Algebra Topology

learning note For reading translation

我真的不懂忧郁

Delft University of Technology

TU Delft

Algebra Topology

learning note For reading translation

by

我真的不懂忧郁

Student Name	Student Number
First Surname	1234567

Instructor:	I. Surname
Teaching Assistant:	I. Surname
Project Duration:	Month, Year - Month, Year
Faculty:	Faculty of Aerospace Engineering, Delft

TU Delft

Preface

A preface...

我真的不懂忧郁
Delft, September 2024

Summary

A summary...

目录

Nomenclature

If a nomenclature is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

Abbreviations

Abbreviation	Definition
ISA	International Standard Atmosphere
...	

Symbols

Symbol	Definition	Unit
V	Velocity	[m/s]
...		
ρ	Density	[kg/m^3]
...		

Chapter 1

基本群

1.1. 道路同伦

同伦和道路同伦

definition 1.1.1: *(同伦)* 设 f 和 f' 是从空间 X 到空间 Y 的两个连续映射，如果 f **同伦于** f'，如果有一个连续映射 $F : X \times I \to Y$ 使得对于每个 x，

$$F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = f'(x) \tag{1.1}$$

其中 $I = [0,1]$，映射 F 被称为是 f 和 f' 之间的**一个同伦**。。记为 $f \simeq f'$，如果 f' 是一个常数映射，则称 f 是**零伦**的。

我们将一个同伦设想为从 X 到 Y 的映射的一个连续单参数族，如果把参数 t 想象成时间，那么当 t 从 0 变化到 1 时，同伦 F 便将映射 f 连续地" 形变" 到 f。

example 1.1.1: 设 f 和 g 是从空间 X 到 $\mathbb{R}^2$ 中的两个映射，易见 f 和 g 是同伦的，映射

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x) \tag{1.2}$$

便是他们之间的一个同伦，这个同伦称为**直线同伦**。因为它将点 $f(x)$ 验证链接 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的直线段移动到 $g(x)$。

definition 1.1.2: *(道路同伦)* 设 f, f' 是将 $I = [0,1]$ 映入 X 中的两条道路，如果 f 和 f' 都以 x_0 为起点，以 x_1 为终点，并且存在连续映射 $F : I \times I \to X$ 使得对于每一个 $s \in I$ 和每一个 $t \in I$，

$$\begin{aligned} &F(s,0) = f(s),\ F(s,1) = f'(s) \\ &F(0,t) = x_0,\ F(1,t) = x_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

则称 f 和 f' 是**道路同伦**的，F 称为 f 与 f' 之间的**一个道路同伦**。记为 $f \simeq_p f'$

第一个条件表明 f 连续形变到 f' 的方式，第二个条件表明道路形变过程中端点不变。

example 1.1.2: f, g 是空间 X 到 $\mathbb{R}^2$ 中的两个映射，$F(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ 是他们之间的一个同伦，称为**直线同伦**。

代数方法引入几何

下面我们将代数方法引入几何问题。

definition 1.1.3: 设 f 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道伦，g 是从 x_1 到 x_2 的一条道路，定义 f 与 g 的乘积为道路 h

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1.4}$$

映射 g 的定义是确切的，并且根据**黏结引理**,h 是连续的，因此 h 是从 x_0 到 x_2 的一条道路。

道路同伦类

lemma 1.1.1: 道路同伦和同伦都是等价关系；

proof.

□

如果 f 是一条道路，我们则记它的道路同伦等价类为 $[f]$。

定义在道路上的乘积按照等式

$$[f] * [g] = [f * g] \tag{1.5}$$

诱导出道路同伦类上的一个定义确切的运算。为了验证这一点，设 F 是 f 和 f' 之间的一个道路同伦，G 是 g 和 g' 之间的一个道路同伦，定义

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1.6}$$

由于对于所有的 t，$F(1,t) = x_1 = G(0,t)$，所以映射 H 的定义是确切的，根据粘结引理这个映射也是连续的。

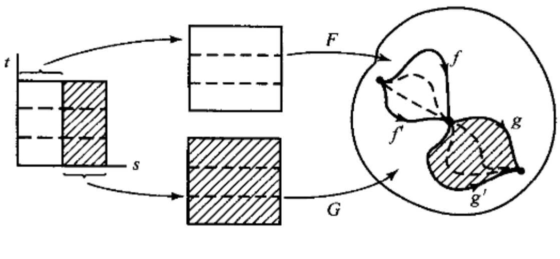

图 1.1

道路同伦类的运算满足群公理的一些性质，这些性质称为 $*$ 的*广群性质*，它和群性质仅有的区别是，任意两个道路同伦类 $[f]$ 和 $[g]$，$[f] * [g]$ 并不是总有定义的，只有当 $f(1) = g(0)$ 时，$[f] * [g]$ 才有定义。

theorem 1.1.2: *运算 $*$ 具有如下性质*

1. *结合律：$[f]*([g]*[h]) = ([f]*[g])*[h]$;*
2. *左右单位元：$[f]*[e_{x_1}] = [f], [e_{x_0}]*[f] = [f]$;*
3. *逆元：$[f]*[\overline{f}] = [e_{x_0}], [\overline{f}]*[f] = [e_{x_1}]$;*

proof. 我们用两个基本结论来解决问题

1. 如果 $k : X \to Y$ 是一个连续映射，F 是 X 中的道路 f 和 f' 之间的一个道路同伦，则 $k \circ F$ 是 Y 中的道路 $k \circ f$ 和 $k \circ f'$ 之间的一个道路同伦；
2. 如果 $k : X \to Y$ 是一个连续映射，f 和 g 是 X 中的两条道路，满足条件 $f(1) = g(0)$，则

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g) \tag{1.7}$$

我们来验证性质 2 和 3，为了验证 2。令 e_0 是 I 中取常值 0 的道路，$i_1 : I \to I$ 是恒等映射，它同时也是 I 中的一条从 0 到 1 的道路。因此，$e_0 * i$ 也是 I 中的一条从 0 到 1 的道路

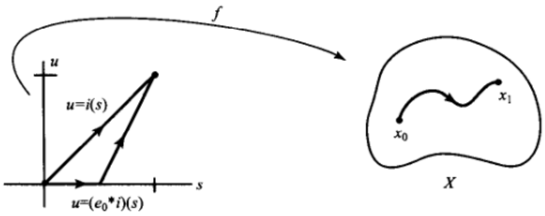

图 1.2

□

1.2. 基本群

本节要用到陪集、正规子群、商群等概念建议查看抽象代数，下面直接定义基本群的概念。

definition 1.2.1: *(基本群)* 设 X 为一个空间，x_0 是 X 的一个点，X 中的起点和终点都是 x_0 的道路称为以 x_0 为基点的**回路**。所有以 x_0 为基点的回路的道路同伦类组成的集合对于运算 "$*$" 而言构成一个群，称为空间 X 关于基点 x_0 的**基本群**，记作 $\pi_1(X, x_0)$。

在拓扑空间 $\mathcal{X}$ 中，一条路径是从 $I = [0,1]$ 到 X 的连续映射，一个闭路径是满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ 的路径，即它以同一点为起点和终点。

两个闭路径 f 和 f' 被认为是道路同伦的，如果存在连续形变 $F : I \times I \to X$，使得

$$\begin{aligned} &F(s,0) = f(s),\ F(s,1) = f'(s) \\ &F(0,t) = x_0, \quad F(1,t) = x_0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

X 的基本群也称为 **X 的第一个同伦群** *(first homotopty group)*。这意味着还会有第二个同伦群。事实上，对于每一个 $n \in \mathbb{Z}_+$，都会有群 $\pi_n(X, x_0)$。

example 1.2.1: 设 $\mathbb{R}^n$ 为 $n-$ 维的欧氏空间，则 $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ 是平凡群 (即由单位元一个元素构成的群)，因为如果 f 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 x_0 为基点的一条回路，那么直线同伦便是 f 与 x_0 处的常值道路之间的一个道路同伦。更一般地，如果 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸集，那么 $\pi_1(X, x_0)$ 便是平凡群。$\mathbb{R}^n$ 中的单位球

$$B^n = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\} \tag{1.9}$$

的基本群是平凡群。

基本群在多大程度上依赖于基点

definition 1.2.2: 设 α 是从 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路，定义映射

$$\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1) \tag{1.10}$$

使得

$$\hat{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha] \tag{1.11}$$

因为运算 $*$ 的定义是确切的，映射 $\hat{\alpha}$ 的定义也是确切的，它叫做“$\hat{\alpha}-$ 帽”。

如果 f 是以 x_0 为基点的一条回路，那么 $\alpha * (f * \alpha)$ 便是以 x_1 为基点的一条回路。因此 $\hat{\alpha}$ 将 $\pi_1(X, x_0)$ 映射到 $\pi_1(X, x_1)$ 中，注意 $\hat{\alpha}$ 仅仅依赖于 α 的道路同伦类。

theorem 1.2.1: 映射 $\hat{\alpha}$ 是群的一个同构

proof. 为证明 $\hat{\alpha}$ 是一个同态，我们作以下计算

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\overline{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\overline{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g]) \end{aligned} \tag{1.12}$$

为证明 $\hat{\alpha}$ 是一个同构，我们证明：如果用 β 表示道路 α 的逆 $\overline{\alpha}$，那么 $\hat{\beta}$ 便是 $\hat{\alpha}$ 的逆，对于 $\pi_1(X, x_1)$ 中的每一个元素 $[h]$，我们作以下计算

$$\begin{aligned} \hat{\beta}([h]) &= [\overline{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}] \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\overline{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}]) * [\alpha] = [h] \end{aligned} \tag{1.13}$$

类似的计算表明对于每一个 $[f] \in \pi_1(X, x_0)$，$\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$。

corollary 1.2.2: 若 X 是道路连通的，并且 x_0, x 是 X 中的两个点，则 $\pi_1(X, x_0)$ 同构于 $\pi_1(X, x_1)$.

单连通性

definition 1.2.3: 如果 X 是道路连通空间，并且对于某一个 $x_0 \in X$，$\pi_1(X, x_0)$ 是平凡群，从而对于每一个 $x_0 \in X$，$\pi_1(X, x_0)$ 是平凡群，则称 X 是**单连通的**。

lemma 1.2.3: 在单连通空间 X 中，任何两条有公共起点和终点的道路都是道路同伦的。

连续映射诱导同态

基本群是空间 X 的拓扑不变量, 为了严格证明这一点，一个方便的方式是引入“连续映射诱导同态”这一个概念。

definition 1.2.4: 设 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是一个连续映射，定义

$$h_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0) \tag{1.14}$$

使得

$$h_*([f])=[h\circ f] \tag{1.15}$$

映射 h_* 称为 h 相对于基点 x_0 而言是**诱导同态**。

诱导同态有两个非常重要的性质，称为诱导同态的函子性质。

theorem 1.2.4: 若 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 和 $k:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$ 都是连续的，则

$$(k\circ h)_*=k_*\circ h_* \tag{1.16}$$

如果 $i:(X,x_0)\to(X,x_0)$ 是恒等映射，则 i_* 是恒等同态。

corollary 1.2.5: 若 $h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 是 X 和 Y 之间的一个同胚，则 h_* 是 $\pi_1(X,x_0)$ 与 $\pi_1(Y,y_0)$ 之间的一个同构。

1.3. 覆盖空间

definition 1.3.1: 设 $p:E\to B$ 是一个连续的满射，U 是 B 的开集，如果 U 的原像 $p^{-1}(U)$ 能够表示为 E 中一些占用最广位置的开集 V_a 的并，并且对于每一个 a，将 p 限制在 V_a 上都是从 V_a 到 U 上的同胚，则称 p **均衡地覆盖**U，集合族 $\{V_a\}$ 称为 $p^{-1}(U)$ 的**一个片状分拆**

如果 U 是被 p 均衡地覆盖着的开集，我们常常将集合 $p^{-1}(U)$ 画成”一叠薄饼“悬在 U 的上方，每一片薄饼都和 U 的大小形状相同。而映射 p 则把它们挤压在 U 上。

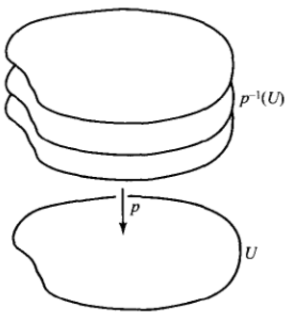

图 1.3

definition 1.3.2: 设 $p: E \to B$ 是连续的满射，如果 B 的每一个点 b 都有邻域 U 被 p 均衡地覆盖，则 p 被称为**覆叠映射**，E 称为 B 的**覆叠空间**。

definition 1.3.3: 如果 $p: E \to B$ 是覆叠映射，则 p 是 E 和 B 之间的一个**局部同胚**。

上面的表述不太好懂，下面是来自中科大讲义的表述

definition 1.3.4: 设 X 是一个拓扑空间，若存在拓扑空间 $\overline{X}$ 以及连续映射 $p: \overline{X} \to X$，使得对于任意的 $x \in X$，存在于 x 的一个开邻域 U 满足如下性质

1. $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$，其中 V_α 是 $\overline{X}$ 中的不交的开集；
2. 对于任意的 α，映射 $p_\alpha : p|V_\alpha : V_\alpha \to U$ 是一个同胚；

则我们称 $\overline{X}$ 是 X 的一个覆叠空间，称映射 p 是一个**覆叠映射**，并且对于任意的 $x \in X$，称 $p^{-1}(x)$ 为该覆叠映射在 x 处的**纤维**。

example 1.3.1: $\mathbb{R}$ 是 S^1 的覆叠空间，其覆叠映射 $p: \mathbb{R} \to S^1$，$x \to e^{2\pi ix}$

可以想象把实直线绕在圆周 S^1 上，并且每个区间 $[n, n+1]$ 都可以在 S^1 上绕一圈。

theorem 1.3.1: 设映射 $p: \mathbb{R} \to S^1$ 定义为

$$p(x) = (cos2\pi x, sin2\pi x) \tag{1.17}$$

则 p 是一个覆叠映射。

考虑 S^1 的子集 U，第一个坐标都是正数的点构成，即 U 是圆的右半边，我们来证明存在 $\{V_\alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ 它们的不交并能够覆盖 U。$p^{-1}(U)$ 由使得 $\cos 2\pi x$ 为正数的点 x 组成，也就是说，它是区间

$$V_\alpha = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right) \tag{1.18}$$

的并组成。将 p 限制在任何一个闭区间 $\overline{V}_\alpha$ 上都是单射，因为 $\sin 2\pi x$ 在这种区间上是严格单调的，根据介值定理，p 将 V_α 映满 U。

由于 $\overline{V}_\alpha$ 是紧致的，$p|\overline{V}_\alpha$ 是 $\overline{V}_\alpha$ 与 $\overline{U}$ 之间的一个同胚，因此，$p|V_\alpha$ 是 V_α 与 U 之间的一个同胚。

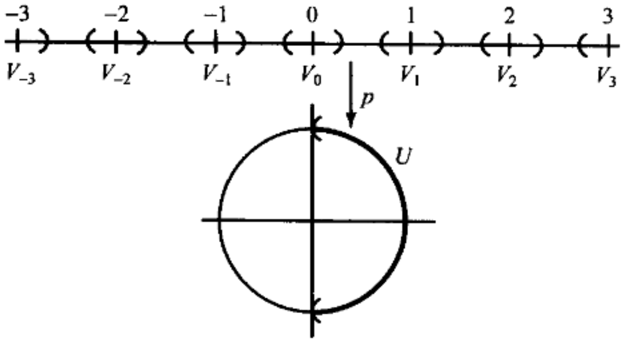

图 1.4: $\mathbb{R}$ 是 S^1 的覆叠空间

在某些情形下覆叠映射的限制仍然是覆叠映射

theorem 1.3.2: 设 $p: E \to B$ 是一个覆叠映射，如果 B_0 是 B 的一个子空间，$E_0 = p^{-1}(B_0)$，则 p 的限制 $p_0: E_0 \to B_0$ 仍然是一个覆叠映射。

example 1.3.2:

theorem 1.3.3: 如果 $p: E \to B$ 和 $p': E' \to B'$ 都是覆叠映射，则

$$p \times p' : E \times E' \to B \times B' \tag{1.19}$$

也是覆叠映射

考虑空间 $T = S^1 \times S^1$。T 称为**环面**，乘积映射

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1 \tag{1.20}$$

是环面上的一个以平面 $\mathbb{R}^2$ 为覆叠空间的覆叠映射。$p \times p$ 将每一个单位正方形 $[n, n+1] \times [m, m+1]$ 都卷成整个环面。

1.4. 圆周的基本群

definition 1.4.1: 设 $p: E \to B$ 是一个映射，如果 f 是从某一空间 X 到 B 中的一个连续映射，映射 $\tilde{f}$ 如果满足条件 $p \circ \tilde{f} = f$，则称 $\tilde{f}$ 为 f 的一个**提升**。

覆叠空间道路可以提升，覆叠空间道路同伦可以提升

lemma 1.4.1: 设 $p: E \to B$ 是一个覆叠映射，$p(e_0) = b_0$，任何一条以 b_0 为起点的道路 $f: [0,1] \to B$ 都有 E 中以 e_0 为起点的一条唯一道路 $\tilde{f}$ 作为它的提升。

proof.

□

lemma 1.4.2: 设 $p: E \to B$ 是一个覆叠映射，$p(e_0) = b_0$，又设映射 $F: I \times I \to B$ 连续，$F(0,0) = b_0$，存在唯一的一个连续映射

$$\tilde{F}: I \times I \to E\ (\tilde{F}(0,0) = e_0) \tag{1.21}$$

是 F 的一个提升。如果 F 是一个道路同伦，则 $\tilde{F}$ 也是一个道路同伦。

theorem 1.4.3: 设 $p: E \to B$ 是一个覆叠映射，$p(e_0) = b_0$。又设 f, g 是 B 中从 b_0 到 b_1 的两条道路，$\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 分别是 f 和 g 在 E 中以 e_0 为起点的提升，如果 f, g 是道路同伦的，则 $\tilde{f}, \tilde{g}$ 以 E 中的同一个点为终点，并且他们也是道路同伦的。

提升对应

definition 1.4.2: 设 $p: E \to B$ 是一个覆叠映射，$b_0 \in B$。选取 e_0 使得 $p(e_0) = b_0$，给定 $\pi_1(B, b_0)$ 中的一个元素 $[f]$，设 $\tilde{f}$ 为 f 在 E 中以 e_0 为起点的提升。令 $\phi([f])$ 表示 $\tilde{f}$ 的终点 $\tilde{f}(1)$，则 ϕ 是定义确切的集合间的映射

$$\phi: \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0) \tag{1.22}$$

我们称 ϕ 为由覆叠映射 p 诱导的**提升对应**。ϕ 依赖 e_0 的选取。

theorem 1.4.4: 设 $p: E \to B$ 是一个覆叠映射，$p(e_0) = b_0$。如果 E 是道路连通的，则提升对应

$$\phi: \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0) \tag{1.23}$$

是一个满射，如果 E 是单连通的，则 ϕ 是一个一一映射。

循环群

definition 1.4.3: 设 G 是一个群，而 x 是 G 的一个元素，记 x 的逆为 x^{-1}。记号 x^n 表示 x 与自身 $n-$ 重幂，x^{-n} 表示 x^{-1} 与自身的 n 重幂，而 x^0 表示群 G 的单位元。如果所有形如 x^m 的元素构成的集合等于 G，则称 G 是一个**循环群**，并且 x 叫做 G 的一个**生成元**。

群的基数也叫做群的**阶**。一个群是无限阶的循环群当且仅但这个群同构于整数加群，一个群是 k 阶循环群当且仅当这个群同构于整数模 k 群 $\mathbb{Z}/k$。前一定理说明圆周的基本群是无限循环群。

theorem 1.4.5: 设 $p: E \to B$ 是一个覆叠映射，$p(e_0) = b_0$:

1. 同态 p_*:$\pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ 是一个单同态；
2. 设 $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$，则提升对应 ϕ 诱导出从 H 的右陪集构成的族到 $p^{-1}(b_0)$ 中的

一个单射

$$\Phi : \pi_1(B, b_0)/H \to p^{-1}(b_0) \tag{1.24}$$

并且当 E 道路连通时，Φ 是一个一一映射。

3. 如果 f 是 B 中以 b_0 为基点的回路，则 $[f] \in H$ 当且仅当 f 的提升为 E 中的一条以 e_0 为基点的回路。

1.5. 收缩核与不动点

我们现在运用 S^1 的基本群的知识证明拓扑学的几个结论。

definition 1.5.1: 如果 $A \subset X$，一个连续映射 $r : X \to A$ 如果在 A 上的限制是 A 上的恒等映射，则称之为 X 到 A 上的一个收缩，如果存在这样一个收缩 r，则说 A 是 X 的一个收缩核

非收缩核定理

lemma 1.5.1: 如果 A 是 X 的收缩核，那么内射 $j : A \to X$ 诱导的基本群的同态是一个单射。

theorem 1.5.2: （非收缩核定理）B^2 到 S^1 上没有收缩

非蜕化向量场

theorem 1.5.3: 对于任意给定的 B^2 上的一个非蜕化向量场，存在 S^1 中的一个点，这个点上的向量直指圆心方向，也存在 S^1 中的一个点，这个点上的向量指向圆心的反方向。

圆盘的 *Brouwer* 不动点定理

theorem 1.5.4: 如果 $f : B^2 \to B^2$ 是连续的，则存在一个点 $x \in B^2$ 使得 $f(x) = x$。

$\mathbb{R}^2$ 的三角形区域拓扑维数至少为 2?

theorem 1.5.5: 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于任何一个由直径小于 ε 的集合组成的 T 的开覆盖 $\mathcal{A}$，T 中总有一个点至少属于 $\mathcal{A}$ 的三个元素之中。

这个定理蕴含着 $\mathbb{R}^2$ 中的三角形区域

$$T = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\} \tag{1.25}$$

的拓扑维度至少为 2。

1.6. Borsuk-Ulam 定理

definition 1.6.1: S^n 中的点 x 的对径点是点 $-x$。映射 $h: S^n \to S^m$ 称为**保持对径点**，如果对于所有的 $x \in S^n$，有 $h(-x) = -h(x)$。

theorem 1.6.1: 如果 $h: S^1 \to S^1$ 是保持对径点的连续映射，则 h 不是零伦的。

theorem 1.6.2: 不存在保持对径点的连续映射 $g: S^2 \to S^1$

S^2 中的 *Borsuk-Ulam* 定理

theorem 1.6.3: 设 $f: S^2 \to \mathbb{R}$ 是一个连续映射，则 S^2 中必有一个点 x 使得 $f(x) = -f(x)$。

平分定理

theorem 1.6.4: 在 $\mathbb{R}^2$ 中给定两个有界的多边形区域，则在 $\mathbb{R}^2$ 中有一条直线平分这两个区域中的每一个。

1.7. 形变收缩核和伦型

我们已经知道了解空间 X 的基本群的一个办法就是研究空间 X 的覆叠空间，还有一种办法就是研究伦型。

首先从一个引理开始

lemma 1.7.1: 设 $h, k: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 是连续映射，如果 h 和 k 是同伦的，并且在同伦的过程中始终保持将 X 的基点 x_0 映为 y_0，则 h_* 和 k_* 相等。

theorem 1.7.2: 内射 $j: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ 诱导出来基本群之间的同构。

形变收缩核

definition 1.7.1: 设 A 是 X 的子空间，称 A 是 X 的一个**形变收缩核**，如果 X 的恒等映射于一个将 X 中所有的点映射到 A 中的映射同伦，并且在同伦的过程中始终保持 A 中的每一个点不动，即存在一个连续映射 $H: X \times I \to X$ 使得对于所有的 $x \in X$，有 $H(x, 0) = x$ 和 $H(x, 1) \in A$，并且对于所有的 $a \in A$，有 $H(a, t) = a$。同伦 H 称为从 X 到 A 上的一个**形变收缩**。这时，映射 $r: X \to A$ 是从 X 到 A 的收缩，其定义为 $r(x) = H(x, 1)$，并且 H 是 X 的恒等映射到映射 $j \circ r$ 的同伦，其中 $j: A \to X$ 是内射。

theorem 1.7.3: 设 A 是 X 的一个形变收缩核，$x_0 \in A$，则内射

$$j : (A, x_0) \to (X, x_0) \tag{1.26}$$

诱导基本群之间的同构

同伦等价

definition 1.7.2: 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$ 是两个连续映射，又设映射 $g \circ f : X \to X$ 同伦于 X 的恒等映射，映射 $f \circ g : Y \to Y$ 同伦于 Y 的恒等映射，则映射 f 和 g 称为**同伦等价**。

具有相同伦型的两个空间具有同构的基本群

lemma 1.7.4: 设 $h, k : X \to Y$ 是连续映射，$h(x_0) = y_0, k(x_0) = y_1$。如果 h 和 k 是同伦的，则在 Y 中有一条从 y_0 到 y_1 的道路 α 使得 $k_* = \hat{\alpha} \circ h$，事实上，如果 $H : X \times I \to Y$ 是 h 和 k 之间的同伦，则 α 可以取道路 $\alpha(t) = H(x_0, t)$。

corollary 1.7.5: 设 $h, k : X \to Y$ 是两个同伦的连续映射，$h(x_0) = y_0$，$k(x_0) = y_1$，如果 h_* 是单射、满射或者平凡映射，则 k_* 也相应是单射、满射或者平凡映射

corollary 1.7.6: 设 $h : X \to Y$，如果 h 是零伦的，则 h_* 是平凡的同态。

theorem 1.7.7: 设 $f : X \to Y$ 是连续的，$f(x_0) = y_0$，如果 f 是同伦等价，则

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \tag{1.27}$$

是同构

1.8. S^n 的基本群

Seifert-van Kampen 定理的一个特殊形式

theorem 1.8.1: 设 $X = U \cup V$，其中 U 和 V 是 X 中的开集，设 $U \cap V$ 是道路连通的，$x_0 \in U \cap V$，令 i 和 j 分别表示 U 和 V 到 X 中的内射，则诱导同态

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \tag{1.28}$$

$$j_* : \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \tag{1.29}$$

的像生成 $\pi_1(X, x_0)$

n 维球面单连通

定义 $f:(S^n-p)\to\mathbb{R}^n$ 为

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_{n+1})=\frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1,\cdots,x_n) \tag{1.30}$$

映射 p 称为**球极投影**。

corollary 1.8.2: 设 $X=U\cup V$，其中 U 和 V 是 X 中的开集，$U\cap V$ 非空并且是道路连通的，如果 U 和 V 都是单连通的，则 X 也是单连通的。

theorem 1.8.3: 当 $n\geqslant 2$ 时，n 维球面 S^n 时单连通的。

Chapter 2

Base Group Exescrise

2.1. 道路同伦

Question 1: 空间 X 是**可缩**的，如果恒等映射 $i_X : X \to X$ 是零伦的，

1. 证明 I 和 $\mathbb{R}$ 是可缩的；
2. 证明可缩空间是道路连通的；
3. 证明如果 Y 是可缩的，则对于任意的 X，集合 $[X, Y]$ 只有一个元素；
4. 证明如果 X 是可缩的，并且 Y 是道路连通的，则 $[X, Y]$ 只有一个元素；

proof.

□

2.2. 基本群

单连通性

Question 2: $\mathbb{R}^n$ 的一个子集 A 称为**星形凸集**，如果 A 中有一个点 a_0，使得链接 a_0 和 A 中任意另外一点的线段都包含在 A 中

1. 找出一个不是凸集的星形凸集；
2. 证明：若 A 是星形凸集，则 A 是单连通的；

proof.

□

交换群

Question 3: 设 x_0 和 x_1 是道路联通空间 X 中给定的两个点，证明：$\pi_1(X,x_0)$ 是一个交换群当且仅当对于任意两条从 x_0 到 x_1 的道路 α 和 β，有 $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$.

proof.

□

诱导同态

Question 4: 若 X 是道路连通的，则在不区别所设计的群之间的同构的前提下，连续映射的诱导同态与基点选择无关。(详细见 *p255* 第 *6* 题)

Question 5: 设 G 对于运算 $*$ 而言是拓扑群，x_0 使其单位元，令 $\Omega(G,x_0)$ 表示 G 中以 x_0 为基点的所有回路的集合。若 $f,g\in\Omega(G,x_0)$，定义一条回路 $f\otimes g$，使得

$$(f\otimes g)(s)=f(s)*g(s) \tag{2.1}$$

1. 证明这个运算使得集合 $\Omega(G,x_0)$ 称为一个群；
2. 证明这个运算在 $\pi_1(G,x_0)$ 上诱导出一个群运算 $\otimes$；
3. 证明 $\pi_1(G,x_0)$ 是一个交换群；

2.3. 覆叠空间

片状分拆

Question 6: 设 $p:E\to B$ 是连续的满射，U 是 B 的一个被 p 均衡地覆盖着的开集，证明：如果 U 是连通的，则 $p^{-1}(U)$ 的片状分拆是唯一的。

k-重覆叠

Question 7: 设 $p:E\to B$ 是覆叠映射，又设 B 是连通的，证明：如果对于某一个 $b_0\in B$，$p^{-1}(b_0)$ 恰好有 k 个元素，则对于每一个 $b\in B$，$p^{-1}(b)$ 也恰好有 k 个元素。在这种情况下，E 称为 B 的 ***k*-重覆叠**。

圆周 S^1 的覆叠空间

Question 8: 证明例 *3* 中的映射是覆叠映射，并且将这个映射推广到 $p(z)=z^n$

紧致 *Hausdorff* 空间与覆叠映射

Question 9: 设 $p: E \to B$ 是覆叠映射

1. 如果 B 是 *Hausdorff*、正则、完全正则或者局部紧致的 *Hausdorff* 空间，则 E 满足同样的拓扑性质；
2. 如果 B 是紧致的并且对于每一个 $b \in B$，$p^{-1}(b)$ 是有限的，则 E 也是紧致的；

2.4. 圆周的基本群

拓扑群

theorem 2.4.1: S^1 的基本群同构于整数加群

局部同胚

Question 10: 对于 *53* 节例 *2* 中的局部同胚，"道路提升引理（引理 *54.1*）"不能成立的理由是什么？

道路提升

Question 11: 设 $p: E \to B$ 是覆叠映射，设 α 和 β 是 B 中的道路，满足条件 $\alpha(1) - \beta(0)$。又设 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 是他们的提升，使得 $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$，证明 $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ 是 $\alpha * \beta$ 的一个提升。

环面的基本群

Question 12: 推广定理 *54.5* 的证明，证明环面的基本群同构于群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$。

2.5. 收缩和不动点

圆盘的 *Brouwer* 不动点定理

Question 13: 圆盘的 *Brouwer* 不动点定理证明

Question 14: （***Frobenius*** 定理）设 A 是一个 3×3 正实数矩阵，则 A 有一个正的实特征值。

Question 15: 证明如果 A 是非奇异的 3×3 非负矩阵，则 A 必有一个正的特征值。

Question 16: 证明如果 A 是 B^2 的一个收缩核，则每一个连续映射 $f: A \to A$ 必有一个不动点。

收缩核

Question 17: 假设对于每一个 n，没有收缩 $r: B^{n+1} \to S^n$，证明

1. 恒等映射 $i: S^n \to S^n$ 不是零伦的；
2. 内射 $j: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$ 不是零伦的；
3. B^{n+1} 上每个非蜕化向量场必定在 S^n 的某一个点处指向圆心，在 S^n 某一点指向圆心的反方向；
4. 每一个连续映射 $f: B^{n+1} \to B^{n+1}$ 必然由一个不动点；
5. 每一个由正实数组成的 $(n+1) \times (n+1)$ 矩阵必然有正的特征根；
6. 如果 $h: S^n \to S^n$ 是零伦的，则 h 必然有一个不动点，同时 h 也将某一个点 x 映射为他的对径点 $-x$。

2.6. 代数基本定理

从圆周群计算的角度，证明代数学基本定理

Question 18: 证明代数学基本定理*:* 实系数或者复系数的 $n > 0$ 次方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.2}$$

至少有一个实根或者复根

Question 19: 证明实系数或者复系数的方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.3}$$

当系数之和小于 *1* 时，这个方程所有根都在单位球 B^2 内部。

2.7. Borsuk-Ulam 定理

Question 20: 设 $f: S^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个连续映射，则 S^{n+1} 中必有一个点 x 使得 $f(x) = -f(x)$。

Question 21: 如果 $A_1, \cdots, A_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中有界的可测集，则在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中有一个 n 维平面平分这些集合中的每一个。

Question 22: 在任何给定的时刻，地球表面上总有一对对径点，两处的温度和气压分别相同。

2.8. 形变收缩核和伦型

书本 281 第 3，5，6，9，10

2.9. 某些曲面的基本群

射影平面 P^2 是 S^2 中等同每一个点 x 与它的对径点 $-x$，而得到的商空间。
证明 section 60 所有的结论

Chapter 3

平面分割定理

3.1. *Jordan* 分割定理

lemma 3.1.1: 设 C 是 S^2 的一个紧致子空间，b 是 S^2-C 的一个点，$h:S^2-b\to\mathbb{R}^2$ 是一个同胚，又设 U 是 S^2-C 的一个分支，如果 U 不包含 b，那么 $h(U)$ 是 $\mathbb{R}^2-h(C)$ 的一个有界分支，如果 U 包含 b，那么 $h(U-b)$ 是 $\mathbb{R}^2-h(C)$ 的一个无界分支；

lemma 3.1.2: *(零伦引理)* 设 a 和 b 是 S^2 中的两个点，A 是一个紧致空间，

$$f:A\to S^2-a-b \tag{3.1}$$

是一个连续映射，如果 a 和 b 属于 $S^2-f(A)$ 的同一分支，则 f 是零伦的。

我们现在来证明 *Jordan* 分割定理，设 X 是连通空间，$A\subset X$，我们称 A **分割** X，如果 $X-A$ 不是连通的，我们称 A **将** X **分割成** n **个分支**，如果 $X-A$ 有 n 个分支。

一段弧 A 是同胚于单位区间 $[0,1]$ 上的一个空间，A 中的两个点 p 和 q 称为 A **的端点**，如果 p,q 使得 $A-p$ 和 $A-q$ 都是连通的，A 中的其他点就称为 A 的**内点**。

简单闭曲线是同胚于单位圆周 S^1 的空间。

theorem 3.1.3: ***(Jordan** 分割定理**)*** 设 C 是 S^2 中的一条简单闭曲线，则 C 分割 S^2。

theorem 3.1.4: *(广义分割定理)* 设 A_1 和 A_2 是 S^2 的两个连通的闭子集，并且只交于 a 和 b 两点，则集合 $C=A_1\cup A_2$ 分割 S^2

3.2. 区域不变性

lemma 3.2.1: *((同伦扩张定理))* 设 X 是一个空间，$X \times I$ 是正规的，A 是 X 的一个闭子空间，$f: A \to Y$ 是连续映射，其中 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子空间，若 f 是零伦的，则 f 可以扩充为一个连续映射 $g: X \to Y$，并且 g 也是零伦的。

零伦引理在某些条件下的逆命题

lemma 3.2.2: *(Borsuk 引理)* 设 a 和 b 是 S^2 中的两个点，A 是一个紧致空间，$f: A \to S^2 - a - b$ 是一个连续单射，如果 f 是零伦的，那么 a 和 b 属于 $S^2 - f(A)$ 的同一分支上。

theorem 3.2.3: *(区域不变性)* 如果 U 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个开子集，$f: U \to S^2$ 是连续单射，那么 $f(U)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的开子集，并且反函数 $f^{-1}: f(U) \to U$ 是连续的。

3.3. *Jordan* 曲线定理

在下面的定理中，我们将考察 $U \cap V$ 不是道路连通的时候，情况会怎样，借助这个结论可以完成 *Jordan* 曲线定理的证明。

theorem 3.3.1: 设 X 为两个开集 U 和 V 之并，并且 $U \cap V$ 可以表示成两个无交的开集 A 和 B 之并，假设有一条 U 中的道路 α 从 A 的一个点 a 到 B 的一个点 b，并且有一条 V 中的道路 β 从 b 到 a。记 $f = \alpha * \beta$，它是一条回路。

1. 道路同伦类 $[f]$ 生成 $\pi_1(X, a)$ 的一个无限循环子群;
2. 若 $\pi_1(X, a)$ 是无限循环的，则它是由 $[f]$ 生成的;
3. 设存在 U 中的道路 γ 从 a 到 A 中的点 a'，又存在 V 中的道路 δ 从 a' 到 a。于是 $g = \gamma * \delta$ 是一条回路。这时分别由 $[f]$ 和 $[g]$ 生成的 $\pi_1(X, a)$ 的两个子群只交于单位元;

theorem 3.3.2: *(不分割定理)* 设 D 是 S^2 中的一段弧，则 D 不分割 S^2。

theorem 3.3.3: *(广义不分割定理)* 设 D_1 和 D_2 是 S^2 的闭子集，并且 $S^2 - D_1 \cap D_2$ 是单连通的，若 D_1 和 D_2 都不分割 S^2，则 $D_1 \cup D_2$ 不分割 S^2

theorem 3.3.4: *(Jordan 曲线定理)* 设 C 是 S^2 中的一条简单闭曲线，则 C 恰好将 S^2 分割成两个分支 W_1 和 W_2，并且 W_1 和 W_2 都将 C 作为它的边界，即 $C = \overline{W}_i - W_i, i = 1, 2$

3.4. 在平面中嵌入图

一个有限**线性图** G 是一个 *Hausdorff* 空间，它可以表示成有限多个弧的并，并且这些弧两两最多交于一个公共端点，这些弧成为这个图的**边**。弧的端点称为图的**顶点**。

definition 3.4.1: θ 空间X 是指一个能够表示为三段弧 A, B, C 的并的 *Hausdorff* 空间，并且这三段弧中每两段都恰好相交于他们的两个端点。

叫做$theta$ 空间是因为这个空间显然同胚于希腊字母 θ。

theorem 3.4.1: 设 X 是气水电图，则 X 不能嵌入平面。

lemma 3.4.2: 设 X 是 S^2 中以 a_1, a_2, a_3 和 a_4 为顶点的完全图，则 X 将 S^2 分成四个分支，设这四个分支的边界分别为 X_1, X_2, X_3, X_4，则每一个 X_i 就是 X 中不以 a_i 为顶点的那些边的并。

theorem 3.4.3: 五个顶点的完全图不能嵌入平面。

3.5. 简单闭曲线的环绕数

theorem 3.5.1: 设 C 是 S^2 中的一条简单闭曲线，p 和 q 属于 $S^2 - C$ 的不同分支，那么内射 $j : C \to S^2 - p - q$ 诱导基本群之间的同构。

3.6. *Cauchy* 积分公式

我们来更为正式地介绍环绕数

环绕数

definition 3.6.1: 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条回路，点 a 不是 f 的像点，令

$$g(s) = [f(s) - a]/\|f(s) - a\| \tag{3.2}$$

那么 g 是 S^1 中的一条回路，设 $p : \mathbb{R} \to S^1$ 是标准覆叠映射，$\tilde{g}$ 为 g 到 S^1 的提升，由于 g 是一条回路，所以差 $\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0)$ 是整数，这个整数就称为f **关于** a **的环绕数**.

自由同伦

definition 3.6.2: 设 $F : I \times I \to X$ 是一个连续映射，对任意 t 有 $F(0, t) = F(1, t)$，那么对于每一个 t，映射 $f_t(s) = F(s, t)$ 是 X 中的一条回路。映射 f 成为回路 f_0 和 f_1 之间的一个**自由同伦**。自由同伦是回路之间的一个同伦，在同伦过程中回路的基点允许移动。

简单回路

definition 3.6.3: 设 f 是 X 中的一条回路，我们称 f 是**简单回路**，如果只在 $s = s'$ 或 s, s' 中一个为 0，另一个为 1 的情况下才有 $f(s) = f(s')$，如果 f 是一条简单回路，那么它的像集便是 X 中的一条简单闭曲线。

theorem 3.6.1: 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单回路，若 a 属于 $\mathbb{R}^2 - f(I)$ 的一个无界分支，则 $n(f,a) = 0$。若 a 属于另一个有界分支，则 $n(f,a) = \pm 1$。

逆时针回路

definition 3.6.4: 设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单回路，称 f 是**逆时针回路**，如果对于 $\mathbb{R}^2 - f(I)$ 的有界分支中的某一个点 a 有 $n(f,a) = +1$，称 f 为**顺时针回路**，如果 $n(f,a) = -1$。因此标准回路 $p(s) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ 是逆时针回路。

Cauchy 积分公式的经典形式

lemma 3.6.2: 设 f 是复平面上的一条可分段可微回路，a 是一个不在 f 的像中的点，则

$$n(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_f \frac{dz}{z-a} \tag{3.3}$$

theorem 3.6.3 (Cauchy 积分公式的经典形式): 设 C 是复平面上的一条可分段可微的简单闭曲线，B 是 $\mathbb{R}^2 - C$ 的一个有界分支，如果 $F(z)$ 在包含 B 和 C 的开集 Ω 上是解析的，那么对于 B 中的每一个点 a 都有

$$F(a) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z-a}dz \tag{3.4}$$

其中，若 C 是逆时针定向的，上式子中的符号取 $+$，反之取 $-$。

Chapter 4

Exescrise 2

4.1. Jordan 分割定理

证明 *Jordan* 分割定理和广义分割定理
p292 no.2

4.2. 区域不变性

本节三条定理证明
习题 5，6

4.3. Jordan 曲线定理

证明本节定理

4.4. 简单闭曲线环绕数

定理证明

4.5. Cauchy 积分公式

引理 66.1
Cauchy 积分定理形式的证明
习题 2

Chapter 5

Seifert-Kampen 定理

5.1. *Abelian* 群的直接和

设 G 是一个 *Abelian* 群，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 G 的子群的一个加标族，如果 G 中的每一个元素 x 可以表示为群族 G_α 中有限个成员之和，则称群族 G_α **生成** G。

设群族 G_α 生成 G，则称 G 为群族 G_α 的**和**。记作

$$G = \sum_{\alpha\in J} G_\alpha \tag{5.1}$$

设群族 G_α 生成 G，并且对于每一个 $x \in G$，x 的表示 $x = \sum x_\alpha$ 是唯一的，也就是说，对于每个 $x \in G$，只有一个 J-串 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 使得除有限个 α 外都有 $x_\alpha = 0$，并且 $x = \sum x_\alpha$。这称为群族 G_α 的**直和**，记作

$$G = \oplus_{\alpha\in J} G_\alpha \tag{5.2}$$

直和的扩展条件

lemma 5.1.1: 设 G 是一个 *Abelian* 群，$\{G_\alpha\}$ 是 G 的子群的一个族，如果 G 为群族 G_α 的直和，则 G 满足以下条件:

(∗) 对于任何 *Abelian* 群 H 以及任何同态 $h_\alpha : G \to H$ 的族，存在一个同态 $h : G \to H$，使得对于每一个 α，h 在 G_α 上的限制等于 h_α。

此外，h 还是唯一的，反之，如果群族 G_α 生成 G 并且扩展条件 (∗) 成立，则 G 为群族 G_α 的直和。

corollary 5.1.2: 设 $G = G_1 \oplus G_2$，假定 G_1 为子群族 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的直和，G_2 为子群族 $\{H_\beta\}_{\beta\in K}$ 的直和，其中指标集 J 与 K 无交，则 G 为子群族 $\{H_\gamma\}_{\gamma\in J\cup K}$ 的直和。

corollary 5.1.3: 若 $G = G_1 \oplus G_2$，则 G/G_2 同构于 G_1。

构造群 G 的办法

theorem 5.1.4: 对于给定的 *Abelian* 群的一个族 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in J}$，存在一个 *Abelian* 群和单同态的一个族 $i_\alpha : G_\alpha \to G$，使得 G 为群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的直和。

刻画外直和的扩展条件

theorem 5.1.5: 设 $\{G_\alpha\}$ 为 *Abelian* 群的一个加标族，G 是一个 *Abelian* 群，$i_\alpha : G_\alpha \to G$ 为同态的一个族，如果每一个 i_α 都是单同态，并且 G 是群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的直和，则 G 满足以下扩展条件：

(∗) 对于任何 *Abelian* 群 H 以及任何同态族 $h_\alpha : G_\alpha \to H$，存在一个同态 $h : G \to H$，使得对于每一个 α 都有 $h \circ i_\alpha = h_\alpha$

此外，h 还是唯一的，反之，如果群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 生成 G 并且扩展条件 (∗) 成立，则每一个 i_α 都是单同态，并且 G 为群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的直和。

直和的唯一性定理

theorem 5.1.6: 设 $\{G_\alpha\}$ 为 *Abelian* 群的一个族，设 G 和 G' 都是 *Abelian* 群，$i_\alpha : G_\alpha \to G$ 和 $i'_\alpha : G_\alpha \to G'$，其中 G 是群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的直和，G' 是群族 $i'_\alpha(G_\alpha)$ 的直和，则存在一个唯一同构 $\phi : G \to G'$，则存在一个唯一同构 $\phi : G \to G'$ 使得 $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$ 对于每一个 α 成立。

自由 *Abelian* 群的扩展条件

definition 5.1.1: 设 G 是一个 *Abelian* 群，$\{a_\alpha\}$ 是 G 中元素的一个加标族，G_α 是由 a_α 生成的 G 的子群，如果群族 G_α 生成 G，我们也称元素族 a_α 生成 G，如果每一个群 G_α 都是无限循环群，并且 G 为群族 G_α 的直和，则称 G 为群族 G_α 的直和，则称 G 为以元素族 $\{a_\alpha\}$ 为基的**自由 *Abelian* 群**。

lemma 5.1.7 (自由 *Abelian* 群的扩展条件): 设 G 是一个 *Abelian* 群，$\{a_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 为 G 中元素的一个族，它们生成 G，则 G 是一个以 $\{a_\alpha\}$ 为基的自由 *Abelian* 群的充分必要条件是：对于任何一个 *Abelian* 群H 以及 H 中任意元素的一个族 $\{y_\alpha\}$，存在一个 G 到 H 的同态 h，使得 $h(a_\alpha) = y_\alpha$ 对于每一个点 α 成立，这时，h 是唯一的。

theorem 5.1.8: 设 G 是以 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 为基的一个自由 *Abelian* 群，则 n 是由 G 唯一确定的。

如果 G 具有有限基的自由 *Abelian* 群，则 G 的基元素的个数叫做 G 的**秩**。

5.2. 群的自由积

definition 5.2.1: 设 G 是一个群，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为生成 G 的 G 的一个子群族，假设 $\alpha\neq\beta$ 时 $G_\alpha\cap G_\beta$ 仅含有单位元，称 G 为群族 G_α 的**自由积**，如果对于任何一个 $x\in G$，都唯一地存在含于群组 G_α 并且表示 x 的字，记作

$$G=\prod_\alpha G_\alpha \tag{5.3}$$

对于有限的情形，也记作 $G=G_1\times G_2\times\cdots G_n$.

自由积也满足类似于直和的扩展条件

lemma 5.2.1: 设 G 是一个群，$\{G_\alpha\}$ 为 G 的子群族，若 G 为群族 G_α 的自由积，则 G 满足以下条件

(∗) 对于任何群 H 以及任何同态族 $h_\alpha : G_\alpha\to H$，存在一个同态 $h : G\to H$，使得对于每一个 α，同态 h 在 G_α 上的限制等于 h_α.

此外 h 是唯一的。

外自由积

definition 5.2.2: 设 $\{G_\alpha\}$ 为群的一个加标族，设 G 是一个群，$i_\alpha : G_\alpha\to G$ 为单同态的一个族，使得 G 为群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的自由积，则称 G 为群族 G_α 相对于单同态族 i_α 的**外自由积**。

在不同区别同构的群的意义下群 G 是唯一的

theorem 5.2.2: 对于给定的群的一个族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$，存在一个群 G 以及单同态的一个族 $i_\alpha : G_\alpha\to G$，使得 G 是群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的自由积。

外自由积的扩展条件

theorem 5.2.3: 设 $\{G_\alpha\}$ 是群的一个族，G 是一个群，$i_\alpha : G_\alpha\to G$ 为同态的一个族，如果每一个 i_α 都是一个单同态，并且 G 为群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的自由积，则 G 满足以下条件:

(∗) 对于任何一个群 H，以及任何同态的一个族 $h_\alpha : G_\alpha\to H$ 存在一个同态 $h : G\to H$，使得对于每一个 α 都有 $h\circ i_\alpha = h_\alpha$

此外 h 是唯一的。

自由积的唯一性

theorem 5.2.4 (自由积的唯一性): 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是群的一个族，假设 G 和 G' 都是群，$i_\alpha: G_\alpha \to G$ 和 $i'_\alpha: G_\alpha \to G'$ 都是单同态族，使得 $\{i_\alpha(G_\alpha)\}$ 和 $\{i'_\alpha(G_\alpha)\}$ 分别生成 G 和 G'，如果 G 和 G' 分别具有前述引理中的扩展性质，则有一个唯一的同构 $\phi: G \to G'$，使得对于每一个 α 有 $\phi \circ i_\alpha = i'_\alpha$

证明扩展条件决定了自由积

lemma 5.2.5: 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是群的一个族，假设 G 是一个群，$i_\alpha: G_\alpha \to G$ 是同态的一个族，如果扩展条件成立，则对每一个 i_α 都是一个单同态，并且 G 是群族 $i_\alpha(G_\alpha)$ 的自由积。

corollary 5.2.6: 设 $G = G_1 \times G_2$，其中 G_1 和 G_2 分别是子群族 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 和 $\{H_\beta\}_{\beta\in K}$ 的自由积，如果指标集 J 与 K 无交，则 G 为子群族 $\{H_\gamma\}_{\gamma\in J\cup K}$ 的自由积。

这个结论特别蕴含着

$$G_1 \times G_2 \times G_3 = G_1 \times (G_2 \times G_3) = (G_1 \times G_2) \times G_3 \tag{5.4}$$

最小正规子群

设 x 和 y 都是群 G 中的元素，称 y **共轭**于 x，如果对于每一个 $c \in G$，$y = cxc^{-1}$ 成立，群 G 的正规子群是一个含有群中所有元素的所有元素的所有共轭元的子群。

definition 5.2.3: 设 S 为 G 的一个子集，我们考虑 G 中包含 S 的所有正规子群的交 N，易见，N 自身也是 G 的一个正规子群，称为 G 中包含 S 的**最小的正规子群**。

theorem 5.2.7: 设 $G = G_1 \times G_2$，设 N_i 为 G_i 的正规子群，$i = 1, 2$，如果 N 是 G 中包含 N_1 和 N_2 的最小正规子群，则

$$G/N \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2) \tag{5.5}$$

corollary 5.2.8: 如果 N 是 $G_1 \times G_2$ 中包含 G_1 的最小正规子群，则 $(G_1 \times G_2)/N \cong G_2$

5.3. 自由群

definition 5.3.1: 设 $\{a_\alpha\}$ 是 G 中元素的一个族，假设每一个 a_α 生成 G 的一个无限循环子群 G_α，如果 G 为群 $\{G_\alpha\}$ 的自由积，则称 G 为**自由群**，并且称 $\{a_\alpha\}$ 为 G 的一个**自由生成元组**

自由群由下面的扩展性质刻画

lemma 5.3.1: 设 G 是一个群，$\{a_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为 G 中元素的一个族，如果 G 是具有自由生成元组 $\{a_\alpha\}$ 的一个自由群，则 G 满足以下条件：

(∗) 对于任意给定的群 H 以及任何 H 中的元素的一个族 $\{y_\alpha\}$，存在一个同态 $h: G\to H$ 使得 $h(a_\alpha)=y_\alpha$ 对于每一个 α 成立。

此外，h 是唯一的，反之，如果扩展条件成立，则 G 是具有自由生成元组 $\{a_\alpha\}$ 的自由群。

元素族上的自由群

设 $\{a_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 为任何一个加标族，设 G_α 表示所有形如 $a_\alpha^n(b\in\mathbb{Z})$ 的符号的集合，通过定义

$$a_\alpha^n\cdot a_\alpha^m=a_\alpha^{n+m} \tag{5.6}$$

使得 G_α 成为一个群，则 a_α^0 为 G_α 的单位元，并且 a_α^{-n} 为 a_α^n 的逆元，将 a_α^1 简记为 a_α，我们将 $\{G_\alpha\}$ 的外自由积成为**元素族 a_α 上的自由群**

交换子子群

如果 G 是一个群，$x,y\in G$，我们用 $[x,y]$ 表示 G 中的元素

$$[x,y]=xyx^{-1}y^{-1} \tag{5.7}$$

并称其为 x 和 y 的**交换子**，由 G 中所有的交换子生成的子群称为 G 的**交换子子群**。

theorem 5.3.2: 对任何 G，交换子子群 $[G,G]$ 是 G 的一个正规子群，并且商群 $G/[G,G]$ 是一个 *Abelian* 群，若 $h:G\to H$ 为 G 到任何 *Abelian* 群 H 的一个同态，则 h 的核包含 $[G,G]$，从而 h 诱导一个同态 $k:G/[G,G]\to H$。

theorem 5.3.3: 设 G 是以 a_α 为自由生成元组的自由群，则 $G/[G,G]$ 是一个以 $[a_\alpha]$ 为基的自由 *Abelian* 群，这里 $[a_\alpha]$ 表示 $G/[G,G]$ 中 a_α 的陪集。

Betti 数、初等因子，关系子群、有限表示

5.4. *Seifert-Kampen* 定理

theorem 5.4.1 (Seifert-van Kampen 定理): 设 $X = U \cup V$，其中 U 和 V 是 X 中的开集，假设 U, V 以及 $U \cap V$ 都是道路连通的，$x_0 \in U \cap V$。设 H 是一个群，并且

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \to H,\ \ \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \to H \tag{5.8}$$

是两个同态，设 i_1, i_2, j_1, j_2 是依照下图所示内射诱导的同态

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
\pi_1(U\cap V,x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, dashed, "\Phi"] & H \\
 & \pi_1(V,x_0) \arrow[u, "j_2"'] \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

如果 $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$，则存在一个唯一同态 $\Phi_1 : \pi_1(X, x_0) \to H$ 使得 $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ 和 $\Phi \circ j_2 = \phi_2$ 成立

5.5. 圆周束的基本群

5.6. 黏粘 2 维胞腔

5.7. 环面和小丑帽的基本群

Chapter 6

Exescrise 3

p322, 习题 2，3，4

p326, 习题 3，证明定理 69.3，69.4

证明 Seifert-Lampend 定理，

p332 习题 3

p340 定理 73.4

Chapter 7

曲面分类

7.1. 曲面的基本群

7.2. 曲面的同调

设 X 是一个道路连通群，令

$$H_1(X) = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \tag{7.1}$$

$H_1(X)$ 称为是 X 的**第一个同调群**，我们再次表达式中省略了基点，这是由于在两个不同基点的基本群的阿贝尔化之间存在唯一的一个道路诱导同构。

theorem 7.2.1: 设 F 是一个群，N 是一个正规子群，$q : F \to F/N$ 是投射，投射同态

$$p : F \to F/[F, F] \tag{7.2}$$

诱导一个同构

$$\phi : q(F)/[q(F), q(F)] \to p(F)/p(F) \tag{7.3}$$

7.3. 切割和黏合

标记表的初等运算

1. 切割
2. 黏合
3. 换标签
4. 置换
5. 反转

7.4. 分类定理

环型和射影型

分类定理

7.5. 紧致曲面的构造

可三角剖分

theorem 7.5.1: *若 X 为可三角剖分的紧致曲面，则 X 同胚于平面上两两无交的三角形区域的一个族通过成对地黏合边而得到的一个商空间。*

theorem 7.5.2: *若 X 是一个可三角剖分的紧致连通曲面，则 X 同胚于一个成对地黏合某平面多边形区域的边所得到的空间。*

Chapter 8

Exescrise 4

p365. 2,3,5

Chapter 9

覆叠空间的分类

9.1. 覆叠空间的等价

广义提升引理

lemma 9.1.1: 设 p

共轭类

9.2. 万有覆叠空间

9.2.1. 万有覆叠空间的若干性质

9.3. 覆叠变换

正规化子

覆叠映射

轨道空间和纯不连续

9.4. 覆叠空间的存在性

Chapter 10

Exescrise 5

p369. 习题 1,2,5
p377.378. 习题 1，2，4，5，6

Chapter 11

在群论中的应用

Chapter 12

Exescrise 6

p393 习题 2
p395 习题 1，2

References

[1] I. Surname, I. Surname, and I. Surname. "The Title of the Article". In: *The Title of the Journal* 1.2 (2000), pp. 123–456.

Chapter A

Source Code Example

Adding source code to your report/thesis is supported with the package `listings`. *An example can be found below. Files can be added using* `\lstinputlisting[language=<language>]{<filename>}`.

```python
"""
ISA Calculator: import the function, specify the height and it will return a
list in the following format: [Temperature,Density,Pressure,Speed of Sound].
Note that there is no check to see if the maximum altitude is reached.
"""

import math
g0 = 9.80665
R = 287.0
layer1 = [0, 288.15, 101325.0]
alt = [0,11000,20000,32000,47000,51000,71000,86000]
a = [-.0065,0,.0010,.0028,0,-.0028,-.0020]

def atmosphere(h):
    for i in range(0,len(alt)-1):
        if h >= alt[i]:
            layer0 = layer1[:]
            layer1[0] = min(h,alt[i+1])
            if a[i] != 0:
                layer1[1] = layer0[1] + a[i]*(layer1[0]-layer0[0])
                layer1[2] = layer0[2] * (layer1[1]/layer0[1])**(-g0/(a[i]*R))
            else:
                layer1[2] = layer0[2]*math.exp((-g0/(R*layer1[1]))*(layer1[0]-layer0[0]))
    return [layer1[1],layer1[2]/(R*layer1[1]),layer1[2],math.sqrt(1.4*R*layer1[1])]
```

Chapter B

Task Division Example

If a task division is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

表 **B.1:** Distribution of the workload

	Task	Student Name(s)
	Summary	
Chapter 1	Introduction	
Chapter 2		
Chapter 3		
Chapter *		
Chapter *	Conclusion	
	Editors	
	CAD and Figures	
	Document Design and Layout	