2024 物理学问题解读

learning note For reading translation

我真的不懂忧郁

Delft University of Technology

2024 物理学问题解读

learning note For reading translation

by

我真的不懂忧郁

Student Name	Student Number
First Surname	1234567

Instructor:	I. Surname
Teaching Assistant:	I. Surname
Project Duration:	Month, Year - Month, Year
Faculty:	Faculty of Aerospace Engineering, Delft

Cover: Canadarm 2 Robotic Arm Grapples SpaceX Dragon by NASA under CC BY-NC 2.0 (Modified)

Style: TU Delft Report Style, with modifications by Daan Zwaneveld

Preface

A preface...

我真的不懂忧郁
Delft, July 2024

Summary

A summary...

目录

Nomenclature

If a nomenclature is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

Abbreviations

Abbreviation	Definition
ISA	International Standard Atmosphere
...	

Symbols

Symbol	Definition	Unit
V	Velocity	[m/s]
...		
ρ	Density	[kg/m^3]
...		

Chapter 1

电子自旋的来源

本篇来源于 Blibli 的 up 主 HosenRyan 的视频。

1.1. 电子自旋

泡利不相容原理

1.2. 薛定谔方程的缺陷

时空平权性

在伽利略时空观下时空不平权，考虑伽利略变化 $\phi(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} x' = x - x_0 - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1.1}$$

在相对论时空关系下

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \tag{1.2}$$

从两种变换可以看出，在伽利略时空关系啊时空和空间两个参量是不平权的，但是相对论时空关系是平权的。

薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_1 + V(\vec{x})\psi_1 \tag{1.3}$$

时间和空间导数次数不一样，即时空不平权。其根本原因是薛定谔方程使用伽利略时空关系观下能量动量关系

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \tag{1.4}$$

使用相对论下的能量动量关系

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{1.5}$$

得到相对论下的薛定谔方程

$$-\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = -c^2\hbar^2\nabla\phi + m^2c^4\phi \tag{1.6}$$

相对论薛定谔方程求解

求解该方程并不简单，如果要求解能量，会得到

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{1.7}$$

因此如果我们求解尚书量子场方程得到的能量为 E 的粒子，那么就一定存在一个能量为 $-E$ 的解，但实验中并未观测到对应现象。

能不能提前开了这个根号只去其中正的一支?

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \longrightarrow i\hbar\partial_t\phi = [\sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4}]\phi \tag{1.8}$$

很可惜这样一来这并不是一个线性方程，违背了量子力学的*线性叠加原理*，，二来这样的时空不平权。

狭义相对论要求我们要基于相对论时空观的能量动量关系式出发建立量子力学，狭义相对论同时要求量子力学方程式中方程式中时间和空间平权，量子力学线性叠加原理要求量子力学方程是一定是线性方程。

如何调和这些矛盾?

狄拉克提出，如果我们能完全拆解能量关系中的根号那问题就迎刃而解，即找到某种方法使得

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \alpha\vec{p} + \beta \tag{1.9}$$

这样一来就可以获得*量子场方程*

$$i\hbar\partial_t\psi = -i\hbar\alpha\nabla\psi + \beta\psi \tag{1.10}$$

该方程满足以上所有性质。

gamma 矩阵

更一般地

$$E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}\rightarrow\alpha_0=\alpha_1cp_x+\alpha_2cp_y+\alpha_3cp_z+\beta mc^2 \tag{1.11}$$

显然这样的拆解在一般的代数下是不可能的，但数学上可以证明，当系数为 4×4 矩阵则这样的拆解是可行的。这就是 **gamma 矩阵**。

$$\alpha_0=\gamma_0=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_1=\gamma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

$$\alpha_2=\gamma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&1\\1&i&0&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\gamma_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$\beta=I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{1.14}$$

$\alpha_0\sim\alpha_3$ 为四维空间的 *gamma 矩阵*，β 为四维空间的单位矩阵。

1.3. 狄拉克方程的建立

于是我们在四维空间中完成了根式的拆解

$$\gamma_o E=c\sum_i\gamma_i p_i+mc^2I \tag{1.15}$$

其中 γ_u，$\mu=0,1,2,3$，是 gamma 矩阵,I 是矩阵单位元。把这样的能量动量关系运用到薛定谔方程中我们得到

$$i\hbar\gamma_0\partial_t\psi=-i\hbar c\sum_i\gamma_i\partial_i\psi+mc^2I\psi \tag{1.16}$$

这就是新的量子场方程。由于这个方程的系数都是一些 4×4 的矩阵，因此方程的因变量 ψ 将是一个 4 维度矢量

$$\psi=\overrightarrow{\psi}(x)=[\psi_0(x),\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x)] \tag{1.17}$$

与传统的波函数相比，$\overrightarrow{\psi}(x)$ 拥有了四个新的离散自由度。**这四个自由度刚好是自旋（两个自由度）* 正反粒子（两个自由度），为自旋的解释和正反例子的预言做足了理论基础。**

旋量

在某些特殊情况下，四个波函数 $\overrightarrow{\psi}(x) = [\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)]$ 可以被解读为

$$\begin{aligned} \psi_0 &- - - - - - - \longrightarrow \text{自旋向上的电子波函数} \\ \psi_1 &- - - - - - - \longrightarrow \text{自旋向下的电子波函数} \\ \psi_2 &- - - - - - - \longrightarrow \text{自旋向上的正电子波函数} \\ \psi_3 &- - - - - - - \longrightarrow \text{自旋向下的正电子波函数} \end{aligned} \tag{1.18}$$

这一四维矢量因其在洛伦兹变换下独特的变换特性被称为*旋量*。

回顾新的能量动量关系和伽利略时空下能量动量关系之间的区别

对比新的能量动量关系里面只出现了动量项？势能项去哪儿了？

$$\gamma_0 E = c\sum_i \gamma_i p_i + mc^2 I \tag{1.19}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1.20}$$

根据**规范相互作用**的理论，要想在相对论性能量动量系中引入势能，只需要在其中引入一个标量场函数和一个是两场函数即可，即做替换

$$E \to E - e\phi(x), \quad p_i \to p_i - eA_i(x) \tag{1.21}$$

这里的标量场函数和矢量场函数即为电磁场的 *4-势*。

结论

由此我们得到含有相互作用的能量动量关系

$$\gamma_0(E - e\phi(x))\psi = c\sum_i \gamma_i(p_i - eA_i(x)) + mc^2 I \tag{1.22}$$

进而得到喊相互作用的量子场方程

$$\gamma_0(i\hbar\partial_t - e\phi(x))\psi = c\sum_i \gamma_i(-i\hbar\nabla_i - eA_i(x)) + mc^2 I\psi \tag{1.23}$$

可见当极限情况：速度远远小于光速 $c >> v$，即为薛定谔方程

$$i\hbar(\partial_t + i\phi_1(\vec{x}, t))\psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla - ie\vec{A}_1(\vec{x}))^2\psi_1 \tag{1.24}$$

量子电动力学

含有电子相互作用的量子场方程

$$\gamma_0(i\hbar\partial_t - e\phi(x))\psi = c\sum_i \gamma_i(-i\hbar\nabla_i - eA_i(x)) + mc^2 I\psi \tag{1.25}$$

基于该方程所发展起来的量子理论即量子电动力学 (OED)。量子电动力学被誉为理论物理最精确的理论，被费曼称为”the jewel of physics”。

1.4. 自旋自由度

在洛伦兹变换下，考虑一个无穷小变换量，旋量 $\psi(x)$ 的变换关系为

$$\delta\psi = \Lambda_{1/2}(\Lambda^{-1}[t,x,y,z]) - \psi([t,x,y,z]) \tag{1.26}$$

其中 $\Lambda_{1/2}$ 为旋量变换矩阵，Λ 为矢量变换矩阵。考虑一个沿着 z 轴的无穷小旋转变换

$$\Lambda_{1/2} = 1 - \frac{i}{2}\theta\Sigma^2 = 1 - \frac{i}{2}\theta\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

$$\Lambda^{-1}[t,x,y,z] = [t, x+\theta y, y-\theta x, z] \tag{1.28}$$

带回 (1.26), 可得

$$\delta\psi = -\theta(x\partial_y - y\partial_x + \frac{i}{2}\Sigma^3)\psi \tag{1.29}$$

无穷小旋转变换对应的**诺特守恒流**即为体系的总角动量

$$J = \int d^3x\psi^\dagger(\vec{x}\times(-i\hbar\nabla) + \frac{\hbar}{2}\Sigma)\psi \tag{1.30}$$

即**自旋角动量来源于粒子的相对论效应，是粒子的内禀属性**。

Chapter 2

变分法和 Euler-Lagrange 方程

2.1. 线性泛函

若泛函 $J[u,v]$ 满足下列条件

1. $J[u,v] = J[v,u]$;
2. $J[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v] = \alpha_1 J[u_1, v] + \alpha_2 J[u_2, v]$;

则称 $J[u,v]$ 为**对称双线性泛函**，如果只满足线性性，则称为**双线性泛函**，若 $u = v$，则 $J[u,u]$ 称为**二次泛函**，如若只有一个参数 $J[v]$，则称为**线性泛函**。

2.2. 最速下降线

这是历史上最早出现的变分法问题之一，通常被认为是变分法历史的起点。该问题由伽利略于 1630 年提出来，1638 年由系统研究过这个问题，但是他给出的结果不对。认为这条曲线是一个圆弧。对变分法实质性的研究是约翰 · 伯努利在 1696 年在《教师学报》上写给他哥哥雅各布 · 伯努利的一封公开信中征求问题的解开始的。问题的提法是：*设 A 和 B 是铅直平面上不在同一直线上的亮点，在所有连接 A 和 B 两点的平面曲线中，求一条曲线，使得仅仅受到重力加速度作用的、初速度为零的质点从 A 到 B 沿这条曲线运动所需时间最短*。欧拉首先详尽的阐述了这个问题。他的贡献始于 1733 年，他的《变分原理》（Elementa Calculi Variationum）寄予了这门科学这个名字。欧拉对这个理论的贡献非常大。，勒让德（1786）确定了一种方法，但在对极大和极小的区别不完全令人满意。牛顿和莱布尼茨也是在早期关注这一学科，对于这两者的区别 Vincenzo Brunacci（1810）、高斯（1829）、泊松（1831）、Mikhail Ostrogradsky（1834）、和雅可比（1837）都曾做出过贡献。Sarrus（1842）的由柯西（1844）浓缩和修改的是一个重要的具有一般性的成就。Strauch（1849）、Jellett（1850）、Otto Hesse（1857）、Alfred Clebsch（1858）、和 Carll（1885）写了一些其他有价值的论文和研究报告，但可能那个世纪最重要的成果是 Weierstrass 所取得的。他关于这个理论的著名教材是划时代的，并且他可能是第一个将变分法置于一个稳固而不容置疑的基础上的。1900 年希尔伯特发表的 23 个问题中的第 20 和 23 个问题促进了其更深远的发展。

在 20 世纪希尔伯特、埃米 · 诺特、列奥尼达 · 托内利、昂利 · 勒贝格和雅克 · 阿达马等人做出重要贡献。Marston Morse 将变分法应用在莫尔斯理论中。Lev Pontryagin、Ralph Rockafellar 和 Clarke 广义变分法最优控制理论发展了新的数学工具。

现在我们重新阐述这个问题

Question 1: 设 A 和 B 是铅直平面上不在同一直线上的亮点，在所有连接 A 和 B 两点的平面曲线中，求一条曲线，使得仅仅受到重力加速度作用的、初速度为零的质点从 A 到 B 沿这条曲线运动所需时间最短

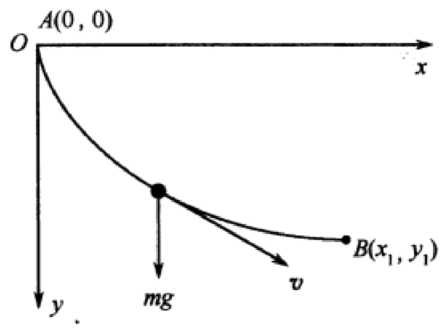

图 2.1: 最速下降线

我们的目的是找出一个关于时间函数 T 的表达式，并求其最小值。运动过程仅收到重力加速度

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \ \Rightarrow \ v = \sqrt{2gy} \tag{2.1}$$

引入时间变量

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\frac{dx}{dt} \tag{2.2}$$

整理两个式子得到关于时间的函数

$$T = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx \tag{2.3}$$

T 是关于 $y(x)$ 的一个函数，像这种输入是函数，输出是数的函数，称为**泛函**，问题是是使的这个 T 最小化，也就是泛函极值问题。

2.3. 泛函极值问题

设 $F(x, y(x), y'(x))$ 是三个独立变量 $x, y(x), y'(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上的已知函数，且二阶连续可微，则

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \tag{2.4}$$

称为**最简积分型泛函**，也称**最简泛函**或**价值泛函**。泛函 $J[y'(x)]$ 称为 **泛函形式**或**变分积分**，被积函数 F 称为**泛函的核函数**或者**变分被积函数**或者 **拉格朗日函数**。

因此，求泛函的极值即是求 $\{y(x)|x \in X\} \xrightarrow{J} \mathcal{R}$ 下使的 $J[\cdot]$ 取最值的 $y(x)$。

2.4. 一阶变分

变分法的主要思想是微小摄动，假设 $y(x)$ 是使的泛函 $J[y(x)]$ 最小的曲线，那么在此之上增加任意摄动都会使得泛函增大。

在 $y=y(x)$ 的一阶领域[1]内，任取 $y=y_1(x)$，

$$\delta y = y_1(x) - y(x), \quad \delta y' = y_1'(x) - y'(x) \tag{2.5}$$

考虑给到泛函 $J[\cdot]$ 摄动 δy 的变化量为

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[y_1(x)] - J[y(x)] = J[y(x)+\delta y] - J[y(x)] \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y')]dx\end{aligned} \tag{2.6}$$

由多元函数的泰勒中值定理得

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y') = \overline{F}_y \delta y + \overline{F}_{y'} \delta y' \tag{2.7}$$

其中 $\overline{F}_y \delta y$ 表示 F 对 y 的一阶导数在 $(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))$ 处的值，其中 $y(x) \leqslant \overline{y}(x) \leqslant y_1(x)$，$\overline{F}_{y'}\delta y'$ 对 y' 的一阶导数在 $(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))$ 处的值，其中 $y(x) \leqslant \overline{y}(x) \leqslant y_1(x)$。因此

$$\begin{aligned}|\overline{y}(x) - y(x)| &< d_1[y_1(x), y(x)] \\ |\overline{y}'(x) - y'(x)| &< d_1[y_1'(x), y'(x)]\end{aligned} \tag{2.8}$$

对于任意的 $\epsilon_1 > 0$，$\epsilon_2 > 0$，当 $d_1[y_1(x), y(x)]$ 充分小，必有

$$|\overline{F}_y - F_y| < \epsilon_1, \quad |\overline{F}_{y'} - F_{y'}| < \epsilon_2 \tag{2.9}$$

所以回到 $J[\cdot]$ 的增量

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{x_0}^{x_1} (\overline{F}_y \delta y + \overline{F}_{y'} \delta y')dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')dx - \int_{x_0}^{x_1} [(\overline{F}_y - F_y)\delta y + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\delta y']dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')dx + \epsilon d_1[y_1(x), y(x)]\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中

$$\epsilon d_1[y_1(x), y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(\overline{F}_y - F_y)\delta y + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\delta y']dx \tag{2.11}$$

当 $d_1[y_1(x), y(x)]$ 趋于零，

$$\begin{aligned}|\epsilon d_1[y_1(x), y(x)]| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} [(\overline{F}_y - F_y)\delta y + (\overline{F}_{y'} - F_{y'})\delta y']dx \right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x_1} \left|\overline{F}_y - F_y\right| |\delta y|\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \left|\overline{F}_{y'} - F_{y'}\right| |\delta y'|\, dx \\ &\leqslant [\epsilon_1 + \epsilon_2) d_1[y_1(x), y(x)]\,(x - x_0) \\ &= \epsilon' d_1\,[y_1(x), y(x)]\end{aligned} \tag{2.12}$$

[1] 《变分法基础》老大中. 定义

n 阶领域：函数 $y(x)$ 在区间上 n 阶距离小于正数 δ 的函数 $y(x)$ 所组成的集合

n 阶距离：两个函数 0 到 n 阶导数之差的绝对值的最大值，$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |y^{(i)}(x) - y_0^{(i)}(x)|$

ϵ' 随着 $d_1[y_1(x), y(x)]$ 趋于零而趋于零。这样 $\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx$ 仅和 ΔJ 相差一个无穷小量。这刚好类似函数的微分定义，令

$$L[y(x), \delta y] = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx \tag{2.13}$$

容易证明这是关于 δy 的线性泛函。若泛函具有二阶连续性，且其增量可以表示为 $\delta J = L[y(x), \delta y] + d[y(x), \delta y]$ 的形式 (其中 $d[y(x), \delta y]$ 是关于 δy 的高阶无穷小)，则我们称这个泛函 $J[\cdot]$ 在 $y = y(x)$ 处**可微**，并且称 $L[y(x), \delta y]$ 为泛函 $J[\cdot]$ 的**一阶变分**。通常记作 δJ

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx \tag{2.14}$$

2.5. 泛函极值的必要条件

我们说变分的思想就是对泛函进行一个扰动，我们期望看到扰动之后泛函的变化率，对泛函 $J[y(x)]$ 引入一个新的泛函 $\phi(\epsilon) = J[y(x) + \epsilon\delta y]$，其中 ϵ 为任意给定的小参数，则

$$\phi'(\epsilon) = \int_{x_0}^{x_1}[F_y(x, y+\epsilon\delta y, y'+\epsilon\delta y')\delta y + F_{y'}(x, y+\epsilon\delta y, y'+\epsilon\delta y')\delta y'] \tag{2.15}$$

令 $\epsilon = 0$, 则

$$\phi'(0) = \delta J[y(x)] \tag{2.16}$$

对于泛函 $J[y(x)]$，可以确定一个函数 $\phi(\epsilon)$，使得 $\phi(\epsilon) = J[y(x) + \epsilon\delta y]$, 如果他在 $\epsilon = 0$ 处对 ϵ 的导数存在，则称 $\phi'(0)$ 为泛函 $J[y(x)]$ 在 $y = y(x)$ 处的**变分**[2]

$$\delta J = \phi'(0) = \frac{\partial J[y(x) + \epsilon\delta y]}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} \tag{2.18}$$

这样定义的变分，称为**拉格朗日定义的泛函变分**。它的意义是*可以用函数导数的观点来看待泛函变分*。因此有如下变分原理。

> **theorem 2.5.1:** *(变分原理) 若泛函 $J[y(x)]$ 在 $y = y(x)$ 上达到极值，则在 $y = y(x)$ 上的变分 δJ 等于 0*

也就是说，如果选择一个 $y(x)$ 使得

$$\delta J = \phi'(0) = \frac{\partial J[y(x) + \epsilon\delta y]}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0 \tag{2.19}$$

则 $J[y(x) + \epsilon\delta y]$ 在 $\epsilon = 0$ 处取到极值。思想是利用求 J 管 ϵ 的极值，通过调整 $y(x)$ 的选择，使得 J 能在 $\epsilon = 0$ 处取到极值。

---

[2]这样的处理在数学上并不严谨，但是在物理学上可以如此理解，泛函导数的严格定义一般在泛函分析中指出，大致的泛函导数的形式为

$$\delta J = \int \frac{\partial J[y(x)]}{\partial y(x)}\delta y(x)dx \tag{2.17}$$

2.6. Euler-Lagrange 方程

欧拉方程的目的是用微分方程去求解泛函极值问题。

在变分表达式中，积分号下是 δy 和 $\delta y'$ 的线性函数，我们希望积分号下只含有其中一个，尝试将变分变为积分号下只是 δy 的线性函数，对变分表示式的第二项使用分布积分

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y' dx = F_{y'}\delta y \left.\right|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{d}{dx} F_{y'} dx \tag{2.20}$$

取 x_0 和 x_1 点变分为 0，即 $\delta y(x_0) = y_1(x_0) - y(x_0) = 0$，$\delta y(x_1) = y_1(x_1) - y(x_1) = 0$[3]

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y' dx = -\int_{x_0}^{x_1} \delta y \frac{d}{dx} F_{y'} dx \tag{2.21}$$

故 δJ 变为

$$\delta = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{y'})\delta y dx \tag{2.22}$$

根据变分原理，极值条件是 $\delta J = 0$，则有

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \tag{2.23}$$

这是 **Euler-Lagrange 方程**。包含边界条件 $y(x_0) = y(x_1) = 0$ 构成泛函极值的求解条件，其解即使泛函极值问题的解。

[3]因为端点固定，所以两个端点的摄动应该是 0

Chapter 3

Lagrange 力学

3.1. 广义坐标

3.2. 最小作用量原理

使得泛函最小

$$S[\mathcal{L}(q,\dot{q},t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t),t)dt \tag{3.1}$$

3.3. *Lagrange* 方程

由泛函的一阶变分并根据泛函极值条件可得拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}) = 0 \tag{3.2}$$

3.4. 对称量与守恒量

在物理学中有三个基本的守恒量

1. 时间平移对称性 $\Rightarrow$ 能量守恒;
2. 空间平移对称性 $\Rightarrow$ 动量守恒;
3. 空间旋转对称性 $\Rightarrow$ 角动量守恒;

诺特定理给守恒量的存在提供了理论基础。

theorem 3.4.1: *(诺特定理) 如果系统的拉格朗日量在连续的连续无穷小变换 $q \to q' = q'(\epsilon)$(ϵ 是一阶小量) 下保持不变，*

$$\mathcal{L}(q(\epsilon), \dot{q}'(\epsilon), t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{\partial \mathcal{L}(q(\epsilon), \dot{q}'(\epsilon))}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 \tag{3.3}$$

则系统必存在守恒量

$$\varLambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \left.\frac{dq'}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \tag{3.4}$$

[1]

proof. 根据在连续无穷小变换下保持不变

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}(q(\epsilon), \dot{q}'(\epsilon))}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial \epsilon}\right]_{\epsilon=0} = 0 \tag{3.5}$$

由欧拉-拉格朗日方程得到

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'}) \cdot \frac{dq'}{d\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \cdot \frac{d\dot{q}}{d\epsilon} = 0 \tag{3.6}$$

因此

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \cdot \frac{dq'}{d\epsilon}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} \cdot \left.\frac{dq'}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \varLambda \tag{3.7}$$

这是诺特定理最简单的表述，他告诉我们如果一个作用量做没有外界给予的突变的情况下，一定存在一个守恒量。下面验证一下前面描述的三种变换下守恒量存在。

能量守恒

首先在*时间均匀性*，推出能量守恒定律，由于时间均匀，即时间平动下拉格朗日量形式保持不变，因此拉格朗日量不显含时间，因此

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \tag{3.8}$$

根据 *Euler-Lagrange 方程*，上面式子可以化为

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial t}\right] = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \Rightarrow \frac{d}{d}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} - \mathcal{L}\right] = 0 \tag{3.9}$$

最终得到

$$\varLambda = \dot{q} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \tag{3.10}$$

封闭系统的拉格朗日量一般可以表述为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - U(q) \tag{3.11}$$

代入 (3.10)，得到

$$m\dot{q}^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + U(q) = E \tag{3.12}$$

这刚好是机械能守恒。

[1]如果一个系统的拉格朗日量对于某个广义坐标 q_i 不显含（即对称性存在），那么对应的广义动量 p_i 是守恒的。

动量守恒

空间平移对称性意味着拉格朗日量不显含有广义坐标 q，由 *Euler-Lagrange* 方程有

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \tag{3.13}$$

即

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = p = Constant \tag{3.14}$$

p 我们常常称之为广义动量。例如势能场中的运动例子

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U(r) \tag{3.15}$$

广义坐标为位移 r，则广义动量为

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = mv \tag{3.16}$$

这刚好是线性动量一般的表达式。广义动量不仅能描述线性动量，也能描述角动量，考虑在二维平面势能场中运动的粒子，

角动量守恒

角动量守恒描述的是空间各向同性，注意到我们前面定义的变分是关于空间位移的变分 $\delta r = r_1(t) - r_2(t)$，现在我们要换成旋转位移的变分 $\delta\varphi = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$，根据最小作用量原理和泛函极值条件

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}\delta r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\delta\dot{r} = 0 \tag{3.17}$$

我们把 δr 替换成和角度相关的量

$$\begin{aligned} \delta r &= r \times \delta\varphi \\ \delta\dot{r} &= \dot{r} \times \delta\varphi \end{aligned} \tag{3.18}$$

再由拉格朗日方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= p \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \dot{p} \end{aligned} \tag{3.19}$$

整理得到

$$\delta\mathcal{L} = p \cdot (\dot{r} \times \delta\varphi) + \dot{p} \cdot (r \times \delta\varphi) = 0 \tag{3.20}$$

注意这里 p, r, φ 都是矢量，那么根据矢量运算法则，可以把 $\delta\varphi$ 提出得到

$$\delta\varphi \cdot (r \times \dot{p} + \dot{r} \times p) = \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt}\left[(r \times p)\right] = 0 \tag{3.21}$$

由 $\delta\varphi$ 的任意性，所以只能是对时间的导数项为 0，即

$$r \times p = \mathcal{M} = Constant \tag{3.22}$$

这里向量 $\mathcal{M}$ 称之为角动量。角动量守恒的条件为外力矩为零。

3.5. 条件极值

如果泛函极值存在约束条件，往往是以下的形式

$$f(q,\dot{q},t)=0 \tag{3.23}$$

由拉格朗日乘子法，构造新的泛函

$$\mathcal{H}(q(t),\dot{q}(t),t)=\mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t),t)+\lambda^T f(q,\dot{q},t) \tag{3.24}$$

其中 $\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t))$，分别求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}-\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\dot{q}}=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda}-\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\dot{\lambda}}=f=0\end{cases} \tag{3.25}$$

Chapter 4

Hamiton 力学

Chapter 5

卡诺定理

References

[1] I. Surname, I. Surname, and I. Surname. “The Title of the Article”. In: *The Title of the Journal* 1.2 (2000), pp. 123–456.

Chapter A

Source Code Example

Adding source code to your report/thesis is supported with the package listings*. An example can be found below. Files can be added using* \lstinputlisting[language=<language>]{<filename>}.

```python
"""
ISA Calculator: import the function, specify the height and it will return a
list in the following format: [Temperature,Density,Pressure,Speed of Sound].
Note that there is no check to see if the maximum altitude is reached.
"""

import math
g0 = 9.80665
R = 287.0
layer1 = [0, 288.15, 101325.0]
alt = [0,11000,20000,32000,47000,51000,71000,86000]
a = [-.0065,0,.0010,.0028,0,-.0028,-.0020]

def atmosphere(h):
    for i in range(0,len(alt)-1):
        if h >= alt[i]:
            layer0 = layer1[:]
            layer1[0] = min(h,alt[i+1])
            if a[i] != 0:
                layer1[1] = layer0[1] + a[i]*(layer1[0]-layer0[0])
                layer1[2] = layer0[2] * (layer1[1]/layer0[1])**(-g0/(a[i]*R))
            else:
                layer1[2] = layer0[2]*math.exp((-g0/(R*layer1[1]))*(layer1[0]-layer0[0]))
    return [layer1[1],layer1[2]/(R*layer1[1]),layer1[2],math.sqrt(1.4*R*layer1[1])]
```

Chapter B

Task Division Example

If a task division is required, a simple template can be found below for convenience. Feel free to use, adapt or completely remove.

表 **B.1:** Distribution of the workload

	Task	Student Name(s)
	Summary	
Chapter 1	Introduction	
Chapter 2		
Chapter 3		
Chapter *		
Chapter *	Conclusion	
	Editors	
	CAD and Figures	
	Document Design and Layout	