, 这与最初的猜测一致. 更进一步, 这也证明了这个和不依赖于分解.

从这也可看出, 用基本计算算出的简单集合的体积与它们的外测度是一致的. 一旦我们发展了积分理论所需要的工具, 这个论断就能很容易地证明. 特别地, 我们可以验证开球或闭球的外测度等于它的体积.

尽管从观察 1.4和观察 1.5中还不能得出: 对 $\mathbb{R}^n$ 中互不相交子集的并 $E_1\cup E_2$ 成立

$$m_*(E_1\cup E_2)=m_*(E_1)+m_*(E_2). \tag{1.2}$$

但事实上, 当 E_1, E_2 不是高度不规则或病态的集合, 且在下节所给出的意义下可测时, (1.2)是成立的.

§ 1.2　可测集与 Lebesgue 测度

§ 1.2.1　测度的定义及其性质

可测性的概念将 $\mathbb{R}^n$ 中的一些子集分离出来, 它们的外测度满足所有想要的性质, 包括对集合的互不相交并的 (可列) 可加性. 有很多种方式来定义可测性, 但它们都是等价的, 可能最简单及最直观的定义如下:

定义 1.9. 称 $E\subset\mathbb{R}^n$可测, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 开集 $\mathcal{O}\supset E$, s.t.

$$m_*(\mathcal{O}\setminus E)\leqslant\varepsilon.$$

若 E 可测, 则定义 E 的Lebesgue 测度(简称测度) 为

$$m(E)=m_*(E).$$

显然, 测度继承了外测度具有的所有性质：观察 1.1–观察 1.5. 由定义, 可发现如下性质.

性质 1.1. $\mathbb{R}^n$ 中的任意开集是可测的.

现在, 我们汇集可测集的一些更深入的性质. 特别地, 我们将证明可测集关于集合论中的多种运算, 如可列并、可列交、补集等封闭.

性质 1.2. 若 $m_*(E)=0$, 则 E 可测. 特别地, 零外测度集的任何子集可测.

作为这个性质的推论, 由例 1.8知 Cantor 集 $\mathcal{C}$ 可测.

性质 1.3. 可列个可测集的并集可测.

性质 1.4. 闭集可测.

下面来证明所用到的论断.

引理 1.10. 若闭集 F 和紧集 K 互不相交, 则 $d(F,K)>0$.

性质 1.5. 可测集的补集可测.

性质 1.6. 可列个可测集的交集可测.

我们发现可测集族在集合论的熟知运算下是封闭的, 不仅关于有限并与交封闭, 而且关于可列并与交运算封闭. 这种由有限运算过渡到无限运算的过程在分析中是至关重要的. 然而, 再强调一下, 在处理可测集时不可数并和交运算是不允许的!

定理 1.11 (可列可加性). 设 $E_1,E_2,\cdots$ 为互不相交的可测集, $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, 则

$$m(E)=\sum_{j=1}^{\infty}m(E_j).$$

至此, 可测集的 Lebesgue 测度的可列可加性就建立了. 接下来, 我们来考虑测度的连续性.

推论 1.12 (测度的连续性). 设 $E_1,E_2,\cdots$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集.

(i) (下连续性) 若 $E_k\nearrow E$, 则 $m(E)=\lim\limits_{N\to\infty}m(E_N)$.

(ii) (上连续性) 若 $E_k\searrow E$ 且对某个 k, $m(E_k)<\infty$, 则 $m(E)=\lim\limits_{N\to\infty}m(E_N)$.

注记 1.13. 若没有对某个 k, $m(E_k)<\infty$ 的假设, (ii) 的结论未必成立. 例如, $\forall n$, 令 $E_n=(n,\infty)\subset\mathbb{R}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E_n)=\infty$, 但

$$m(\lim_{n\to\infty}E_n)=m(\varnothing)=0.$$

下面的定理说明可测集可以用包含它的开集或它包含的闭集来逼近.

定理 1.14 (可测集逼近定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则 $\forall \varepsilon > 0$,

(i) $\exists$ 开集 $\mathcal{O} \supset E$, s.t. $m(\mathcal{O} \setminus E) \leqslant \varepsilon$.

(ii) $\exists$ 闭集 $F \subset E$, s.t. $m(E \setminus F) \leqslant \varepsilon$.

(iii) 若 $m(E) < \infty$, 则 $\exists$ 紧集 $K \subset E$, s.t. $m(E \setminus K) \leqslant \varepsilon$.

(iv) 若 $m(E) < \infty$, 则 $\exists$ 有限个闭方体之并 $F = \bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, s.t.
$$m(E \Delta F) \leqslant \varepsilon.$$

下面的命题是定理 1.14的一个推论, Lebesgue 可测集用它所包含的紧集逼近的性质, 被称为内正则性.

命题 1.15 (Lebesgue 可测集的内正则性). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则
$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subset E, \ K\text{为紧集}\}.$$

下面的推论说明了可测集可用 G_δ 集或 F_σ 集逼近.

推论 1.16. $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测

(i) 当且仅当 $\exists G_\delta$ 集 $\mathcal{O} \supset E$, s.t. $m(\mathcal{O} \setminus E) = 0$.

(ii) 当且仅当 $\exists F_\sigma$ 集 $F \subset E$, s.t. $m(E \setminus F) = 0$.

由于开集可测, 故 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ 包含于由可测集形成的 σ-代数. 自然地, 我们会问 “这个包含是不是严格的?”, 即是否存在不是 Borel 集的可测集? 答案是 “存在”. (cf. [SS05, Ex.1.35])

由推论 1.16得, Lebesgue 可测集可以作为 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ 的完备化, 即附加上测度为零的 Borel 集的子集.

另外, Lebesgue 测度具有唯一性, 证明留到第4章, 即

命题 1.17 (Lebesgue 测度的唯一性). Lebesgue 测度 m 是在 Borel σ-代数 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ 上满足 $m(Q) = |Q|$ 的唯一测度, 其中 Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中闭方体.

§ 1.2.2 Lebesgue 测度的不变性质

$\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度的一个关键性质是平移不变性.

命题 1.18 (测度的平移不变性). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, 则对任何 $h \in \mathbb{R}^n$, $E_h := E + h = \{x + h : x \in E\}$ 可测, 且 $m(E_h) = m(E)$.

同样可以证明 Lebesgue 测度的伸缩不变性. 设 $\delta > 0$, 记

$$\delta E = \{\delta x : x \in E\},$$

则有

命题 1.19 (测度的伸缩不变性). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则对任何 $\delta > 0$, δE 可测, 且 $m(\delta E) = \delta^n m(E)$.

另外, Lebesgue 测度也是反射不变的, 即若 E 可测, 则 $-E = \{-x : x \in E\}$ 可测且 $m(-E) = m(E)$. 测度的其它不变性质可参见 [SS05, Ex.1.7, 1.8, Chp.2, Pb. 4].

§ 1.2.3 Vitali 不可测集的构造

$\mathbb{R}^n$ 中的子集并非都是可测集, 这一点 Lebesgue 早就预见到了, 只不过第一个不可测集的例子是由意大利数学家 Vitali 于 1905 年做出的, 其中要用到 Zermelo 选择公理与 Lebesgue 测度的平移不变性. 当然, 在一般的数学实践中, 遇到不可测集的机会是极少的, 它通常只是被用来构造各种特例, 以廓清某些课题的适应范围, 而使我们对这种测度理论的认知更加深刻.

本节以 1 维为例, 构造不可测集.

例 1.20 (不可测集的例). 设 $x, y \in [0,1]$. 若 $x - y$ 是有理数, 则称 x 与 y 等价, 记为 $x \sim y$. 对任意 $x \in [0,1]$, 令

$$E_x = \{y \in [0,1] : y \sim x\}.$$

E_x 是 $[0,1]$ 的一个子集, 称之为由 x 确定的等价类. 容易验证:

(i) 若 $x_1 \sim x_2$, 则 $E_{x_1} = E_{x_2}$;

(ii) 若 $x_1 \nsim x_2$, 则 $E_{x_1} \cap E_{x_2} = \varnothing$.

因此区间 $[0,1]$ 被分割为一些互不相交的等价类. 根据 Zermelo 选择公理, 存在 $[0,1]$ 的一个子集 $\mathcal{N}$, 使得 $\mathcal{N}$ 是由每个等价类中只选取一个元构成的.

定理 1.21. 集合 $\mathcal{N}$ 是不可测的.

§ 1.3 可测函数

有了可测集之后, 我们来看积分理论的核心, 即可测函数.

首先, 定义集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的特征函数:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

接下来, 转到积分理论的基石. Riemann 积分是依托如下的阶梯函数:

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}, \tag{1.3}$$

其中每个 R_k 为长方体, a_k 为常数.

然而, 对 Lebesgue 积分而言, 需要更广泛的函数: 简单函数, 定义为下列有限和

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}, \tag{1.4}$$

其中每个 E_k 为有限可测集, a_k 为常数.

§ 1.3.1 可测函数的定义和基本性质

先只考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 f, 并且函数值允许取 $\pm\infty$, 也就是说 $f(x) \in \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, 此时称为广义实值函数, 以后若无特别声明, "函数" 一词均指广义实值函数. 若对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $-\infty < f(x) < \infty$, 则称 f 为有限实值函数. 我们会发现, 在以下的理论及许多应用中, 一个函数至多在一个零测集上取无穷值.

定义 1.22. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为可测集, f 是定义在 E 上的函数, 若 $\forall a \in \mathbb{R}$, 集合

$$f^{-1}([-\infty, a)) := \{x \in E : f(x) < a\}$$

是可测集, 则称 f 为 E 上的Lebesgue 可测函数, 简称为可测函数, 或称 f 在 E 上可测.[a]

[a]若 E 是 Borel 集, $\{x \in E : f(x) < a\}$ 也是 Borel 集, 则称 f 是 E 上的 Borel 可测函数, 简称 Borel 函数. 这类函数构成了 Lebesgue 可测函数类的子类, 它包含所有阶梯函数, 连续函数和分段连续函数.

以后在不引起混淆的情况下, 经常把上述集合简记为 $\{f < a\}$. 此外, $\{f \leqslant a\}, \{f = a\}, \{f \geqslant a\}, \{f > a\}$ 等的意义可类似地理解.

注记 1.23. 由定义可得

(i) f 可测 $\Longleftrightarrow \{f \leqslant a\}$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(ii) f 可测 $\Longleftrightarrow \{f \geqslant a\}$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(iii) f 可测 $\Longleftrightarrow \{f > a\}$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$.

(iv) f 可测 $\Longleftrightarrow -f$ 可测.

(v) 若 f 是有限值的, 则 f 可测 $\Longleftrightarrow \{a<f<b\}$ 可测, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. (其中的任一 "$<$" 换成 "$\leqslant$" 仍成立.)

进而, 可以得到如下性质.

性质 1.7. 有限实值函数 f 可测

(i) 当且仅当对任意开集 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ 可测;

(ii) 当且仅当对任意闭集 $F\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ 可测.

这个性质也可以应用到广义实值函数, 只需加上额外的假设: $f^{-1}(-\infty)$ 和 $f^{-1}(+\infty)$ 均为可测集.

性质 1.8. (i) 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 则 f 可测.

(ii) 若 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有限实值可测函数, Φ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 则 $\Phi\circ f$ 可测.

注记 1.24. (i) 由此可知, 连续函数一定可测. 但是, 反过来, 可测函数不一定是连续函数. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cup[2,4]\cup[6,7],\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

易验证 $f(x)$ 是可测函数, 但 $f(x)$ 在上面区间的端点处不连续.

(ii) 在性质 1.8 (ii) 中取特殊的连续函数 Φ, 就可得到包含 f 的表达式的可测性. 例如, $\Phi(t)=t^{-1}$ $(t\neq 0)$ 连续, $f\neq 0$ 可测, 则 $\frac{1}{f}$ 可测.

(iii) 在性质 1.8 (ii) 的条件下, 一般不能得到 $f\circ\Phi$ 的可测性. (cf. [SS05, Ex.1.35])

性质 1.9. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一可测函数列, 则

$$\sup_n f_n(x),\ \inf_n f_n(x),\ \limsup_n f_n(x),\ \liminf_n f_n(x)$$

均可测. (注: 上述指标集不能改成不可数集.)

若 f_n 的极限 f 存在, 则 $f=\limsup\limits_{n\to\infty} f_n=\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$. 由此可得:

性质 1.10. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一可测函数列, 且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$

则 f 可测.

性质 1.11. 设 f,g 在 E 上可测, 则

(i) 对任意正整数 k, f^k 可测;

(ii) 若 f,g 均为有限实值函数, 则 $f+g$ 和 fg 可测.

注记 1.25. (i) 性质 1.11 (ii) 中不能取广义值 $\pm\infty$, 因为 $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$ 等是没有意义的.

(ii) 性质 1.8 – 性质 1.11说明可测函数关于确界运算、极限运算和代数运算封闭.

定义 1.26. 称定义在 E 上的两个函数 f,g几乎处处相等, 是指 $m(\{x\in E : f(x)\neq g(x)\})=0$, 记为

$$f(x)=g(x),\quad \text{a.e. } x\in E,$$

或简记为 $f=g$ a.e.

一般地, 称一个性质或论断几乎处处成立是指除去一个零测集外, 它是成立的.

性质 1.12. 设 f 可测, 且 $f=g$ a.e., 则 g 可测.

这也说明, 在零测集上改变函数的取值不影响该函数的可测性.

若 f,g a.e. 定义在 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上, 不妨设分别定义在 $E\setminus S_1$ 及 $E\setminus S_2$ 上, 这里 $m(S_1)=m(S_2)=0$, 则 $f+g$ 定义在 $(E\setminus S_1)\cap(E\setminus S_2)=E\setminus(S_1\cup S_2)$ 上. 而 $m_*(S_1\cup S_2)\leqslant m_*(S_1)+m_*(S_2)=0$, 故 $S_1\cup S_2$ 为零测集. 从而, $f+g$ a.e. 定义在 E 上. 因此, 性质 1.11 (ii) 当 f 和 g 为 a.e. 有限值时仍成立. 进一步, 上面所有的性质中的条件均可减弱为 a.e. 成立即可. 我们给出几乎处处收敛的定义.

定义 1.27. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 及 f 是定义在 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数. 若存在 E 中的点集 Z, 满足 $m(Z)=0$ 及对 $x\in E\setminus Z$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 并记为

$$f_k(x)\to f(x),\quad \text{a.e. } x\in E.$$

§ 1.3.2 用简单函数或阶梯函数逼近

我们对可测函数的结构给出进一步的刻画.

定理 1.28 (非负简单函数逼近定理). 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 则存在单调递增且收敛于 f 的非负简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, 即 $\forall x$,

$$\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x), \quad \text{且} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

定理 1.29 (简单函数逼近定理). 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)|$, 且有

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

注记 1.30. (i) 定理 1.28中若极限允许取 $+\infty$, 则结论对取 $[0,\infty]$ 的函数也成立, 定理 1.29中亦可作相应的修改.

(ii) 定理 1.28 – 定理 1.29中的 $\mathbb{R}^n$ 可以换成可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$.

下面我们用阶梯函数来逼近.

定理 1.31 (阶梯函数逼近定理). 设 $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ 可测, 则存在阶梯函数列 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 几乎处处收敛于 f.

§ 1.3.3 Littlewood 三原则和几种收敛性之间的关系

虽然可测集和可测函数代表着新工具, 但我们不能忽视了它们与旧概念的联系. Littlewood 在他 1944 年的《函数论讲义》(Lectures on the Theory of Functions, ß4.1, p.26) 中对这些关键概念之间的关系做了概括性的总结，称为 Littlewood 三原则, 在该理论的早期研究中提供了有用的直观上的引导, 即

(i) 可测集 “差不多” 是区间的有限并; (定理 1.14 (iv))

(ii) 可测函数 “差不多” 是连续函数; (Lusin 定理)

(iii) 可测函数列的点态收敛 “差不多” 是一致收敛. (Egorov 定理)

需要把握的是 “差不多” 这个词, 在每个上下文中应被适当理解. 先回顾一下收敛的一些概念.

设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 E 上的函数列, 有许多不同的方式使 $\{f_n\}$ 可能收敛到一个极限函数 f. 例如:

(i) f_n 逐点收敛于 f, 即 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in E$.

(ii) f_n 几乎处处收敛于 f, 即 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \forall$ a.e. $x \in E$.

(iii) f_n 一致收敛于 f, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in E} |f(x) - f_n(x)|\right) = 0$, 记作 $f_n \xrightarrow{\text{u.}} f$.

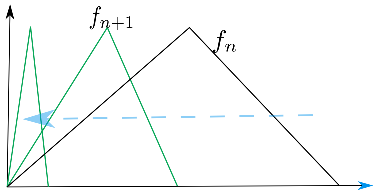
三者之间的关系如下:

$$\text{一致收敛} \Longrightarrow \text{逐点收敛} \Longrightarrow \text{几乎处处收敛}.$$

下面的例子说明, 一般情况下, 逐点收敛并不一定一致收敛.

例 1.32 (收缩三角形). 设 $E=[0,1]$, 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 令 f_n 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 定义为

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \text{线性}, & 0<x<\frac{1}{2n},\\ 1, & x=\frac{1}{2n},\\ \text{线性}, & \frac{1}{2n}<x<\frac{1}{n},\\ 0, & \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$



则对每个固定的 $x\in[0,1]$, 当 $n\to\infty$ 时有 $f_n(x)\to 0$. 因此, f_n 逐点收敛到 0. 然而, f_n 并不一致收敛于零函数, 因为 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=1.$$

虽然这个例子中的 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛, 但我们可以找到 $[0,1]$ 的子集, 使其在子集上一致收敛. 例如, 若 $0<\delta<1$, 则对所有足够大的 n, f_n 限制在 $[\delta,1]$ 上为零函数. 这样无论 δ 取多小, 我们总可以得到在 $[\delta,1]$ 上一致收敛.

我们将证明的 Egorov 定理, 说明这个例子是典型的: 若可测函数列在有限可测集上几乎处处收敛, 则存在一个大的子集, 使它们在上面一致收敛. 这也是原理 (iii) 的一个确切的表述.

定理 1.33 (Egorov 定理). 设 $f,f_1,\cdots,f_k,\cdots$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数, 且 $m(E)<\infty$. 若 $f_k(x)\to f(x)$, a.e. $x\in E$, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $A_\varepsilon\subset E$, 使得 $m(E\setminus A_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$, 且 f_k 在 A_ε 上一致收敛于 f.

Egorov 定理实际上是 Severini 在 1910 年首先用意大利语证明的, 1911 年 Egorov 用法语发表了他独立证明的结果, 并广泛传播, 从而以他的名字命名, 故也称作 Severini-Egorov 定理.

注记 1.34. (i) Egorov 定理中的条件 $m(E)<\infty$ 不能去掉.

(ii) Egorov 定理的结论不一定能加强到 "存在可测集 F, s.t. $m(E\setminus F)=0$, f_n 在 F 上一致收敛于 f".

(iii) 粗略地说, Egorov 定理把可测函数列收敛的非一致性大部分一致化, 有时 Egorov 定理的结论 (将 "闭集" 换成 "可测集") 也被称为近一致收敛(或几乎一致收敛).

定义 1.35. 设 $\{f_k\}, f$ 在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上可测, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 可测集 $A \subset E$, s.t. $m(A) \leqslant \varepsilon$ 且 f_k 在 $E \setminus A$ 上一致收敛于 f, 则称 $\{f_k\}$ 在 E 上近一致收敛于 f, 记为 $f_k \xrightarrow{\text{a.u.}} f$.

不难证明, Egorov 定理的逆成立.

命题 1.36 (Egorov 逆定理). 设可测集 E 上可测函数列 $\{f_n\}$ 近一致收敛于 $f(x)$, 则 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f.

接下来, 我们来看另一种重要的收敛性(cf. [周 16, p.115-118]).

定义 1.37. 设 $f(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数. 若 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

则称 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 记为 $f_k \xrightarrow{m} f$.

在函数几乎处处相等的意义下, 依测度收敛的极限函数是唯一的.

命题 1.38. 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上同时依测度收敛于 $f(x)$ 与 $g(x)$, 则 $f = g$ a.e.

从几乎处处收敛与依测度收敛的定义可以看出, 前者强调的是在某点处函数值的收敛 (尽管除一个零测集外), 后者并非指在哪个点处的收敛, 其要点在于点集

$$\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

的测度应随 k 趋于无穷而趋于 0, 而不论此点集的位置状态如何. 这是两者的区别, 下面我们来看它们之间的联系.

命题 1.39 (Lebesgue 定理). 设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列, 且 $m(E) < \infty$. 若 $\{f_k(x)\}$ 几乎处处收敛于几乎处处有限的函数 $f(x)$, 则在 E 上, $f_k \xrightarrow{m} f$.

命题 1.40. 设 $f(x), f_1(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数. 在 E 上, 若 $f_k \xrightarrow{\text{a.u.}} f$, 则 $f_k \xrightarrow{m} f$.

类似于点态收敛列与 Cauchy(或基本) 列的关系, 对于依测度收敛列也有类似的概念与结论.

定义 1.41. 设 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列. 若 $\forall \varepsilon > 0$,

有

$$\lim_{k,j\to\infty} m(\{x\in E: |f_k(x)-f_j(x)|\geqslant\varepsilon\})=0,$$

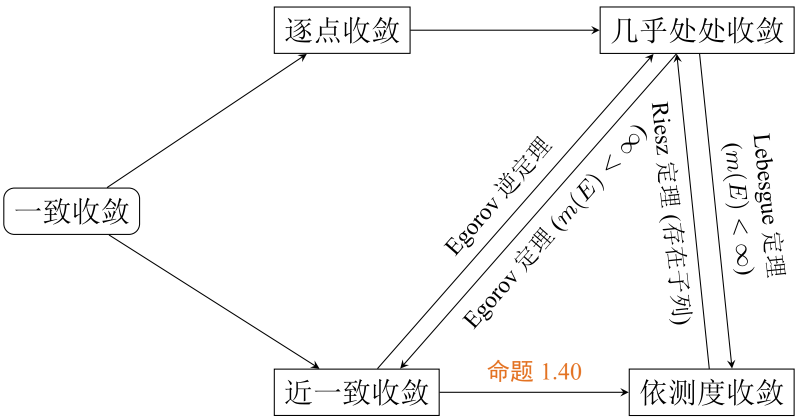
则称 $\{f_k(x)\}$ 为 E 上的依测度 Cauchy 列.

命题 1.42. 若 $\{f_k(x)\}$ 是可测集 E 上的依测度 Cauchy 列, 则在 E 上存在几乎处处有限的可测函数 $f(x)$, 使得在 E 上, $f_k \xrightarrow{m} f$.

注意, 若在 E 上 $f_k \xrightarrow{m} f$, 则 $\{f_k(x)\}$ 必是 E 上依测度 Cauchy 列. 此外, 从上述定理的证明中已经可以看到, 在依测度 Cauchy 列中一定可抽出一个子列是几乎处处收敛的, 从而有下述定理:

命题 1.43 (Riesz 定理). 在可测集 E 上, 若 $f_k \xrightarrow{m} f$, 则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$, 使得 $f_{k_i} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$.

对几乎处处有限的广义实值函数, 几种收敛之间的关系总结如下图:



最后, 我们给出原则 (iii) 的相关论断.

定理 1.44 (Lusin 定理, 1912). 设 f 为可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的 a.e. 有限的可测函数. 则对任给的 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F_\varepsilon\subset E$, 使得 $m(E\setminus F_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$ 且 $f|_{F_\varepsilon}$ 连续 (也称 f 在 E 上拟连续).

注记 1.45. (i) 此定理中 f 在闭集 F_ε 上连续, 是指 f 关于 F_ε 连续, 并不是 “f 关于 E 的连续点集是 F_ε”. 粗略地说, Lusin 定理是把可测函数的不连续性局部连续化了. 例如,

(ii) Lusin 定理中取 $\varepsilon=0$ 时不一定成立, 这说明 Lusin 定理不能再改进.

Lusin 定理的逆命题也成立, 即

命题 1.46 (Lusin 逆定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, f 在 E 上 a.e. 有限. 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F_\varepsilon \subset E$, 使得 $m(E \setminus F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ 且 f 是 F_ε 上的连续函数, 则 f 在 E 上可测.

由于 Lusin 定理及其逆定理给出了可测函数的刻画, 因此, Lusin 定理可以作为可测函数的定义, 它说明可测函数就是具有拟连续性的函数.

第二章 积分论

§2.1 Lebesgue 积分: 基本性质和收敛定理

本节我们从简单函数的 Lebesgue 积分开始, 逐步深入到一般可测函数的积分. 在每一阶段, 我们将看到, 积分满足的基本性质, 如线性和单调性. 我们将证明合适的收敛定理来说明积分和极限的换序条件. 最后, 将会得到积分的一般理论, 它们在更深入问题的研究中起着决定性作用.

我们分四个阶段:

1. 简单函数,
2. 支撑在有限可测集上的有界函数,
3. 非负函数,
4. 一般实值及复值可测函数.

从现在开始, 所有函数均假定为可测的. 开始时我们仅考虑有限实值函数, 之后也会考察广义实值函数及复值函数.

§ 2.1.1 阶段一: 简单函数

回顾简单函数的定义:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}(x), \tag{2.1}$$

其中 E_k 是有限可测集, a_k 为常数. 这个表达式并不唯一, 为了方便, 我们采用(2.1)的规范表示, 即 $\{a_k\}$ 是互异且非零, 而 $\{E_k\}$ 互不相交, 则其规范表示是唯一的.

寻找 φ 的规范表示可用直接的方式: 因 φ 仅取有限多个互异的非零值, 如: $c_1,\cdots,c_M$, 令 $F_k=\{x:\varphi(x)=c_k\}$, 则 F_k 互不相交. 从而 $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{M}c_k\chi_{F_k}$ 即为 φ 的规范表示.

定义 2.1. 设 φ 是简单函数, 具有规范表示 $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{M}c_k\chi_{F_k}(x)$, 则定义 φ 的Lebesgue 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^{M}c_k m(F_k).$$

若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为有限可测集, 则 $\varphi(x)\chi_E(x)$ 也是简单函数, 定义

$$\int_E\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\chi_E(x)dx.$$

为了强调积分定义中的 Lebesgue 测度 m, 有时 φ 的 Lebesgue 积分也写作

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dm(x).$$

实际上, 为了方便, $\mathbb{R}^n$ 上 φ 的积分经常写为 $\int\varphi(x)dx$ 或 $\int\varphi$.

命题 2.2. 简单函数的积分满足以下性质:

(i) (表示方式的无关性). 若 $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$ 是 φ 的任意表示, 则

$$\int\varphi=\sum_{k=1}^{N}a_k m(E_k).$$

(ii) (线性). 若 φ,ψ 为简单函数, $a,b\in\mathbb{R}$, 则

$$\int(a\varphi+b\psi)=a\int\varphi+b\int\psi.$$

(iii) (可加性). 若 E,F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的不交有限可测集, 则

$$\int_{E\cup F}\varphi=\int_E\varphi+\int_F\varphi.$$

(iv) (单调性). 若 φ, ψ 为实值简单函数且 $\varphi \leqslant \psi$, 则

$$\int \varphi \leqslant \int \psi.$$

(v) (三角不等式). 若 φ 是简单函数, 则 $|\varphi|$ 也是, 且

$$\left|\int \varphi\right| \leqslant \int |\varphi|.$$

需要指出的是: 当 f 和 g 是一对 a.e. 相等的简单函数时, 有 $\int f = \int g$. 这个等式在之后给出的积分定义中也成立. 实际上, 令 $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$, 则 $m(E_0) = 0$. $f - g$ 亦为简单函数, 其规范表示为 $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$, 其中 $E_k \subset E_0$, 故 $m(E_k) = 0$, 从而

$$\int (f-g) = \sum_{k=1}^{N} a_k m(E_k) = 0.$$

§ 2.1.2 阶段二: 支撑在有限可测集上的有界函数

定义 2.3. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测和 f 可测, 若对 $x \in E^c$, 有 $f(x) = 0$, 则称 f支撑在 E 上. 通常将可测函数 f 的非零点集的闭包称为 f 的支集, 记为:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

因 $\operatorname{supp} f$ 为闭集, 故可测, 但与上述 E 一般没有包含关系. 下面将考察那些有界的可测函数.

若 f 可测, 则由简单函数逼近定理 (定理 1.29) 知, 存在简单函数列 $\{\varphi_k\}$, 使得

$$|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)| \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

从而, 若 f 支撑在有限可测集 E 上, 且 $|f(x)| \leqslant M$, 则 $\forall k \in \mathbb{N}, x \in E$, $|\varphi_k(x)| \leqslant M$. 若 $x \in E^c$, 则 $|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)| = 0$, 故 φ_k 也支撑在 E 上.

引理 2.4. 设 f 是支撑在有限可测集 E 上的有界函数. 若 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是支撑在 E 上一致有界的简单函数列, 且 $\varphi_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 则

(i) 极限 $\lim\limits_{k\to\infty} \int \varphi_k$ 存在.

(ii) 若 $f = 0$ a.e., 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \int \varphi_k = 0$.

有了此引理, 我们可以定义支撑在有限可测集 E 上的有界函数 f 的积分.

定义 2.5. 设 f 是支撑在有限可测集 E 上的可测函数, 且 $|f| \leqslant M$. 定义 f 的Lebesgue 积分为

$$\int f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k(x)dx,$$

其中 $\{\varphi_k\}$ 是支撑在 E 上满足 $|\varphi_k| \leqslant M$ 和 $\varphi_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 的任意简单函数列.

由引理 2.4知这个极限是存在的. 下面, 我们必须证明该积分是良定的, 即 $\int f$ 不依赖于所使用的极限序列 $\{\varphi_k\}$. 因此, 假设 $\{\psi_k\}$ 是另一支撑在 E 上的简单函数列, s.t. $|\psi_k| \leqslant M$, 且 $\psi_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 令

$$\eta_k = \varphi_k - \psi_k,$$

则 η_k 支撑在 E 上, $|\eta_k| \leqslant 2M$, $\eta_k \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$. 由引理 2.4 (ii) 可得 $\lim\limits_{k\to\infty} \int \eta_k = 0$, 又由 (i) 知 $\int \varphi_k$, $\int \psi_k$ 的极限均存在, 故有

$$\lim_{k\to\infty} \int \varphi_k = \lim_{k\to\infty} \int \psi_k.$$

设可测函数 f 在有限可测集 E 上有界, 则可定义

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx.$$

显然, 若 f 是简单函数, 则上述定义与之前定义的简单函数的积分是一致的. 这个积分定义的拓展满足简单函数积分的所有基本性质.

命题 2.6. 设 f, g 是支撑在有限可测集上的有界函数, 则下列性质成立:

(i) (线性). 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $\int (af + bg) = a\int f + b\int g$.

(ii) (可加性). 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 互不相交, 则 $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$.

(iii) (单调性). 若 $f \leqslant g$, 则 $\int f \leqslant \int g$.

(iv) (三角不等式). $|f|$ 也是支撑在有限可测集上的有界函数, 且 $|\int f| \leqslant \int |f|$.

所有这些性质均可用简单函数逼近及命题 2.2中简单函数积分的性质得到.

现在来证明第一个收敛定理, 其中的 (a.e.) 表示可选项, 即删掉或保留所有 (a.e.) 结论均成立.

定理 2.7 (Lebesgue 有界收敛定理 (LBCT))**.** 设 $\{f_k\}$ 是支撑在有限可测集 E 上的一致有界的可测函数列, 且 $f_k(x) \xrightarrow{\text{(a.e.)}} f(x)$, $k \to \infty$. 则 f 是可测的, (a.e.) 有界的, (a.e.) 支撑在 E 上, 且

$$\int |f_k - f| \to 0, \quad k \to \infty.$$

进而,

$$\int f_k \to \int f, \quad k \to \infty.$$

上述收敛定理是关于 $\int$ 与 lim 交换次序的, 它的结论简单地说, 即

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k = \int \lim_{k\to\infty} f_k.$$

命题 2.8. 若 $f \geqslant 0$ 是支撑在有限可测集上的有界函数且 $\int f = 0$, 则 $f = 0$ a.e.

§ 2.1.3 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

至此, 我们基本上建立了支撑在有限可测集上的有界函数的 Lebesgue 积分理论, 在进一步发展 Lebesgue 积分理论之前, 我们先来揭示它与 Riemann 积分的关系. 本节仅讨论一维的情形.

为了方便, 我们将定义在 $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 的 Riemann 积分记为 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx$.

下面的定理说明, 在有界闭区间上 Riemann 可积蕴含着 Lebesgue 可积.

定理 2.9. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 可测, 且

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)dx = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)dx,$$

其中左边积分为 Riemann 积分, 右边积分为 Lebesgue 积分.

§ 2.1.4 阶段三: 非负函数

现在, 我们考虑非负可测函数但不必有界. 允许这些函数取广义值, 即可以在可测集上取值 $+\infty$. 若一正数集合是无界的, 则定义该集合的上确界为 $+\infty$.

定义 2.10. 对上述非负可测函数 f, 定义它的 (广义)Lebesgue 积分为

$$\int f(x)dx = \sup \int g(x)dx,$$

其中上确界是关于所有支撑在有限可测集上的有界可测函数 g, 且满足 $0 \leqslant g \leqslant f$, 取的.

在以上定义之下, 只有两种可能性, 上确界要么有限, 要么无限. 在有限的情形, $\int f(x)dx < \infty$, 则称 f 是Lebesgue 可积的, 或简称为可积的.

显然, 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, $f \geqslant 0$, 则 $f\chi_E \geqslant 0$, 定义

$$\int_E f(x)dx = \int f(x)\chi_E(x)dx.$$

命题 2.11. 非负可测函数的积分有如下性质:

(i) (线性). 若 $f, g \geqslant 0$, $a, b > 0$, 则 $\int(af + bg) = a\int f + b\int g$.

(ii) (可加性). 若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 互不相交, $f \geqslant 0$, 则 $\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$.

(iii) (单调性). 若 $0 \leqslant f \leqslant g$, 则 $\int f \leqslant \int g$.

(iv) 若 g 可积, $0 \leqslant f \leqslant g$, 则 f 可积.

(v) 若 f 可积, 则 $f(x) < \infty$ a.e.

(vi) 若 $f \geqslant 0$, $\int f = 0$, 则 $f(x) = 0$ a.e.

下面来看非负可测函数的一些重要收敛定理. 先来看一个问题. 设 $f_k \geqslant 0$, $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 那么是否有

$$\int f_k \to \int f\ ?$$

不幸的是, 下面的例子给出了否定的回答. 令

$$f_k(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

则 $f_k(x) \to 0$, 但 $\int f_k(x)dx = 1$, 即有

$$\int \lim f_k < \lim \int f_k.$$

这正好代表了一般情形.

引理 2.12 (Fatou 引理). 设 $\{f_k\}$ 是非负可测函数列. 若 $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 则

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_k.$$

特别地, 我们并没有排除 $\int f = \infty$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty} \int f_k = \infty$ 的情形.

现在, 我们给出一些推论.

推论 2.13. 设 $f, \{f_k\}$ 均为非负可测函数 (列), $f_k(x) \leqslant f(x)$ a.e. 且 $f_k(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_k = \int f.$$

特别地, 对非负可测函数类, 我们可以得到一个基本的收敛定理. 它的叙述需要下面的记号. 之前用符号 $\nearrow$ 和 $\searrow$ 分别表示集合列的递增和递减. 类似地,

当可测函数列 $\{f_k\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$f_k(x) \leqslant f_{n+1}(x) \text{ a.e.}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ a.e.}$$

时记为 $f_k \nearrow f$. 当

$$f_k(x) \geqslant f_{n+1}(x) \text{ a.e.}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ a.e.}$$

时记为 $f_k \searrow f$. 从而, 由推论 2.13立得:

推论 2.14 ((Beppo Levi/Lebesgue) 单调收敛定理 (MCT)). 令 $\{f_k\}$ 是非负可测函数列且 $f_k \nearrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_k = \int f.$$

单调收敛定理有如下有用的推论:

推论 2.15 ((Tonelli) 逐项积分定理). 对非负可测函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, 有

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx.$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx$ 有限, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ 几乎处处收敛.

我们给出两个应用. 第一个是 Borel-Cantelli 引理的另一个证明.

例 2.16 (Borel-Cantelli 引理, (cf. [SS05, Ex.1.16])). 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集列, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. 令 $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{存在无穷多个} k \text{ s.t. } x \in E_k\} = \limsup\limits_{k\to\infty} E_k$, 则 $m(E) = 0$.

下面的例子将在第3章中讨论恒同逼近时要用到.

例 2.17. 设定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{n+1}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 f 在任何以原点为心的球外 (如 $|x| \geqslant \varepsilon$) 可积, 且存在 $C > 0$, 使得

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)dx \leqslant \frac{C}{\varepsilon}.$$

例 2.18. 考虑函数

$$f_a(x)=\begin{cases}|x|^{-a}, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$$F_a(x)=\frac{1}{1+|x|^a},\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

(易知在广义 Riemann 积分意义下, 当 $a<n$ 时 f_a 可积, 当 $a>n$ 时 F_a 可积.) 证明 Lebesgue 积分 $\int f_a<\infty$ $(a<n)$ 及 $\int F_a<\infty$ $(a>n)$.

§ 2.1.5 阶段四: 一般情形

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任意实值可测函数, 若 $|f|$ 在阶段三意义下可积, 则称 f 是 Lebesgue 可积的 (或简称可积的).

若 f 可积, 令

$$f^+(x)=\max(f(x),0),\quad f^-(x)=\max(-f(x),0).$$

显然, $f^+,f^-\geqslant 0$ 且 $f^+-f^-=f$. 因 $f^\pm\leqslant|f|$, 故由 f 可积可得 f^+ 和 f^- 可积 (命题 2.11 (iv)), 从而可以定义 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int f=\int f^+-\int f^-.$$

在实践中, 我们会遇到很多分解 $f=f_1-f_2$, f_1,f_2 均为非负可积函数, 那我们自然会期望 $\int f$ 不依赖于 f 的分解, 总有

$$\int f=\int f_1-\int f_2.$$

实际上, 假设 $f=g_1-g_2$ 为另一分解, g_1,g_2 均非负可积. 则由 $f_1-f_2=g_1-g_2$ 可得 $f_1+g_2=g_1+f_2$, 故由非负可测函数积分的线性性可得

$$\int f_1+\int g_2=\int g_1+\int f_2.$$

因这些积分均是有限的, 故

$$\int f_1-\int f_2=\int g_1-\int g_2.$$

从而, 可得 $\int f$ 的值不依赖于其分解.

在考察以上定义时, 下面一些小观察是有用的. f 的可积性和积分值在零测集上任意改变 f 的取值的情况下是不变的. 因此, 在可积性的上下文中可以允许函数在零测集上没有定义. 进而, 若 f 可积, 则由命题 2.11 (v) 知 $f(x)$ 几乎处处有限. 故此, 我们总是可以将两个可积函数 f,g 相加, 因为 $f+g$ 取广义值

的点仍落在一零测集内. 还有, 就是我们说一个函数 f 时, 实际上是指所有与 f 几乎处处相等的等价类.

由定义与之前证明的性质即可得到积分的基本性质.

命题 2.19. Lebesgue 可积函数的积分是线性的、可加的、单调的、且满足三角不等式.

现在来看两个后面要用到的结果.

命题 2.20. 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 则对任意的 $\varepsilon > 0$:

(i) 存在有限可测集 B(比如, 球), 使得

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon.$$

(ii) (积分的绝对连续性). 存在一个 $\delta > 0$, 使得只要 $m(E) < \delta$, 就成立

$$\int_E |f| < \varepsilon.$$

直观上, 由于可积函数积分有限, 函数本身应该在某种意义下在无穷远处消失, 命题的第 (i) 部分对这个直观给出了准确的表述. 然而, 我们也观察到, 可积性并不一定保证当 $|x|$ 变得很大时, 函数本身逐点趋于零. (cf. [SS05, Ex.2.6])

我们现在准备证明 Lebesgue 积分理论中最重要的结果之一, 即控制收敛定理. 它为极限与积分的次序的交换提供了一个充分条件.

定理 2.21 (Lebesgue 控制收敛定理 (LDCT)). 设 $\{f_n\}$ 为可测函数列, 当 $n \to \infty$ 时 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$. 若 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, 其中 g 可积, 则

$$\int |f_n - f| \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此,

$$\int f_n \to \int f, \quad n \to \infty.$$

通常称 $g(x)$ 为函数列 $\{f_n\}$ 的控制函数.

§2.1.6 复值函数

设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, 可以写为

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

其中 u, v 是实值函数, 分别称为 f 的实部和虚部.

若 $|f(x)| = (u^2(x) + v^2(x))^{1/2}$ 是 Lebesgue 可积的, 则称 f 可积. 显然, $|u(x)| \leqslant |f(x)|, |v(x)| \leqslant |f(x)|$. 由不等式 $(a+b)^{1/2} \leqslant a^{1/2} + b^{1/2}, a, b > 0$, 可得

$$|f(x)| \leqslant |u(x)| + |v(x)| \leqslant 2|f(x)|,$$

故复值函数可积当且仅当它的实部和虚部可积. 因此, f 的 Lebesgue 积分可定义为

$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx.$$

最后, 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, f 是 E 上的复值可测函数, 若 $f\chi_E$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积, 并定义

$$\int_E f = \int f\chi_E.$$

在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的所有复值可积函数的全体构成一个 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 实际上, 若 f, g 可积, 则由三角不等式 $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ 及单调性知

$$\int_E |f+g| \leqslant \int_E |f| + \int_E |g| < \infty,$$

从而, $f+g$ 可积. 若 $a \in \mathbb{C}$, f 可积, 则 af 可积. 因此, $\mathbb{C}$ 上的积分仍满足线性性质.

§ 2.2 可积函数空间 L^1

§ 2.2.1 完备性和稠密函数类

上一节末，我们知道 $\mathbb{C}$ 上的可积函数构成一个线性空间.

下面, 我们在线性空间中引入范数.

定义 2.22. 设 X 是实 (或复) 线性空间, 若对 X 中每个元素 x, 都有一个实数, 记为 $\|x\|$, 与之对应, 且满足

(i) 正定性: $\|x\| \geqslant 0$, 且 $\|x\| = 0 \iff x = 0$(零元);

(ii) 齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, 这里 α 是实 (或复) 数;

(iii) 三角不等式: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, (y \in X)$,

则称 X 为实 (或复)赋范线性空间, $\|x\|$ 称为元素 x 的范数. (与线性空间类似, 常略去 “实 (或复)” 等词.)

对于赋范线性空间 X, 我们用

$$\rho(x,y)=\|x-y\|,\quad x,y\in X,$$

定义元素 x 与 y 之间的度量. 容易证明, 这样定义的度量满足度量的三个条件, 因此 X 按照度量 ρ 是一个度量空间.

X 既然是度量空间, 自然就有点列的收敛. 按照度量空间中收敛的定义, X 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x\in X$ 是指

$$\rho(x_n,x)=\|x_n-x\|\to 0,\quad n\to\infty.$$

我们自然而然地称 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x, 也称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$(强) 或 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, $n\to\infty$. 在不会引起混淆时, 简记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\quad \text{或 } x_n\to x.$$

应用范数的条件可以证明以下几个性质:

(i) 在 X 中, 若 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, 则 $\{\|x_n\|\}$ 有界.
(由 $\|x_n\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x\|$ 即得.)

(ii) 在 X 中, 若 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, $y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}y$, 则 $x_n+y_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x+y$.
(由 $\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leqslant\|x_n-x\|+\|y_n-y\|$ 即得.)

(iii) 设数列 $\alpha_n\to\alpha$, X 中 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x$, 则 $\alpha_nx_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\alpha x$.
(由

$$\begin{aligned}\|\alpha_nx_n-\alpha x\|\leqslant&\|\alpha_nx_n-\alpha x_n\|+\|\alpha x_n-\alpha x\|\\=&|\alpha_n-\alpha|\|x_n\|+|\alpha|\|x_n-x\|,\end{aligned}$$

以及 $\{\|x_n\|\}$ 的有界性即得.)

接下来, 我们定义 $\mathbb{R}^n$ 上可积函数 f 的范数为

$$\|f\|_{L^1}=\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx.$$

具有以上范数的所有可积函数的全体记为 $L^1(\mathbb{R}^n)$. 容易验证 $\|\cdot\|_{L^1}$ 在几乎处处相等的等价类意义下满足范数的三个条件, 故 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 为赋范线性空间. 另外, $\rho(f,g)=\|f-g\|_{L^1}$ 定义了 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的度量, 故 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 亦为度量空间. 上述性质总结如下:

命题 2.23. 设 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) $\|af\|_{L^1}=|a|\|f\|_{L^1}, \forall a\in\mathbb{C}$.

(ii) $\|f+g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^1}+\|g\|_{L^1}$.

(iii) $\|f\|_{L^1}=0\iff f=0$ a.e.

(iv) $\rho(f,g)=\|f-g\|_{L^1}$ 定义了 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量.

我们完备化 Riemann 可积函数空间的主要目标通过下述定理即可实现.

定理 2.24 (Riesz-Fischer 定理)**.** 线性空间 L^1 依它的度量是完备的.

由于每个依范数收敛的序列均为依该范数的 Cauchy 列, 故由定理证明中的论断可得以下结论.

推论 2.25. 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 L^1 中依范数收敛于 f, 则存在子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$$f_{n_k}\xrightarrow{\text{a.e.}}f.$$

有许多函数类在 L^1 中稠密, 归结在下面的定理中. 当遇到证明一些有关可积函数的论断或等式时是有用的, 往往所证结果对一些作了限制的函数类容易证明, 然后可以再用稠密性得到一般结果.

定理 2.26 (L^1 中稠密函数类)**.** 下面的函数类在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密:

(i) 简单函数.

(ii) 阶梯函数.

(iii) 具有紧支集的连续函数 (其全体可记为 $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$).

$L^1(\mathbb{R}^n)$ 的上述结果可以推广到正可测集 E 上, 即若 $E\subset\mathbb{R}^n$, 且 $m(E)>0$, 则定义 $L^1(E)$ 为 E 上所有可积函数的全体. 对 $f\in L^1(E)$, 可以延拓到 $L^1(\mathbb{R}^n)$, 在 E 上令 $\tilde{f}=f$, 在 E^c 上令 $\tilde{f}=0$, 则可定义

$$\|f\|_{L^1(E)}=\|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=\int_E|f|dx.$$

命题 2.23和定理 2.24的类似结果对 $L^1(E)$ 也成立.

§ 2.2.2 不变性质

令 f 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, $h\in\mathbb{R}^n$, f 的 h平移定义为

$$f_h(x)=f(x-h).$$

首先, 有积分的平移不变性. 即, 若 f 可积, 则 f_h 可积且

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x-h)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx. \tag{2.2}$$

先验证 $f=\chi_E$ 的情形, 其中 E 可测. 显然, $f_h=\chi_{E_h}$, 其中 $E_h=\{x+h:x\in E\}$. 由测度的平移不变性知 $m(E_h)=m(E)$, 故结论成立. 由积分的线性性可得(2.2)对所有的简单函数成立. 若 f 是非负函数, 则由简单函数逼近定

理 (定理 1.28), 存在一列简单函数 $\{\varphi_k\}$, 使得 $\varphi_k \nearrow f$ a.e., 从而 $(\varphi_k)_h \nearrow f_h$ a.e., 由单调收敛定理可得(2.2)成立. 若 f 是复值可积函数, 由上述论断可得 $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$, 即 $f_h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|f_h\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$. 由定义可得(2.2)对任意的 $f \in L^1$ 成立.

其次, 应用 Lebesgue 测度关于伸缩和反射的相关不变性可得到: 若 f 可积, 则 $f(\delta x), \delta > 0$ 和 $f(-x)$ 也可积, 且

$$\delta^n \int_{\mathbb{R}^n} f(\delta x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx. \tag{2.3}$$

下面来看两个有用的结果.

(i) 设 f, g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一对可测函数, 并且对某个固定 $x \in \mathbb{R}^n$, 函数 $y \mapsto f(x-y)g(y)$ 是可积的, 则函数 $y \mapsto f(y)g(x-y)$ 也是可积的, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy. \tag{2.4}$$

实际上, 左边 $\overset{(2.2)}{=\!=}$ $\int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(y+x)dy \overset{(2.3)}{=\!=}$ 右边. 左边的积分记作 $(f*g)(x)$, 定义为 f 和 g 的卷积. (2.4)表明了卷积的可交换性.

(ii) 由(2.3)可得, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_{\{|x|\geqslant\varepsilon\}}(x)}{|x|^a}dx \tag{2.5}$$

$$\overset{(2.3)}{=\!=} \varepsilon^{n-a} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_{\{|x|\geqslant 1\}}(x)}{|x|^a}dx \tag{2.6}$$

$$= \varepsilon^{n-a} \int_{|x|\geqslant 1} \frac{1}{|x|^a}dx. \tag{2.7}$$

同理,

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \varepsilon^{n-a} \int_{|x|\leqslant 1} \frac{1}{|x|^a}dx. \tag{2.8}$$

由例 2.18知, 当 $a < n$ 时(2.8)中积分有限. 当 $|x| \geqslant 1$ 时 $\frac{1}{|x|^a} \leqslant \frac{2}{1+|x|^a}$, 而由例 2.18知, 当 $a > n$ 时 $\int \frac{1}{1+|x|^a}dx < \infty$, 故 $a > n$ 时(2.5)中积分有限.

§ 2.2.3 平移与连续性

接下来, 我们考察 f 的连续性如何与 f_h 随 h 的变化相联系. 注意到 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, “$f_h(x) \to f(x), h \to 0$” 等同于 “$f$ 在 x 连续”.

然而, 一般可积函数 f, 即使修正零测集上的值, 也可能在每个点 x 不连续, (cf. [SS05, Ex. 2.15]). 虽然如此, 但还是有一个在范数意义下对每个 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 都成立的总体连续性.

命题 2.27 (平均连续性). 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\lim_{h\to 0}\|f_h - f\|_{L^1} = 0.$$

§ 2.3 Fubini 定理

在连续函数的重积分运算中经常使用累次积分进行计算. 我们现在从 Lebesgue 积分的一般观点来检验这个重要的解析工具.

一般地, 我们可以将 $\mathbb{R}^n$ 写成乘积形式

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \quad n = n_1 + n_2,\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的点可取形式 (x, y), $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$. 有了这个分解, 引入固定一个变量所形成的截口或截面的概念就变得自然.

定义 2.28. 设 f 是 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上的函数, f 相应于 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ 的截口定义为

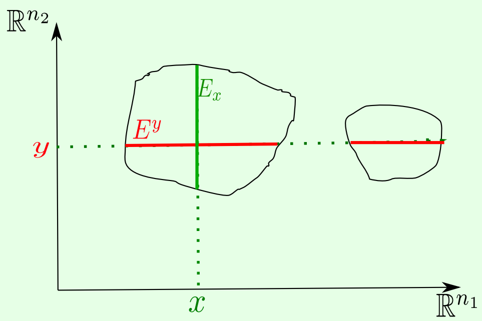
$$f^y(x) = f(x, y).$$

类似地, f 相应于 $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ 的截口定义为

$$f_x(y) = f(x, y).$$

对于 $E \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 的情形, 定义它的截面为

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : (x, y) \in E\}, \quad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : (x, y) \in E\}.$$



§ 2.3.1 定理的叙述与证明

以下是主要定理, 据定义所有可积函数都是可测的.

定理 2.29 (Fubini 定理)**.** 设 $n = n_1 + n_2$, $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上可积, 则对几乎每个 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$:

(i) 截口 f^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积.

(ii) 由 $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)dx$ 定义的函数在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可积.

(iii) $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

上面的定理并不是完全直接的, 这从它的叙述中不难看出第一个困难就是涉及讨论中的函数和集合的可测性. 实际上, 即使 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测, 也不能保证对每个 y, 其截口 f^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中可测, 更不能保证对每个 y, 其截面 E^y 可测. 比如, 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 把一个一维的不可测集放在 x 轴, 则该集合 E 为 $\mathbb{R}^2$ 上的零测集, 但对 $y = 0$, E^y 是不可测的. 然而, 幸运的是, 对几乎所有截口或截面来说可测性是成立的.

显然, 该定理关于 x 和 y 对称. 我们也可以得到对 a.e. x, f_x 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可积, 由 $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_x(y)dy$ 定义的函数在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可积, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x, y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

特别地, Fubini 定理说的是 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分可以通过累次计算低维的积分来计算, 而且累次积分可以以任何次序进行:

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x, y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

§ 2.3.2 Fubini 定理的应用

定理 2.30 (Tonelli 定理)**.** 设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上的非负可测函数, 则对几乎每个 $y \in \mathbb{R}^{n_2}$:

(i) f^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上可测.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)dx$ 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测.

(iii) 在广义意义下, $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dxdy$.

在实践中, 此定理常与 Fubini 定理共同使用, 然而为了方便引用, 将 Fubini 定理 (定理 2.29), Tonelli 定理 (定理 2.30) 及后面的推论 2.31统一为 Fubini 定理来进行引用. 实际上, 若给定一个 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f, 要求计算 $\int_{\mathbb{R}^n} f$ 时, 我们首先要对 $|f|$ 使用该定理来验证是否可用累次积分. 若它们是有限的, 则 Tonelli 定理保证了 f 是可积的, 即 $\int |f| < \infty$, 即验证了 Fubini 定理的假设, 从而在 f 的积分计算中可以使用那个定理.

推论 2.31. 若 E 在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 上可测, 则对 a.e. $y\in\mathbb{R}^{n_2}$, 截面

$$E^y=\{x\in\mathbb{R}^{n_1}:(x,y)\in E\}$$

是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中的可测子集. 进而, $m(E^y)$ 是关于 y 的可测函数, 且

$$m(E)=\int_{\mathbb{R}^{n_2}}m(E^y)dy.$$

这是将 Tonelli 定理应用到 χ_E 的直接结果. 显然, 对 x-截面有同样结果.

我们已经建立了如下基本事实: 若 E 在 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 中可测, 则对 a.e. $y\in\mathbb{R}^{n_2}$ 截面 E^y 在 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中可测, 同样地, 对 a.e. $x\in\mathbb{R}^{n_1}$, 截面 E_x 在 $\mathbb{R}^{n_2}$ 中可测. 人们或许试图认为反过来的结论也成立. 但事实上并非如此, 见下例.

例 2.32. 令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathbb{R}$ 的不可测子集, 定义

$$E=[0,1]\times\mathcal{N}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

则有

$$E^y=\begin{cases}[0,1], & y\in\mathcal{N},\\ \varnothing, & y\notin\mathcal{N}.\end{cases}$$

显然, 对任意 y, E^y 可测. 然而, 若 E 可测, 则由推论 2.31可得 $E_x=\{y\in\mathbb{R}:(x,y)\in E\}$ 对 a.e. $x\in\mathbb{R}$ 亦可测, 但这是不对的, 因为对所有 $x\in[0,1]$, $E_x=\mathcal{N}$ 为不可测集.

例 2.33. 一个更震撼的例子是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内的集合 E 不可测, 但 E^y,E_x 均可测, 且 $m(E^y)=0$, $m(E_x)=1$, $\forall x,y\in[0,1]$.

E 的构造基于实数的极为反常的序 $\prec$, 它具有如下性质: 对每个 $y\in\mathbb{R}$, $\{x\in\mathbb{R}:x\prec y\}$ 是至多可列的. (这个序的存在性依赖于连续统假设: 只要 S 是 $\mathbb{R}$ 的无穷子集, 那么 S 要么可列, 要么具有 $\mathbb{R}$ 的势. 见 [SS05, Pb. 2.5], 这里不详述.) 给定这个序, 令

$$E=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]:x\prec y\}.$$

注意到对每个 $y\in[0,1]$, $E^y=\{x:x\prec y\}$ 至多可列, 从而 $m(E^y)=0$. 类似地, 因 $E_x=\{y\in[0,1]:x\prec y\}=[0,1]\setminus\{y\in[0,1]:y\prec x\}$ 是 $[0,1]$ 内的一个至多可列集的补集, 故 $m(E_x)=1$. 若 E 可测, 则由推论 2.31可得 $m(E)=\int_0^1 m(E^y)dy=0$, 且 $m(E)=\int_0^1 m(E_x)dx=1$, 产生矛盾, 故 E 不可测.

当我们把 $\mathbb{R}^n$ 当成乘积集 $\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ 时, 它们的子集 E 与截面 E_x,E^y 相关联, 即乘积集 $E=E_1\times E_2$, $E_j\subset\mathbb{R}^{n_j}$.

命题 2.34. 若 $E = E_1 \times E_2$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集, 且 $m_*(E_2) > 0$, 则 E_1 可测.

为了处理上述结果的逆, 需要下述引理.

引理 2.35. 若 $E_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $E_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, 则

$$m_*(E_1 \times E_2) \leqslant m_*(E_1)m_*(E_2).$$

若 E_j 当中至少有一个外测度为 0, 则 $m_*(E_1 \times E_2) = 0$.

命题 2.36. 设 $E_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $E_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 均可测, 则 $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 且

$$m(E) = m(E_1)m(E_2).$$

若 E_j 中至少有一个为零测集, 则 $m(E) = 0$.

作为此命题的一个推论, 我们有

推论 2.37. 设 f 是 $\mathbb{R}^{n_1}$ 上的可测函数, 则由 $\tilde{f}(x, y) = f(x)$ 所定义的函数 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ 上可测.

接下来, 我们回到微积分中 Riemann 广义积分概念的一个解释. 我们已知道 $\int f$ 描述的是 f 的图像下的"面积". 这里, 我们将其与 Lebesgue 积分相关联, 并说明如何将它推广到一般情形.

推论 2.38. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数, 记 $y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的下方图像为

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

则

(i) f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测当且仅当 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中可测.

(ii) 若 (i) 中条件成立, 则 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = m(\mathcal{A})$.

最后, 给出一个有用的结果.

命题 2.39. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 则 $\tilde{f}(x, y) = f(x - y)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上可测.

第三章

微分与积分

早在学微积分时,我们就已经知道微分和积分互为逆运算. 对前两章所学的一般理论,我们重新验证这个基本的思想. 那我们的目标就是在现在的框架下建立并证明微积分基本定理,并发展一些遇到的概念. 想要达到这个目标,我们需要回答两个问题:

1° 设 $f \in L^1([a,b])$, $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ 为其不定积分,这是否蕴含着 F 可微 (至少 a.e. x), 且 $F' = f$?

对这个问题的肯定回答依赖于一些广泛应用的思想,且并不局限于一维情形.

2° 对 $[a,b]$ 上的函数 F 施加什么条件才能保证 $F'(x)$ 存在 (a.e. x), 并且使得这个函数可积,进而

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx\ ?$$

然而,对这个问题我们将从比第一个问题更狭小的角度去讨论,但它所引发的问题是深刻的,并且其结果是深远的,特别地,这个问题与曲线的可求长问题相关联.

§ 3.1 积分的微分

我们先从第一个问题开始,即研究积分的微分. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积,令

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

为了求 $F'(x)$, 我们回忆一下导数的定义,即下面的商

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

当 $h \to 0$ 时的极限. 对 $h > 0$ 的情形, 有

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy,$$

其中 $I = (x, x+h)$, $|I|$ 表示这个区间的长度. 上面这个表达式即 f 在 I 上的均值, 当 $|I| \to 0$ 时, 我们期望这些均值趋于 $f(x)$.

把问题的提法稍微变一下, 我们可以问

$$\lim_{\substack{|I|\to 0 \\ x\in I}} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy = f(x)$$

对合适的点 x 是否成立? 在高维情形, 我们也可以提类似的问题, 其中 f 的均值在适当的集合上取, 这些集合是一维区间的推广.

首先, 我们取这些集合为包含 x 的球 B, 而将区间 I 的长度 $|I|$ 替换成球的测度 $m(B)$. 然后, 就会看到作为这种特殊情形的推论, 类似的结果对那些具有 "有界离心率" (将在本节末定义) 的一般集簇也成立.

有了这个想法, 我们在 $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 中重新叙述第一个问题.

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 对 a.e. x, 下列等式

$$\lim_{\substack{|B|\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy = f(x)$$

是否成立?

我们称上述问题为均值问题. 若 B 是 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的任意球, 则 $m(B) = V_n r^n$, 其中 V_n 为单位球的测度.

当然, 当 f 在 x 连续时, 极限的确收敛于 $f(x)$. 由于连续, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当 $|x-y| < \delta$ 时 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 从而取 B 为含 x 半径小于 $\delta/2$ 的球时,

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy\right| &= \frac{1}{m(B)}\left|\int_B (f(x) - f(y))dy\right| \\ &\leqslant \frac{1}{m(B)}\int_B |f(x) - f(y)|\,dy \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

虽然均值问题有肯定性的回答, 但为了建立这个事实，我们需要做一些定量估计来确定均值的总体行为, 这将会通过 $|f|$ 的极大均值来完成.

§ 3.1.1　Hardy-Littlewood 极大函数

我们下面考察的极大函数最初是由 Hardy-Littlewood 就一维情形提出的, 所包含的概念在分析中有普遍的意义, 定义如下.

定义 3.1. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义它的极大函数f^* 为

$$f^*(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中上确界对所有包含 x 的开球取.

换句话说, 我们将均值问题中的 lim 用 sup, f 用 $|f|$ 来替换. f^* 的主要性质概括如下.

定理 3.2 (Hardy-Littlewood 极大函数定理)**.** 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

(i) f^* 可测.

(ii) $f^*(x) < \infty$, a.e. x.

(iii) $\forall \alpha > 0$, f^* 满足

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.1}$$

其中 $A = 3^n$.

形如(3.1)的不等式称为弱型不等式, 这是因为它比 L^1 范数的不等式弱. 实际上, 由简单的Tchebychev 不等式, i.e., $\forall \alpha > 0$,

$$m(\{x : |g(x)| > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

即可得到. 我们可能想由 f 的可积性得到 f^* 可积. 然而, 这并不成立, (3.1)已经是所能得到的最好结果.(cf. [SS05, Ex.3.4, 3.5]) (3.1)中的常数 A 对我们来说并不重要, 我们所关心的是它不依赖于 α 和 f.

为了证明 (iii), 我们需要先引进 Vitali 覆盖定理.

引理 3.3 (Vitali 覆盖定理 I)**.** 设 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_N\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开球的有限簇, 则存在 $\mathcal{B}$ 的互不相交的子簇 $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_k}$ 使得

$$m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}).$$

§ 3.1.2 Lebesgue 微分定理与 Lebesgue 集

由极大函数估计可以得到之前均值问题的解答.

定理 3.4. 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x), \quad \forall x, a.e. \tag{3.2}$$

将此定理应用于 $|f|$ 直接可得 $f^*(x) \geqslant |f(x)|$ a.e. x.

我们一直在 f 可积的假设下进行讨论, 这个 "整体" 的假设在讨论可微性这样的局部概念时有点不太恰当. 实际上, 上述定理中的极限是对收缩到 x 的球取的, 从而与远离 x 点的 f 的行为无关. 因此, 我们期望: 若仅假设 f 在每个球上可积, 其结果仍成立.

定义 3.5. 称 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 是局部可积的, 若对每个球 B, 函数 $f(x)\chi_B(x)$ 是可积的. 将所有局部可积函数所构成的空间记作 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

粗略地说, 在无穷远处的行为不影响函数的局部可积性, 如 $e^{|x|}$ 和 $|x|^{-1/2}$ 均局部可积但在 $\mathbb{R}^n$ 上不可积.

显然, 上个定理在局部可积这个更弱的条件下亦成立.

定理 3.6 (Lebesgue 微分定理). 若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x), \quad \forall x, a.e.$$

定理的第一个应用是对可测集本质的一个有趣的洞察.

定义 3.7. 若 E 是可测集且 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1,$$

则称 x 是 E 的Lebesgue 密集点 (或全密点).

粗略地说, 这个条件是说: 环绕 x 的小球几乎完全被 E 覆盖. 确切地说, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. 当 $m(B) < \delta$ 且 $x \in B$ 时 $1 - \frac{m(B\cap E)}{m(B)} \leqslant \varepsilon$, 即 $\frac{m(B\cap E)}{m(B)} \geqslant 1-\varepsilon$. 取 $\alpha = 1-\varepsilon$, 即对每个靠近 1 的 $\alpha < 1$ 及每个包含 x 的半径充分小的球, 有

$$m(B\cap E) \geqslant \alpha m(B).$$

因此, E 至少覆盖 B 的 α 部分. Lebesgue 密集点反映了 Lebesgue 可测集中的点在一点附近高度密集的情况.

将 Lebesgue 微分定理 (定理 3.6) 应用到 E 的特征函数上, 可立即得到下面的结论.

推论 3.8 (Lebesgue 密度定理). 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则
(i) 几乎每个点 $x \in E$ 都是 E 的密集点.
(ii) 几乎每个点 $x \notin E$ 都不是 E 的密集点.

若将 E 的所有 Lebesgue 密集点的全体记为 $\Phi(E)$, 则 (i) 即 $m(E\setminus\Phi(E)) = 0$, (ii) 即 $m(\Phi(E)\setminus E) = m(E^c\setminus(\Phi(E))^c) = 0$. 合并即为 $m(E\Delta\Phi(E)) = 0$.

下面我们来看可积函数的另一个概念, 可以替代逐点连续性.

定义 3.9. 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 f 的Lebesgue 集为所有使 $f(x)$ 有限且满足

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)-f(x)|dy = 0$$

的点 $x \in \mathbb{R}^n$ 构成的集合.

对这个定义有两个简单的观察. 一是, f 的连续点必属于 f 的 Lebesgue 集; 二是, 对 f 的 Lebesgue 集中的点 x, 有

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = f(x).$$

故 $\{f\text{的连续点}\} \subset f$的 Lebesgue 集 $\subset \{\text{使上式处处成立的点}\}$.

推论 3.10. 若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则几乎每个点都属于 f 的 Lebesgue 集.

注记 3.11. 由 §2.2中定义知, $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中元素实际上是等价类, 若两个函数仅在零测集上不同, 则它们等价. 有趣的是, 使得(3.2)中收敛于一个极限的点集与所选 f 的表达式无关, 因为由 $f = g$ a.e. 得

$$\int_B f(y)dy = \int_B g(y)dy.$$

然而, f 的 Lebesgue 集依赖于所考察的 f 的具体表达式.

我们将看到一个函数的 Lebesgue 集具有一个通用性质: 函数在这些点的值可被一大类均值找回来. 我们将在比球更广泛的集合上和恒同逼近的框架下来证明这个结论. 到目前为止, 所建立的微分理论都是基于函数在球上的均值, 但正如我们先前所说, 我们也会问, 对其它集簇, 比如方体或长方体，类似结论是否成立? 其回答依赖于所讨论集簇的几何性质. 比如, 我们来看方体的情形(和具有有界离心率的更一般集簇), 上述结果成立. 然而, 对所有长方体簇的情形, 其极限的几乎处处存在性和弱型不等式并不成立(cf. [SS05, Pb. 3.8]).

定义 3.12. 称集簇 $\{U_\alpha\}$正则收缩到 $\bar{x}$(或在 $\bar{x}$ 处具有有界离心率), 若存在一个常数 $c>0$ 使得对每个 α, 存在一个球 B_α 满足

$$\bar{x} \in B_\alpha, \quad U_\alpha \subset B_\alpha, \text{ 且} m(U_\alpha) \geqslant c m(B_\alpha).$$

因此, U_α 包含在 B_α 内, 但它的测度与 B_α 的测度相当. 例如, 所有包含 $\bar{x}$ 的开方体正则收缩于 $\bar{x}$. 然而, 在 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 中, 所有包含 $\bar{x}$ 的开长方体并不正则收缩于 $\bar{x}$, 比如考察非常狭长的长方体即可看到这一点.

推论 3.13. 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 若 $\{U_\alpha\}$ 正则收缩于 $\bar{x}$, 则对 f 的 Lebesgue 集中

的每个点 $\bar{x}$, 有

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0\\ U_\alpha\ni\bar{x}}} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)dy = f(\bar{x}).$$

§3.2 好核与恒同逼近

我们现在转到由卷积给出的函数的均值,

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\delta(y)dy,$$

这里 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 保持固定, K_δ 为核, 在一个特殊的函数簇上变化.

定义 3.14. 称函数簇 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 为好核, 若存在常数 $A>0$, 使得

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(x)dx = 1$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(x)|dx \leqslant A$.

(iii) $\forall \eta > 0$, $\int_{|x|\geqslant\eta} |K_\delta(x)|dx \to 0$, $\delta \to 0$.

这些核的主要用途是: 只要 f 有界 ($|f(x)| \leqslant M$), 那么在 f 的每个连续点上, 当 $\delta \to 0$ 时, $f * K_\delta(x) \to f(x)$.

为了得到一个类似的结论, 且对 Lebesgue 集中所有点成立, 从某种程度上我们需要加强核 $\{K_\delta\}$ 的条件. 为区别这种情况, 我们采用不同的术语称这些核组成的较小范围的类为 "恒同逼近". 我们仍然假设 K_δ 可积且满足条件 (i), 但用下面的条件替换 (ii) 和 (iii), 即

定义 3.15. 称函数簇 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 为恒同逼近, 若存在常数 $A>0$, 使得

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(x)dx = 1$.

(ii′) $|K_\delta(x)| \leqslant A\delta^{-n}, \forall \delta > 0$.

(iii′) $|K_\delta(x)| \leqslant A\delta/|x|^{n+1}, \forall \delta > 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

我们观察到这些要求更强了, 且蕴含好核定义中的条件.

术语 "恒同逼近" 源于 "当 $\delta \to 0$ 时, 映射 $f \mapsto f * K_\delta$ 在多种意义下收敛于恒同映射" 这一事实. 它与下面的启发性说明相联系.

右图勾画出一个典型的恒同逼近: 对每个 $\delta > 0$, 核支撑在集合 $|x| \leqslant \delta$ 上且高度为 $1/2\delta$. 当 $\delta \to 0$ 时, 这族核收敛到所谓的 "在原点的单位质量函数" 或 "Dirac

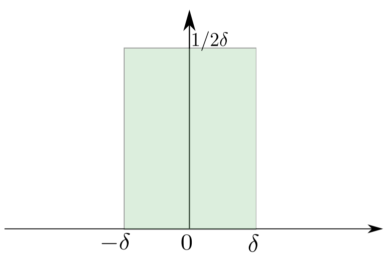


图 3.1: 一个恒同逼近

delta 函数", 启发性地定义为:

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}\quad \text{且} \int \mathcal{D}(x)dx=1.$$

因每个 $K_\delta=\frac{1}{2\delta}\chi_{[-\delta,\delta]}$ 的积分均为 1, 故可以粗略地说,

$$K_\delta\to\mathcal{D},\quad \delta\to 0.$$

若考察

$$f*\mathcal{D}=\int f(x-y)\mathcal{D}(y)dy,$$

因当 $y\neq 0$ 时 $f(x-y)\mathcal{D}(y)=0$, 故 $\mathcal{D}$ 的质量集中在 $y=0$, 直观上我们可以期望

$$(f*\mathcal{D})(x)=f(x).$$

因此, $\mathcal{D}$ 对卷积来说起着单位元的作用. 当然, 上面的讨论只是形式化的. 先介绍一些恒同逼近的例子.

例 3.16. 设 $\varphi\geqslant 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, $\operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\leqslant 1\}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi=1$. 若令 $K_\delta(x)=\delta^{-n}\varphi(\delta^{-1}x)$, 则 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒同逼近.

例 3.17. 上半平面的Poisson 核 (cf. [SS03, p.149, 157])

$$P_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2},\quad x\in\mathbb{R},$$

其中 $\delta=y>0$ 为参数.

例 3.18. $\mathbb{R}^n$ 中的热核 (cf. [SS03, p.156–157])

$$\mathcal{H}_t(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/4t},$$

其中 $t>0$, $\delta=t^{1/2}$.

接下来, 我们转到关于恒同逼近的一般结果, 以突出 Lebesgue 集的作用.

定理 3.19. 若 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一恒同逼近, 且 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则对 f 的 Lebesgue 集中的每个点 x, 当 $\delta\to 0$ 时

$$(f*K_\delta)(x)\to f(x).$$

特别地, 上述极限几乎处处成立.

因 $\int K_\delta=1$, 故

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}[f(x-y)-f(x)]K_\delta(y)dy\right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy.$$

故只需证: 当 $\delta \to 0$ 时, 右边 $\to 0$. 为此, 我们引进一个引理.

引理 3.20. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, x 为 f 的 Lebesgue 集中的点. 令

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r^n} \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y)-f(x)|dy, \quad \forall r > 0,$$

则 $\mathcal{A}(r)$ 关于 $r>0$ 连续, 且当 $r \to 0$ 时 $\mathcal{A}(r) \to 0$. 进而, $\mathcal{A}(r)$ 是有界的, 即 $\forall r > 0, \exists M > 0$, s.t. $\mathcal{A}(r) \leqslant M$.

除了逐点收敛的结果外, 恒同逼近也提出了依 L^1-范数收敛.

定理 3.21. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 为一个好核 (或恒同逼近), 则 $\forall \delta > 0$,

$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\delta(y)dy$$

是可积的, 且

$$\|f * K_\delta - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad \delta \to 0.$$

§ 3.3 函数的可微性 (1 维)

我们现在来看本章开始时所提出的第二个问题: 就是找到关于 F 的更强的条件以保证下式成立:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx. \tag{3.3}$$

有两个现象使这个等式的一般化出现问题.

1° 由于不可微函数的存在性 (存在无处可微的连续函数), 若仅仅假设 F 连续, 则(3.3)的右边可能无意义.

2° 即使 $F'(x)$ 对每个 x 均存在, F' 也不一定 (Lebesgue) 可积. (cf. [SS05, Ex. 3.12])

我们怎样克服这些困难?

一种方式是限制在那些作为可积函数的不定积分存在的函数类上. 至于如何刻画这样的函数, 可以通过研究更为广泛的函数类, 即有界变差函数. 这些函数与曲线可求长的问题有紧密联系, 那我们就从这种联系开始.

§3.3.1 有界变差函数

定义 3.22. 令 γ 为平面上由 $z(t)=(x(t),y(t))$, 其中 $a\leqslant t\leqslant b$ 所给出的参数化曲线. 这里 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为 $[a,b]$ 上的实值连续函数. 若存在 $M<\infty$, 使得对 $[a,b]$ 的任意分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$, 成立

$$\sum_{j=1}^{N}|z(t_j)-z(t_{j-1})|\leqslant M, \tag{3.4}$$

则称曲线 γ 是可求长的.

由定义, 曲线的长度 $L(\gamma)$ 是左边和式对所有分割取的上确界, 即

$$L(\gamma)=\sup_{\text{分割}}\sum_{j=1}^{N}|z(t_j)-z(t_{j-1})|,$$

或者, $L(\gamma)$ 是满足(3.4)的所有 M 的下确界.

从几何的角度看, $L(\gamma)$ 是通过用折线逼近曲线, 并使分割越来越细时取这些折线长度的极限而得到的.

自然地, 我们可能会问: 对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 施加什么解析条件才能保证曲线 γ 的可求长性? 特别地, $x(t)$ 和 $y(t)$ 的导数必须存在吗? 若如此, 是否有想要的公式

$$L(\gamma)=\int_a^b[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{1/2}dt\,?$$

对于第一个问题的回答, 直接引到有界变差函数类, 这个类在微分学理论中起着关键性的作用.

定义 3.23. 设 $F(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的复值函数, $\mathcal{P}$ 为该区间的一个分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$. F 在这个分割 $\mathcal{P}$ 下的变差定义为

$$V_{\mathcal{P}}(F)=\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|.$$

若存在 $M<\infty$, 使得对所有分割 $\mathcal{P}$, 成立 $V_{\mathcal{P}}(F)\leqslant M$, 则称 F 为有界变差函数, F 在 $[a,x]$(其中 $a\leqslant x\leqslant b$) 上的全变差定义为

$$T_F(a,x)=\sup\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|,$$

其中 sup 关于 $[a,x]$ 的所有分割取. $[a,b]$ 上的有界变差函数全体记为BV($[a,b]$).

注记 3.24. 1) 在该定义中, 并未假定 F 连续, 但是当应用于曲线的情形时, 将假定 $F(t)=z(t)=x(t)+iy(t)$ 是连续的.

2) 若分割 $\tilde{\mathcal{P}}$ 是分割 $\mathcal{P}$ 的加细, 则 F 在 $\tilde{\mathcal{P}}$ 上的变差大于或等于 F 在 $\mathcal{P}$ 上的变差.

3) 设 $f\in \mathrm{BV}([a,b])$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界函数. 实际上, 考虑分割 $a<x<b$, 则由定义

$$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant M,$$

故 (注意: 定义中 f 不能取无穷值, 故 f 在端点的值均有限.)

$$|f(x)|\leqslant |f(x)-f(a)|+|f(a)|\leqslant M+|f(a)|.$$

4) $\mathrm{BV}([a,b])$ 构成一个线性空间.

下面来看有界变差函数与曲线可求长之间的关系.

定理 3.25. 一条由 $(x(t),y(t)), a\leqslant t\leqslant b$ 参数化的曲线可求长当且仅当 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均为有界变差函数.

例 3.26. 若 F 是单调有界实值函数, 则 F 为有界变差函数.

例 3.27. 若 F 处处可微且 F' 有界, 则 F 为有界变差函数. 事实上, 若 $|F'|\leqslant M$, 则由中值定理可得

$$|F(x)-F(y)|\leqslant M|x-y|,\quad \forall x,y\in[a,b].$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|\leqslant&\sum_{j=1}^{N}M|t_j-t_{j-1}|\\ =&M\sum_{j=1}^{N}(t_j-t_{j-1})=M(b-a).\end{aligned}$$

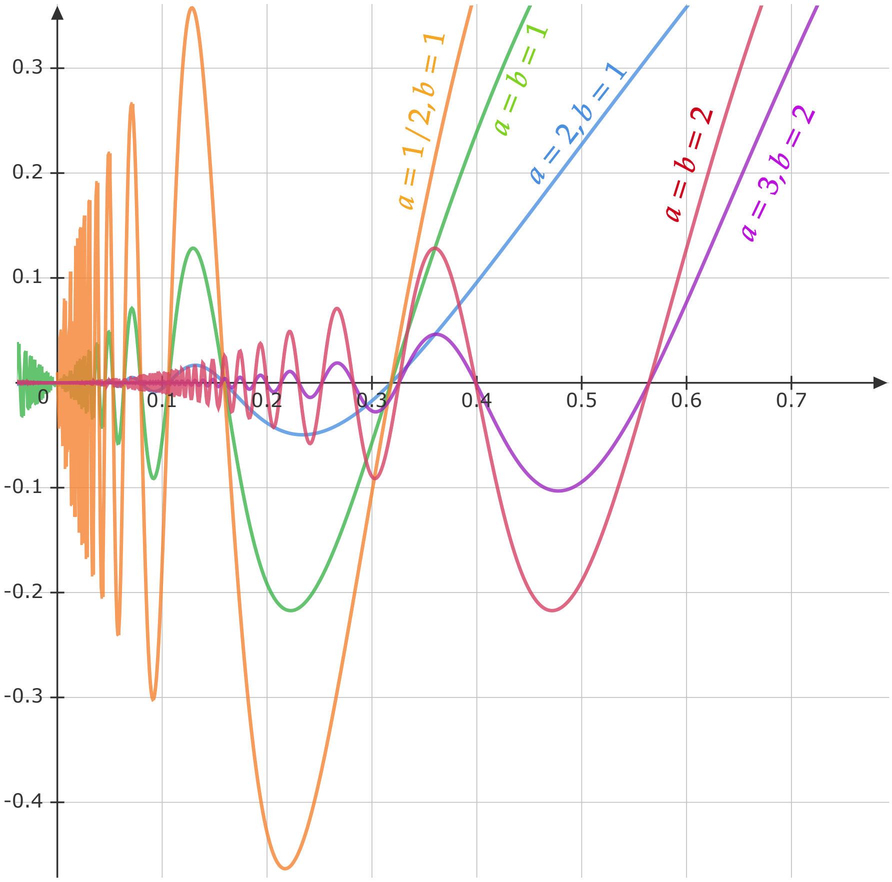
直观上, 有界变差函数不能以太大的振幅振荡得太频繁, 下面的例子有助于理解这一论断.

例 3.28. 令

$$F(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^{-b}), & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 (留作习题)

$$F\in \mathrm{BV}([0,1])\Longleftrightarrow a>b.$$



上图说明了 $a > b, a = b, a < b$ 三种情形的差异. 这个例子说明了当 $a \leqslant b$ 时 $F \notin \mathrm{BV}([0,1])$, 同时这也说明了 "连续函数不一定是有界变差函数".

定义 3.29. 设实值函数 $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, F 在 $[a,x]$ 上的正变差定义为

$$P_F(a,x) = \sup \sum_{(+)} [F(t_j) - F(t_{j-1})],$$

其中求和是对所有使得 $F(t_j) \geqslant F(t_{j-1})$ 的 j 取, 且 sup 是对 $[a,x]$ 的所有分割取. 而 F 在 $[a,x]$ 上的负变差定义为

$$N_F(a,x) = \sup \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})],$$

其中求和是对所有使得 $F(t_j) \leqslant F(t_{j-1})$ 的 j 取, 且 sup 是对 $[a,x]$ 的所有分割取.

引理 3.30. 设实值函数 $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, 则 $\forall x \in [a,b]$, 有

$$F(x) - F(a) = P_F(a,x) - N_F(a,x),$$

且

$$T_F(a,x) = P_F(a,x) + N_F(a,x).$$

定理 3.31 (Jordan 分解定理). 实值函数 $F \in \mathrm{BV}([a,b])$ 当且仅当 $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$, 其中 F_1, F_2 均为有界递增函数.

作为一个推论, 一个复值有界变差函数为四个有界递增函数的复线性组合, 即分别对实部和虚部用 Jordan 分解定理.

回到由连续函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 参数化的曲线 γ, 我们对它的长度函数做进一步的理解.

假设曲线是可求长的, 定义 $L(A,B)$ 为 γ 中 $t \in [A,B]$ 所对应的像的片段的长度, 其中 $a \leqslant A \leqslant B \leqslant b$. 令 $F(t) = z(t)$, 则有

$$L(A,B) = T_F(A,B).$$

一般地, 有下面的结论.

命题 3.32. 若 $A \leqslant C \leqslant B$, 则

$$L(A,C) + L(C,B) = L(A,B). \tag{3.5}$$

命题 3.33. $L(A,B)$ 关于 A 和 B 连续.

上述结论表明: 连续的有界变差函数的全变差也是连续的.

下一个结果是微分理论的核心定理.

定理 3.34. 若 $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, 则 F 几乎处处可微.

换言之, 商

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

几乎对每个 $x \in [a,b]$ 存在. 据 Jordan 分解定理, 只需考虑 F 递增的情形. 为了简单起见, 我们先假定 F 连续, 对于一般情形, 我们留到下一节来研究有界变差函数可能的不连续点的本质, 并将其归结为 "跳跃函数" 的情形.

先从 Riesz 得到的一个漂亮的技术性引理开始, 它具有覆盖论证的效果.

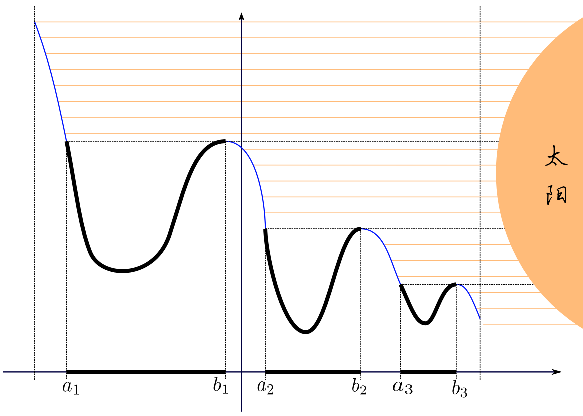
引理 3.35 (旭日 (Rising sun) 引理)**.** 设 G 是 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数. 令 E 为使得对某个 $h = h_x > 0$,

$$G(x+h) > G(x)$$

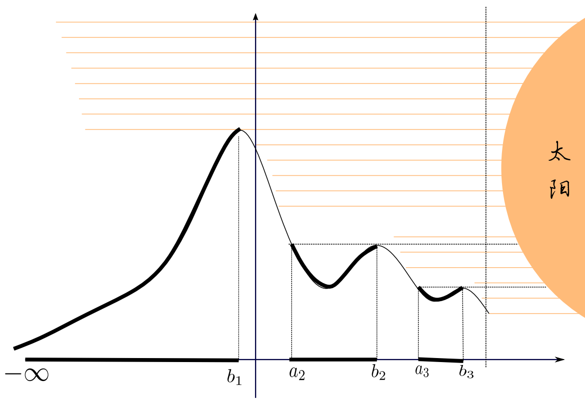
成立的点 x 的集合. 若 E 非空, 则它必为开集, 因此可以写成可数个互不相交开区间的并 $E = \cup(a_k, b_k)$. 若 (a_k, b_k) 是这个并集中的一个有限区间, 则

$$G(b_k) = G(a_k).$$

注记 3.36. 1) 基于下面的理由, 这个结果有时称为"旭日引理". 若我们想象太阳从东方 (右边) 升起而光线平行于 x 轴, 则 G 的图像上的点 $(x, G(x))$, $x \in E$ 恰好是阴影中的点, 这些点即下图中的粗体部分.



2) 第二个结论中区间有限是必要的.



对旭日引理的证明稍作修改即得:

推论 3.37. 设 G 为闭区间 $[a, b]$ 上的实值连续函数. 若 E 表示 (a, b) 中使得对某个 $h > 0$, $G(x+h) > G(x)$ 成立的点 x 的集合. 则 E 要么是空集, 要

么是开集. 若为后者, 则 E 为可数个互不相交开区间 (a_k, b_k) 的并, 且除去 $a = a_k$ 时仅有 $G(a_k) \leqslant G(b_k)$ 的可能外, 均有 $G(a_k) = G(b_k)$.

设 F 是 $[a,b]$ 上的实值函数, 对固定的 $x \in [a,b]$, 记

$$\Delta_h F(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

考虑如下定义的在 x 处的四个Dini 数(统称为Dini 导数):

$$D^+F(x) = \limsup_{h\to 0^+} \Delta_h F(x), \quad (\text{右上极限}),$$
$$D_+F(x) = \liminf_{h\to 0^+} \Delta_h F(x), \quad (\text{右下极限}),$$
$$D^-F(x) = \limsup_{h\to 0^-} \Delta_h F(x), \quad (\text{左上极限}),$$
$$D_-F(x) = \liminf_{h\to 0^-} \Delta_h F(x), \quad (\text{左下极限}).$$

显然有 $D_+ \leqslant D^+, D_- \leqslant D^-$.

命题 3.38. 设 F 为 $[a,b]$ 上的实值递增连续函数, 则函数 $D_\pm F$ 和 $D^\pm F$ 可测.

由此可得如下与微积分基本公式(3.3)有关的推论.

推论 3.39. 若 F 在 $[a,b]$ 上递增且连续, 则 F' 几乎处处存在. 进而, F' 是可测的, 非负的, 且有

$$\int_a^b F'(x)dx \leqslant F(b) - F(a).$$

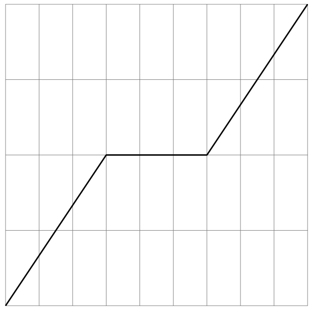
特别地, 若 F 在 $\mathbb{R}$ 上有界、递增且连续, 则 F' 在 $\mathbb{R}$ 上可积.

若我们只考虑连续递增函数, 则就只能得到上述推论中的 “不等式”. 下面的例子说明了这一点.

通过简单的构造可以产生一个连续函数 $F : [0,1] \to [0,1]$, 它是递增的, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, 但 $F'(x) = 0$, a.e.! 因此 F 是有界变差函数, 但

$$\int_a^b F'(x)dx \neq F(b) - F(a).$$

考虑标准 Cantor 三分集 $\mathcal{C} \subset [0,1]$, $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$, 其中 $\mathcal{C}_k$ 是 2^k 个闭区间的互不相交并. 比如, $\mathcal{C}_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. 令 $F_1(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续递增函数, 满足



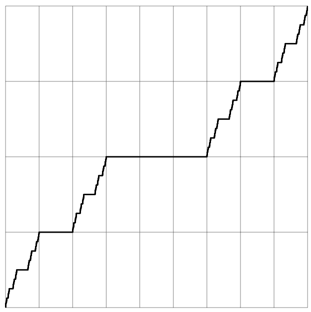
$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1/2, & 1/3\leqslant x\leqslant 2/3,\\ 1, & x=1,\\ \text{线性}, & x\in\mathcal{C}_1.\end{cases}$$

类似地, 令 $F_2(x)$ 为连续递增函数, 满足

$$F_2(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1/4, & x\in[1/9,2/9],\\ 1/2, & x\in[1/3,2/3],\\ 3/4, & x\in[7/9,8/9],\\ 1, & x=1,\\ \text{线性}, & x\in\mathcal{C}_2,\end{cases}$$

其中 $\mathcal{C}_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$.

继续这个过程, 令 $\mathcal{C}_n=\bigcup\limits_{i=1}^{2^n}I_{n,i}$, $[0,1]\setminus\mathcal{C}_n=\bigcup\limits_{j=1}^{2^n-1}A_{n,j}$, 其中 $I_{n,i}$ 为 $\mathcal{C}_n$ 中的互不相交闭区间, $A_{n,j}$ 为 $\mathcal{C}_n$ 的构造中去掉的开区间, 得到一列连续递增函数 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, 满足



$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ j/2^n, & x\in A_{n,j},\\ 1, & x=1,\\ \text{线性}, & x\in I_{n,i}.\end{cases}$$

显然有

$$\sup_{x\in[0,1]}|F_{n+1}(x)-F_n(x)|\leqslant 2^{-n}.$$

由此易验证 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛到一个连续的极限函数 F(留作习题), 称为Cantor-Lebesgue 函数, 简称Cantor 函数, 也形象地称为" 魔梯 (Devil's staircase)". 由构造知, F 递增, $F(0)=0$, $F(1)=1$, 且在 Cantor 集的补集的每个区间上, F 为常数. 由于 $m(\mathcal{C})=0$, 故 $F'(x)=0$, a.e., 这正是我们想要的.

本节内容以及最后这个例子表明有界变差的假设保证了导数的几乎处处存在性, 但不能保证公式

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

的正确性. 在下一节, 我们将给出函数的合适条件, 使其完全地解决建立上述等式的问题.

§ 3.3.2 绝对连续函数

定义 3.40. 设 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 (a_k, b_k), $(k = 1, \cdots, N)$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k - a_k) < \delta$ 时有

$$\sum_{k=1}^{N} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon,$$

则称 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数, 其全体构成一个线性空间, 记为AC$([a,b])$.

显然, 由定义知, 绝对连续 $\Longrightarrow$ 一致连续 $\Longrightarrow$ 连续.

命题 3.41. AC$([a,b]) \subset$ BV$([a,b])$.

由命题 3.41及命题 3.33可得: 绝对连续函数的全变差是连续的 (实际上是绝对连续的, 见定理 3.43的证明).

命题 3.42. 若 $f \in L^1([a,b])$, 则其不定积分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \in$ AC$([a,b])$.

这个结论也说明 “绝对连续” 是希望证明 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$ 对 F 所施加的一个必要条件.

定理 3.43. 若 $F \in$ AC$([a,b])$, 则 $F'(x)$ 几乎处处存在. 进而, 若 $F'(x) = 0$ a.e., 则 F 为常数.

为了证明后半段, 我们先引入 Vitali 覆盖的相关结果.

定义 3.44. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ 是由球构成的一个集簇. 若对任意的 $x \in E$ 及 $\eta > 0$, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $B \ni x$ 且 $m(B) < \eta$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 E 在 Vitali 意义下的一个覆盖, 简称 E 的Vitali 覆盖. 因此, 每个点都被任意小测度的球覆盖.

例 3.45. 设 $E=[a,b]$, 令 $\{r_n\}$ 为 $[a,b]$ 中的全体有理数, 作

$$I_{n,m}=\left[r_n-\frac{1}{m},r_n+\frac{1}{m}\right],$$

则区间簇 $\mathcal{B}=\{I_{n,m}:n,m\in\mathbb{N}\}$ 是 E 的 Vitali 覆盖.

引理 3.46 (Vitali 覆盖定理 II). 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $m(E)<\infty$. 若 $\mathcal{B}$ 是 E 的 Vitali 覆盖, 则对任意的 $\delta>0$, 存在有限个几乎互不相交的球 $B_1,\cdots,B_N\in\mathcal{B}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{N}m(B_i)\geqslant m(E)-\delta.$$

推论 3.47. 在引理 3.46的条件下, 能够选取球, 使得

$$m\Big(E\setminus\bigcup_{i=1}^{N}B_i\Big)<2\delta.$$

现在, 我们回到一维空间, 来证明定理 3.43.

我们前面的这些努力均是为下面的 Lebesgue 积分的微积分基本定理做准备. 特别地, 它解决了我们本章开始时提出的第二个问题: 建立微分与积分之间的对应关系.

定理 3.48 (Lebesgue 积分的微积分基本定理). 设 $F\in\mathrm{AC}([a,b])$, 则 F' 几乎处处存在且可积, 并且对所有 $a\leqslant x\leqslant b$,

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(y)dy.$$

取 $x=b$, 即得 $F(b)-F(a)=\int_a^b F'(y)dy$.

反过来, 若 $f\in L^1([a,b])$, 则存在 $F\in\mathrm{AC}([a,b])$, 使得 $F'(x)=f(x)$ a.e., 实际上, 可取 $F(x)=\int_a^x f(y)dy$.

§ 3.3.3 跳跃函数的可微性

我们现在考虑不一定连续的单调函数, 研究结果表明: 允许去掉先前在定理 3.34的证明中所做的连续性假设.

与之前一样, 可以假定 F 递增且有界. 特别地, 这两个条件保证了极限

$$F(x^-) = \lim_{y\to x^-} F(y), \quad F(x^+) = \lim_{y\to x^+} F(y)$$

存在. 当然, $F(x^-) \leqslant F(x) \leqslant F(x^+)$, 且若 $F(x^-) = F(x^+)$, 则 $F(x)$ 在 x 处连续; 否则, 称它具有跳跃不连续性. 幸运的是, 我们可以证明它们至多有可列个, 故这种不连续性是可以处理的.

引理 3.49. $[a,b]$ 上的一个有界递增函数 F 至多有可列个不连续点.

定义 3.50. 令 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上的有界递增函数 F 的不连续点集, F 在 x_n 处的右极限与左极限之差 $\alpha_n = F(x_n^+) - F(x_n^-)$ 称为 F 在点 x_n 处的跃度, 则

$$F(x_n^+) = F(x_n^-) + \alpha_n,$$

且对某个 $\theta_n \in [0,1]$, 有

$$F(x_n) = F(x_n^-) + \theta_n \alpha_n.$$

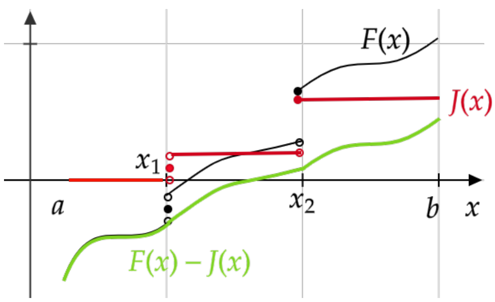
若令

$$j_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n, \\ \theta_n, & x = x_n, \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$

则相应于 F 的跳跃函数定义为

$$J_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x).$$

为方便起见, 在无混淆情况下, 将 J_F 简记为 J.



我们观察到, 若 F 为 $[a,b]$ 上的有界递增函数, 则必有 $\alpha_n > 0$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leqslant F(b) - F(a) < \infty,$$

因此, 用来定义 J 的级数绝对且一致收敛.

引理 3.51. 若 F 在 $[a,b]$ 上有界递增, 则

(i) $J(x)$ 在 F 的不连续点集 $\{x_n\}$ 处不连续且在 x_n 处有与 F 相同的跃度.

(ii) 差 $F(x)-J(x)$ 递增且连续.

由于可写成 $F(x)=[F(x)-J(x)]+J(x)$, 故我们的目标转向证明 J 几乎处处可微.

定理 3.52. 若 J 是以上定义的跳跃函数, 则 $J'(x)$ 几乎处处存在且为 0.

注记 3.53. 能不能利用在每个区间 (x_{n-1},x_n) 上为常数得到导数 a.e. 为零？实际上, 这是不可以的, 因为可列集可以在 $[a,b]$ 上稠密, 如所有有理数构成的不连续点, 这些不连续点可能不能分解成区间的形式, 故不可以这样简单地证之.

至此, 我们也就完全证明了定理 3.34.

§ 3.4 可求长曲线

我们对可求长曲线做进一步的讨论, 首先考虑关于参数化曲线 $(x(t),y(t))$ 的弧长公式

$$L=\int_a^b\left[(x'(t))^2+(y'(t))^2\right]^{1/2}dt \tag{3.6}$$

的正确性.

我们已经知道可求长曲线是那些除了假设 $x(t),y(t)$ 连续, 还是有界变差函数的曲线. 然而, 一个简单例子表明公式(3.6)并不总是成立: 令 $x(t)=F(t),y(t)=F(t)$, 其中 F 是 Cantor-Lebesgue 函数且 $t\in[0,1]$, 则该参数化曲线勾画出从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的直线, 其长度为 $\sqrt{2}$, 但 $x'(t)=y'(t)=0$, a.e. t.

若我们额外假定参数化表示的坐标函数是绝对连续的, 则表示弧长 L 的积分公式实际上是成立的.

定理 3.54. 设 $(x(t),y(t))$ 是定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的曲线. 若 $x(t),y(t)\in$ AC$([a,b])$, 则曲线是可求长的, 且它的长度为

$$L=\int_a^b\left[(x'(t))^2+(y'(t))^2\right]^{1/2}dt. \tag{3.6}$$

命题 3.55. 设 F 是复值的且 $F(t) \in \mathrm{AC}([a,b])$. 则

$$T_F(a,b) = \int_a^b |F'(t)|dt.$$

现在, 任何曲线 (可视为映射 $t \mapsto z(t)$ 的像) 实际上可以用许多不同的参数化实现. 然而, 一条可求长曲线, 有一个伴随它的唯一的自然参数化—弧长参数化. 事实上, 令 $L(A,B)$ 表示长度函数, 对 $t \in [a,b]$, 令 $s = s(t) = L(a,t)$, 则由命题 3.33知弧长 $s(t)$ 是一个将 $[a,b]$ 映到 $[0,L]$ 的连续递增函数, 其中 L 为曲线的长度. 曲线的弧长参数化就由

$$\tilde{z}(s) = \tilde{x}(s) + i\tilde{y}(s)$$

给出, 其中对于 $s = s(t)$, 有 $\tilde{z}(s) = z(t)$. 注意, 依这种方式, 函数 $\tilde{z}(s)$ 在 $[0,L]$ 的定义是合理的, 因为若 $s(t_1) = s(t_2)$, $t_1 < t_2$, 则 $z(t)$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上没变化, 故 $z(t_1) = z(t_2)$. 此外, 对所有 $s_1, s_2 \in [0,L]$, $|\tilde{z}(s_1) - \tilde{z}(s_2)| \leqslant |s_1 - s_2|$, 这是因为不等式左边是曲线上两点间的 (直线) 距离, 右边是连接这两点的曲线部分的长度. 当 t 从 a 变到 b 时, s 从 0 变到 L, $\tilde{z}(s)$ 与 $z(t)$(以同样的顺序) 勾画出相同的点.

定理 3.56. 设 $(x(t), y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$ 是长度为 L 的可求长曲线. 考虑以上描述的弧长参数化 $\tilde{z}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$. 则 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 是绝对连续的, $|\tilde{z}'(s)| = 1$ a.e. $s \in [0,L]$ 且

$$L = \int_0^L \left[(\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2\right]^{1/2} ds.$$

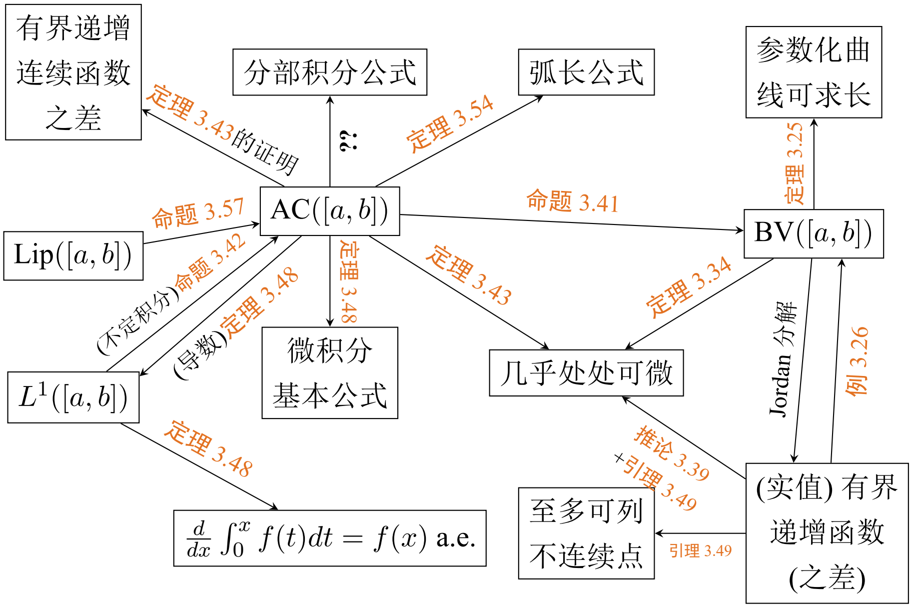
从上面的证明中, 我们得出了一个简单的结论.

命题 3.57. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足Lipschitz 条件:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|, \quad x, y \in [a,b],$$

其中 $M > 0$ 为常数, 则 $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. (记 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件的函数族为$\mathrm{Lip}([a,b])$, 即 $\mathrm{Lip}([a,b]) \subset \mathrm{AC}([a,b])$.)

小结


有界递增连续函数之差
分部积分公式
弧长公式
参数化曲线可求长
定理 3.43的证明
??
定理 3.54
AC([a, b])
命题 3.41
BV([a, b])
定理 3.25
命题 3.57
Lip([a, b])
(不定积分)命题 3.42
(导数)定理 3.48
定理 3.48
定理 3.43
定理 3.34
Jordan 分解
例 3.26
微积分基本公式
几乎处处可微
$L^1([a, b])$
推论 3.39
+引理 3.49
定理 3.48
至多可列不连续点
引理 3.49
(实值) 有界递增函数(之差)
$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$ a.e.

第四章

抽象测度与积分论

在大部分分析数学中, 积分起着重要的角色. 当处理出现在各种不同空间上的分析中的问题时, 积分会以一种或另一种形式被使用. 尽管在某些情况下只需要在这些空间上对连续函数或简单函数积分, 但是对其他很多问题的深入研究需要基于更为精细的测度论思想的积分, 本章的目标就是发展这些思想, 这超越了 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的情形.

出发点是 Carathéodory 卓有成效的洞察力和在非常一般的背景下架构测度的定理的相应引导. 一旦实现, 在一般框架下积分的基本结果的演绎就可以用熟知的结果得到.

§4.1 抽象测度空间

定义 4.1. 若集合 X 配备一个由 X 的子集构成的 σ-代数 $\mathcal{M}$, 则称 $(X,\mathcal{M})$ 为可测空间(measurable/measuring space), 若 X 的子集 $E\in\mathcal{M}$, 则称 E(关于 $\mathcal{M}$)可测.

$(X,\mathcal{M})$(或 $\mathcal{M}$, X) 上的测度是一个函数 $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ 满足下面的性质:

(i) $\mu(\varnothing)=0$,

(ii) 若 $E_1,E_2,\cdots$ 是 $\mathcal{M}$ 中可列个互不相交的集合, 则

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(E_j).$$

$(X,\mathcal{M},\mu)$ 称为测度空间(measure space). 但有时候, 在不引起歧义时可简记为 (X,μ) 或 X.

性质 (ii) 称为可列可加性. 它蕴含着有限可加性:

(ii′) 若 $E_1,\cdots,E_n$ 是 $\mathcal{M}$ 中互不相交集, 则 $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\mu(E_j)$.

实际上, 当 $j>n$ 时取 $E_j=\varnothing$ 即得. 若函数 μ 满足 (i) 和 (ii′) 但不一定满足 (ii), 则称之为有限可加测度.

定义 4.2. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为测度空间, 若 $\mu(X)<\infty$, 则 μ 称为有限的. 若 $X=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, 其中对任意 j, $E_j\in\mathcal{M}$ 且 $\mu(E_j)<\infty$, 则称 μ 是σ-有限的. 更一般的, 若 $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$, 其中对任意 j, $E_j\in\mathcal{M}$ 且 $\mu(E_j)<\infty$, 则称 E 关于 μ 是 σ-有限的. 若对每个 $E\in\mathcal{M}$ 且满足 $\mu(E)=\infty$, 存在 $F\in\mathcal{M}$, 使得 $F\subset E$ 且 $0<\mu(F)<\infty$, 则称 μ 是半有限的. (cf. [Fol13, p.25])

在实践中提出的绝大多数测度是 σ-有限的. 考虑到 σ-有限的准则, 由有限可测集组成的可列覆盖可取为互不相交的. 事实上, 若 $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是这样一个覆盖, 对 $k\geqslant 2$, 用 $X_k\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}X_j$ 代替每个 X_k 就得到了由有限可测集组成的互不相交覆盖.

先来看两个简单的例子.

(i) $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{M}=\mathscr{P}(X)$ 即为 X 的所有子集组成的族, 测度 $\mu(x_n)=\mu_n$, 其中 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个给定的广义非负数列. 注意到 $\mu(E)=\sum\limits_{x_n\in E}\mu_n$. 若 $\forall n$, $\mu_n=1$, 则称 μ 为计数测度, 并用 # 表示. 在这种情况下, μ 显然是 σ-有限的.

(ii) $X=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ 为 Lebesgue 可测集组成的族, 且 $\mu(E)=\int_E f\,dx$, 其中 f 是一个给定的 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数. $f=1$ 的情形对应于 Lebesgue 测度. μ 的可列可加性由 Lebesgue 积分的可加性和第2章中证明过的非负函数的积分的极限性质得到.

如 Lebesgue 测度一样, 一般测度也具有单调性、可列单调性、上连续性和下连续性等基本性质, 总结如下.

命题 4.3. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为测度空间. 有如下性质:

(i) (有限可加性) 对于任何有限不交的可测集族 $\{E_k\}_{j=1}^{n}$,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n}E_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j).$$

(ii) (单调性) 若 $A,B\in\mathcal{M}$ 且 $A\subset B$, 则

$$\mu(A)\leqslant\mu(B).$$

(iii) (分割性) 若 $A,B\in\mathcal{M}$, $A\subset B$ 且 $\mu(A)<\infty$, 则

$$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A),$$

特别地, 若 $\mu(A)=0$, 则 $\mu(B\setminus A)=\mu(B)$.

(iv) (可列单调性) 对任何覆盖可测集 E 的可测集族 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\mu(E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k).$$

(v) (下连续性) 若 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是递增可测集列, 则

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

(vi) (上连续性) 若 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是递减可测集列, 且 $\mu(B_1)<\infty$, 则

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(B_k).$$

(vii) (Borel-Cantelli 引理) 若 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是满足 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty$ 的可列可测集族, 则 X 中的几乎所有 x 属于至多有限个 E_k.

每个 σ-有限测度是半有限的(cf. [Fol13, Ex.1.13]), 但反之不然.

与大多数应用相关的测度空间的构造需要更深入的思想, 我们现在就来阐述它们.

§ 4.1.1 外测度与 Carathéodory 定理

同第1章中 Lebesgue 测度一样, 要构造一般情形下的测度及相应的可测集, 我们需要外测度的概念.

定义 4.4. 设 X 为一集合, X 上的外测度μ_* 是一个从 $\mathscr{P}(X)$ 到 $[0,\infty]$ 的函数, 满足

(i) $\mu_*(\varnothing)=0$,

(ii) 若 $E_1\subset E_2$, 则 $\mu_*(E_1)\leqslant\mu_*(E_2)$,

(iii) 若 $E_1,E_2,\cdots$ 是一个可列集族, 则

$$\mu_*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_*(E_j).$$

第1章中定义的 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 外测度 m_* 具有所有这些性质. 实际上, 一大类外测度可以利用一族测度已知的特殊集合进行"覆盖"而得到. 这个思

想可由之后引进的“准测度”的概念来系统化.

给定一个外测度 μ_*, 我们面临的问题是如何定义相应的可测集的概念. 在 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 测度的情形, 可测集是通过用外测度来刻画与开集 (或闭集) 的不同来定义的. 对一般情形, Carathéodory[1] 发现了一个巧妙的替代条件, 定义如下.

定义 4.5. X 中的集合 E 称为Carathéodory 可测的或简单地说可测的, 若

$$\mu_*(A) = \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A), \quad \forall A \subset X. \tag{4.1}$$

换言之, E 将任何集 A 分成关于外测度 μ_* 表现良好的两个部分. 为此, (4.1)有时被称为可分离条件. 可以证明在 $\mathbb{R}^n$ 中取 Lebesgue 外测度的(4.1)式所定义的可测性概念与第1章中给出的 Lebesgue 可测性的定义等价. (cf. [SS05, Ex. 6.3])

要证一个集合 E 是可测的, 只需验证

$$\mu_*(A) \geqslant \mu_*(E \cap A) + \mu_*(E^c \cap A), \quad \forall A \subset X,\ \mu_*(A) < \infty.$$

关于由(4.1)定义的可测集, 有如下定理.

定理 4.6 (Carathéodory 定理)**.** 给定集合 X 上的一个外测度 μ_*, 由 Carathéodory 可测集组成的集簇 $\mathcal{M}$ 形成一个 σ-代数. 此外, μ_* 限制在 $\mathcal{M}$ 上是一个测度.

因零外测集是 Carathéodory 可测的, 故上述定理中的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是完备的: 只要 $F \in \mathcal{M}$ 满足 $\mu(F) = 0$ 且 $E \subset F$, 就有 $E \in \mathcal{M}$.

§4.1.2 度量外测度

若 X 被赋予度量, 则有一类在实践中有趣的外测度, 这些外测度的重要性在于它们在由 X 中开集生成的自然 σ-代数上诱导出测度. 度量空间 (X, d) 自然具备一个开球族:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

定义了中心在 x, 半径为 r 的开球. 与第1章中类似, 将 $\mathbb{R}^n$ 换成 X, 称集合 $\mathcal{O} \subset X$ 是开的, 若对任意的 $x \in \mathcal{O}$, 存在 $r > 0$ 使得开球 $B_r(x) \subset \mathcal{O}$. 若一个集

[1]Constantin Carathéodory(康斯坦丁 • 卡拉泰奥多里, 1873-1950) 生于柏林, 是 20 世纪最具影响力的数学家之一, 一位被 Einstein 尊称为老师的希腊裔数学家. 对变分法、复分析、实变函数论、测度论等数学理论作出重要贡献；在物理学公理化问题上更是有杰出工作. 他对测度论进行了公理化研究, 提出了 Lebesgue 可测集判定准则及测度的延拓定理, 并将其推广到 Boole 代数 (又称逻辑代数), 成为抽象测度论的有力工具和现代测度论的基础.

合的补集是开的, 则称其为闭的. 有了这些定义, 易验证开集的任意并是开集, 闭集的任意交是闭集.

最后, 如 §1.2中一样, 在度量空间 X 上, 我们能定义 Borel σ-代数, $\mathcal{B}_X$, 即包含 X 中所有开集的最小 σ-代数. 换言之, $\mathcal{B}_X$ 为所有包含 X 中开集的 σ-代数的交集. $\mathcal{B}_X$ 中的元素称为Borel 集.

现在来看 X 上满足可良好分离的集合上具有可加性的那些外测度. 我们将证明这一性质保证了该外测度在 Borel σ-代数上定义一个测度. 这可以通过证明所有的 Borel 集是 Carathéodory 可测的来实现.

定义 4.7. 任给度量空间 (X, d) 中的两个集合 A 和 B, 若 X 上的外测度 μ_* 满足: 只要 A 和 B 的距离 $d(A, B) > 0$, 就有

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B),$$

则称 μ_* 是一个度量外测度.

这个性质在 Lebesgue 外测度的情形起着重要的角色.

定理 4.8. 若 μ_* 是度量空间 X 上的一个度量外测度, 则 X 中的 Borel 集是可测的. 因此, μ_* 限制在 $\mathcal{B}_X$ 上是一个测度.

给定度量空间 X, 定义在 X 的 Borel 集上的测度 μ 称为Borel 测度. 对所有半径有限的球赋予有限测度的 Borel 测度满足一个有用的正则性质. 对任何球 B 需 $\mu(B) < \infty$ 的要求在实践中出现的很多情况下是满足的 (但并非全部, 这个限制对 Hausdorff 测度不总是成立). 当它成立时, 我们有如下命题.

命题 4.9 (正则性定理). 设 μ 是在度量空间 X 中所有半径有限的球上取有限值的 Borel 测度. 则对任何 Borel 集 E 和任给的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $\mathcal{O}$ 和闭集 F 使得 $E \subset \mathcal{O}$ 且 $\mu(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon$, 而 $F \subset E$ 且 $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

§ 4.1.3 准测度与延拓定理

我们已看到, 一旦有了外测度, 就可以构造 X 上的可测集. 然而, 外测度的定义通常依赖于定义在更简单的一类集上的测度, 就是下面要定义的准测度. 我们的目标是证明: 任何准测度均能被延拓成 X 上的一个测度.

定义 4.10. 令 X 为一集合, $\mathcal{A}$ 为 X 中一个代数. $\mathcal{A}$ 上的准测度是一个函数 $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ 满足

(i) $\mu_0(\varnothing) = 0$;

(ii) 若 $E_1, E_2, \cdots$ 是 $\mathcal{A}$ 中互不相交集的可列簇且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$, 则

$$\mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k).$$

特别地, μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上是有限可加的.

准测度自然地给出一个外测度.

引理 4.11. 若 μ_0 是代数 $\mathcal{A}$ 上的一个准测度, 对任何 $E \subset X$ 上定义 μ_* 如下:

$$\mu_*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j \in \mathcal{A}, \forall j\right\}.$$

则 μ_* 是 X 上的一个外测度, 满足

(i) $\mu_*(E) = \mu_0(E), \forall E \in \mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ 中所有集合在(4.1)的意义下是 (Carathéodory) 可测的.

据定义, 由代数 $\mathcal{A}$ 所生成的 σ-代数是包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数. 上述引理提供了将 $\mathcal{A}$ 上的准测度 μ_0 延拓到由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数上测度的必要一步.

定理 4.12 (Carathéodory-Hahn 延拓定理)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 X 中一个代数, μ_0 为 $\mathcal{A}$ 上一准测度, $\mathcal{M}$ 为由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数, 则存在 $\mathcal{M}$ 上的测度 μ 为 μ_0 的延拓. 此外, 若 μ_0 是 σ-有限的, 则 μ 也是 σ-有限的, 且 μ 是 μ_0 在 $\mathcal{M}$ 上延拓的唯一测度.

为了后面的应用, 下面将关于代数 $\mathcal{A}$ 上的准测度 μ_0 和隐含在上面给出的论证中的测度 μ_* 的观察单列出来.

定义 $\mathcal{A}_\sigma$ 为 $\mathcal{A}$ 中集合的可列并组成的集簇, $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ 是由 $\mathcal{A}_\sigma$ 中的集合的可列交组成的集簇.

命题 4.13. 对任何集 E 和任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $E_1 \in \mathcal{A}_\sigma$ 和 $E_2 \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, 使得 $E \subset E_1, E \subset E_2$, 且 $\mu_*(E_1) \leqslant \mu_*(E) + \varepsilon$, 而 $\mu_*(E_2) = \mu_*(E)$.

§ 4.2 测度空间上的积分

一旦建立了测度空间 X 的基本性质, 就可以像 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度那样, 推导出可测函数及其在 X 上的积分的基本性质. 实际上, §1.3和所有第2章中的结果都可以推广到一般情形, 而证明几乎逐字相同. 因此, 我们就不再重复这些论证, 而是直接表述重点. 大家自己补全缺失的细节应该没有困难.

为避免不必要的繁杂, 我们将总是假设所考虑的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是

σ-有限的.

§ 4.2.1 可测函数

定义 4.14. 函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 称为可测函数, 若

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

有了这个定义, $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度情形下对应的可测函数的基本性质(cf. §1.3可测函数的性质 1.9–1.12)仍然成立. 例如, 可测函数组成的集合在基本的代数运算下是封闭的, 以及关于上下确界、上下极限和逐点极限也是封闭的.

我们现在使用的"几乎处处"的概念是关于测度 μ 的. 例如, 若 f 和 g 是 X 上的可测函数, 我们记 $f = g$ a.e., 就是说

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

X 上的简单函数形如:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k},$$

其中 E_k 是测度有限的可测集, 而 a_k 为实数. 用简单函数逼近可测函数在 Lebesgue 积分的定义中起着重要的角色. 幸运的是, 这个结果在抽象框架下依然成立.

命题 4.15. 设 f 是 (σ-有限) 测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的非负可测函数, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$\varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \forall x.$$

一般地, 若 f 仅仅是可测的, 则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$|\varphi_k(x)| \leqslant |\varphi_{k+1}(x)| \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \forall x.$$

该结果的证明可通过对定理 1.28和定理 1.29的证明做一些明显的细微修改就可以得到, 其中我们要利用施加在 X 上的 σ-有限性这一技术性条件. 事实上, 若记 $X = \bigcup F_k$, 其中 $F_k \in \mathcal{M}$ 是测度有限的, 则集合 F_k 扮演定理 1.28证明中立方体 Q_k 的角色.

另一个可立即推广的重要结果是 Egorov 定理 (定理 1.33).

命题 4.16. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是定义在可测集 $E \subset X$ 上的可测函数列, 其中 $\mu(E) < \infty$, 且 $f_k \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \subset E, \mu(E \setminus A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, s.t. f_k 在 A_ε 上一致收敛于 f.

§4.2.2 积分的定义和主要性质

第2章中给出的由简单函数的积分定义开始的构造 Lebesgue 积分的四步法也适用于定义 σ-有限测度空间 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 上的可测函数的积分. 由此得到了 X 上的非负可测函数 f 关于测度 μ 的积分的概念. 这个积分表示为

$$\int_X f(x)d\mu(x),$$

在没有歧义时, 也简写为 $\int_X fd\mu$, $\int fd\mu$ 或 $\int f$. 最后, 若

$$\int_X |f(x)|d\mu(x) < \infty,$$

则称可测函数 f 是可积的.

积分的基本性质, 如线性性和单调性, 还有下面的基本收敛定理, 在一般情形下仍成立.

命题 4.17. (i) (Fatou 引理) 若 $\{f_n\}$ 是 X 上的非负可测函数列, 则

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

(ii) (单调收敛定理) 若 $\{f_n\}$ 是 X 上的非负可测函数列, 且 $f_n \nearrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

(iii) (控制收敛定理) 若 $\{f_n\}$ 是 X 上的可测函数列, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 且存在某个可积函数 g 使得 $|f_n| \leqslant g$, 则

$$\int |f_n - f|d\mu \to 0, \quad n\to\infty.$$

因此,

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu, \quad n\to\infty.$$

$(X,\mathcal{M},\mu)$ 上的可积函数形成的等价类 (模掉几乎处处为零的函数) 构成一个赋范线性空间. 这个空间记为 $L^1(X,\mu)$, 其范数为

$$\|f\|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f(x)|d\mu(x). \tag{4.2}$$

命题 2.23和定理 2.24的证明均可推广到一般情形并可得到:

命题 4.18. $L^1(X,\mu)$ 是完备的赋范线性空间.

§4.3 例子

现在讨论一般理论的几个有用的例子. 第一个例子是关于乘积测度的构造, 并导出将重积分表示为累次积分的 Fubini 定理的一般形式, 这推广了§2.3考虑的 Euclid 空间的情形.

§4.3.1 乘积测度与一般的 Fubini 定理

设 $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ 和 $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ 是一对测度空间, 我们来描述乘积空间 $X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ 上的乘积测度 $\mu_1 \times \mu_2$. 这里假设两个测度空间均为完备的和 σ-有限的.

我们先定义可测长方体为形如 $A \times B$ 的集合, 其中 $A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2$. 用 $\mathcal{A}$ 表示 X 中所有互不相交可测长方体的有限并构成的集簇. 易证 $\mathcal{A}$ 是 X 中子集的一个代数.

为了简化术语, 从现在起将 "可测长方体" 简称为 "长方体".

设长方体 $A \times B$ 为互不相交长方体 $\{A_j \times B_j\}$ 的可列并, 即 $A \times B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(A_j \times B_j)$, 则对 $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$,

$$\begin{aligned}\chi_A(x_1)\chi_B(x_2) =& \chi_{A\times B}(x_1, x_2)\\ &= \sum \chi_{A_j\times B_j}(x_1, x_2) = \sum \chi_{A_j}(x_1)\chi_{B_j}(x_2).\end{aligned}$$

若我们关于 x_1 积分并利用单调收敛定理 (或逐项积分定理), 即得

$$\begin{aligned}\mu_1(A)\chi_B(x_2) &= \int \chi_A(x_1)\chi_B(x_2)d\mu_1(x_1)\\ &= \sum \int \chi_{A_j}(x_1)\chi_{B_j}(x_2)d\mu_1(x_1)\\ &= \sum \mu_1(A_j)\chi_{B_j}(x_2).\end{aligned}$$

然后, 同样关于 x_2 积分, 可得

$$\mu_1(A)\mu_2(B) = \sum \mu_1(A_j)\mu_2(B_j).$$

因此, 定义

$$\mu_0(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B),$$

(使用通用约定 $0 \cdot \infty = 0$), 从而有

$$\mu_0(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j \times B_j). \tag{4.3}$$

故 μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上是良定的, 且是 $\mathcal{A}$ 上的一个准测度. 由 Carathéodory-Hahn 延拓定

理, 在由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{M}$ 上可延拓成一个测度, 称为 μ_1 和 μ_2 的乘积, 记为 $\mu_1\times\mu_2$. 用这样的方式, 就定义了乘积测度空间 $(X_1\times X_2,\mathcal{M},\mu_1\times\mu_2)$. 此外, 若 μ_1 和 μ_2 是 σ-有限的, 比如 $X_1=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j$ 和 $X_2=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$ 且 $\mu_1(A_j)<\infty$ 和 $\mu_2(B_k)<\infty$, 则 $X_1\times X_2=\bigcup\limits_{j,k=1}^{\infty}A_j\times B_k$, 且 $(\mu_1\times\mu_2)(A_j\times B_k)<\infty$, 因此, $\mu_1\times\mu_2$ 也是 σ-有限的. 对此情形, 由由 Carathéodory-Hahn 延拓定理知, $\mu_1\times\mu_2$ 是使得对所有长方体 $A\times B$ 成立 $(\mu_1\times\mu_2)(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$ 的 $\mathcal{M}$ 上的唯一测度.

给定 $E\in\mathcal{M}$, 考虑截面

$$E_{x_1}=\{x_2\in X_2:(x_1,x_2)\in E\},\quad E^{x_2}=\{x_1\in X_1:(x_1,x_2)\in E\}.$$

若 f 是 $X_1\times X_2$ 上的函数, 定义其 x_1-截口 f_{x_1} 和 x_2-截口 f^{x_2} 为

$$f_{x_1}(x_2)=f^{x_2}(x_1)=f(x_1,x_2).$$

因此, $(\chi_E)_{x_1}=\chi_{E_{x_1}}$ 和 $(\chi_E)^{x_2}=\chi_{E^{x_2}}$.

我们有下面的重要结论.

命题 4.19. 若 $E\in\mathcal{A}_{\sigma\delta}$, 则对几乎每个 x_2, E^{x_2} 是 μ_1-可测的. 进而, $\mu_1(E^{x_2})$ 是一个 μ_2-可测函数. 此外,

$$\int_{X_2}\mu_1(E^{x_2})d\mu_2=(\mu_1\times\mu_2)(E). \tag{4.4}$$

现将上述命题的结果推广到一般的可测集 $E\subset X_1\times X_2$, 即 $E\in\mathcal{M}$.

命题 4.20 (cf. [SS05, Proposition 6.3.2] 和 [Fol13, Proposition 2.34])**.** 设 $(X_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$ 和 $(X_2,\mathcal{M}_2,\mu_2)$ 是一对测度空间, $(X_1\times X_2,\mathcal{M},\mu_1\times\mu_2)$ 为相应的乘积测度空间.

(i) 若 $E\in\mathcal{M}$, 则对所有 $x_1\in X_1$ 有 $E_{x_1}\in\mathcal{M}_2$ 且对所有 $x_2\in X_2$ 有 $E^{x_2}\in\mathcal{M}_1$. 此外,

$$\int_{X_2}\mu_1(E^{x_2})d\mu_2=\int_{X_1}\mu_2(E_{x_1})d\mu_1=(\mu_1\times\mu_2)(E).$$

(ii) 若 f 是 $\mathcal{M}$-可测的, 则对所有 $x_1\in X_1$ 有 f_{x_1} 是 $\mathcal{M}_2$-可测的, 且对所有 $x_2\in X_2$ 有 f^{x_2} 是 $\mathcal{M}_1$-可测的.

我们现在可以得到下面的主要结果, 它推广了 Fubini 定理 (定理 2.29).

定理 4.21 (Fubini 定理: 一般情形)**.** 在上面的框架下, 设 $f(x_1,x_2)$ 是 $(X_1\times X_2,\mu_1\times\mu_2)$ 上的可积函数，则

(i) 对几乎每个 $x_2\in X_2$, 截口 $f^{x_2}(x_1)=f(x_1,x_2)$ 在 (X_1,μ_1) 上可积.

(ii) $\int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1$ 是 X_2 上的可积函数.

(iii) $\int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1\right)d\mu_2 = \int_{X_1\times X_2} fd(\mu_1\times\mu_2)$.

注记 4.22. 即使 μ_1 和 μ_2 均是完备的, 上面构造的乘积测度 $\mu_1\times\mu_2$ 几乎也是不完备的. 当然, 我们可以考虑 $\mu_1\times\mu_2$ 的完备化, 但这样的话, $X_1\times X_2$ 上函数的可测性与截面的可测性就没这么简单了. 然而, 若像**??**那样定义完备化的空间 $(X,\overline{\mathcal{M}},\bar\mu)$, 就是把 $\mathcal{M}$ 中零测集的子集全拿进来, $\overline{\mathcal{M}} = \{E\cup Z : E\in\mathcal{M}, Z\subset F, F\in\mathcal{M}, \mu(F)=0\}$, $\bar\mu(E\cup Z)=\mu(E)$, 则 $\bar\mu$ 是 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的完备测度, 在这个完备化空间中定理仍成立(cf. [Fol13, Theorem 2.39]), 证明只需对命题 4.20中的论证稍作修改即可 (留作作业).

§ 4.3.2　极坐标积分公式

点 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 的极坐标是 (r,γ), 其中 $r=|x|\in(0,\infty)$, $\gamma=\frac{x}{|x|}\in\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$, 相反地, $x=r\gamma$.

我们想在合适的定义和恰当的假设下建立如下公式:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_0^\infty f(r\gamma)r^{n-1}dr\right)d\sigma(\gamma). \tag{4.5}$$

为此, 我们考察下面的一对测度空间. 首先, $(X_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$, 其中 $X_1=(0,\infty)$, $\mathcal{M}_1$ 是 $(0,\infty)$ 上 Lebesgue 可测集组成的集簇, 且在 $\mu_1(E)=\int_E r^{n-1}dr$ 的意义下 $d\mu_1=r^{n-1}dr$. $X_2=\mathbb{S}^{n-1}$, 测度 $\mu_2=\sigma$ 由(4.5)确定. 事实上, 给定任意集合 $E\subset\mathbb{S}^{n-1}$, 令

$$\tilde E = \{x\in\mathbb{R}^n : \frac{x}{|x|}\in E, 0<|x|<1\}$$

为 "端点" 在 E 上的单位球的 "扇形" 部分. 当 $\tilde E$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测时, 称 $E\in\mathcal{M}_2$, 且定义

$$\mu_2(E)=\sigma(E)=n\cdot m(\tilde E),$$

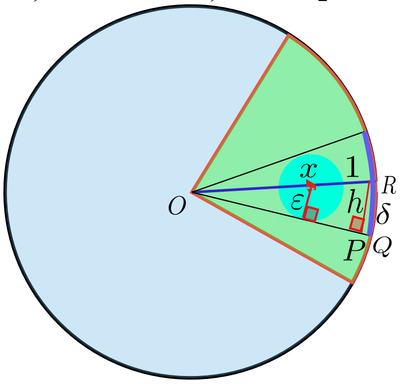
其中 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

显然, $(X_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)$ 和 $(X_2,\mathcal{M}_2,\mu_2)$ 均满足完备 σ-有限测度空间的所有性质. 此外, $\mathbb{S}^{n-1}$ 上有一个度量:

$$d(\gamma,\gamma')=|\gamma-\gamma'|,\quad \forall\gamma,\gamma'\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

若 E 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 中的一个开集 (关于该度量), 则 $\tilde E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 实际上,

$\forall x \in \tilde{E}$, 即 $\frac{x}{|x|} \in E$ 且 $0 < |x| < 1$, 因 E 开, 故存在 $\delta \in (0, 1-|x|)$, 使得当 $\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right| < \delta$ 时, 均有 $\frac{y}{|y|} \in E$. 取 $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}\sqrt{4-\delta^2}|x|$, 则 $B_\varepsilon(x) \subset \tilde{E}$, 从而 $\tilde{E}$ 为开集, 故可测. 因此, $E \in \mathcal{M}_2$.



$$\begin{aligned}\delta^2 - h^2 =& |PQ|^2 = (1-|OP|)^2\\ =& (1-\sqrt{1-h^2})^2,\end{aligned}$$

从而, 对 $\delta \in (0, 1-|x|)$,

$$\begin{aligned}\varepsilon < \varepsilon_{\max} = h|x| =& \frac{\delta}{2}\sqrt{4-\delta^2}|x|\\ <& \delta < 1-|x|.\end{aligned}$$

定理 4.23. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则对几乎每个 $\gamma \in \mathbb{S}^{n-1}$, 由 $f^\gamma(r) = f(r\gamma)$ 定义的截口 f^γ 关于测度 $r^{n-1}dr$ 可积. 此外, $\int_0^\infty f^\gamma(r)r^{n-1}dr$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积且(4.5)成立. (注: 交换 r 和 γ 的积分次序也有相应的结果.)

§ 4.3.3 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度与 Lebesgue-Stieltjes 积分

Stieltjes[2]积分是 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的一种推广, 其中增量 dx 用给定的 $[a,b]$ 上的递增函数 F 的增量 $dF(x)$ 代替. 我们用本章所采用的一般观点来探讨这个思想. 接下来的问题就是如何用这种方式刻画 $\mathbb{R}$ 上的测度, 特别是定义在实直线上的 Borel 集的测度.

为了使测度与递增函数之间有唯一的对应关系, 我们首先需要适当地规范化这些函数. 由引理 3.49知 $[a,b]$ 上一个有界递增函数 F 至多有可列个不连续点. 若 x_0 是一个不连续点, 则左右极限

$$\lim_{x\to x_0^-} F(x) = F(x_0^-) \quad 和 \quad \lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0^+)$$

均存在, 但 $F(x_0^-) < F(x_0^+)$, $F(x_0)$ 为介于 $F(x_0^-)$ 与 $F(x_0^+)$ 之间的某个值. 现在修正 F 在 x_0 的值, 若必要, 可令 $F(x_0) = F(x_0^+)$, 并对每个不连续点都这样做. 由此得到的函数 F 仍是递增的, 而且在每个点都是右连续的, 我们称这样的函数是规范化的. 主要结果如下:

定理 4.24. 设 F 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增规范化函数, 则存在 $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ 上的唯一测度 μ (也记为 dF), 使得若 $a < b$, 则 $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$. 反之, 若 μ 是 $\mathcal{B}_\mathbb{R}$

[2]Thomas Joannes Stieltjes (发音 /'sti:ltʃəs/, 斯蒂尔切斯), 1856-1894, 荷兰数学家.

上的一个在有界区间上有限的测度, 定义

$$F(x)=\begin{cases}\mu((0,x]), & 若 x>0,\\ 0, & 若 x=0,\\ -\mu((x,0]) & 若 x<0,\end{cases}$$

则 F 递增且是规范化的.

注记 4.25. 下面给出几个注记.

(i) 条件 "μ 在有界区间上是有限的" 是至关重要的. 事实上, [SS05, Ch.7] 中讨论的 Hausdorff 测度给出了不同于本定理中的 $\mathbb{R}$ 上 Borel 测度的例子.

(ii) 这个定理也可以使用 $[a,b)$ 形式的区间和左连续函数 F 给出相应的结论.

(iii) 若两个递增函数 F 和 G 只相差一个常数, 则它们给出的测度相同. 反过来也对, 因对所有 $a<b$, $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ 均成立, 故 $F-G$ 为常数.

(iv) 由延拓定理构造的测度 μ 可以定义在一个比 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 更大的 σ-代数上, 并且是完备的. 然而, 在应用中, 它限制在 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 上经常就够了.

(v) 若 F 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的递增规范化函数, 当 $x<a$ 时令 $F(x)=F(a)$, 当 $x>b$ 时令 $F(x)=F(b)$, 将其延拓到 $\mathbb{R}$ 上. 对由它诱导出的测度 μ, 区间 $(-\infty,a]$ 和 (b,∞) 具有零测度. 对每个关于 μ 可积的函数 f 经常写成

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)=\int_a^b f(x)dF(x).$$

若 F 产生于定义在 $\mathbb{R}$ 上的递增函数 F_0, 我们希望解释 F_0 在 a 处的可能的跳跃性, 在这种情况下, 定义

$$\int_{a^-}^b f(x)dF(x) \text{ 为 } \int_a^b f(x)d\mu_0(x),$$

其中 μ_0 是 $\mathbb{R}$ 上对应于 F_0 的测度.

(vi) 上述 Lebesgue-Stieltjes 积分可推广到 F 为有界变差函数的情形. 事实上, 设 F 是 $[a,b]$ 上的复值函数使得 $F=\sum\limits_{j=1}^4 \varepsilon_j F_j$, 每个 F_j 是递增规范化的, ε_j 取值 ± 1 或 $\pm i$. 则可以定义 $\int_a^b f(x)dF(x)$ 为 $\sum\limits_{j=1}^4 \varepsilon_j \int_a^b f(x)dF_j(x)$. 这里要求 f 关于 Borel 测度 $\mu=\sum\limits_{j=1}^4 \mu_j$ 是可积的, 其中 μ_j 是对应于 F_j 的测度.

(vii) 在下列情形下, 这些积分的值是可以直接计算的.

(a) 若 $F \in AC([a,b])$, 则对每个关于 $\mu = dF$ 可积的 Borel 可测函数 f, 有

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

(b) 若 F 是 §3.3.3中定义的纯跳跃函数: 在点 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的跃度分别为 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则当 f 连续且 $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$ 时,

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\{x_n\}} f(x)dF(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f(x_n)\alpha_n.$$

其中测度 μ 定义为 $\mu(\{x_n\}) = \alpha_n$, 对所有不包含任何 x_n 的集合 $\mu(E) = 0$.

(c) 作为特殊例子, 取 F 为 Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

则由 (b) 即得 (仅有一个不连续点 $x_1 = 0, \alpha_1 = 1$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dH(x) = f(0),$$

这是 §3.2中Dirac delta 函数的另一表达式.

§ 4.4 测度的绝对连续性

第3章中考虑的绝对连续性的概念的推广需要把测度的概念推广到可正可负的集函数上, 我们先来描述这一概念.

§ 4.4.1 带号测度

大致来说, 带号测度除了可以取负值外, 它具有测度的所有性质. 确切地说, 有如下定义.

定义 4.26. 设 $(X, \mathcal{M})$ 是一个可测空间, 称函数 $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ 是一个带号测度, 若

(i) $\nu(\varnothing) = 0$;

(ii) ν 至多取 $\pm\infty$ 中的一个;

(iii) 若 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{M}$ 中互不相交集, 则

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(E_j).$$

注记 4.27. 1) 由于可列多个集合取并是可以任意交换次序的, 因此 (iii) 中的级数若收敛到有限数则是无条件收敛的 (对于 $\mathbb{R}$ 中的级数而言, 无条件收敛与绝对收敛是等价的), 换言之, 任意改变级数中各项的次序, 级数的和不变.

2) 显然, 每个测度都是带号测度, 有时候将测度用 "正测度" 来表示以示强调.

来举个例子. 设 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 为测度空间, $f:X\to[-\infty,\infty]$ 是 μ-可测函数且 $\int f^- d\mu$ 和 $\int f^+ d\mu$ 中至少有一个是有限的 (称 f 为广义 μ-可积函数), 则由

$$\nu(E)=\int_E f d\mu$$

定义的集函数 ν 是一个带号测度.

命题 4.28. 设 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的带号测度.

(i) (下连续性) 若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的递增集列, 则 $\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)=\lim_{j\to\infty}\nu(E_j)$.

(ii) (上连续性) 若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的递减集列且 $\nu(E_1)$ 有限, 则 $\nu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j)=\lim_{j\to\infty}\nu(E_j)$.

证明与正测度或 Lebesgue 测度的情形相同, 故不再赘述.

定义 4.29. 设 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的带号测度, $E\in\mathcal{M}$. 若对 E 的所有可测子集 F, 总有 $\nu(F)\geqslant 0$ (或 $\nu(F)\leqslant 0$, 或 $\nu(F)=0$), 则称 E 为ν-正集(或ν-负集, 或ν-零集).

在上面的例子中, 当在 E 上 $f\geqslant 0$, $f\leqslant 0$, $f=0$ μ-a.e. 时, E 分别为 ν-正集, ν-负集和 ν-零集.

引理 4.30. ν-正集的任何可测子集仍是 ν-正集, ν-正集的任何可列并仍是 ν-正集.

定理 4.31 (Hahn 分解定理). 设 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的带号测度, 则存在 ν-正集 P 和 ν-负集 N, 使得 $P\cup N=X$ 且 $P\cap N=\varnothing$. 若 P', N' 是另一这样的对, 则 $P\Delta P'(=N\Delta N')$ 是 ν 的 ν-零集.

定义 4.32. 设 ν 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的带号测度, 若 P 和 N 分别是 ν-正集和 ν-负集, 满足 $P\cup N=X$ 和 $P\cap N=\varnothing$, 则称之为关于 ν 的Hahn 分解.

Hahn 分解定理保证了 Hahn 分解的存在性, 通常情况下 Hahn 分解不是唯一的 (ν-零集可以从 P 转移到 N, 或从 N 到 P), 但它诱导了 ν 的一个规范表示, 即作为两个正测度的差. 为了叙述这一结论, 我们需要新的概念.

定义 4.33. 设 ν 和 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{M})$ 上的两个带号测度, 若存在 $E,F\in\mathcal{M}$, 使得 $E\cap F=\varnothing$, $E\cup F=X$, E 是 μ-零集, F 是 ν-零集, 则称 ν 和 μ 是相互奇异的, 或 ν 关于 μ 奇异, 或反过来, 记为$\nu\perp\mu$. 若对所有的 $A\in\mathcal{M}$, 都有 $\nu(A)=\nu(A\cap E)$, 则称测度 ν支撑在集合 E 上.

定理 4.34 (Jordan 分解定理)**.** 设 ν 是一个带号测度, 则存在唯一正测度 ν^+ 和 ν^-, 使得 $\nu=\nu^+-\nu^-$ 且 $\nu^+\perp\nu^-$.

测度 ν^+ 和 ν^- 分别称为 ν 的正变差和负变差, $\nu=\nu^+-\nu^-$ 称为 ν 的Jordan 分解, 这类似于 $\mathbb{R}$ 上的有界变差函数可表示为两个递增函数的差. 定义 ν 的全变差为

$$|\nu|=\nu^++\nu^-.$$

观察到, 若 ν 不取值 ∞, 则 $\nu^+(X)=\nu(P)<\infty$, 从而 ν^+ 是有限测度且 ν 有上界 $\nu^+(X)$; 若 ν 不取值 $-\infty$ 也有类似结论. 特别地, 若 ν 的值域包含在 $\mathbb{R}$ 中, 则 ν 是有界的. 也观察到, ν 具有形式 $\nu(E)=\int_E f d\mu$, 其中 $\mu=|\nu|$, $f=\chi_P-\chi_N$, $X=P\cup N$ 为 ν 的 Hahn 分解.

关于带号测度的积分可以用显然的方式进行定义. 令

$$\begin{aligned} L^1(X,\nu) &:= L^1(X,\nu^+)\cap L^1(X,\nu^-), \\ \int f d\nu &= \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \quad (f\in L^1(X,\nu)). \end{aligned}$$

我们也给出如下定义: 若测度 $|\nu|$ 是有限的 (或 σ-有限的), 则称带号测度 ν 是有限的 (或 σ-有限的). 因为 $\nu\leqslant|\nu|$ 和 $|-\nu|=|\nu|$, 我们发现

$$-|\nu|\leqslant\nu\leqslant|\nu|.$$

从而, 若 ν 是 σ-有限的, 则 ν^+ 和 ν^- 也是.

§ 4.4.2 Lebesgue-Radon-Nikodym 定理

定义 4.35. 设 ν 和 μ 分别为 $(X,\mathcal{M})$ 上的带号测度和 (正) 测度, 若

$$\text{当}E\in\mathcal{M}\ \text{且}\ \mu(E)=0\text{时}, \nu(E)=0, \tag{AC-1}$$

则称 ν 关于 μ绝对连续, 记为 $\nu\ll\mu$.

绝对连续性与相互奇异是相对立的. 确切地说, 若 $\nu\perp\mu$ 且 $\nu\ll\mu$, 则 $\nu\equiv 0$. 事实上, 若 $A,B\in\mathcal{M}$ 不相交, $A\cup B=X$ 且 $\forall E\in\mathcal{M}$, 有 $\nu(E)=\nu(A\cap E)$, $\mu(E)=\mu(B\cap E)$, 故 $\forall E\subset B$ 有 $\nu(E)=0$, 即 B 为 ν-零集. 另外, 显然 $\forall F\subset A$ 有 $\mu(F)=0$, 而 $\nu\ll\mu$, 故 $\nu(F)=0$, 即 A 为 ν-零集. 从而由**??**得 $|\nu|(B)=0$ 和 $|\nu|(A)=0$. 因此, $|\nu|=0$, 从而 $\nu\equiv 0$.

一个重要例子可由关于 μ 的积分给出. 事实上, 若 $f\in L^1(X,\mu)$, 或 f 广义 μ-可积, 则由

$$\nu(E)=\int_E f d\mu \tag{4.6}$$

定义的带号测度关于 μ 是绝对连续的. 用缩写 $d\nu=fd\mu$ 代替由上式定义的 ν.

这是第3章出现的在特殊情形 $\mathbb{R}$($\mathcal{M}$ 为 Lebesgue 可测集, $d\mu=dx$ 为 Lebesgue 测度) 下提出的绝对连续概念的一个变形. 事实上, 有了(4.6)定义的 ν 和可积函数 f, 我们得到下列可取代(AC-1)的更强的论断:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{s.t. } \mu(E)<\delta\Longrightarrow|\nu(E)|<\varepsilon. \tag{AC-2}$$

一般情况下, 条件(AC-1)和(AC-2)之间的关系可由下列命题阐明.

命题 4.36. 论断(AC-2)蕴含(AC-1). 反之, 若 $|\nu|$ 是有限测度, 则(AC-1)蕴含(AC-2).

有了这些准备之后, 我们来看本节的主要定理. 它保证了表达式(4.6)的逆命题, 也刻画了与给定正测度相应的带号测度的结构. 先来看一个技巧性引理.

引理 4.37. 设 ν 和 μ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的有限测度, 则要么 $\nu\perp\mu$, 要么存在 $\varepsilon>0$ 和 $E\in\mathcal{M}$ 使得 $\mu(E)>0$ 且在 E 上 $\nu\geqslant\varepsilon\mu$ (即 E 是 $(\nu-\varepsilon\mu)$-正集).

定理 4.38 (Lebesgue-Radon-Nikodym 定理: 带号测度情形)**.** 设 ν 是可测空间 $(X,\mathcal{M})$ 上的一个 σ-有限带号测度, μ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的 σ-有限正测度, 则存

在 $(X,\mathcal{M})$ 上的唯一 σ-有限带号测度 λ 和 ρ, 使得

$$\lambda \perp \mu,\ \rho \ll \mu,\ \text{且}\, \nu = \lambda + \rho.$$

此外, 存在一个广义 μ-可积函数 $f : X \to \mathbb{R}$, 使得 $d\rho = f d\mu$, 且任何两个这样的函数是 μ-a.e. 相等的.

分解 $\nu = \lambda + \rho$, 其中 $\lambda \perp \mu$ 和 $\rho \ll \mu$, 称为 ν 关于 μ 的Lebesgue 分解. 当 $\nu \ll \mu$ 时, 定理 4.38说明存在某个 f 使 $d\nu = f d\mu$. 这个结果通常以Radon-Nikodym 定理而著称, f 被称为 ν 关于 μ 的Radon-Nikodym 导数, 记为 $d\nu/d\mu$:

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

(严格地说, $d\nu/d\mu$ 应该是与 f μ-a.e. 相等的函数类.) 由微分符号 $d\nu/d\mu$ 所暗示的一些公式一般是正确的. 比如: 显然有 $d(\nu_1 + \nu_2)/d\mu = (d\nu_1/d\mu) + (d\nu_2/d\mu)$, 并且有以下链式法则:

命题 4.39. 设 ν 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的 σ-有限带号测度, μ, λ 是 σ-有限测度且 $\nu \ll \mu$ 且 $\mu \ll \lambda$.

(i) 若 $g \in L^1(X,\nu)$, 则 $g(d\nu/d\mu) \in L^1(X,\mu)$ 且

$$\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

(ii) 成立 $\nu \ll \lambda$, 且

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \quad \lambda\text{-a.e.}$$

推论 4.40. 若 $\mu \ll \lambda$ 且 $\lambda \ll \mu$, 则 $\frac{d\lambda}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} = 1$, a.e. (关于 λ 或 μ).

另外, 设 μ 为 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 上的 Lebesgue 测度, ν 为在 0 处的点质量. 显然 $\nu \perp \mu$. 不存在的 Radon-Nikodym 导数 $d\nu/d\mu$ 即为所熟知的Dirac delta 函数.

我们以一个简单但重要的观察结束本节, 其证明是平凡的.

命题 4.41. 若 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 是 $(X,\mathcal{M})$ 上的测度, 则存在测度 μ 使得对所有的 j 有 $\mu_j \ll \mu$. (取 $\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$ 即可).

§ 4.4.3 复测度

定义 4.42. 若可测空间 $(X,\mathcal{M})$ 上的映射 $\nu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ 满足:

(i) $\nu(\varnothing)=0$;

(ii) 若 $\{E_j\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中互不相交集列, 则 $\nu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\nu(E_j)$, 其中级数绝对收敛.

则称 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的复测度.

特别地, 复测度不允许取无穷值. 因此, 正测度只要它有限就是一个复测度. 例如, μ 是一个正测度, $f\in L^1(X,\mu)$, 则 $fd\mu$ 是一个复测度. 另外, Lebesgue 测度显然不是复测度.

若 ν 是一个复测度, 则记它的实部和虚部分别为 ν_r 和 ν_i. 因此, ν_r 和 ν_i 是不取值 $\pm\infty$ 的带号测度, 故它们是有限的, 从而 ν 的值域是 $\mathbb{C}$ 的有界子集.

对带号测度发展的一些概念可以推广到复测度上. 比如, 可以定义 $L^1(X,\nu)=L^1(X,\nu_r)\cap L^1(X,\nu_i)$. 对 $f\in L^1(X,\nu)$, 可令 $\int fd\nu=\int fd\nu_r+i\int fd\nu_i$. 若 ν 和 μ 均为复测度, 若对 $a,b=r,i$, $\nu_a\perp\mu_b$, 则称 $\nu\perp\mu$, 若 λ 是一个正测度, 满足 $\nu_r\ll\lambda$, $\nu_i\ll\lambda$, 则称 $\nu\ll\lambda$. §4.4.2中的定理也可以推广, 仅仅分别应用它们到实部和虚部即可. 特别地:

定理 4.43 (Lebesgue-Radon-Nikodym 定理: 复测度情形)**.** 设 ν 为 $(X,\mathcal{M})$ 上的复测度, μ 是一个 σ-有限的正测度, 则存在一个复测度 λ 和一个 $f\in L^1(X,\mu)$ 使得 $\lambda\perp\mu$ 且 $d\nu=d\lambda+fd\mu$. 若另有 $\lambda'\perp\mu$ 和 $d\nu=d\lambda'+f'd\mu$, 则 $\lambda=\lambda'$ 和 $f=f'$ μ-a.e.

如之前一样, 若 $\nu\ll\mu$, 用 $d\nu/d\mu$ 表示定理 4.43中的 f.

复测度 ν 的全变差是由下列性质决定的正测度 $|\nu|$: 若 $d\nu=fd\mu$, 其中 μ 是一个正测度, 则 $d|\nu|=|f|d\mu$. 要说明这是良定的, 首先观察到每个 ν 具有形式 $fd\mu$, 其中 μ 为有限测度, $f\in L^1(X,\mu)$; 实际上, 我们能够取 $\mu=|\nu_r|+|\nu_i|$ 并用定理 4.43得到 f. 其次, 若 $d\nu=f_1d\mu_1=f_2d\mu_2$, 令 $\rho=\mu_1+\mu_2$. 则由命题 4.39得

$$f_1\frac{d\mu_1}{d\rho}d\rho=d\nu=f_2\frac{d\mu_2}{d\rho}d\rho,$$

故 $f_1\frac{d\mu_1}{d\rho}=f_2\frac{d\mu_2}{d\rho}$ ρ-a.e. 因 $\frac{d\mu_j}{d\rho}$ 是非负的, 故

$$|f_1|\frac{d\mu_1}{d\rho}=\left|f_1\frac{d\mu_1}{d\rho}\right|=\left|f_2\frac{d\mu_2}{d\rho}\right|=|f_2|\frac{d\mu_2}{d\rho}\quad \rho\text{-a.e.},$$

从而,

$$|f_1|d\mu_1 = |f_1|\frac{d\mu_1}{d\rho}d\rho = |f_2|\frac{d\mu_2}{d\rho}d\rho = |f_2|d\mu_2.$$

因此, $|\nu|$ 的定义不依赖于 μ 和 f 的选取. 这个定义和之前带号测度 ν 的全变差 $|\nu|$ 的定义是一致的, 因为那种情况下 $d\nu = (\chi_P - \chi_N)d|\nu|$, 其中 $X = P \cup N$ 是 Hahn 分解, 且 $|\chi_P - \chi_N| = 1$.

命题 4.44. 设 ν 为 $(X, \mathcal{M})$ 上的一个 (非零) 复测度, 下列结论成立:

(a) $\forall E \in \mathcal{M}$, $|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E)$.

(b) $\nu \ll |\nu|$, 且 $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ 的绝对值 $|\nu|$-a.e. 为 1.

(c) $L^1(X,\nu) = L^1(X,|\nu|)$, 若 $f \in L^1(X,\nu)$, 则 $|\int f d\nu| \leqslant \int |f| d|\nu|$.

命题 4.45. 若 ν_1, ν_2 是 $(X, \mathcal{M})$ 上的复测度, 则 $|\nu_1 + \nu_2| \leqslant |\nu_1| + |\nu_2|$.

第五章

L^p 空间

§ 5.1 L^p 空间的基础理论

本章中我们将在一个固定的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上进行. 若 f 是 X 上的一个可测函数, $p \in (0, \infty)$, 定义

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu\right]^{1/p}$$

(允许 $\|f\|_p = \infty$ 的可能), 并定义

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} :\ f\text{可测且}\|f\|_p < \infty\}.$$

在不引起混淆的情况下, 可以将$L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$简记为 $L^p(X, \mu)$, $L^p(\mu)$, $L^p(X)$ 或 L^p. 正如 L^1 那样, 当两个函数 μ-a.e. 相等时, 它们给出的是 L^p 中同一个元素.

若 A 是一非空集, 对 $p \in (0, \infty)$ 定义 $\ell^p(A)$ 为 $L^p(\mu)$, 其中 μ 是 $(A, \mathscr{P}(A))$ 上的计数测度, 范数为

$$\|f\|_p = \left(\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^p\right)^{1/p},$$

当 $A = \mathbb{N}$ 时, 简记 $\ell^p(\mathbb{N})$ 为ℓ^p, 故对序列 $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\|f\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^p\right)^{1/p}$.

若 $f, g \in L^p$, 则

$$|f + g|^p \leqslant [2 \max(|f|, |g|)]^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

故 $f + g \in L^p$, 因此, L^p 是一个线性空间. 我们需要验证 $\|\cdot\|_p$ 是不是满足范数的条件. 显然, $\|f\|_p = 0$ 当且仅当 $f = 0$ a.e., $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p$, 所以仅剩的问题是三角不等式. 结果表明当 $p \geqslant 1$ 时是成立的, 故此我们几乎全部集中在这种情形进行讨论.

不过, 在这之前, 我们先看看当 $p < 1$ 时三角不等式为什么不成立. 设 $a > 0, b > 0, p \in (0, 1)$. 对 $t > 0$, 有 $t^{p-1} > (a + t)^{p-1}$, 关于 t 在 $(0, b)$ 上积分可得 $b^p > (a + b)^p - a^p$, i.e., $a^p + b^p > (a + b)^p$. 因此, 若 E, F 为 X 中的两个具有

正有限测度的互不相交集, 令 $a=\mu(E)^{1/p}, b=\mu(F)^{1/p}$, 则

$$\|\chi_E+\chi_F\|_p=(a^p+b^p)^{1/p}>a+b=\|\chi_E\|_p+\|\chi_F\|_p.$$

我们现在来推导 L^p 空间理论的基石— Hölder 不等式. 先证一个引理.

引理 5.1 (Young 不等式). 若 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, \lambda\in(0,1)$, 则

$$a^\lambda b^{1-\lambda}\leqslant \lambda a+(1-\lambda)b,$$

其中等号成立当且仅当 $a=b$.

定理 5.2 (Hölder 不等式). 设 $p\in(1,\infty), p^{-1}+q^{-1}=1$ (i.e., $q=p/(p-1)$). 若 f,g 是 X 上的可测函数, 则

$$\|fg\|_1\leqslant \|f\|_p\|g\|_q. \tag{5.1}$$

特别地, 若 $f\in L^p, g\in L^q$, 则 $fg\in L^1$, 且在这种情况下, (5.1)中等号成立当且仅当对某些常数 $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ 有 $\alpha|f|^p=\beta|g|^q$ a.e.

Hölder 不等式中的条件 $p^{-1}+q^{-1}=1$ 在 L^p 理论中经常出现. 若 $p\in(1,\infty)$, 则称 $p'=p/(p-1)$ 为 p 的共轭指数, 即满足 $1/p+1/p'=1$.

定理 5.3 (Minkowski 不等式). 设 $p\in[1,\infty), f,g\in L^p$, 则

$$\|f+g\|_p\leqslant \|f\|_p+\|g\|_p.$$

这个结果说明了当 $p\in[1,\infty)$ 时, L^p 是一个赋范线性空间. 而且它依范数度量是完备的. 若赋范线性空间依范数度量是完备的, 则称之为Banach 空间. 故有

定理 5.4 (Riesz-Fischer 定理). 对 $p\in[1,\infty)$, L^p 是 Banach 空间.

证明与 L^1 完备性 (定理 2.24) 的证明基本相同, 将其中的 L^1 范数换成 L^p 范数即可. 这里不再赘述.

接下来, 我们讨论 L^p 空间中的函数类. 对一般的测度空间, 需要拓展简单函数的定义. X 上的简单函数 是 $\mathcal{M}$ 中集合的特征函数的复系数有限线性组合. (不允许取值 $\pm\infty$.) 等价地, $f:X\to\mathbb{C}$ 是简单的当且仅当 f 可测且其值域是 $\mathbb{C}$ 的有限子集. 实际上, 有

$$f=\sum_{j=1}^n z_j\chi_{E_j}, \text{ 其中} E_j=f^{-1}(\{z_j\}), \mathrm{range}(f)=\{z_1,\cdots,z_n\}.$$

我们称此式为 f 的规范表达式, 即 z_j 互异, E_j 互不相交且 $\bigcup\limits_{j=1}^n E_j=X$. (注:

系数 z_j 可以取 0, 但该项 $z_j\chi_{E_j}$ 仍需作为规范表达式的一部分出现, 当 f 与其它函数作用时该 E_j 仍起作用.) 显然, 若 f 和 g 是简单函数, 则 $f+g$ 和 fg 也是. 现在我们将 σ-有限测度空间中可测函数用 (有限) 简单函数逼近的定理 (命题 4.15) 推广到一般的可测空间上.

定理 5.5. 设 $(X,\mathcal{M})$ 为可测空间.

i) 若 $f: X\to[0,\infty]$ 可测, 则存在简单函数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $0\leqslant\varphi_1\leqslant\varphi_2\leqslant\cdots\leqslant f$, $\varphi_n\to f$ (逐点), 且在任何使 f 有界的集合上一致收敛.

ii) 若 $f: X\to\mathbb{C}$ 可测, 则存在简单函数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $0\leqslant|\varphi_1|\leqslant|\varphi_2|\leqslant\cdots\leqslant|f|$, $\varphi_n\to f$ (逐点), 且在任何使 f 有界的集合上一致收敛.

命题 5.6. 设 $p\in[1,\infty)$, 则由简单函数 $f=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\chi_{E_j}$, 其中 $\mu(E_j)<\infty$, 所构成的类在 L^p 中稠密.

下面考虑 $p=\infty$ 的情形. 设 f 是 X 上的可测函数, 定义

$$\|f\|_\infty=\inf\{a\geqslant 0:\ \mu(\{x:\ |f(x)|>a\})=0\},$$

并约定 $\inf\varnothing=\infty$. 我们观察到

$$\{x:\ |f(x)|>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:\ |f(x)|>a+1/n\},$$

若右边为零测集, 则左边也是. 这说明下确界确实是可以达到的. $\|f\|_\infty$ 称为 $|f|$ 的本性上确界, 有时候写为

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|.$$

定义

$$L^\infty=L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)=\{f: X\to\mathbb{C}:\ f\text{可测且}\|f\|_\infty<\infty\},$$

还是按通常的约定: 几乎处处相等的两个函数定义 L^∞ 中的同一个元素. 这样 $f\in L^\infty$ 当且仅当存在一个有界可测函数 g 使得 $f=g$ a.e., 可以取 $g=f\chi_E$, 其中 $E=\{x:\ |f(x)|\leqslant\|f\|_\infty\}$.

注记 5.7. (i) 对固定的 X 和 $\mathcal{M}$, $L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$ 只有在 μ 决定哪个集合具有零测度时依赖于 μ, 若 μ 和 ν 相互绝对连续, 则 $L^\infty(\mu)=L^\infty(\nu)$.

(ii) 若 μ 不是半有限的, 为了某种目的, 采用 L^∞ 的稍微不同的定义可能更为适合. (cf. [Fol13, Ex.6.23–6.25])

对 $p\in[1,\infty)$ 已证明的结果可容易地推广到 $p=\infty$ 的情形, 归纳如下:

定理 5.8. (i) (Hölder 不等式) 若 f 和 g 是 X 上的可测函数, 则 $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$. 若 $f \in L^1$ 且 $g \in L^\infty$, 则 $\|fg\|_1 = \|f\|_1\|g\|_\infty$ 当且仅当在 $\{x : f(x) \neq 0\}$ 上 $|g(x)| = \|g\|_\infty$ a.e.

(ii) $\|\cdot\|_\infty$ 是 L^∞ 上的范数.

(iii) $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ 当且仅当存在 $E \in \mathcal{M}$, 使得 $\mu(E^c) = 0$ 且 f_n 在 E 上一致收敛到 f.

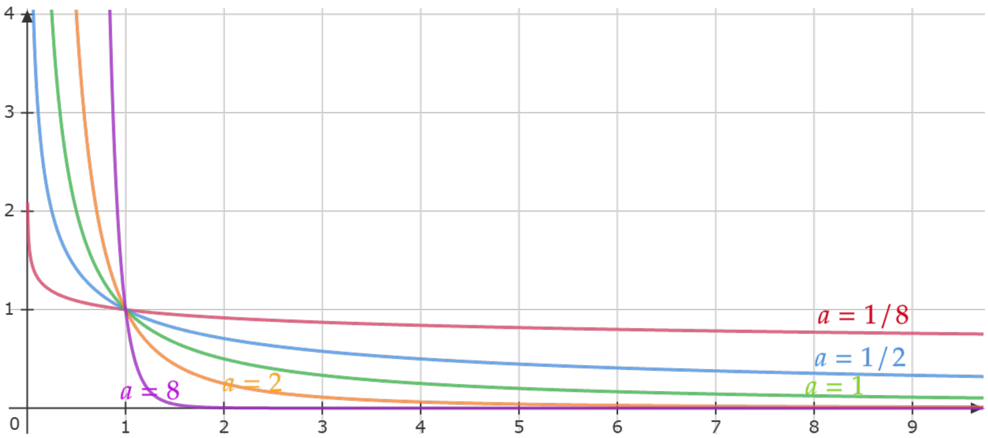
(iv) (Riesz-Fischer 定理) L^∞ 是 Banach 空间.

(v) 简单函数在 L^∞ 中稠密. (注: 这里简单函数的表达式中的可测集并不要求测度有限.)

因定理 5.8 (i) 及形式上的等式 $1^{-1} + \infty^{-1} = 1$, 自然可以把 1 和 ∞ 看作相互的共轭指数, 记 $1' = \infty$, $\infty' = 1$.

定理 5.8 (iii) 说明 $\|\cdot\|_\infty$ 与一致范数 $\|\cdot\|_u$ 密切相关, 但通常又不相等. 然而, 若是 Lebesgue 测度或对所有开集赋予正值的任何 Borel 测度, 则当 f 连续时, 因 $\{x : |f(x)| > a\}$ 是开集, 故有 $\|f\|_\infty = \|f\|_u$. 在这种情况下, 我们可以交换使用 $\|f\|_\infty$ 和 $\|f\|_u$, 并可以将有界连续函数空间看作 L^∞ 的 (闭) 子空间.

一般情况下, 对所有的 $p \neq q$, 有 $L^p \not\subset L^q$. 为了更直观地说明这一点, 我们考虑具有 Lebesgue 测度的 $(0, \infty)$ 上的简单例子. 令 $f_a(x) = x^{-a}$, $a > 0$. 易知 $f_a\chi_{(0,1)} \in L^p$ 当且仅当 $p < 1/a$, 而 $f_a\chi_{(1,\infty)} \in L^p$ 当且仅当 $p > 1/a$.



由此我们看到了使 $f \notin L^p$ 的两个原因: 或是 $|f|^p$ 在某个点附近爆破地太快, 或是它在无穷远处衰减地不够快. 在第一种情形下, $|f|^p$ 的性态随着 p 的增大而变得更糟, 而在第二种情形下它会变得更好. 换言之, 若 $p < q$, L^p 函数比 L^q 函数局部更奇异, 而 L^q 函数比 L^p 函数整体上更加伸展. 这些表达得有些不准确的想法实际上是对一般情况的相当准确的指导, 我们现在给出四个确切的结果. 后两个说的是包含关系 $L^p \subset L^q$ 可以在不允许上述糟糕性态类型之一的测度

空间的条件下得到, 对于一般情形见 [Fol13, Ex.6.5].

命题 5.9. 若 $0<p<q<r\leqslant\infty$, 则 $L^q\subset L^p+L^r$; 即每个 $f\in L^q$ 均可表示成一个 L^p 函数和一个 L^r 函数的和.

命题 5.10. 若 $0<p<q<r\leqslant\infty$, 则 $L^p\cap L^r\subset L^q$ 且 $\|f\|_q\leqslant\|f\|_p^\lambda\|f\|_r^{1-\lambda}$, 其中 $\lambda\in(0,1)$ 由下式给出:

$$\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r},\ \text{i.e.,}\ \lambda=\frac{1/q-1/r}{1/p-1/r}.$$

命题 5.11. 设 $0<p<q\leqslant\infty$, 则对任何集合 A, 有 $\ell^p(A)\subset\ell^q(A)$ 且 $\|f\|_q\leqslant\|f\|_p$, 其中 $\|f\|_\infty:=\sup\limits_\alpha|f(\alpha)|$.

命题 5.12. 若 $\mu(X)<\infty$, $0<p<q\leqslant\infty$, 则 $L^p(\mu)\supset L^q(\mu)$ 且 $\|f\|_p\leqslant\|f\|_q\mu(X)^{1/p-1/q}$.

下面的命题说明了上面定义的 L^∞ 为什么记为 L^∞. 实际上, 对有限测度而言, 当 $p\to\infty$ 时, L^p 范数即趋于 L^∞ 范数.

命题 5.13. 设 $\mu(X)<\infty$, $f\in L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$. 则对任意的 $p\in[1,\infty)$, 有 $f\in L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ 且

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty.$$

下面给出一些关于 L^p 空间重要性的注记来结束本节. 最重要的三个是 L^1, L^2 和 L^∞. 我们已经很熟悉 L^1 了, L^2 比较特殊因为它是 Hilbert 空间, 而 L^∞ 上的拓扑与一致收敛拓扑紧密相关. 不幸的是, L^1 和 L^∞ 在很多方面是病态的, 处理中间那些 L^p 空间更有成效. 这方面的一个表现是下一节中的对偶理论, 另一个是 Fourier 分析和微分方程中许多有趣的算子对于 $p\in(1,\infty)$ 都在 L^p 上有界, 但在 L^1 或 L^∞ 上不是.

§ 5.2 L^p 的对偶

定义 5.14. 设 V 是一个赋范线性空间, 定义它的对偶空间V^* 为 V 上的连续线性泛函所构成的空间, 即

$$V^* = \{T : V \to \mathbb{C} : T\text{是线性的, 且}|T(x)| \leqslant C\|x\|, \forall x \in V\}.$$

泛函 T 的范数定义为 $\|T\| = \sup\{|T(x)| : \|x\| = 1\}$.

V^* 是一个赋范线性空间. 实际上, 显然有 $\|T\| = 0$ 当且仅当 $T = 0$; 因 T 线性故 $\|cT\| = |c|\|T\|$; 由 $|T_1(x) + T_2(x)| \leqslant |T_1(x)| + |T_2(x)| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$ 关于所有范数为 1 的 $x \in V$ 取上确界即得三角不等式.

设 p 和 p' 是共轭指数. 对每个 $g \in L^{p'}$ 定义 L^p 上的泛函 $\phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$:

$$\phi_g(f) = \int_X fg d\mu.$$

显然 ϕ_g 是线性的, 且由 Hölder 不等式

$$|\phi_g(f)| \leqslant \|f\|_p\|g\|_{p'}, \quad \text{i.e., } \|\phi_g\| \leqslant \|g\|_{p'}.$$

实际上, 映射 $g \mapsto \phi_g$ 几乎是从 $L^{p'}$ 到对偶空间 $(L^p)^*$ 的等距同构.

命题 5.15. 设 $p' \in [1, \infty)$, p 和 p' 是共轭指数. 若 $g \in L^{p'}$, 则

$$\|g\|_{p'} = \|\phi_g\| = \sup\left\{\left|\int fg\right| : \|f\|_p = 1\right\}.$$

若 μ 是半有限的, 则这个结果对 $p' = \infty$ 也成立.

相反地, 若 $f \mapsto \int fg$ 是 L^p 上的有界线性泛函, 则对几乎所有情形有 $g \in L^{p'}$. 实际上, 我们有如下更强的结论.

定理 5.16. 设 $p \in [1, \infty]$, p 和 p' 是共轭指数. 假设 g 是 X 上的可测函数并满足: 对支撑在有限可测集上的简单函数空间 Σ 中所有 f, 有 $fg \in L^1$, 且

$$M_{p'}(g) = \sup\left\{\left|\int fg\right| : f \in \Sigma, \|f\|_p = 1\right\} < \infty.$$

另外, 假设 $S_g = \{x : g(x) \neq 0\}$ 是 σ-有限的或者 μ 是半有限的. 则 $g \in L^{p'}$ 且 $M_{p'}(g) = \|g\|_{p'}$.

对 $(L^p)^*$ 的描述的最终的也是最深刻的部分是映射 $g \mapsto \phi_g$ 在几乎所有的情形下是一个满射.

定理 5.17 (关于 L^p 对偶的 Riesz 表示定理). 设 p 和 p' 是共轭指数. 若 $p\in(1,\infty)$, 则对每个 $\phi\in(L^p)^*$, 存在 $g\in L^{p'}$ 使得对所有的 $f\in L^p$ 有 $\phi(f)=\int fg$, 因此 $L^{p'}$ 等距同构于 $(L^p)^*$. 若 μ 是 σ-有限的, 则同样的结论对 $p=1$ 也成立.

接下来, 我们对特殊情形 $p=1$ 和 $p=\infty$ 做一些注记.

(1) 先看 $p=1$ 的情形. 对任意测度 μ, 对应 $g\mapsto\phi_g$ 映射 L^∞ 到 $(L^1)^*$, 但一般它既不是单射也不是满射.

(i) 当 μ 不是半有限时单射不成立. 实际上, 若 $E\subset X$ 是一个不包含正有限测度集的任何子集的无穷可测集, $f\in L^1$, 则 $\{x:f(x)\neq 0\}$ 是 σ-有限的, 因此与 E 的交集为零测集. 由此可得 $\phi_{\chi_E}=0$, 但在 L^∞ 中 $\chi_E\neq 0$. 因此不是单射.

不过, 这个问题可以通过重新定义 L^∞ 而得到纠正 (cf. [Fol13, Ex.6.23-24]). 另外, $g\mapsto\phi_g$ 是单射当且仅当 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 是半有限的, 详见 [Fre10, 243G, p.153].

(ii) 满射不成立的原因更加微妙, 可以用下面的例子来阐明, 也可参见 [Fol13, Ex.6.25]. 设 X 为不可数集, $\mathcal{M}$ 为包含所有可数集和它们的补集的 σ-代数. 令 μ 为计数测度, 它是半有限的. 注意到任何 $f\in L^1(\mu)$ 的支集为可数集, 令 $E\subset X$ 但 $E\notin\mathcal{M}$, 对 $f\in L^1(\mu)$ 令 $\phi(f)=\sum\limits_{x\in E}f(x)$. 显然这是 $L^1(\mu)$ 上的一个连续线性泛函, 其范数为 1. 然而, 若 $\phi(f)=\int fg d\mu$, 则必有 $g=\chi_E$, 但因 E 不可测故 $g\notin L^\infty(\mu)$. 因此满射不成立.

(2) 对于 $p=\infty$ 的情形: 由命题 5.15得映射 $g\mapsto\phi_g$ 总是由 L^1 到 $(L^\infty)^*$ 的等距单射, 但它几乎永远不是一个满射. 参见 [Fol13, §6.2 & §6.6].

最后, 我们给出 L^p 中弱收敛的定义:

定义 5.18. 设 (X,μ) 为测度空间, $p\in[1,\infty]$, 称 $L^p(X,\mu)$ 中的函数列 $\{f_n\}$弱收敛到 $f\in L^p(X,\mu)$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n g d\mu=\int fg d\mu,\quad \forall g\in(L^p(X,\mu))^*,$$

记作 $f_n\rightharpoonup f$.

设 $p\in(1,\infty)$, 若 $f_n\xrightarrow{\|\cdot\|}f$, 则 $f_n\rightharpoonup f$. 事实上，由 Hölder 不等式即得 $\forall g\in L^{p'}$,

$$\left|\int(f_n g-fg)d\mu\right|\leqslant\|g\|_{p'}\|f_n-f\|_p.$$

因此, 强收敛蕴含着弱收敛. 但反之不然, 参见 [Fol13, Ex. 6.22a].

§5.3 一些有用的不等式

估计和不等式是 L^p 空间在分析中的应用中处于核心地位. 最基础的是 Hölder 和 Minkowski 不等式. 本节我们推导本领域中其它一些重要的结果. 第一个几乎是平凡的, 但它非常有用, 值得特别提及.

定理 5.19 (Chebyshev 不等式). 若 $f \in L^p(X,\mu)$, $0 < p < \infty$, 则对任意的 $\alpha > 0$,

$$\mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \leqslant \left[\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right]^p.$$

下一个结果是关于积分算子在 L^p 空间上有界性的更一般的定理.

定理 5.20. 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是 σ-有限测度空间, K 是 $(X \times Y, \mu \times \nu)$ 上的一个可测函数. 假设存在 $C > 0$ 使得 $\int |K(x,y)| d\mu(x) \leqslant C$ a.e. $y \in Y$ 且 $\int |K(x,y)| d\nu(y) \leqslant C$ a.e. $x \in X$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 若 $f \in L^p(Y)$, 则积分

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) d\nu(y)$$

对 a.e. $x \in X$ 绝对收敛, 从而函数 Tf 定义在 $L^p(\mu)$ 中, 且 $\|Tf\|_p \leqslant C\|f\|_p$. ($T$ 称为积分算子.)

Minkowski 不等式说的是一个和的 L^p 范数至多是 L^p 范数之和. 这个结果的一个推广就是将其中的和换成积分:

定理 5.21 (积分的 Minkowski 不等式). 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是 σ-有限测度空间, f 是 $(X \times Y, \mu \times \nu)$ 上的可测函数.

(i) 若 $f \geqslant 0$ 和 $p \in [1,\infty)$, 则

$$\left[\int \left(\int f(x,y) d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int \left[\int f^p(x,y) d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y).$$

(ii) 若 $p \in [1,\infty]$, $f(\cdot,y) \in L^p(\mu)$ a.e. y, 且函数 $y \mapsto \|f(\cdot,y)\|_p$ 属于 $L^1(\nu)$, 则 $f(x,\cdot) \in L^1(\nu)$ a.e. x, 函数 $x \mapsto \int f(x,y) d\nu(y)$ 属于 $L^p(\mu)$, 且

$$\left\|\int f(\cdot,y) d\nu(y)\right\|_p \leqslant \int \|f(\cdot,y)\|_p d\nu(y).$$

最后一个结果是关于赋予 Lebesgue 测度的 $(0,\infty)$ 上的积分算子的一个定理.

定理 5.22. 令 K 是 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上的 Lebesgue 可测函数, 对所有 $\lambda>0$ 满足 $K(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{-1}K(x,y)$ 及对某个 $p\in[1,\infty]$ 有 $\int_0^\infty |K(x,1)|x^{-1/p}dx = C<\infty$, 令 p' 为 p 的共轭指数. 对 $f\in L^p$ 和 $g\in L^{p'}$, 令

$$Tf(y)=\int_0^\infty K(x,y)f(x)dx,\quad Sg(x)=\int_0^\infty K(x,y)g(y)dy.$$

则 Tf 和 Sg a.e. 有定义, 且有 $\|Tf\|_p\leqslant C\|f\|_p$ 和 $\|Sg\|_{p'}\leqslant C\|g\|_{p'}$.

推论 5.23. 令

$$Tf(y)=y^{-1}\int_0^y f(x)dx,\quad Sg(x)=\int_x^\infty y^{-1}g(y)dy.$$

则对 $1<p\leqslant\infty$ 和 $1\leqslant q<\infty$,

$$\|Tf\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_p,\quad \|Sg\|_q\leqslant q\|g\|_q.$$

推论 5.23 是 Hardy 不等式的一个特殊情形; 一般情形见 [Fol13, Ex.6.29].

第六章

Hilbert 空间

Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 和 $v=(v_1,\cdots,v_n)$ 的内积 $\langle u,v\rangle$ 定义为

$$\langle u,v\rangle=\sum_{k=1}^{n}u_k v_k.$$

我们称之为Euclid 内积. Euclid 范数定义为

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle},\quad \forall u\in\mathbb{R}^n.$$

关于 Euclid 内积有正交性这一重要概念, 它将几何观点引进到有限维空间问题的研究中: 如, 子空间有正交补, 方程组的可解性能够用正交关系来确定. 内积还揭示了具有非常特殊结构的线性算子类 (其中突出的是对称算子), 它们有一个完美的特征向量表示. 本章我们研究如 Euclid 空间那样具有与范数相关的内积的 Banach 空间 $\mathcal{H}$. 这些空间称为 Hilbert 空间. 我们将证明: 若 V 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间, 则 $\mathcal{H}$ 是 V 和它的正交补的直和. 基于这种结构性质, 将证明 Riesz-Fréchet 表示定理, 它刻画了 Hilbert 空间的对偶空间. 我们也会证明 Bessel 不等式, 由此可推导出可列规范正交集是一个规范正交基当且仅当它的线性扩张是稠密的. 本章最后讨论了 Hilbert 空间上的有界对称算子和紧算子, 为关于紧对称算子特征值展开的 Hilbert-Schmidt 定理的证明做准备.

§ 6.1 内积和正交性

定义 6.1. 设 $\mathcal{H}$ 为实 (或复) 数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 若函数 $(\cdot,\cdot):\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ 对所有的 $x_1,x_2,x,y\in\mathcal{H}$ 及 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 满足

(i) 关于第一参数的线性性: $(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha(x_1,y)+\beta(x_2,y)$,

(ii) (共轭) 对称性: $(x,y)=\overline{(y,x)}$,

(iii) 正定性: $(x,x)\geqslant 0$, 且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$,

则称为 $\mathcal{H}$ 上的实 (或复) 内积, 实内积通常记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 具有实 (或复) 内积的线性空间 $\mathcal{H}$ 称为实 (或复) 内积空间.

当 $\mathbb{K}$ 为实数域时, (ii) 即为 $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$, 结合 (i) 即知 $\langle x,y\rangle$ 关于 x,y 都

是线性的, 称为双线性的.

当 $\mathbb{K}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 时, 对 $x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 由 (i) 和 (ii) 可得

$$(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(x, y_1) + \overline{\beta}(x, y_2).$$

我们称 (x, y) 关于 y 是反线性的或共轭线性的.

在无穷维空间中, 我们可以立即举两个内积空间的例子. 对两个序列 $x = \{x_k\}, y = \{y_k\} \in \ell^2$, 实 (或复) ℓ^2 内积定义为

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad (\text{或}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}).$$

设 E 为 Lebesgue 可测集, $m = dx$ 为 Lebesgue 测度, 对于两个函数 $f, g \in L^2(E, m)$, 其内积定义为

$$(f, g) = \int_E f\overline{g}dx.$$

在第5章中我们得到了 Hölder 不等式, 作为特殊例子, 当 $p = 2$, $f, g \in L^2(E)$ 时, 有 $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$. 这个不等式实际上对任何的内积空间都成立.

定理 6.2 (Cauchy-Schwarz 不等式). 对内积空间 $\mathcal{H}$ 内的任何两个向量 x, y, 有

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

命题 6.3. 对内积空间 $\mathcal{H}$ 中的向量 h, 定义 $\|h\| = \sqrt{(h, h)}$. 则 $\|\cdot\|$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个范数, 称为由内积 $(\cdot, \cdot)$ 诱导的范数. 从而 $\mathcal{H}$ 按该范数是一个实 (或复) 赋范线性空间.

下面的等式刻画了由内积诱导的范数.

定理 6.4 (平行四边形公式). 对内积空间 $\mathcal{H}$ 中的任何向量 u, v, 有

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

由上面证明中的等式及其变形很容易得到下面恒等式.

定理 6.5 (极化恒等式). 对内积空间 $\mathcal{H}$ 中的任何向量 u, v:

当 $\mathbb{K}$ 为实数域时, 有

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2);$$

当 $\mathbb{K}$ 为复数域时, 有

$$(u,v)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\|u+i^k v\|^2.$$

上面, 我们知道了由内积可以诱导出一个范数, 反之, 设 $\mathcal{H}$ 是赋范线性空间, 若 $\mathcal{H}$ 的范数满足平行四边形公式, 则在 $\mathcal{H}$ 中可以定义内积 $(\cdot,\cdot)$ 使 $\mathcal{H}$ 成为内积空间, 且 $\mathcal{H}$ 的范数就是由内积 $(\cdot,\cdot)$ 诱导出的. 验证 $(\cdot,\cdot)$ 是内积的推导留给大家 (cf. [王 19, pp.75-76]).

定义 6.6. 若内积空间 $\mathcal{H}$ 依由内积诱导的范数是 Banach 空间, 则称 $\mathcal{H}$ 为Hilbert 空间. 若 $\mathcal{H}$ 不完备, 则称 $\mathcal{H}$ 为准 Hilbert 空间.

例如, Riesz-Fischer 定理告诉我们当 E 为实 (或复) 数可测集时, $L^2(E)$ 是 Hilbert 空间, 作为推论 ℓ^2 也是.

命题 6.7. 设 K 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一个非空闭凸子集, $h_0\in\mathcal{H}\setminus K$. 则存在唯一的向量 $h_*\in K$ 使得它在

$$\|h_0-h_*\|=\operatorname{dist}(h_0,K)=\inf_{h\in K}\|h_0-h\|$$

的意义下离 h_0 最近. 称 h_* 为 h_0 在 K 中的最佳逼近元.

定义 6.8. 设 $\mathcal{H}$ 为内积空间, $u,v\in\mathcal{H}$. 若 $(u,v)=0$, 则称 u 与 v正交, 记为 $u\perp v$.

设 S 是 $\mathcal{H}$ 的一个子集, $u\in\mathcal{H}$. 若 u 与 S 内的任一元素正交, 则称 u 与 S 正交, 记为 $u\perp S$. $\mathcal{H}$ 中所有与 S 正交的元素构成的集记为 $S^\perp$.

设 S,V 均是 $\mathcal{H}$ 的子集, 若对任意的 $u\in S$ 以及任意的 $v\in V$, 有 $u\perp v$, 则称 S 与 V 正交, 记为 $S\perp V$.

设 S 是内积空间 $\mathcal{H}$ 的一个子集, 则 $S^\perp$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间. 事实上, 若 $\{f_n\}\subset S^\perp$ 收敛于 f, 则由 Cauchy-Schwarz 不等式得 $|(f,g)|=|(f_n,g)-(f,g)|=|(f_n-f,g)|\leqslant\|f_n-f\|\|g\|\to 0, \forall g\in S$. 故 $f\in S^\perp$. 下面的定理是基本的.

定理 6.9. 设 V 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间. 则 $\mathcal{H}$ 有正交直和分解

$$\mathcal{H}=V\oplus V^\perp. \tag{6.1}$$

我们有以下推论, 证明留作习题.

推论 6.10. 设 S 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子集. 则 S 的闭线性扩张是整个 $\mathcal{H}$ 当且仅当 $S^{\perp}=\{0\}$.

上面定理是说, 对 $\mathcal{H}$ 中任一元素 u, 有下列唯一的正交分解:

$$u=v+w,\quad 其中 v\in V,\ w\in V^{\perp}.$$

v 称为 u 在 V 中的正交投影.

用 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$, 即由 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$ 的连续线性算子构成的空间. 根据(6.1), 对 $\mathcal{H}$ 的闭子空间 V, 称 $V^{\perp}$ 为 V 在 $\mathcal{H}$ 中的正交补, 而(6.1)称为 $\mathcal{H}$ 的正交分解. 算子 $P\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 沿 $V^{\perp}$ 到 V 上的投影称为 $\mathcal{H}$ 到 V 的正交投影.

命题 6.11. 设 P 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$ 的非平凡闭子空间 V 的正交投影. 则 $\|P\|=1$ 且

$$(Pu,v)=(u,Pv),\quad \forall u,v\in\mathcal{H}. \tag{6.2}$$

§ 6.2 对偶空间和 Riesz(-Fréchet) 表示定理

对于实 (或复) 数的可测集 X, $1<p<\infty$, 关于 $L^p(X)$ 的 Riesz 表示定理明确描述了 $L^{p'}(X)$ 到 $(L^p(X))^*$ 的等距同构. 该定理的 $p=2$ 的情形可以推广到一般的 Hilbert 空间.

定理 6.12 (Riesz(-Fréchet) 表示定理). 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间. 对每个 $\ell\in\mathcal{H}^*$, 必存在唯一的 $h\in\mathcal{H}$ 使得下面的表示成立:

$$\ell(u)=(u,h),\quad \forall u\in\mathcal{H},\ 且\|\ell\|=\|h\|. \tag{6.3}$$

反之, 对任一元素 $h\in\mathcal{H}$, 由等式

$$T(h)[u]=(u,h),\forall u\in\mathcal{H} \tag{6.4}$$

定义了一个线性泛函 $T(h):\mathcal{H}\to\mathbb{C}$. 由此定义的算子 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}^*$ 是 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}^*$ 上的等距共轭同构映射.

现在在 $\mathcal{H}^*$ 中定义内积. 对于 $u\mapsto f$, $v\mapsto g$ $(u,v\in\mathcal{H},\ f,g\in\mathcal{H}^*)$, 令

$$(f,g)=\overline{(u,v)}.$$

不难证明, $\mathcal{H}^*$ 为 Hilbert 空间. 于是 T 是两个 Hilbert 空间之间的等距 (共轭) 同构. 今后我们将它们视为同一空间, 即 $\mathcal{H}=\mathcal{H}^*$. 此性质称为 Hilbert 空间的自对偶性或自共轭性. 它与 Riesz(-Fréchet) 表示定理一样是 Hilbert 空间理论中又一

个基本事实.

§ 6.3 Bessel 不等式和规范正交基

本节中 $\mathcal{H}$ 为实 (或复) 内积空间.

定义 6.13. $\mathcal{H}$ 的一个子集 S 称为正交的, 若 S 中的每两个向量是正交的. 若这样的集合 S 中的每个向量还是单位向量, 则称 S 为规范正交的.

定理 6.14 (广义 Pythagoras 恒等式). 若 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $\mathcal{H}$ 中的 n 个规范正交向量, 而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是实 (或复) 数, 则

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2.$$

定理 6.15 (Bessel 不等式). 对 $\mathcal{H}$ 中的规范正交列 $\{\varphi_k\}$ 和向量 $h \in \mathcal{H}$, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \leqslant \|h\|^2.$$

命题 6.16. 令 $\{\varphi_k\}$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个规范正交列, 向量 $h \in \mathcal{H}$. 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (h, \varphi_k)\varphi_k$ 在 $\mathcal{H}$ 中强收敛且向量 $h - \sum\limits_{k=1}^{\infty} (h, \varphi_k)\varphi_k$ 与每个 φ_k 正交.

定义 6.17. 设 $\{\varphi_k\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个规范正交列, 若对任一 $h \in \mathcal{H}$, 由 $(h, \varphi_k) = 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ 只能导出 $h = 0$, 则称 $\{\varphi_k\}$ 是完备的.

由推论 6.10可得 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的规范正交列 $\{\varphi_k\}$ 是完备的当且仅当 $\{\varphi_k\}$ 的闭线性扩张为 $\mathcal{H}$.

定义 6.18. 设 $\{\varphi_k\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个规范正交列, 若

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} (h, \varphi_k)\varphi_k, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \tag{6.5}$$

则称 $\{\varphi_k\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组规范正交基.

命题 6.19. Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个规范正交列 $\{\varphi_k\}$ 是完备的当且仅当它是一组规范正交基.

定理 6.20 (Parseval 恒等式). 设 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一组规范正交基. 若 $h=\sum_{k=1}^{\infty}(h,\varphi_k)\varphi_k$, 则 $\|h\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(h,\varphi_k)|^2$.

例 6.21. 由取值 $1/\sqrt{2\pi}$ 的常数函数和 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin kt, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos kt\}_{k=1}^{\infty}$ 组成的 $L^2([0,2\pi])$ 中的可列族对 Hilbert 空间 $L^2([0,2\pi])$ 是一个完备的规范正交列. 实际上, 从初等的三角恒等式可以推出该序列是规范正交的. 再由 Stone-Weierstrass 逼近定理[a]得到该序列的线性扩张在 Banach 空间 $\mathcal{C}([0,2\pi])$ 中关于最大值范数是稠密的. 因此, 由 $\mathcal{C}([0,2\pi])$ 在 $L^2([0,2\pi])(\subset L^1([0,2\pi]))$ 中的稠密性(cf. 定理 2.26)可得该序列的线性扩张在 $L^2([0,2\pi])$ 中稠密.

[a] Stone(-Weierstrass) 逼近定理: 令 A 为紧集 K 上连续实值函数构成的代数. 若 A 分离 K 中的点且在 K 上不消失, 则 A 是 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ 的一个处处稠密的子空间.(cf. [Zor16, §16.4, Theorem 3, p.400] 或 [RF10, p.248])

定义 6.22. 若赋范线性空间 X 有一个稠密的可数子集, 则称 X 是可分的.

若 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 具有规范正交基 $\{\varphi_k\}$, 则由于 φ_k 的有限有理线性组合是 $\mathcal{H}$ 的可列稠密子集, 从而 $\mathcal{H}$ 一定是可分的. 事实证明可分性也是 Hilbert 空间具有规范正交基的一个充分条件.

定理 6.23. 每个无穷维可分 Hilbert 空间具有规范正交基.

§ 6.4 线性算子的伴随与对称性

本节中 $\mathcal{H}$ 表示 Hilbert 空间.

令 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. 对固定的 $v\in\mathcal{H}$, 映射

$$u\mapsto (T(u),v),\quad u\in\mathcal{H},$$

属于 $\mathcal{H}^*$, 这是因为它是线性的, 且由 Cauchy-Schwarz 不等式得对所有的 $u\in\mathcal{H}$ 有 $|(T(u),v)|\leqslant\|T\|\|v\|\|u\|$, 即有界. 由 Riesz-Fréchet 表示定理, 存在唯一的向量 $h\in\mathcal{H}$ 使得对所有的 $u\in\mathcal{H}$ 有 $(T(u),v)=(u,h)$. 将此向量 h 记为 $T^*(v)$. 这就定义了映射 $T^*:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, 由下面的关系式确定:

$$(T(u),v)=(u,T^*(v)),\quad \forall u,v\in\mathcal{H}. \tag{6.6}$$

称 T^* 为 T 的伴随.

命题 6.24. 设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间. 若 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, 则 $T^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 且 $\|T\|=\|T^*\|$.

我们将以下伴随的结构性质的验证留作习题: 对 $T,S\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, 有

$$(T^*)^*=T,\quad (T+S)^*=T^*+S^*,\quad (T\circ S)^*=S^*\circ T^*. \tag{6.7}$$

命题 6.25. 令 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间. 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的像 $\operatorname{Im}T$ 是闭的. 则

$$\operatorname{Im}T\oplus\ker T^*=\mathcal{H}. \tag{6.8}$$

命题 6.26. 令 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间. 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是正定的, 即存在一个 $c>0$ 使得

$$(T(h),h)\geqslant c\|h\|^2,\quad \forall h\in\mathcal{H}. \tag{6.9}$$

则 T 是可逆的.

Riesz-Fréchet 表示定理的证明并未用到内积的对称性, 下面给出一个重要的推广, 它在偏微分方程的研究中有许多应用.

定理 6.27 (Lax-Milgram 引理). 令 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间. 设函数 $B:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 满足以下三个性质:

(i) $B(u,v)$ 对固定的 v 是关于 u 的线性泛函, 对固定的 u 是关于 v 的共轭线性泛函.

(ii) B 是有界的, 即存在常数 $c_1>0$ 使得

$$|B(u,v)|\leqslant c_1\|u\|\|v\|,\quad \forall u,v\in\mathcal{H}.$$

(iii) 存在常数 $c_2>0$, 使得

$$B(h,h)\geqslant c_2\|h\|^2,\quad \forall h\in\mathcal{H}.$$

则对每个 $\psi\in\mathcal{H}^*$, 存在唯一的 $h\in\mathcal{H}$ 使得

$$\psi(u)=B(u,h),\quad \forall u\in\mathcal{H}.$$

定义 6.28. 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, 若 $T^*=T$, 即

$$(T(u),v)=(u,T(v)),\quad \forall u,v\in\mathcal{H},$$

则称 T 是自伴算子或自共轭算子或对称算子.

例 6.29. 令 $\{\varphi_k\}$ 是可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的一组规范正交基, $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. 则由内积的连续性知, T 是自伴的当且仅当

$$(T(\varphi_i),\varphi_j)=(\varphi_i,T(\varphi_j)),\quad \forall i,j\in\mathbb{N}.$$

特别地, 若 $\mathcal{H}=\mathbb{R}^n$, 则 T 是自伴的当且仅当 T 的关于规范正交基表示的 $n\times n$ 矩阵是对称矩阵.

定义 6.30. 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间, $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 为自伴算子, 若对任意的 $h\in\mathcal{H}$, 有

$$(T(h),h)\geqslant 0, \tag{6.10}$$

则称 T 为正算子, 记为 $T\geqslant 0$.

设 $A,B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 均为自伴算子. 若 $A-B\geqslant 0$, 则称 A 不小于 B 或 B 不大于 A, 并分别记为 $A\geqslant B$ 或 $B\leqslant A$.

在定义中, 若 $\mathcal{H}$ 为复空间, 则无需假定 T 是自伴算子, 因由(6.10) 即知 T 自伴. 由定义可以导出以下性质:

(i) 设自伴算子 $T_1\geqslant T_2$, $S_1\geqslant S_2$, 则

$$T_1+S_1\geqslant T_2+S_2;$$

若 $c>0$, 则

$$cT_1\geqslant cT_2.$$

以上两个不等式显然成立, 证明从略.

(ii) 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是正算子, 则对任何 $u,v\in\mathcal{H}$, 有

$$|(Tu,v)|^2\leqslant (Tu,u)(Tv,v), \tag{6.11}$$

此不等式称为广义 Cauchy-Schwarz 不等式. (cf. [RF10, Ex.16.37])

命题 6.31. 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是正算子, 则对任意的 $S\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, S^*TS 也是正算子.

命题 6.32 (极化恒等式). 对自伴算子 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, 有

$$(T(u),v)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k(T(u+i^kv),u+i^kv),\quad \forall u,v\in\mathcal{H}. \tag{6.12}$$

若我们将自伴算子 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 与二次型 $Q_T:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$:

$$Q_T(u)=(T(u),u),\quad \forall u\in\mathcal{H}$$

相关联, 则极化恒等式告诉我们 T 完全由 Q_T 确定. 特别地, 在 $\mathcal{H}$ 上, $T=0$ 当且仅当 $Q_T=0$. 实际上, 以下更精确的结果成立. 对 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 和 $\lambda\in\mathbb{C}$, 用 $\lambda-T$ 表示 $\lambda\mathrm{Id}-T$, 其中恒同映射 $\mathrm{Id}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 定义为对所有的 $h\in\mathcal{H}$, 有 $\mathrm{Id}\,h=h$.

命题 6.33. 设 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的. 则

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} |(T(u), u)|. \tag{6.13}$$

对线性算子 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的研究的一般策略是将 $\mathcal{H}$ 表示成直和 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, 使得 $T(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$ 且 $T(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{H}_2$. 在这种情况下, 我们称分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$约化了算子 T. 一般地, 若 $T(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$, 我们推不出 $T(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{H}_2$. 然而, 对 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子和 $\mathcal{H}$ 的正交直和分解, 我们有下面的简单但非常有用的结果.

命题 6.34. 令 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间. 设算子 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的, V 是 $\mathcal{H}$ 的子空间且满足 $T(V) \subset V$. 则 $T(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$.

参考文献

[Fol13] G. B. Folland. Real analysis. 2nd edt. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2013 (见 pp. 4, 70, 71, 78, 79, 91, 93, 95, 97).

[Fre10] D. H. Fremlin. Measure theory. Vol. 2. Broad foundations, Corrected second printing of the 2001 original. Torres Fremlin, Colchester, 2010 (见 p. 95).

[RF10] H. L. Royden and P. Fitzpatrick. Real analysis. Fourth. Pearson, 2010 (见 pp. 104, 106).

[SS03] E. M. Stein and R. Shakarchi. Fourier analysis. Vol. 1. Princeton Lectures in Analysis. An introduction. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003 (见 p. 53).

[SS05] E. M. Stein and R. Shakarchi. Real Analysis: Measure theory, integration, and Hilbert spaces. Vol. 3. Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005 (见 pp. 12, 13, 16, 19, 20, 22, 35, 37, 41, 44, 49, 51, 54, 72, 78, 81).

[Tor15] Alberto Torchinsky. Problems in real and functional analysis. Vol. 166. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. DOI: 10.1090/gsm/166.

[Zor15] V. A. Zorich. Mathematical analysis, I. Second. Universitext. Translated from the 6th corrected Russian edition, Part I, 2012 by Roger Cooke, With Appendices A–F and new problems translated by Octavio Paniagua T. Springer-Verlag, Berlin, 2015. DOI: 10.1007/978-3-662-48792-1 (见 p. 13).

[Zor16] V. A. Zorich. Mathematical analysis, II. 2nd. Universitext. Translated from the fourth and the sixth corrected (2012) Russian editions by Roger Cooke and Octavio Paniagua T. Springer, Heidelberg, 2016. DOI: 10.1007/978-3-662-48993-2 (见 pp. 6, 104).

[侯 17] 侯友良; 王茂发. 实变函数论. 2nd. 武汉大学出版社, 2017.

[周 07] 周民强. 实变函数解题指南. 1st. 北京大学出版社, 2007.

[周 16] 周民强. 实变函数论. 3rd. 北京大学出版社, 2016 (见 p. 26).

[汪 14] 汪林. 实分析中的反例. 高等教育出版社, 2014.

[王 19] 王声望; 郑维行. 实变函数与泛函分析概要. 5rd. Vol. 2. 高等教育出版社, 2019 (见 p. 101).

[程 19] 胡善文 薛以锋 程其襄 张奠宙. 实变函数与泛函分析基础. 4th ed. 高等教育出版社, 2019.

索引