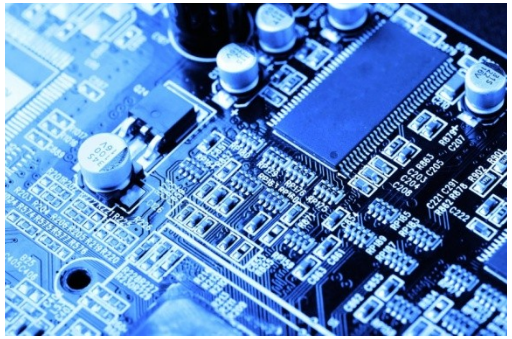
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»
Факультет безопасности информационных технологий

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ



Санкт-Петербург,
2019

Оглавление

Электрический ток

Электрический ток – есть скалярная величина, и определяет направленное движение электрических зарядов. В случае направленного движения *свободных зарядов*, говорят о токе проводимости. Вычисляется электрический ток i [А] в проводнике, как количество заряда dq [Кл] прошедшее через поперечное сечение проводника за время dt [с].

$$i = \frac{dq}{dt} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{с}}\right]. \tag{1}$$

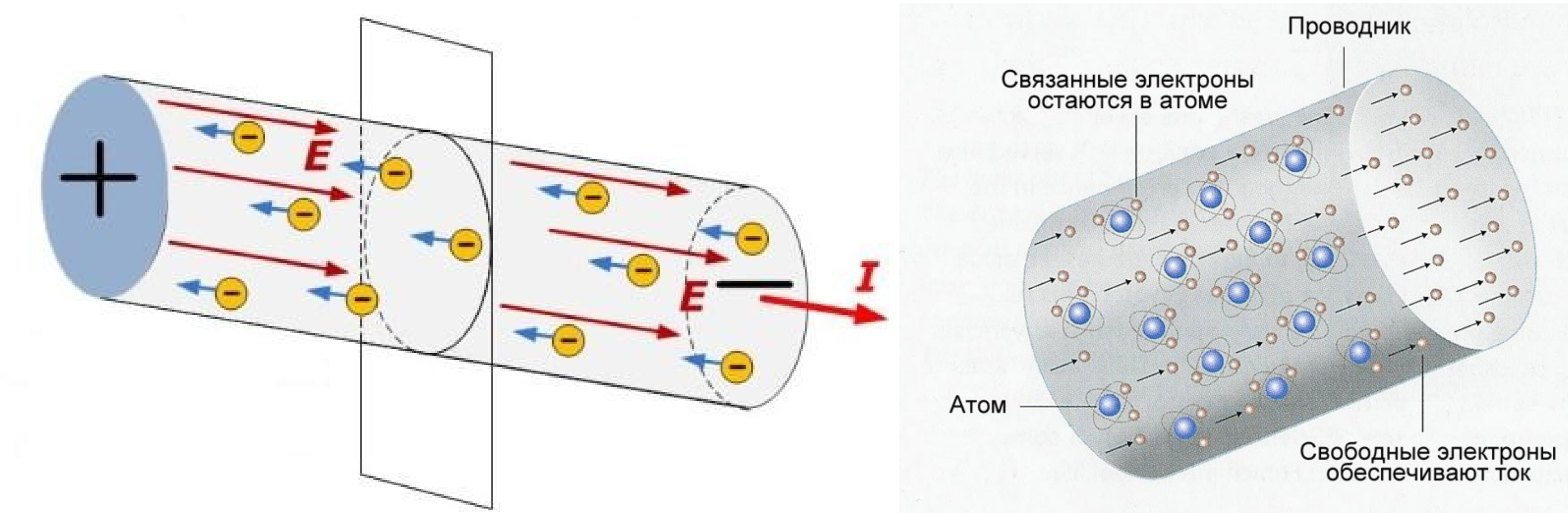


Рис. 1. Движение свободных зарядов в проводнике

Плотность электрического тока – векторная величина, вычисляемая как предел отношения электрического тока i [А] протекающий через элемент поверхности площади Δs [м^2] стремящейся к нулю и перпендикулярной направлению движения носителей заряда, измеряется [А/ м^2].

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} = \frac{di}{ds}. \quad (2)$$

Прямым (положительным) направлением электрического тока считается движение положительных зарядов (например, катионов).

Проводимость и сопротивление

<u>Проводимость</u> – физическая величина, характеризующая способность среды (тела) проводить электрические заряды, измеряется в сименсах [См] = [Ом$^{-1}$].

<u>Сопротивление</u> – физическая величина, обозначаемая *R* и характеризующая свойство проводника препятствовать прохождению электрического тока и равная отношению напряжения на концах проводника к силе тока, протекающего по нему, измеряется в омах [Ом] или другое обозначение [Ω].

Эрнст Вернер фон Сименс (13 декабря 1816 года – 6 декабря 1892 года) – германский инженер, изобретатель, член-корреспондент СПбАН, промышленник, основатель фирмы Siemens, общественный и политический деятель.

Георг Симон Ом (16 марта 1789 – 6 июля 1854) – германский физик, вывел теоретически и подтвердил на опыте закон, выражающий связь между силой тока в цепи, напряжением и сопротивлением.

Удельная электрическая проводимость (γ) – есть характеристика электропроводности вещества, вычисляемая как отношение плотности тока к напряжённости электрического поля вызвавшего ток, т.е.: $\gamma = \boldsymbol{J}/\boldsymbol{E}$ [См/м] = [Ом$^{-1}$/м].

Удельное электрическое сопротивление – величина обратная удельному электрическому сопротивлению $\rho = 1/\gamma$, измеряется в [Ом·м].

Для протяжённого проводника длиной l однородного сечения s и с постоянным удельным электрическим сопротивлением, сопротивление постоянному току вычисляется как:

$$R = \rho \frac{l}{s}. \tag{3}$$

Виды электрического тока

Различают следующие виды электрического тока: ток проводимости, ток переноса, ток смещения.

Ток проводимости – направленное движение свободных носителей заряда в некотором объёме вещества или пустоты (!).

Ток переноса – явление переноса электрических зарядов движущимися в свободном пространстве частицами или телами. Отличие тока переноса от тока проводимости в том что скорость носителей заряда может быть не пропорциональна напряжённости поля.

Ток электрического смещения – возникает в диэлектриках при воздействии переменным электрическим полем. Обусловлен изменением поляризации диэлектрика во времени.

Вещества обладающие свойством проводить под действием неизменяющегося во времени электрического поля не изменяющийся во времени электрический ток называют проводниками.

Ток электрического смещения

Ток электрического смещения – так же называют током электрической поляризации.

При всяком изменении электрического поля во времени изменяется поляризованность P диэлектрика, возникает *ток электрической поляризации*, который является часть тока смещения.

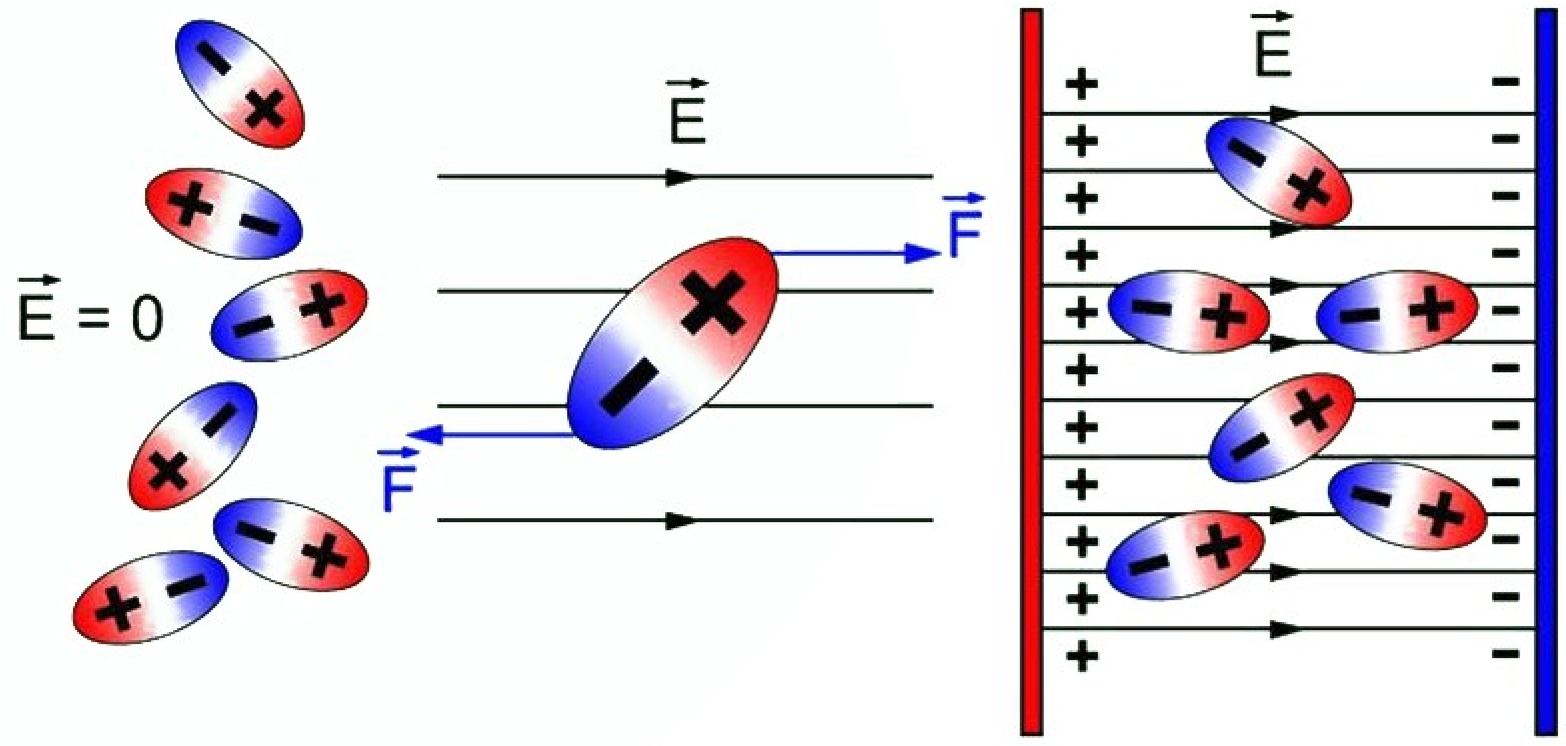


Рис. 2. Поляризация молекул диэлектрика в электрическом поле ***E***

При изменении величины вектора поляризованности вещества $\boldsymbol{P}$ во времени сквозь элемент поверхности ds диэлектрика будет проходить ток:

$$di = \frac{dP_n}{dt} ds, \tag{4}$$

где P_n – составляющая вектора $\boldsymbol{P}$ нормальная к ds.

Тогда плотность тока в направлении нормальном к ds будет:

$$J'_n = \frac{dP_n}{dt}. \tag{5}$$

С учётом трёхмерного пространства, получаем:

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{i} J'_x + \boldsymbol{j} J'_y + \boldsymbol{k} J'_z = \boldsymbol{i} \frac{dP_x}{dt} + \boldsymbol{j} \frac{dP_y}{dt} + \boldsymbol{k} \frac{dP_z}{dt} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}. \tag{6}$$

Вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$ в диэлектрике имеет две составляющие $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{P}$, вектор поляризованности вещества $\boldsymbol{P}$ порождает *ток электрической поляризации*, вектор $\boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ (ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума) характеризует изменения в самом электрическом поле. Запишем, выражение вычисления плотности всего тока смещения:

$$\boldsymbol{J}_{\text{см}} = \frac{d\boldsymbol{D}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{D}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{J}_0 + \boldsymbol{J}'. \tag{7}$$

При действии переменного поля токи смещения возникают не только в диэлектриках, но и в проводниках, и в полупроводниках, и в пустоте (в самом поле). Токи смещения в проводниках необходимо учитывать при достаточно высоких частотах, т.е. когда длина электромагнитной волны сопоставима с линейными размерами проводника. Из этого следует, что для различных электроустановок понятие высокой частоты будет различным.

Рис. 3. Вариабельность размеров электротехнических устройств

Полный электрический ток

Полный электрический ток есть скалярная величина, равная сумме тока проводимости и тока смещения сквозь рассматриваемую поверхность:

$$i = \frac{dq}{dt} + \frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{D}_0 d\boldsymbol{s}. \tag{8}$$

В выражении (8) заряды q образованны совокупностью свободных и связанных зарядов, проходящих сквозь поверхность при поляризации вещества. Второй член в (8) определяет ток смещения в пустоте.

Принцип непрерывности электрического тока

Поток вектора электрического смещения $\boldsymbol{D}$ сквозь поверхность S равен свободному заряду q (для примера положительного заряда), заключённому внутри поверхности:

$$\oint_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s} = q. \tag{9}$$

Возьмём производную от (9) по времени учитывая, что $i = \frac{dq}{dt}$, получим ток смещения через S:

$$\oint_S \frac{d\boldsymbol{D}}{dt} d\boldsymbol{s} = \frac{dq}{dt} = \oint_S \boldsymbol{J}_{\text{см}} d\boldsymbol{s} = i_{\text{см}}. \tag{10}$$

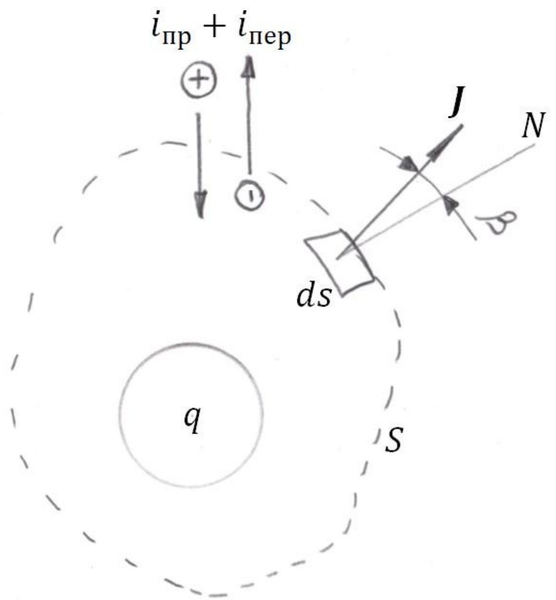


Рис. 4. Движение токов в пространстве через поверхность S

Увеличение заряда внутри S возможно только за счёт переноса положительных зарядов внутрь объёма ограниченного S, или за счёт переноса отрицательных зарядов из объёма S наружу, что может быть осуществлено либо током проводимости $i_{\text{пр}}$ либо током переноса $i_{\text{пер}}$. Таким образом, $\frac{dq}{dt} = -(i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}})$, знак минус возникает за счёт того, что в качестве положительного направления выбрано направление из объёма S наружу. Учитывая (10) запишем: $i_{\text{см}} = -(i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}})$ или $i_{\text{см}} + i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}} = 0$. *Следовательно, сумма токов всех родов – проводимости, переноса и смещения – сквозь любую замкнутую поверхность равна нулю*.

Обозначим суммарную плотность тока как $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\text{см}}$, и сумму всех токов $i = i_{\text{см}} + i_{\text{пр}} + i_{\text{пер}}$, через поверхность объёма S, тогда:

$$i = \oint_S \boldsymbol{\delta} d\boldsymbol{s} = 0. \tag{11}$$

Формула (11) является обобщённым выражением принципа непрерывности электрического тока, который гласит: *полный электрический ток сквозь взятую в какой угодно среде замкнутую поверхность равен нулю*.

Напряжение и разность потенциалов, электродвижущая сила

Работа, совершаемая силами поля с напряжённостью $E(x,y,z)$ при перемещении частицы с зарядом q вдоль всего пути l от точки А к точке В, равна:

$$A = q \int_A^B E \cos(\alpha) dl = q \int_A^B \boldsymbol{E}\, dl. \tag{12}$$

Учитывая, что $u_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E}\, dl$, можно записать: $A = qu_{AB}$, где u_{AB} - напряжение или разность потенциалов между точками А и В.

<u>Электрическое напряжение</u> – физическая величина, характеризующая электрическое поле вдоль рассматриваемого пути и равная линейному интегралу напряжённости электрического поля вдоль этого пути, измеряется в вольтах [в].

Алессандро Джузеппе Антонио Анастасио Джероламо Умберто Вольта (18 февраля 1745, Комо – 5 марта 1827) – итальянский физик, химик и физиолог, один из основоположников учения об электричестве.

С другой стороны, ***напряжённость электрического поля*** равно падению напряжения, отнесённого к единице длины линии напряжённости поля, измеряется в вольтах на метр [в/м].

$$\boldsymbol{E} = \frac{du}{dl}. \tag{13}$$

В проводящей среде, напряжённость электрического поля $\boldsymbol{E}$ и плотность электрического тока $\boldsymbol{J}$ связывают соотношением пропорциональности через коэффициент ρ - удельного сопротивления среды:

$$\boldsymbol{E} = \rho \boldsymbol{J}. \tag{14}$$

Для проводника с током $u = El, J = \frac{i}{s}$ (при относительно низкой частоте или постоянном токе), получим: $\frac{u}{l} = \rho \frac{i}{s}$, учитывая, что сопротивление проводника $R = \rho \frac{l}{s}$, получим *Закон Ома для участка цепи*:

$$u = Ri. \tag{15}$$

Мощность, измеряется в ваттах [вт] определяющая количество энергии, выделяемой в проводнике в виде теплоты в единицу времени, имеет выражение:

$$p = \frac{A}{t} = \frac{uq}{t} = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R}. \tag{16}$$

Выражение (16) называют законом Джоуля-Ленца.

Из закона сохранения энергии вытекает, что в электростатическом поле круговой интеграл напряжённости по любому замкнутому контуру равен нулю (*при отсутствии ЭДС в этом контуре*):

$$\oint_l \boldsymbol{E} dl = 0. \tag{17}$$

В электростатическом поле интеграл $\int_A^B \boldsymbol{E}\, dl$ не зависит от выбора пути интегрирования, но зависит от положения точек A и B. Величина равная $u_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E}\, dl$ – называется разностью потенциалов поля в точках A и B или напряжением между точками A и B.

Учитывая (17) запишем $u_{AB} + u_{BA} = \int_A^B \boldsymbol{E}\, dl + \int_B^A \boldsymbol{E}\, dl = 0$, т.е. $\int_A^B \boldsymbol{E}\, dl = -\int_B^A \boldsymbol{E}\, dl$, независимо от путей интегрирования.

Разность электрических потенциалов (или напряжение) между двумя точками электростатического поля численно равно работе сил поля при перемещении точечного положительно заряженного тела с единичным зарядом из одной точки в другую.

Если в электростатическом поле потенциал некоторой точки Р задать равным нулю, то потенциалы других точек становятся функциями только координат, например, точки А:

$$U_A = \int_A^P E dl = U(x_A, y_A, z_A). \tag{18}$$

В практике равным нулю считают потенциал Земли.

Электрическое поле, которое может быть в каждой точке охарактеризовано с точностью до произвольной скалярной величины, именуемой электростатическим потенциалом, носит название *потенциального электрического поля*.

Электрическое поле вблизи неподвижных проводников с постоянным током называют *стационарным электрическим полем*.

Поверхности, которые пересекаются линиями напряжённости под прямым углом, называют *эквипотенциальными поверхностями*.

Следы поверхности равного потенциала, на плоскости чертежа называют *линиями равного потенциала*.

В замкнутом контуре действует **электродвижущая сила** (ЭДС), если линейный интеграл напряжённости электрического поля вдоль замкнутого контура не равен нулю, причём этот интеграл равен суммарной ЭДС действующей в этом контуре.

$$\oint_l \boldsymbol{E} dl = e. \tag{19}$$

ЭДС измеряется в вольтах [в].

Источниками ЭДС являются генераторы, химические элементы, полупроводниковые элементы (например, солнечные батареи), тепловые и др.

ЭДС будет положительной, если путь интегрирования внутри источника ЭДС проходит от отрицательного зажима к положительному.

Электродвижущая сила (ЭДС) равна разности потенциалов или, что в данном случае одно и то же, напряжению на зажимах при разомкнутой внешней цепи, т.е. без нагрузки.

Законы Кирхгофа

<u>Первый закон Кирхгофа</u>, вытекает из принципа непрерывности электрического тока и гласит: *сумма токов расходящихся от узла электрической цепи равна нулю*.

$$\oint_S \boldsymbol{J} d\boldsymbol{s} = \sum_K i_k = 0. \qquad (20)$$

<u>Второй закон Кирхгофа</u> гласит, сумма падений напряжений во всех ветвях любого замкнутого контура электрической цепи равна сумме ЭДС источников энергии, действующих в этом контуре.

$$\sum e = \sum u. \qquad (21)$$

Густав Роберт Кирхгоф (12 марта 1824 – 17 октября 1887) – один из великих физиков XIX века.

Электрическая ёмкость

Электрическая ёмкость – есть отношение заряда проводника к его потенциалу, в предположении, что потенциал бесконечно удалённой точки равен нулю. Измеряется в фарадах [ф] = [кл/в]

$$C = \frac{q}{u}. \tag{22}$$

Емкость идеального плоского конденсатора можно оценить как:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d}, \tag{23}$$

где ε_0 - абсолютная диэлектрическая проницаемость; ε - относительная диэлектрическая проницаемость; S - площадь одной из равных пластин (обкладок) конденсатора; d - расстояние между обкладками конденсатора.

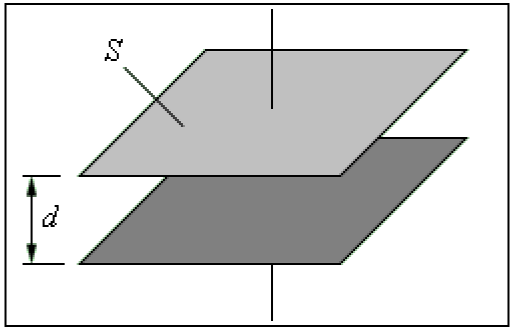


Рис. 5. Плоский конденсатор

Емкость коаксиального кабеля можно оценить как:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon\, l}{\ln{(d_1/d_2)}}. \tag{24}$$

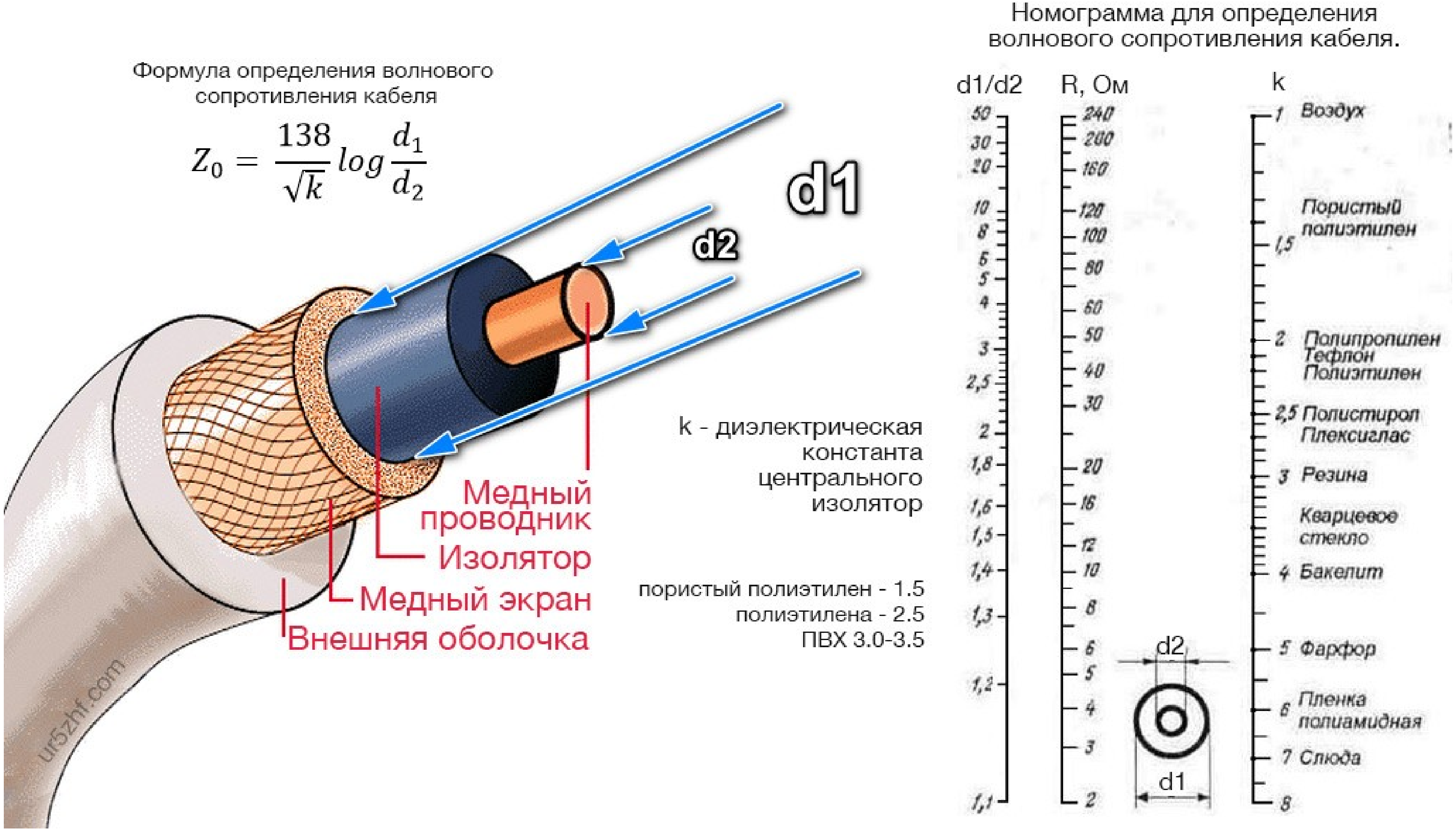


Рис. 6. Коаксиальный кабель (таблица оценки волнового сопротивления)

Емкость между двумя параллельными проводниками круглого сечения:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon \, l}{\operatorname{arcosh}(d/2a)}, \tag{25}$$

где a – радиус проводников; d - расстояние между осями проводников ($d > 2a$); l - длина проводников.

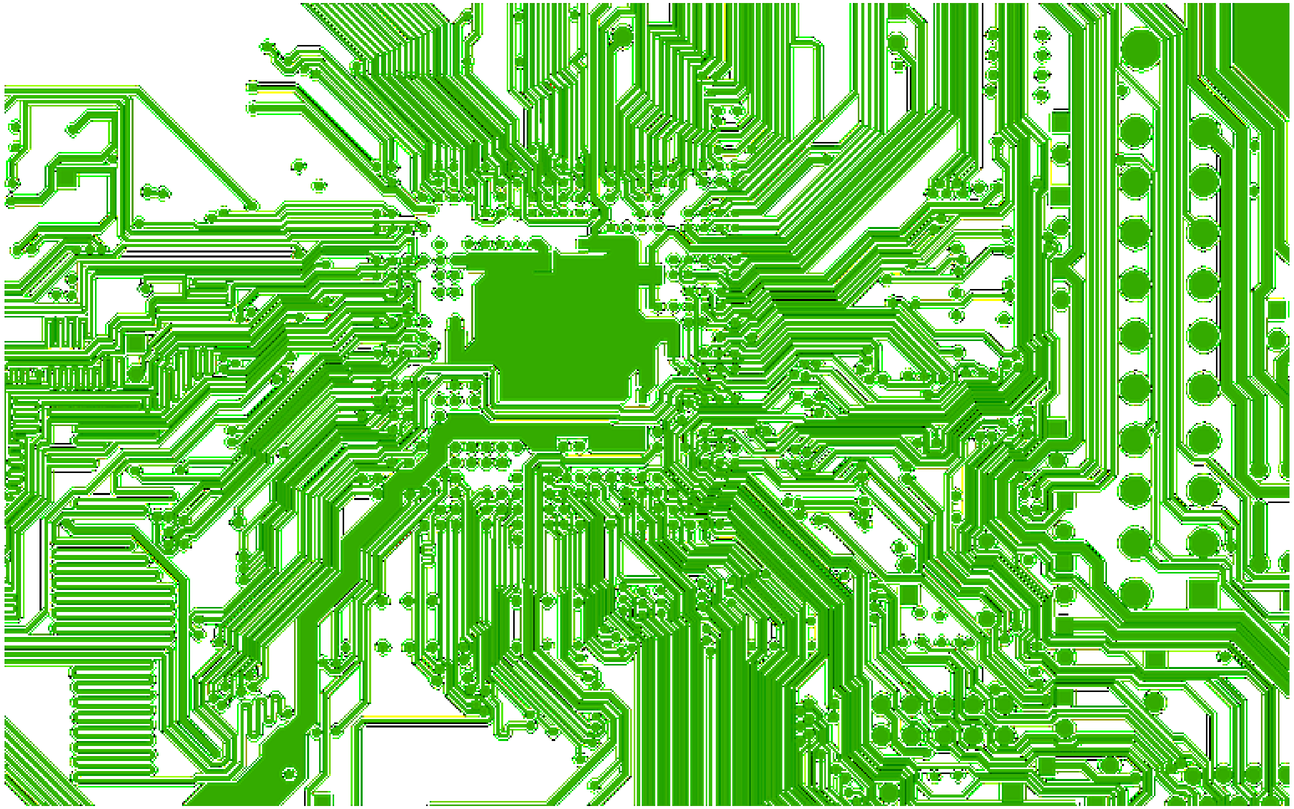


Рис. 7. Между дорожками печатной платы образуется ёмкость называемая паразитной ёмкостью

Энергия, накопленная в конденсаторе, вычисляется как:

$$W = \frac{Cu^2}{2} = \frac{qu}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (26)$$

Уравнения связи мгновенных значений тока i и напряжения u на ёмкости C:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du_C(t)}{dt}; \quad (26)$$

следовательно, изменение заряда конденсатора за время от 0 до t будет происходить по закону:

$$q(t) = \int_0^t i(t)dt + q(0). \quad (27)$$

Далее, разделив обе части (27) на C получим:

$$u_c(t) = \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt + \frac{q(0)}{C} = \frac{1}{c}\int_0^t i(t)dt + u_c(0), \quad (28)$$

где $u_c(0)$ – напряжение на конденсаторе в нулевой момент времени.

Напряжение на конденсаторе не может измениться мгновенно, это означает, что: $\lim_{\Delta t \to 0} u_c(t + \Delta t) = u_c(t)$.

Магнитный поток. Принцип непрерывности магнитного потока

Магнитный поток – поток вектора магнитной индукции ***B*** сквозь некоторую поверхность *S*, измеряется в веберах [вб]=[тл·м^2]:

$$\Phi = \int_S B\cos(\beta)ds = \int_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s}. \quad (29)$$

Магнитная индукция B является плотностью магнитного потока в данной точке поля, т.е. при $\cos(\beta) = 1$, получим: $B = {d\Phi}/{ds}$.

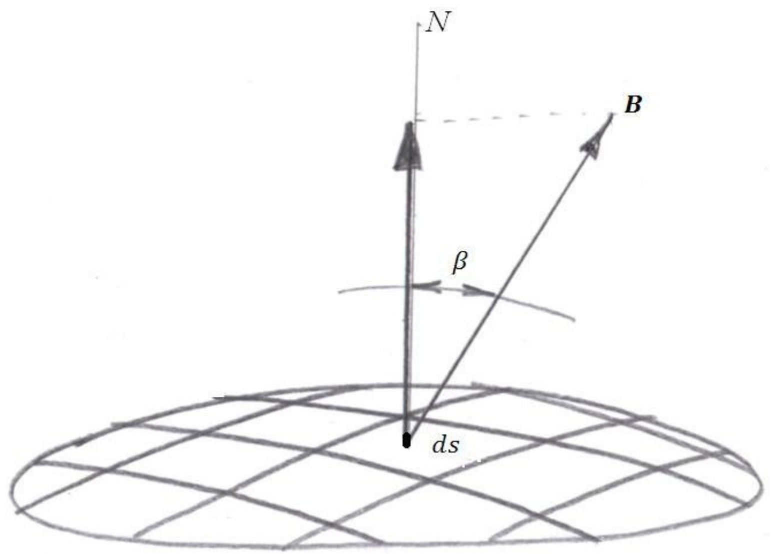


Рис. 8. Вектор магнитной индукции сквозь поверхность

Никола Тесла (10 июля 1856 – 7 января 1943) – изобретатель в области электротехники и радиотехники происхождения, учёный, инженер, физик.

Линиями магнитной индукции, называют линии, проведённые так, что бы в каждой точке таких линий магнитный поток совпадал с касательной к данным линиям.

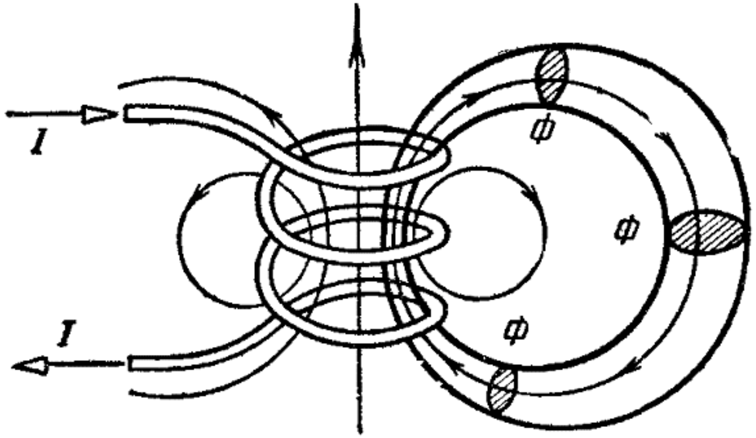


Рис. 9. Трубка магнитной индукции

Линии магнитной индукции образуют *трубки магнитной индукции*. Разделение на трубки магнитной индукции происходит следующим образом, выбирается некоторое значение потока магнитной индукции (пусть для примера 1 вб), далее поток вектора магнитной индукции охватывается поверхностью, которая в каждой своей точке перпендикулярна вектору магнитной индукции. Полученная поверхность разделяется на сегменты с равными потоками магнитной индукции. В результате получается некоторое сечение трубок магнитной индукции. Продолжая данные сечения вдоль линий магнитной индукции, получим неограниченное множество сечений, при этом в каждом сечении поток остаётся неизменным, в результате получим трубки магнитной индукции.

Трубки магнитной индукции, поток сквозь поперечное сечение которых равен единице, называют *единичными трубками*.

Принцип непрерывности магнитного потока, гласит: линии магнитной индукции нигде не имеют ни начала, ни конца – они всюду непрерывны.

Магнитное поле всегда связанно с электрическим током. Во всех без исключения случаях линии магнитной индукции непрерывны.

$$\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{s} = 0. \qquad (30)$$

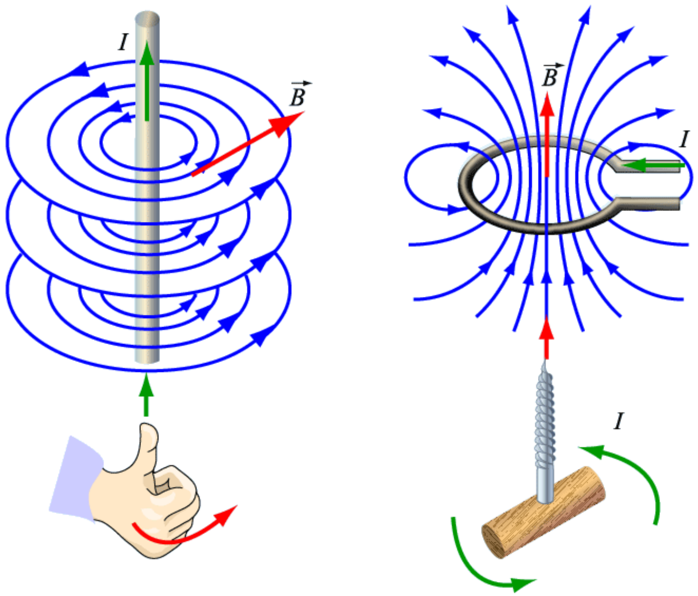


Рис. 10. Правило буравчика (правило правой руки)

Закон электромагнитной индукции

Если проходящий сквозь поверхность, ограниченную некоторым замкнутым контуром, магнитный поток Ф, изменяется во времени, то в этом контуре индуцируется ЭДС, равная взятой со знаком минус скорости изменения этого потока.

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (31)$$

В общем случае, когда изменяется поток и движется контур, возможно записать:

$$e = \oint \boldsymbol{E}_{\text{инд}} d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \oint_l [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] d\boldsymbol{l}, \quad (32)$$

где компонента $-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ – определяется собственным изменением магнитного потока, а $\oint_l [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] d\boldsymbol{l}$ – определяется движением контура в магнитном поле.

Знак минус $(-\frac{d\Phi}{dt})$ в выражении закона электромагнитной индукции определяет инерционность системы «магнитное поле - замкнутый контур», т.к. изменение магнитного поля порождает в замкнутом контуре такой ток который, в свою очередь, порождает магнитное поле, препятствующее изменению первичного магнитного поля.

Можно сказать, что в физическом явлении закона электромагнитной индукции содержится *отрицательная обратная связь*.

Сила Лоренца

Сила Лоренца – сила, с которой электромагнитное поле согласно законам электродинамики действует на точечную заряженную частицу.

$$\boldsymbol{F}_{л} = q(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]). \quad (33)$$

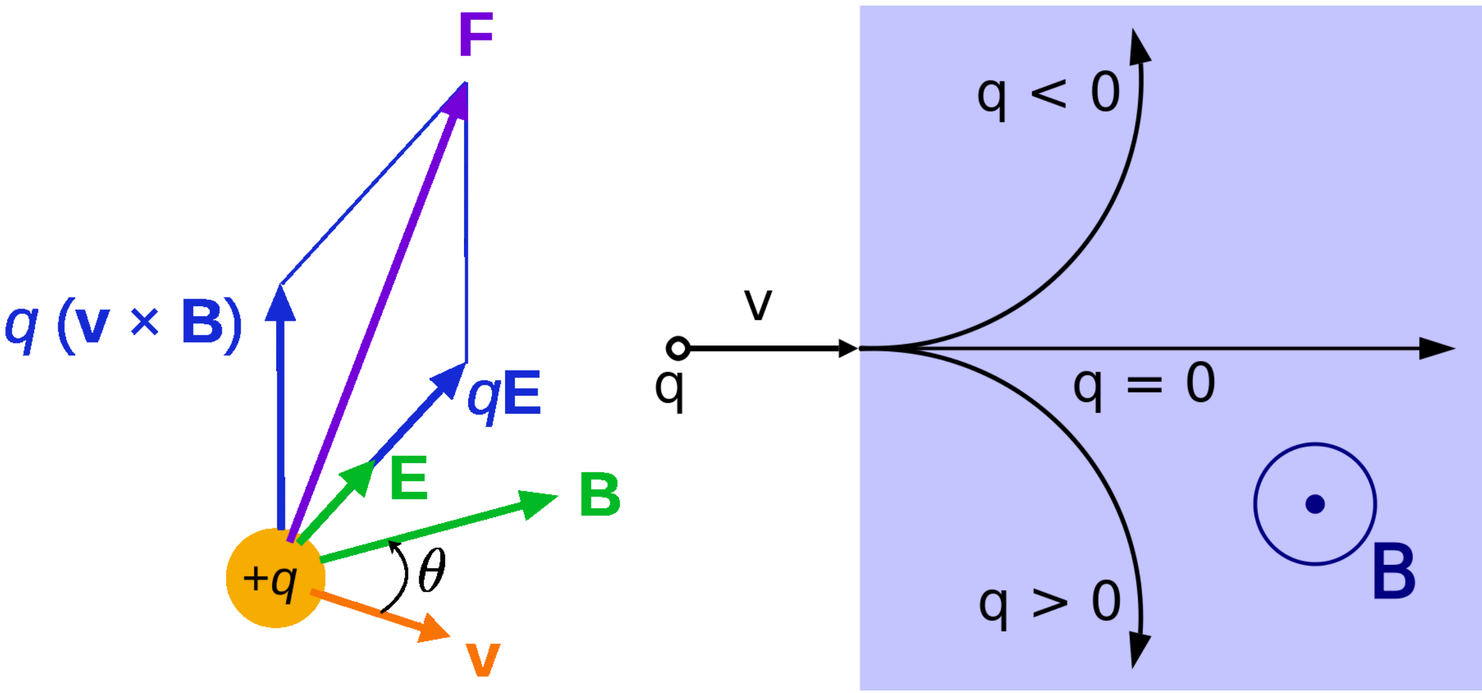


Рис. 11. Сила Лоренца, действующая в электромагнитном поле на заряженные частицы

Потокосцепление. Индуктивность

Так как магнитный поток пронизывает «суммарную» площадь контура катушки образуя достаточно сложную конфигурацию. Например, некоторые линии магнитной индукции могут охватывать не все витки катушки, другие линии магнитной индукции могут пронизывать контур катушки в прямом и обратном направлении. В связи целесообразное использовать характеристику Ψ–**<u>потокосцепление</u>**.

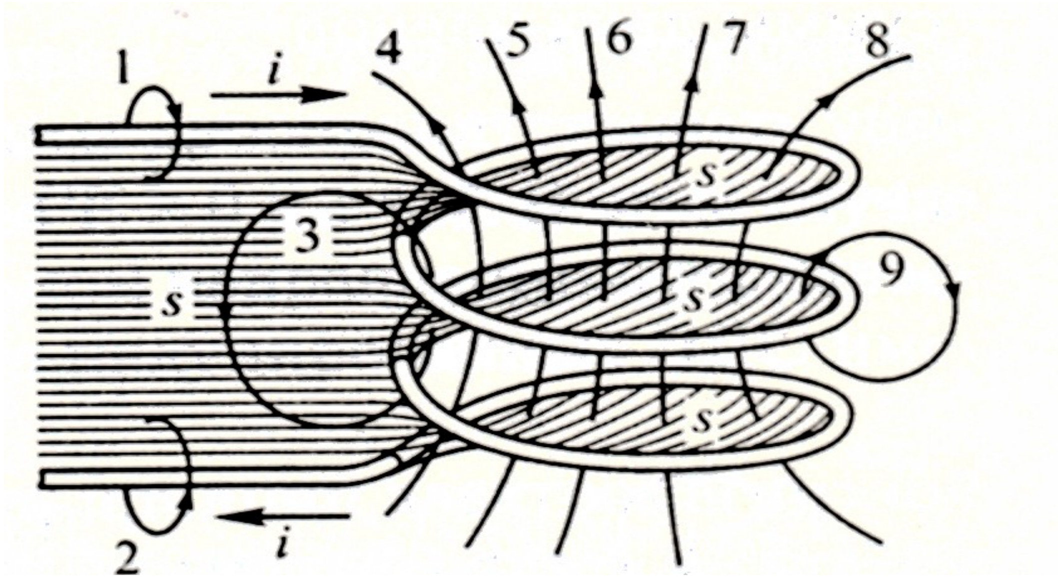


Рис. 12. Потокосцепление 3-х витковой катушки (соленоида)

Физический смысл *потокосцепления* заключается в выражении суммы сцепленных с катушкой (или другим контуром) <u>единичных</u> линий магнитной индукции. При суммировании линий магнитной индукции следует учитывать их направление, причём положительными следует считать те линии, которые порождают положительное направление тока по правилу буравчика.

ЭДС выраженная через потокосцепление имеет вид:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}. \tag{34}$$

В некоторых случаях, например, если катушка содержит замкнутый ферромагнитный сердечник и потоком рассеяния можно пренебречь, оценочный расчёт потокосцепления возможно произвести умножив число витков ω соленоида на поток Ф, т.е.: $\Psi = \omega\Phi$.

Индуктивность или коэффициент самоиндукции, есть физическая характеристика контура с током определённая как коэффициент пропорциональности между электрическим током i, текущим в каком-либо замкнутом контуре, и полным магнитным потоком Ψ, называемым также потокосцеплением, измеряется в генри (Гн).

$$\Psi = Li. \tag{35}$$

Индуктивность зависит от геометрических параметров проводника с током, магнитной проницаемости среды в которой существует магнитное поле действующее на данный контур.

Джозеф Генри (17 декабря 1797 – 13 мая 1878) – американский физик, первый секретарь Смитсоновского института.

Используя понятие индуктивность, можно записать уравнение ЭДС самоиндукции в следующем виде:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}. \qquad (36)$$

Из уравнения (36) видно что ЭДС самоиндукции может происходить как в результате изменения индуктивности L, так и в результате изменения тока i.

При неизменном значении индуктивности $L = const$, получим:

$$e = -L\frac{di}{dt}. \qquad (37)$$

Если существует два (а в общем случае и более) контуров (1,2) с током, то между ними возникает *потокосцепление взаимной индукции*, обозначаемое Ψ_{12} и Ψ_{21}, запишем:

$$\begin{cases} \Psi_{21} = M_{21}i_1 \\ \Psi_{12} = M_{12}i_2' \end{cases} \qquad (38)$$

Причём взаимные индуктивности связанных потокосцеплением взаимной индукции контуров равны, т.е. $M_{21} = M_{12}$.

ЭДС взаимной индукции возникающая во втором контуре в результате изменения тока в первом контуре или взаимной индуктивности можно выразить как:

$$e_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d(M_{21}i_1)}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt} - i_1\frac{dM_{21}}{dt}. \qquad (39)$$

Энергия магнитного поля катушки индуктивности L с током i:

$$W_{\text{М}} = \frac{\Psi i}{2} = L\frac{i^2}{2}. \quad (40)$$

Полная энергия магнитного поля системы контуров обладающих собственной и взаимной индуктивностью:

$$W_{\text{М}} = \sum_{n=1}^{N}\frac{L_n i_n^2}{2} + \sum_{k\neq n,\ n=1}^{N}\frac{M_{kn} i_k i_n}{2}. \quad (41)$$

Выразим ток в катушке индуктивности L, через напряжение на её зажимах $u_L(t)$, при токе через катушку в начальный момент времени $i_L(0)$:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)dt + i_L(0). \quad (42)$$

Продифференцировав выражение (42) получим:

$$u_L(t) = L\frac{di_L(\mathrm{t})}{dt}. \quad (43)$$

Заметим, что ЭДС самоиндукции катушки индуктивности имеет противоположный знак по отношению к внешнему напряжению приложенному к катушке, т.е.:

$$+u_L(t) = -e_L(t) = +L\frac{di_L(\mathrm{t})}{dt}. \quad (44)$$

Градиент скалярного поля

Градиентом или производной скалярного поля (U) в данной точке называют вектор вычисляемый как предел отношения производной поля в направлении орта. Обозначается градиент grad U или ∇U, где ∇ – оператор набла.

$$\operatorname{grad} U = \lim_{v\to 0} \frac{\oint_S U d\boldsymbol{s}}{v}. \tag{45}$$

В случае трёхмерного пространства, в декартовой системе координат градиент вычисляется как:

$$\operatorname{grad} U(x,y,z) = \nabla U(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{46}$$

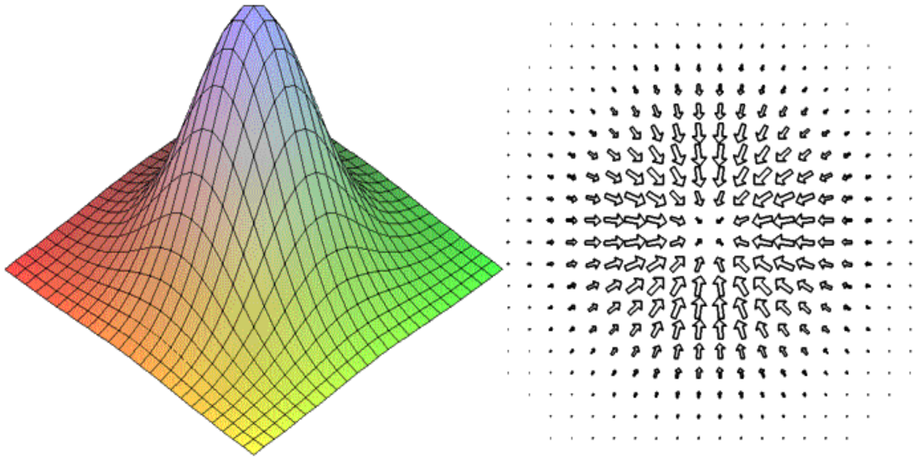


Рис. 13. Скалярное двумерное поле и его градиент

Некоторые свойства градиента:

1. градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку;
2. $\mathrm{grad}(U + V) = \mathrm{grad}\, U + \mathrm{grad}\, V$;
3. $\mathrm{grad}\,(c\, U) = c\,\mathrm{grad}\, U, c = const$;
4. $\mathrm{grad}(U\, V) = U\,\mathrm{grad}\, V + V\,\mathrm{grad}\, U$;
5. $\mathrm{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\,\mathrm{grad}\, U - U\,\mathrm{grad}\, V}{V^2}$.

Физический смысл: градиент показывает направление возрастания функции скалярного поля в данной точке.

Дивергенция векторного поля

Дивергенцией или расхождением векторного поля $\boldsymbol{F}$ называется скаляр определённый в каждой точке поля и являющийся объёмной производной этого поля. Обозначается div $\boldsymbol{F}$ или $\nabla\boldsymbol{F}$, где ∇ – оператор набла.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \lim_{v\to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} d\boldsymbol{s}}{v}. \tag{47}$$

В случае трёхмерного пространства, в декартовой системе координат дивергенция вычисляется как:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x, y, z) = \nabla\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z}. \tag{48}$$

Некоторые свойства дивергенции:

1. $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) = 0$, если $\boldsymbol{F}$ - постоянный вектор;
2. $\operatorname{div}(c\,\boldsymbol{F}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{F}, c = const$;
3. $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P}) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{P}$;
4. $\operatorname{div}(U\,\boldsymbol{F}) = U \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \operatorname{grad} U$, где U – скалярное поле.

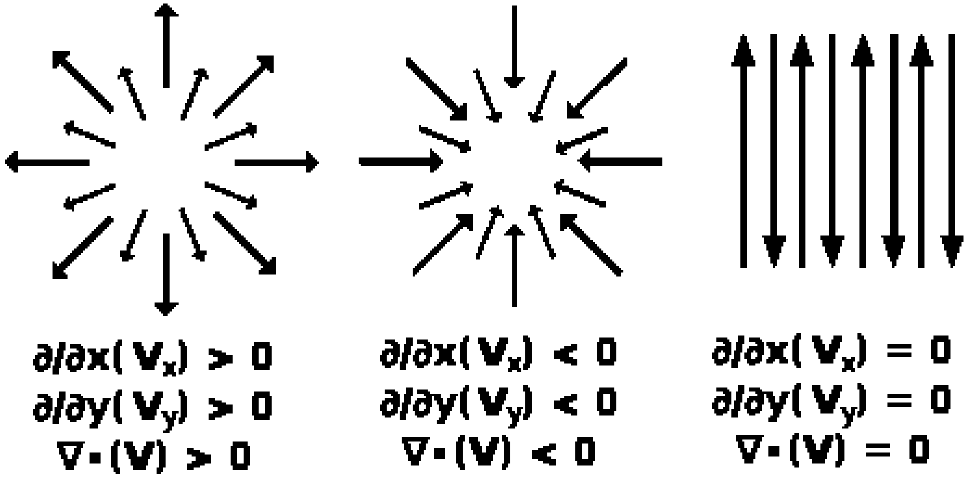


Рис. 14. Пояснение к физическому смыслу дивиргенции

Физический смысл. Дивергенция векторного поля показывает, является ли малый объём поля истоком или стоком или не содержит истоков и стоков или истоки и стоки друг друга компенсируют в данном малом объёме.

div $\boldsymbol{F} = 0$, не содержит истоков и стоков или истоки и стоки друг друга компенсируют

div $\boldsymbol{F} > 0$, является источником

div $\boldsymbol{F} < 0$, является стоком

Ротор векторного поля

Ротором или вихрем векторного поля называют вектор, определённый в каждой точке поля и являющийся объёмной производной этого поля, взятый с обратным знаком. Обозначается rot $\boldsymbol{F}$, curl $\boldsymbol{F}$ или $\nabla\times\boldsymbol{F}$ где ∇ – оператор набла.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = -\lim_{v\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{F}\times d\boldsymbol{s}}{v}. \tag{47}$$

В случае трёхмерного пространства, в декартовой системе координат ротор вычисляется как:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{48}$$

Некоторые свойства ротора:

1. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{P}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \operatorname{rot}\boldsymbol{P}$;
2. $\operatorname{rot}(c\boldsymbol{F}) = c\operatorname{rot}\boldsymbol{F}, c = const$;
3. $\operatorname{rot}(U\,\boldsymbol{F}) = U\operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \operatorname{grad}(U\times\boldsymbol{F})$;
4. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{P}) = (\boldsymbol{P}\operatorname{grad})\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F}\operatorname{grad})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}\operatorname{div}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\operatorname{div}\boldsymbol{F}$.

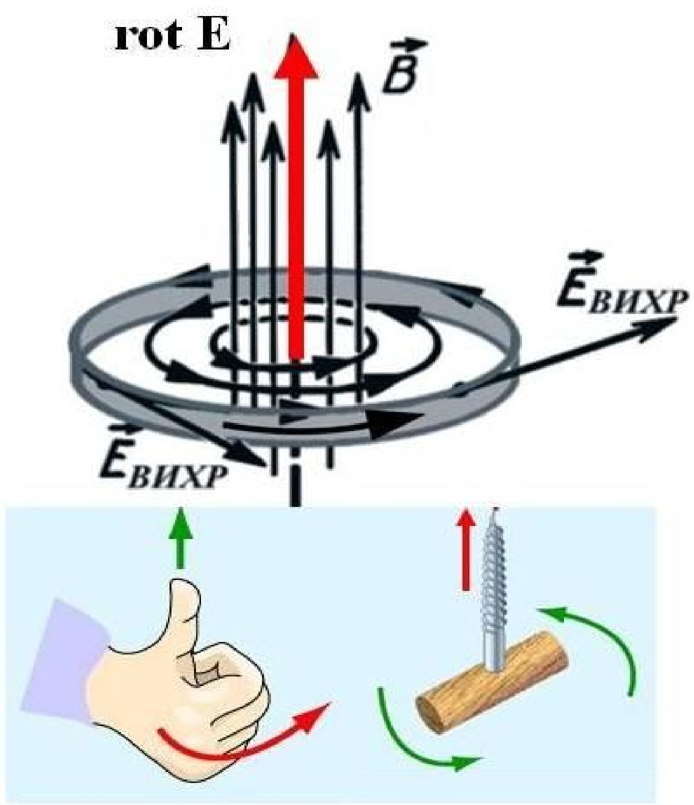


Рис. 15. Иллюстрация к физическому смыслу ротора

Физический смысл. Ротор векторного поля характеризует наличие вихревой составляющей, например, в поле скоростей некоторой среды. В качестве интуитивного образа, можно использовать представление о вращении брошенной в поток маленькой пылинки, вектор направленный перпендикулярно плоскости вращения будет совпадать с вектором ротации в данной точке потока.

Законы ЭМП в интегральной форме

Закон полного тока

$$\oint_L \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = i. \tag{49}$$

Закон полного тока: линейный интеграл напряжённости магнитного поля по любому замкнутому контуру равен полному току сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Закон электромагнитной индукции

$$\oint_L \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{50}$$

Закон электромагнитной индукции: при всяком изменении магнитного поля во времени возникает в том же пространстве связанное с ним электрическое поле.

Постулат Максвелла

$$\oint_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{s} = q. \tag{51}$$

Постулат Максвелла: поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность в любой среде равен свободному заряду, заключённому в объёме, ограниченном этой поверхностью.

Принцип непрерывности магнитного потока

$$\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{s} = 0. \tag{51}$$

Принцип непрерывности линий вектора магнитной индукции определен соотношением непрерывности магнитного потока и означает, что магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю.

Законы ЭМП в дифференциальной форме

Закон полного тока

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta i}{\Delta s}\right) = \boldsymbol{\delta}\cos(\beta) = \boldsymbol{\delta}_n. \quad (52)$$

Закон электромагнитной индукции

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}}{\Delta s} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}\right) = \boldsymbol{B}_n. \quad (53)$$

Постулат Максвелла

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s}}{\Delta v} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \lim_{\Delta v\to 0}\left(\frac{\Delta \mathrm{q}}{\Delta v}\right) = \rho. \quad (54)$$

Принцип непрерывности магнитного потока

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s}}{\Delta v} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0. \quad (55)$$

Принцип непрерывности электрического тока

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{\delta}d\boldsymbol{l}}{\Delta v} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0. \quad (56)$$

$\boldsymbol{B}$ – вектор магнитной индукции, силовая характеристика магнитного поля, всегда сцеплен с вектором напряжённости электрического поля.

$\boldsymbol{E}$ – вектор напряжённости электрического поля физическая величина, характеризующая электрическое поле в данной точке, всегда сцеплен с вектором магнитной индукции.

$\boldsymbol{H}$ – напряжённость магнитного поля, векторная физическая величина, равная разности вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и вектора намагниченности $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$, где $\boldsymbol{M}$ – вектор намагниченности вещества.

$\boldsymbol{D}$ – вектор электрического смещения, $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$, где $\boldsymbol{P}$ – вектор интенсивности поляризованности вещества.

Литература по курсу Схемотехника

Основная литература

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р, Коровкин Н.В, Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники в 3-х томах // С-Пб.: Питер, 2003.
2. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники: Перевод с английского. - Издание 2-е. - М: Издательство БИНОМ. - 2015. - 704 с.: ил.
3. С. Зи. Физика полупроводниковых приборов. В 2-х книгах // М.: «МИР», 1984. – 456 с. и 456 с.
4. Волович Г. И. Схемотехника аналоговых и аналогово-цифровых электронных устройств. 3-е изд. стер. // М.: ДМК Пресс, 2015 – 528 с.: ил.
5. Картер Б. Операционные усилители для всех // М.: Додэка-XXI, 2011 - 544 с.: ил.
6. Резевиг В. Д. Схемотехническое моделирование с помощью Micro-Cap 7. // М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 368 с.: ил.
7. Корис Р., Шмидт-Вальтер Х. Справочник инженера-схемотехника // М.: Техносфера, 2008. – 608 с.
8. Стюарт Б. Р. Аналоговые интерфейсы микроконтроллеров // М.: Додэка-XXI, 2007. – 360 с.: ил.

Дополнительная литература

9. Кестер У. Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов // М.: Техносфера, 2010. – 328 с.: ил.
10. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров // М.: Наука, 1957. – 780 с.
11. Суходольский В. Ю. Altium Disigner: сквозное проектирование функциональных узлов РЭС на печатных платах: учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. // С-Пб.: БХВ-Питер, 2014 – 560 с.: ил.
12. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников // М.: Наука, 1977. – 672 с.
13. Фалькевич Э. С., Пульнер Э. О., Червоный И. Ф. и др. Технология полупроводникового кремния // М.: Металургия, 1992. – 408 с.: ил.