

# Ćwiczenia z algorytmów wyliczania reguł decyzyjnych

March 19, 2025

## Ćwiczenie 2 (1pkt)

### Algorytmy wyliczania reguł decyzyjnych

Zadanie do wykonania

1. Czytamy teorię, analizujemy przykłady, w razie problemu ze zrozumieniem wyliczamy reguły na kartce.
2. Wczytujemy plik SystemDecyzyjny.txt . Ostatni atrybut (kolumna) określa klasę próbki
3. Implementujemy algorytm w Python, wyliczając następujące reguły:
  - reguły wyczerpujące (exhaustive) metodą bazującą na macierzy nieodróżnialności (1pkt)

### Teoria do ćwiczeń z przykładami

*Sposoby zapisu deskryptora:*

$$(a = a(v))$$

$$(a = v)$$

$$(a, a(v))$$

$$(a, v)$$

Znaczenie:  $(a = a(v))$ , atrybut  $a$  ma wartość  $v$

System Informacyjny:  $(U, A)U$  - zbiór obiektów;

$A$  - zbiór atrybutów warunkowych;

Przykład:  $(U, A), U = ob1, ob2, ob3, A = a1, a2, a3$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$ob_1$	1	2	3
$ob_2$	3	2	5
$ob_3$	10	2	17

System Decyzyjny:  $(U, A, d)U$  - zbiór obiektów;

$A$  - zbiór atrybutów warunkowych;

$d$  - atrybut decyzyjny

$d \notin A$

Przykład System decyzyjny zapisujemy jako  $(U, A, d)$ , przyjmijmy,

$U = ob1, ob2, ob3$

$A = a1, a2, a3$

$d \in D = 1, 2$

Przykładowy system decyzyjny zgodny z opisem powyżej, może wyglądać następująco,

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$d$
$ob_1$	7	2	3	1
$ob_2$	3	3	5	2
$ob_3$	10	45	4	1

**Zdefiniujmy reguły decyzyjne wzajemnie niesprzeczne**

$$(a_1 = 1) \implies (d = 1)$$

$$(a_1 = 2) \wedge (a_2 = 7) \implies (d = 1)$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{park})$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w domu}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{dom})$$

**Reguły decyzyjne wzajemnie sprzeczne**

$$(a_1 = 1) \implies (d = 1)$$

$$(a_1 = 1) \implies (d = 2)$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{park})$$

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{dom})$$

**Reguła z alternatywną decyzją**

$$(\text{pogoda} = \text{słoneczna}) \wedge (\text{żona} = \text{w pracy}) \wedge (\text{czas} = \text{wolny}) \implies (\text{decyzja} = \text{park}) \vee (\text{decyzja} = \text{dom})$$

## 1 Reguły wyczerpujące (exhaustive) - z użyciem macierzy nieodróżnialności:

Reguły wyczerpujące to reguły decyzyjne, które w pełni pokrywają wszystkie przypadki w zbiorze danych, bez pomijania żadnych sytuacji. W kontekście macierzy nieodróżnialności, oznacza to znalezienie minimalnych reguł decyzyjnych, które pozwalają jednoznacznie przypisać decyzję na podstawie dostępnych atrybutów.

### Przykład

Dany mamy system decyzyjny  $(U, A, d)$ , gdzie  $U = o_1, o_2, \dots, o_8$ ,  $A = a_1, a_2, \dots, a_6$

$d$  – atrybut decyzyjny

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$d$
$o_1$	1	1	1	1	3	1	1
$o_2$	1	1	1	1	3	2	1
$o_3$	1	1	1	3	2	1	0
$o_4$	1	1	1	3	3	2	1
$o_5$	1	1	2	1	2	1	0
$o_6$	1	1	2	1	2	2	1
$o_7$	1	1	2	2	3	1	0
$o_8$	1	1	2	2	4	1	1

Tworzymy dla niego macierz nieodróżnialności  $\mu_A = [c_{ij}]_{8 \times 8}$ , gdzie  $i, j = 1, 2, \dots, 8$ .

Dla obiektów  $x_1, \dots, x_8$  zostawiamy w kolumnach tylko kratki o współrzędnych, które odpowiadają obiektom o innych decyzjach, gdzie

$$c_{ij} = \{a \in A : a(x_i) = a(x_j)\},$$

	$o_1$	$o_2$	$o_3$	$o_4$	$o_5$	$o_6$	$o_7$	$o_8$
$o_1$			$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_4 a_6$		$a_1 a_2 a_5 a_6$	
$o_2$			$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2 a_5$	
$o_3$	$a_1 a_2 a_3 a_6$	$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_6$
$o_4$			$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_5$	
$o_5$	$a_1 a_2 a_4 a_6$	$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_6$
$o_6$			$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3$	
$o_7$	$a_1 a_2 a_5 a_6$	$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$
$o_8$			$a_1 a_2 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$	

Table 1: Macierz nieodróżnialności dla  $(U, A, d)$

Komputerowi wystarczy tablica postaci:

	$o_1$	$o_2$	$o_3$	$o_4$	$o_5$	$o_6$	$o_7$
$o_1$							
$o_2$							
$o_3$	$a_1 a_2 a_3 a_6$	$a_1 a_2 a_3$					
$o_4$			$a_1 a_2 a_3 a_4$				
$o_5$	$a_1 a_2 a_4 a_6$	$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2$			
$o_6$			$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		
$o_7$	$a_1 a_2 a_5 a_6$	$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3$	
$o_8$			$a_1 a_2 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$

Table 2: Macierz nieodróżnialności trójkątna dla  $(U, A, d)$

Wylizania reguły za pomocą Tabeli 1. Rozważana Tabela, pozwala, na szybkie wyszukiwanie niesprzecznych reguł, wystarczy znaleźć deskryptor, lub grupę deskryptorów, które nie występują w danej kolumnie.

Zaczniemy od reguł I rzędu (rzęd oznacza liczbę deskryptorów warunkowych, długość reguły):

dla  $o_2$  mamy

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)$$

dla  $o_4$  mamy

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)$$

dla  $o_6$  mamy

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)$$

dla  $o_8$  mamy

$$(a_5 = 4) \implies (d = 1)$$

pozostałe kolumny nie generują żadnej reguły.

Trzy pierwsze reguły zapisujemy jako reguły z supportem 3 (support oznacza liczbę obiektów systemu decyzyjnego do których pasuje reguła), czyli grupa reguł rzędu I jest postaci:

$$(a_6 = 2) \implies (d = 1)[3]$$

$$(a_5 = 4) \implies (d = 1)$$

W kolejnym etapie modyfikujemy Tabelę 1, zaznaczając deskryptory, z których nie będziemy mogli zbudować reguł wyższych rzędów. (czyli deskryptory:  $(a_6 = 2), (a_5 = 4)$ ) Otrzymujemy:

	$o_1$	$o_2$	$o_3$	$o_4$	$o_5$	$o_6$	$o_7$	$o_8$
$o_1$			$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_4 a_6$		$a_1 a_2 a_5 a_6$	
$o_2$			$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2 a_5$	
$o_3$	$a_1 a_2 a_3 a_6$	$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_6$
$o_4$			$a_1 a_2 a_3 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_5$	
$o_5$	$a_1 a_2 a_4 a_6$	$a_1 a_2 a_4$		$a_1 a_2$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_6$
$o_6$			$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$		$a_1 a_2 a_3$	
$o_7$	$a_1 a_2 a_5 a_6$	$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_5$		$a_1 a_2 a_3$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$
$o_8$			$a_1 a_2 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_6$		$a_1 a_2 a_3 a_4 a_6$	
		pomin $a_6$		pomin $a_6$		pomin $a_6$		pomin $a_5$

Table 3: Tabela 3

Teraz wybieramy reguły II rzędu, (szukamy kombinacji bez powtórzeń długości 2, które nie występują w danej kolumnie, pamiętając o pominięciu kombinacji zawierających reguły niższego rzędu)

z  $o_1$  mamy

$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

z  $o_2$  mamy

$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

z  $o_3$  mamy

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 2) \implies (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \implies (d = 0)$$

$$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \implies (d = 0)$$

z  $o_4$  mamy

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

$$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)$$

z  $o_5$  mamy

$$(a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$

z  $o_7$  mamy

$$(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$

$$(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$

Teraz reguły identyczne zapisujemy jako pojedyncze z odpowiednim supportem, otrzymujemy reguły postaci:

$$(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \implies (d = 1)[2]$$

$$(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1)[3]$$

$$(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \implies (d = 0)[2]$$

$$(a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$

$$(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$

$$(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 0)$$

Następnie korzystając z Tabeli 3, wypisujemy kombinacje długości 3, które będą kandydatami na reguły:

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 1)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\ (a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\ (a_1 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\ (a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\ (a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\ (a_2 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\ (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0)
\end{aligned}$$
$$\begin{array}{l} (a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1) \\ (a_1 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1) \\ (a_2 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1) \\ (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) \implies (d = 1) \end{array}$$
$$\begin{array}{l} (a_1 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0) \\ (a_2 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0) \\ (a_3 = 2) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0) \\ (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0) \end{array}$$
$$\begin{aligned} (a_1 = 1) \wedge (a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\ (a_1 = 1) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\ (a_2 = 1) \wedge (a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\ (a_2 = 1) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\ (a_3 = 2) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\ (a_3 = 2) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\ (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \end{aligned}$$

rozważane kombinacje na pewno nie są sprzeczne, stąd teraz eliminujemy, tych kandydatów, którzy zawierają reguły niższego rzędu: zaznaczmy podkreśleniem, zawieranie reguł niższego rzędu:

z  $o_1$  mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 1)} \wedge (a_5 = 1) &\implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \wedge \underline{(a_4 = 1)} \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \wedge \underline{(a_5 = 3)} \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 1) \\
\underline{(a_4 = 1)} \wedge \underline{(a_5 = 3)} \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 1)
\end{aligned}$$

z  $o_2$  mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \wedge \underline{(a_4 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1)
\end{aligned}$$

z  $o_3$  mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_5 = 2)} \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_5 = 2) &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
\underline{(a_2 = 1)} \wedge (a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
\underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_4 = 3) \wedge \underline{(a_5 = 2)} &\Rightarrow (d = 0) \\
(a_3 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_6 = 1) &\Rightarrow (d = 0) \\
\underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_5 = 2) \wedge \underline{(a_6 = 1)} &\Rightarrow (d = 0)
\end{aligned}$$

z  $o_4$  mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_4 = 3)} \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
\underline{(a_3 = 1)} \wedge (a_4 = 3) \wedge \underline{(a_5 = 3)} &\implies (d = 1)
\end{aligned}$$

z  $o_5$  mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge \underline{(a_5 = 2)} \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge \underline{(a_5 = 2)} \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \\
(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \quad \text{ta jest prawidłowa} \\
(a_3 = 2) \wedge \underline{(a_5 = 2)} \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \\
(a_4 = 1) \wedge \underline{(a_5 = 2)} \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0)
\end{aligned}$$

z  $o_7$  mamy

$$\begin{aligned}
(a_1 = 1) \wedge (a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\
(a_1 = 1) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\
(a_2 = 1) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\
(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\
(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \\
(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0)
\end{aligned}$$

Mamy tylko jedną regułę trzeciego rzędu postaci,

$$(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$

Kolejne rzędy reguł wyliczamy analogicznie. W naszym przypadku nie ma potrzeby sprawdzać, czy istnieją reguły rzędu cztery, otrzymanie tylko jednej reguły rzędu III, może być tu warunkiem stopu. Ostatecznie nasz zbiór reguł exhaustive wyliczony zmodyfikowaną macierzą nieodróżnialności jest postaci:

*I*

$$\begin{aligned}
(a_6 = 2) &\implies (d = 1)[3] \\
(a_5 = 4) &\implies (d = 1)
\end{aligned}$$

*II*

$$\begin{aligned}
(a_3 = 1) \wedge (a_4 = 1) &\implies (d = 1)[2] \\
(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1)[3] \\
(a_3 = 1) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1)[2] \\
(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 2) &\implies (d = 0) \\
(a_4 = 3) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0) \\
(a_5 = 2) \wedge (a_6 = 1) &\implies (d = 0)[2] \\
(a_4 = 3) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 1) \\
(a_3 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0) \\
(a_4 = 2) \wedge (a_5 = 3) &\implies (d = 0)
\end{aligned}$$

*III*

$$(a_3 = 2) \wedge (a_4 = 1) \wedge (a_6 = 1) \implies (d = 0)$$