



Geometría y visualización

Jesús Bueno Urbano

Directores:

Pedro A. García Sánchez

Carlos Ureña Almagro

Trabajo Fin de Máster
Máster en Matemáticas

21 de septiembre de 2018



Índice

Implicitación de superficies

Representación y visualización de superficies implícitas

Análisis de Intervalos

Aplicaciones del Análisis de Intervalos y conclusión





Método de la base de Gröbner

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, \dots, t_m), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, \dots, t_m). \end{aligned}$$

Donde f_1, \dots, f_n son polinomios en $K[t_1, \dots, t_m]$ con K un cuerpo.



Método de la base de Gröbner

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t_1, \dots, t_m), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, \dots, t_m).\end{aligned}$$

Donde f_1, \dots, f_n son polinomios en $K[t_1, \dots, t_m]$ con K un cuerpo.
Este sistema se puede ver como $F : K^m \rightarrow K^n$ definido por

$$F(t_1, \dots, t_m) = (f_1(t_1, \dots, t_m), \dots, f_n(t_1, \dots, t_m)).$$



Método de la base de Gröbner

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t_1, \dots, t_m), \\&\vdots \\x_n &= f_n(t_1, \dots, t_m).\end{aligned}$$

Donde f_1, \dots, f_n son polinomios en $K[t_1, \dots, t_m]$ con K un cuerpo. Este sistema se puede ver como $F : K^m \rightarrow K^n$ definido por

$$F(t_1, \dots, t_m) = (f_1(t_1, \dots, t_m), \dots, f_n(t_1, \dots, t_m)).$$

Resolver el problema de pasar a ecuaciones paramétricas a implícitas equivale a encontrar la variedad mínima que contiene a $F(K^m)$. Véase calculando la base de Gröbner reducida del ideal $\langle x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n \rangle$ y encontrando el elemento que no depende de las variables t_i .



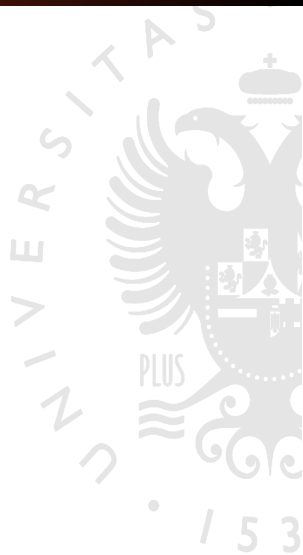
Metodo de la base de Gröbner

EJEMPLO

$$x = r \cos u \cos t + R \cos t$$

$$y = r \cos u \sin t + R \sin t$$

$$z = r \sin u$$





Metodo de la base de Gröbner

EJEMPLO

$$x = r \cos u \cos t + R \cos t$$

$$y = r \cos u \sin t + R \sin t$$

$$z = r \sin u$$

$$x - r c_u c_t - R c_t = 0$$

$$y - r c_u s_t - R s_t = 0$$

$$z - r s_u = 0$$





Metodo de la base de Gröbner

EJEMPLO

$$x = r \cos u \cos t + R \cos t$$

$$y = r \cos u \sin t + R \sin t$$

$$z = r \sin u$$

$$x - rc_u c_t - Rc_t = 0$$

$$y - rc_u s_t - Rs_t = 0$$

$$z - rs_u = 0$$

$$c_u^2 + s_u^2 - 1 = 0$$

$$c_t^2 + s_t^2 - 1 = 0$$



Metodo de la base de Gröbner

EJEMPLO

$$x = r \cos u \cos t + R \cos t$$

$$y = r \cos u \sin t + R \sin t$$

$$z = r \sin u$$

$$x - rc_u c_t - Rc_t = 0$$

$$y - rc_u s_t - Rs_t = 0$$

$$z - rs_u = 0$$

$$c_u^2 + s_u^2 - 1 = 0$$

$$c_t^2 + s_t^2 - 1 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - R^2)^2 = 4R^2(z^2 - r^2)$$



Método de la resultante de Sylvester

$f = a_n x^n + \dots + a_0$ y $g = b_m x^m + \dots + b_0$ donde $a_n, b_m \neq 0$





Método de la resultante de Sylvester

EJEMPLO

$$f = x^2y - 1$$

$$g = x^2 + y^2 + xy - 4$$



Método de la resultante de Sylvester

EJEMPLO

$$f = x^2y - 1$$

$$g = x^2 + y^2 + xy - 4$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, g) &= \text{Det} \begin{pmatrix} y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & y & 1 \\ -1 & 0 & y^2 - 4 & y \\ 0 & -1 & 0 & y^2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= y^6 - 8y^4 + y^3 + 16y^2 - 8y + 1 \end{aligned}$$



Método de la resultante de Sylvester

EJEMPLO

$$f = x^2y - 1$$

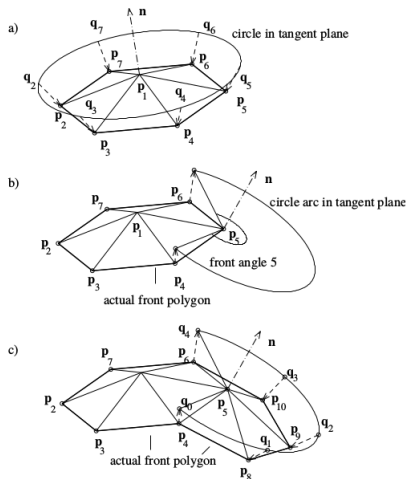
$$g = x^2 + y^2 + xy - 4$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, g) &= \text{Det} \begin{pmatrix} y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & y & 1 \\ -1 & 0 & y^2 - 4 & y \\ 0 & -1 & 0 & y^2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= y^6 - 8y^4 + y^3 + 16y^2 - 8y + 1 \end{aligned}$$

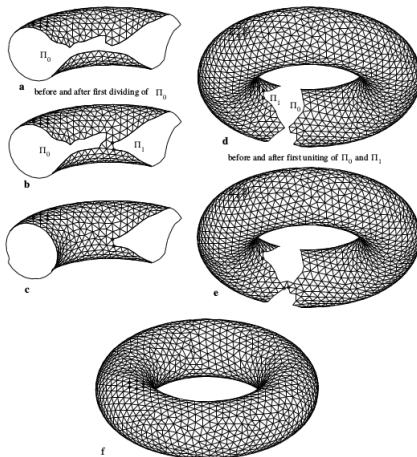
$$\langle x - 4y^5 - y^4 + 32y^3 + 4y^2 - 64y + 16, y^6 - 8y^4 + y^3 + 16y^2 - 8y + 1 \rangle$$



Triangulación de superficies

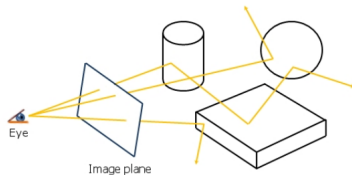


Triangulación de superficies



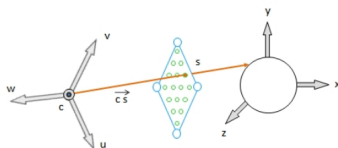
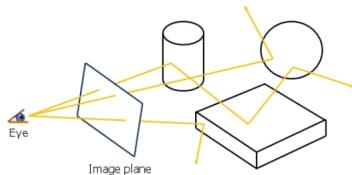


Ray Tracing

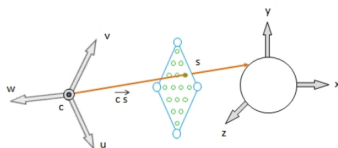
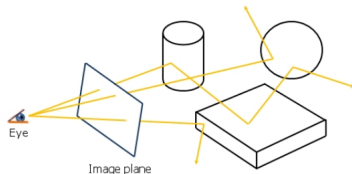




Ray Tracing



Ray Tracing



$$g(t) = f(c_x + t(x_s - c_x), c_y + t(y_s - c_y), c_z + t(z_s - c_z))$$



Análisis de Intervalos

Una extensión de una función de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} dada por $z = f(x_1, \dots, x_n)$ es el intervalo de extensión unida R_f de f . Para el intervalo $X' = (X'_1, \dots, X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$ se define el rango de f -valores en X' como

$$R_f(X'_1, \dots, X'_n) := \{f(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X'_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$



Análisis de Intervalos

Una extensión de una función de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} dada por $z = f(x_1, \dots, x_n)$ es el intervalo de extensión unida R_f de f . Para el intervalo $X' = (X'_1, \dots, X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$ se define el rango de f -valores en X' como

$$R_f(X'_1, \dots, X'_n) := \{f(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X'_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$f^*(X) := \left[\min_{x_p \in X'_p} \max_{x_i \in X'_i} f(x_p, x_i), \max_{x_p \in X'_p} \min_{x_i \in X'_i} f(x_p, x_i) \right]$$

$$f^{**}(X) := \left[\max_{x_p \in X'_p} \min_{x_i \in X'_i} f(x_p, x_i), \min_{x_p \in X'_p} \max_{x_i \in X'_i} f(x_p, x_i) \right]$$



Aplicaciones del Análisis de Intervalos

```
Evaluate(X,Y,Z):  
  If(0 belongs to F(X,Y,Z))  
    If(X or Y or Z <= Threshold)  
      Add (X,Y,Z) to solution list  
    Else  
      Subdivide X into X_1 and X_2  
      Subdivide Y into Y_1 and Y_2  
      Subdivide Z into Z_1 and Z_2  
      Evaluate (X_i,Y_j,Z_k) for i,j,k in {1,2}  
  Else  
    The octant is rejected
```



Aplicaciones del Análisis de Intervalos

```
Mitchell(T as [t_1,t_2]):  
  If(0 in F(T))  
    If(0 not in F'(T))  
      If(f(t_1)*f(t_2) <= 0)  
        Root refinement over T using Bisection or Newthom method  
      Else  
        T_1 = [t_1,(t_1 + t_2)/2]  
        T_2 = [(t_1 + t_2)/2,t_1]  
  
        If(width(T_1) >= threshold)  
          Mitchell(T_1)  
        Else  
          Root refinement over T_1 using Bisection or Newthom method  
  
        If(width(T_2) >= threshold)  
          Mitchell(T_2)  
        Else  
          Root refinement over T_2 using Bisection or Newthom method  
      Else  
        Reject T
```



Aplicaciones del Análisis de Intervalos

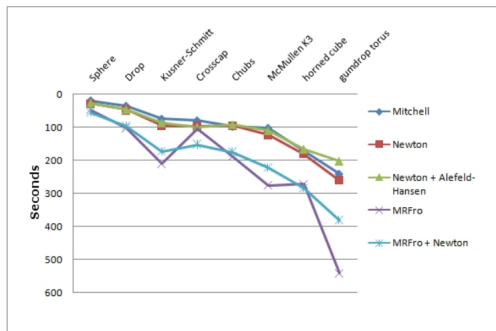
```
Newton(T as [t_1,t_2]):  
  If(0 in F(T))  
    If(0 not in F'(T))  
      t_m = t_1 + midpoint(T)  
      NT = t_m - f(t_m)/F'(T)  
      NTT = NT intersecting with T  
  
      If(NTT is empty)  
        There's no root  
      Else  
        Newton(NTT)  
    Else  
      T_1 = [t_1,midpoint(T)]  
      T_2 = [midpoint(T), t_2]  
  
      If(width(T_1) >= Threshold)  
        Newton(T_1)  
      Else  
        T_1 is the root  
  
      If(width(T_2) >= Threshold)  
        Newton(T_2)  
      Else  
        T_2 is the root  
    Else  
      Reject T
```





Aplicaciones del Análisis de Intervalos

	Sphere	Drop	Chubs	Crosse.	Gumd. Torus	H. cube	McMul. K3	Kusn.- Schm.
Mitchell	20	36	98	80	240	99	102	75
Newton	28	47	94	96	260	180	123	94
N.+Al.-Han.	27	46	92	99	202	166	110	86
MRFro	48	103	188	105	541	272	276	210
MRFro+Newt.	55	96	174	151	380	283	221	173



Bibliografía



J. Florez.

Improvements in the ray tracing of implicit surfaces based on interval arithmetic.

PhD thesis, Department d'Electrònica, Informàtica i Automàtica de la Universitat de Girona, Gerona, España, 2008.



E. Hartmann.

A marching method for the triangulation of surfaces.

The Visual Computer, 14:95–108, 1998.



J. C. Hart.

Siggraph 93 Course Notes: Design, Visualization and Animation of Implicit Surfaces, chapter Ray Tracing Implicit Surfaces.

Washington State University, Pullman, WA 99164-2752, mayo 2001.



E. Hartmann.

Triangulation of Implicit Surfaces, pages 81 – 92.

Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, Alemania, octubre 2003.



K. Uhlig.

Modeling methods with implicitly defined objects.

Technical Report DCSE/TR-2003-04, Department of Computer Science and Engineering from University of West Bohemia in Pilsen, Univerzitni 8, 30614 Pilsen, Czech Republic, febrero 2003.