

# Décidabilité de la rationalité pour les WSTS

Lucas BUERI

Stage M2 - 2021

## 1 Réseaux de Petri

Un réseau de Petri  $N = (P, T, B, F, M_0)$  est la donnée de

- un ensemble fini  $P$  de  $d$  emplacements,
- un ensemble fini  $T$  de transitions,
- une fonction de coût  $B : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ ,
- une fonction de production  $F : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ ,
- un marquage initial  $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$ .

Les configurations sont les marquages  $M : P \rightarrow \mathbb{N}$ , aussi considérés comme les valeurs possibles de  $d$  compteurs (vecteur de  $\mathbb{N}^d$ ). On peut déclencher la transition  $t$  à partir du marquage  $M$  si et seulement si  $M(p) \geq B(p, t)$  pour tout  $p \in P$  (noté  $M \geq B(\cdot, t)$ ).

On obtient alors un nouveau marquage  $M'$  défini par  $M' \stackrel{\text{def}}{=} M + D(\cdot, t)$  où  $D \stackrel{\text{def}}{=} F - B$ .  $B$  représente donc le coût de la transition (le nombre de jetons requis et consommés dans chaque emplacement), et  $F$  représente sa production (les jetons créés lors du déclenchement).

On notera  $M(t)$  lorsque  $t$  peut se déclencher sur  $M$ , et  $M(t)M'$  si déclencher  $t$  sur  $M$  donne  $M'$ . On étendra naturellement cette notation (ainsi que  $B(p, \cdot)$  et  $F(p, \cdot)$ ) aux séquences de transitions, ou mots  $w \in T^*$ .

Deux ensembles nous intéresseront alors : le langage  $\mathcal{L}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in T^* \mid M_0(w)\}$  du réseau de Petri et les configurations accessibles  $\text{Reach}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{M' : P \rightarrow \mathbb{N} \mid \exists w \in T^*, M_0(w)M'\}$ .

## 2 VAS

### 2.1 La structure

Un *système d'addition de vecteurs de dimension  $d \in \mathbb{N}$*  ( $d$ -VAS)  $S = (A, \lambda)$  est la donnée d'un alphabet fini  $A$  muni d'un étiquetage  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{Z}^d$ . À chaque *action*  $a \in A$  est ainsi associé un unique vecteur  $\lambda(a) \in \mathbb{Z}^d$ , de telle manière à ce que deux actions ne soient pas associées au même vecteur. Pour des raisons de lisibilité, on notera  $\bar{a} = \lambda(a)$ .

Les *configurations* de  $S$  sont alors les vecteurs de  $\mathbb{N}^d$  (à coordonnées positives), et chaque action  $a \in A$  agit sur  $\mathbb{N}^d$  en additionnant à la configuration courante le vecteur  $\bar{a}$  associé. On a alors une transition entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  étiquetée par l'action  $a$  lorsque  $\mathbf{x} + \bar{a} = \mathbf{y}$ .

De manière équivalente, on dira que l'action  $a \in A$  est *franchissable* à partir de la configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$  lorsque  $\mathbf{x} + \bar{a} \geq \mathbf{0}$ , et son déclenchement aboutit à la configuration  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{a}$  à travers la transition  $(\mathbf{x}, a, \mathbf{y}) \in \mathbb{N}^d \times A \times \mathbb{N}^d$ . On notera  $\mathbf{x} \xrightarrow{a}_S \mathbf{y}$  lorsqu'un tel déclenchement est possible (ou simplement  $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$  s'il n'y a pas ambiguïté sur  $S$ ).

Par la suite, on notera  $I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, d\}$  l'ensemble des coordonnées pour les configurations.

Lorsqu'une séquence d'actions  $w = a_1 \cdots a_k \in A^*$  permet d'aller de  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{y}$  par la séquence de transition  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}$  (où  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{N}^d$  et  $\mathbf{x}_{i-1} + \bar{a}_i = \mathbf{x}_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ ), on dit que  $w$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ , et qu'on a une *exécution*  $\rho : \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y}$ .  $\mathbf{y}$  est alors dit accessible à partir de  $\mathbf{x}$ .

De plus, en notant  $\bar{w} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \bar{a}_i$  le vecteur associé à  $w$ , on obtient  $\mathbf{x} + \bar{w} = \mathbf{y}$ . Attention, cette égalité peut-être vérifiée même si  $w$  n'est pas franchissable.

Nous allons étudier deux ensembles naturellement associés à un VAS  $S = (A, \lambda)$  :

1.  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in A^* \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$  qui est le *langage* des séquences d'actions franchissables à partir de la configuration  $\mathbf{x}$ ,
2.  $\text{Reach}(S, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \exists w \in A^*, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$  qui est l'ensemble des configurations *accessibles* à partir de  $\mathbf{x}$ .

On choisira souvent une configuration initiale  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ , qu'on pourra ajouter à la définition du VAS. On pourra alors regarder  $\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  le langage du VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ , et  $\text{Reach}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Reach}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  son ensemble d'accessibilité.

**Définition 1.** Un VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  est *rationnel* lorsque  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel sur  $A^*$ .

**Définition 2.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un  $d$ -VAS,  $J \subseteq I$  un sous-ensemble d'indices et  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$  une configuration. On dit que

- $J$  est *borné* pour  $\mathbf{x}$  sur  $S$  lorsque toute configuration accessible depuis  $\mathbf{x}$  a ses coordonnées dans  $J$  bornées :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \text{Reach}(S, \mathbf{x}), \forall j \in J, \mathbf{y}(j) \leq k$$

- $J$  est *borné inférieurement* pour  $\mathbf{x}$  sur  $S$  lorsque toutes les coordonnées de  $J$  ne diminuent pas plus qu'une certaine borne (même en augmentant les ressources initiales) :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \text{Reach}(S, \mathbf{x} + n \cdot \mathbf{u}_J), \forall j \in J, \mathbf{y}(j) \geq \mathbf{x}(j) + n - k$$

où  $\mathbf{u}_J$  désigne le vecteur valant 1 aux coordonnées dans  $J$ , et 0 ailleurs.

Enfin, on dénotera par *Rat* l'ensemble des langages rationnels (sur un alphabet fini).

## 2.2 Clover et le graphe de couverture

On aimerait avoir un meilleur aperçu des configurations accessibles, et notamment décrire de manière finie les capacités pour le VAS d'atteindre des configurations non-bornées. Rappelons d'abord la notion d'idéal :

**Définition 3.** Soit  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné et  $E \subseteq X$  un sous-ensemble de  $E$ .

- $E$  est dit *dirigé* lorsque pour tous  $x, y \in E$  il existe un  $z \in E$  vérifiant  $x \leq z$  et  $y \leq z$ .
- $E$  est dit *clos par le bas* lorsqu'il est égal à sa clôture par le bas  $\downarrow E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists y \in E, x \leq y\}$ .
- De la même façon,  $E$  est dit *clos par le haut* lorsqu'il est égal à sa clôture par le haut  $\uparrow E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists y \in E, x \geq y\}$ .
- Enfin,  $E$  est un *idéal* s'il est dirigé et clos par le bas.

$(\mathbb{N}^d, \leq)$  a la particularité d'être un bel ordre, ce qui permet d'obtenir des représentations finies de ces sous-ensembles. Les idéaux de  $\mathbb{N}^d$  peuvent donc se voir comme des éléments de  $\mathbb{N}_\omega^d$ , obtenu en étendant  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{\omega\}$  de façon naturelle. Ainsi, un élément  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\omega^d$  représente l'idéal  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{m}\}$ . On a alors le résultat suivant :

**Proposition 4.** *référence ?* Soit  $E \subseteq \mathbb{N}^d$  clos par le bas. Alors  $E$  est une union finie d'idéaux de  $\mathbb{N}^d$ .

Par conséquent, tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}^d$  clos par le bas peut être représenté par un ensemble fini d'éléments de  $\mathbb{N}_\omega^d$ .

Pour les sous-ensembles  $E$  de  $\mathbb{N}^d$  clos par le haut, on va regarder ses éléments minimaux. Notons  $\text{Min}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \forall y < x, y \notin E\}$ .

**Proposition 5.** Soit  $E \subseteq \mathbb{N}^d$  clos par le haut. Alors  $\text{Min}(E)$  est fini et  $\uparrow \text{Min}(E) = E$ .

On peut maintenant introduire l'ensemble de couverture  $\mathcal{C}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \downarrow \text{Reach}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  d'un VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ . Il est clos par le bas dans  $(\mathbb{N}^d, \leq)$  bien ordonné, donc se décompose comme une union finie d'idéaux.

**Définition 6.** Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un  $d$ -VAS. On définit  $\text{Clover}(S) \subseteq \mathbb{N}_\omega^d$  comme l'ensemble des idéaux maximaux inclus dans  $\mathcal{C}(S)$ . C'est aussi l'unique ensemble de taille minimale d'idéaux dont l'union correspond à  $\mathcal{C}(S)$ .

À revoir.

Le *graphe de couverture* a pour sommets des configurations de  $\mathbb{N}_\omega^d$  et pour arêtes des transitions du VAS, étiquetés par une action de  $A$ . Il est obtenu en partant d'un sommet initial  $s_0 : \mathbf{x}_{\text{init}}$  étiqueté par la configuration initiale  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ , puis par récurrence sur la profondeur des noeuds en indiquant les voisins des noeuds accessibles :

Pour chaque noeud  $s : \mathbf{x}$  associé à la configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ , on fait partir de  $s$  autant d'arêtes que d'actions  $a \in A$  qui sont franchissables à partir de  $\mathbf{x}$ . Le sommet d'arrivée de l'arête associée à une action  $a$  est déterminé ainsi :

- Si  $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$  (déclencher  $a$  aboutit à la configuration  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{a}$ ) et qu'il existe un sommet déjà existant  $r : \mathbf{y}$  associé à cette configuration, alors on crée une arête étiquetée par  $a$  de  $s : \mathbf{x}$  vers  $r : \mathbf{y}$  ;
- Si  $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$  et qu'il existe un ancêtre  $r : \mathbf{z}$  de  $s$  (c'est-à-dire tel qu'il existe un chemin dans le graphe déjà créé de  $r$  à  $s$ ) avec  $\mathbf{y} > \mathbf{z}$ , alors on crée un nouveau sommet  $s' : \mathbf{y}'$  et une arête de  $s : \mathbf{x}$  vers  $s' : \mathbf{y}'$  étiquetée par  $a$ , où  $\mathbf{y}' \in \mathbb{N}_\omega^d$  est la configuration de coordonnées  $\mathbf{y}'(i) = \mathbf{y}(i)$  pour les  $1 \leq i \leq d$  tels que  $\mathbf{y}(i) = \mathbf{z}(i)$ , et  $\mathbf{y}'(i) = \omega$  si  $\mathbf{y}(i) > \mathbf{z}(i)$  ;
- Si la configuration  $\mathbf{y}$  atteinte n'est pas dans les cas précédents, on crée simplement un nouveau sommet  $s' : \mathbf{y}$  et une arête de  $s$  à  $s'$  étiquetée par  $a$ .

### 3 Une caractérisation pour la rationalité

La preuve de décidabilité se divise en deux étapes. Tout d'abord, on va donner une caractérisation mathématique équivalente à la rationalité. On montrera ainsi qu'un VAS est rationnel si et seulement s'il existe une borne  $k \in \mathbb{N}$  telle que si on peut accéder à la configuration  $\mathbf{x}$ , puis à  $\mathbf{y}$ , alors  $\mathbf{y}$  reste au dessus de  $\mathbf{x} - \mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}$  désignera le vecteur  $(k, k, \dots, k) \in \mathbb{N}^d$ ).

#### 3.1 La relation d'équivalence de Ginzburg et Yoeli n'est pas d'index fini

Ginzburg et Yoeli introduisent dans [giyo80] une relation d'équivalence  $\equiv_S^{\text{GY}}$  sur les configurations et énoncent que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet un nombre fini de classes d'équivalence dans  $\text{Reach}(S)$  ([giyo80], Théorème 1).

S'il est vrai que  $\text{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  fini implique que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel, la réciproque est fautive et nous donnerons un contre-exemple d'un langage  $\mathcal{L}(S)$  rationnel tel que  $\text{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  est infini. Nous proposerons de reprendre l'idée de Ginzburg et Yoeli, mais en définissant une autre relation d'équivalence pour laquelle on obtiendra cette fois-ci l'équivalence entre la rationalité du langage et le quotient fini selon cette relation.

**Définition 7** ([giyo80] section 3). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  est définie pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Reach}(S)$  par :

$$\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y} \text{ ssi } \forall w \in A^*, (\mathbf{x} + \bar{w} \in \text{Reach}(S) \Leftrightarrow \mathbf{y} + \bar{w} \in \text{Reach}(S))$$

ça donne quoi si on définit  $\equiv_S^{\text{GY}}$  sur tout  $\mathbb{N}^d$ ? Une classe de plus seulement? Une infinité?

**Remarque.**  $\equiv_S^{\text{GY}}$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\text{Reach}(S)$  des configurations accessibles.

On aurait envie d'obtenir un résultat similaire à celui de Nérède, à savoir dire que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet un nombre fini de classes d'équivalence. Cela est malheureusement faux, puisque pour  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  et  $w \in A^*$ , l'écriture  $\mathbf{x} + \bar{w} \in \text{Reach}(S)$  ne permet pas de dire si la séquence  $w$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ . Il pourrait en effet exister une autre séquence  $w' \in A^*$  franchissable à partir de  $\mathbf{x}$  aboutissant à la configuration  $\mathbf{x} + \bar{w}' = \mathbf{x} + \bar{w}$ , voire même un moyen d'accéder à la configuration  $\mathbf{x} + \bar{w} = \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u}$  depuis la configuration initiale par une autre séquence d'action  $u \in A^*$  sans que  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u}$  ne soit accessible depuis  $\mathbf{x}$ .

Plus précisément sur la preuve de Ginzburg et Yoeli, avoir  $\text{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  fini implique bien  $\mathcal{L}(S)$  rationnel, ce qui est prouvé en construisant explicitement l'automate. Par contre, la réciproque est fautive : L'erreur (avant-dernière ligne de la preuve du théorème 1 de [giyo80]) était d'affirmer que savoir  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{uw} \in \text{Reach}(S)$  pour  $u \in \mathcal{L}(S)$  et  $w \in A^*$  permettait d'en déduire que  $uw \in \mathcal{L}(S)$ .

On donne ci-dessous un contre-exemple pour illustrer ce point. Il est nécessaire de se placer au moins en dimension 3, car le résultat de Ginzburg et Yoeli reste vrai en dimension inférieure.

Ajouter preuve que le résultat reste vrai en dimension inférieure à 2.

**Exemple 8.** Soit le 3-VAS  $S = (A = \{a, b, c\}, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}} = (0, 0, 0))$  dont les actions sont étiquetées par  $\bar{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{b} = (0, 1, -1)$  et  $\bar{c} = (-1, -1, 1)$ . Le langage reconnu  $\mathcal{L}(S) = a^*$  est rationnel, et les configurations accessibles sont les  $\mathbf{x}_n = (n, 0, 0)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Cependant, pour deux entiers  $m > n > 0$ , bien que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_m) = \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(S)$ , on a  $\mathbf{x}_m \not\equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{x}_n$  : Cela se constate en considérant la séquence d'actions  $b^{n+1}c^{n+1}$  qui n'est jamais franchissable, mais qui vérifie  $\mathbf{x}_m + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (m-n-1, 0, 0) \in \text{Reach}(S)$  alors que  $\mathbf{x}_n + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (-1, 0, 0) \notin \text{Reach}(S)$ .

La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet alors une infinité de classes d'équivalences  $(\{\mathbf{x}_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $S$ .

### 3.2 Une autre relation d'équivalence qui est d'index fini

Pour corriger ce problème, on va aussi regarder si les actions sont franchissables :

**Définition 9.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un VAS. On introduit la relation  $\equiv_S$  sur les configurations en posant pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$  :

$$\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y} \text{ ssi } \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$$

Constatons déjà que cette nouvelle relation est plus grande que celle de Ginzburg et Yoeli (au sens de l'inclusion) :

**Proposition 10.** Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$ . Si  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$  alors  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ .

*Démonstration.* Supposons  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$  et montrons  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \subseteq \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  par récurrence sur la longueur des mots. Soit  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ .

Si  $w = \varepsilon$  est le mot vide,  $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$  assure que  $\varepsilon \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ .

Sinon, on écrit  $w = ua$  avec  $u \in A^*$  et  $a \in A$ .  $u \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  est plus court que  $w$ , donc par hypothèse de récurrence on a également  $u \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ .  $u$  est donc franchissable depuis  $\mathbf{y}$ . Mais  $ua \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ , ce qui assure que  $\mathbf{x} + \overline{ua} \in \text{Reach}(S)$ .

Comme  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$ , on obtient que  $\mathbf{y} + \overline{ua} \in \text{Reach}(S)$ , aboutissant à  $\mathbf{y} + \overline{ua} \geq \mathbf{0}$ . L'action  $a$  est donc franchissable depuis  $\mathbf{y} + \bar{u}$ . En résumé, on a les transitions valides  $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{x} + \bar{u} \xrightarrow{a}_S \mathbf{x} + \overline{ua}$ , d'où  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ .

On conclut enfin que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  par symétrie.  $\square$

On va établir le lien avec la relation de Nérode  $\sim_L$  associée à un langage  $L \subseteq A^*$ . Pour tout  $u, v \in A^*$ , on définit :

$$u \sim_L v \text{ ssi } \forall w \in A^*, uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$$

On sait que  $\sim_L$  est une relation d'équivalence invariante par composition à droite et qu'un langage  $L \subseteq A^*$  est rationnel si et seulement si  $A^*/\sim_L$  est fini ([rasc59], Théorème 2).

La congruence de Nérode concerne donc les mots plutôt que les configurations, mais est liée à l'équivalence  $\equiv_S$  sur les VAS de la manière suivante :

**Lemme 11.** Soient  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $u, v \in \mathcal{L}(S)$ . On a  $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$  si et seulement si  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{v}$ .

*Démonstration.* Si  $u \in \mathcal{L}(S)$ , alors pour tout mot  $w \in A^*$ , on a l'équivalence :

$$uw \in \mathcal{L}(S) \Leftrightarrow w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u})$$

On en déduit immédiatement le résultat en reprenant les définitions de chaque relation.  $\square$

**Remarque.** La relation de Nérode ne s'intéresse qu'aux mots du langage, et  $\{w \in A^* \mid w \notin \mathcal{L}(S)\}$  forme une unique classe d'équivalence pour  $\sim_{\mathcal{L}(S)}$ . Ainsi, le lemme 11 devient faux dès lors que  $u, v \notin \mathcal{L}(S)$ , puisque l'on a toujours  $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$  dans ce cas sans que  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{v}$  ne soit nécessairement vrai.

**Théorème 12.** Pour un VAS  $S$ ,  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\text{Reach}(S)/\equiv_S$  est fini.

*Démonstration.* On a les équivalences suivantes :

$\mathcal{L}(S)$  est rationnel ssi  $A^*/\sim_{\mathcal{L}(S)}$  est fini (propriété de la relation de Nérode)

ssi  $\mathcal{L}(S)/\sim_{\mathcal{L}(S)}$  est fini (car  $\sim_{\mathcal{L}(S)}$  admet une seule classe d'équivalence sur  $A^* \setminus \mathcal{L}(S)$ )

ssi  $\text{Reach}(S)/\equiv_S$  est fini (par le lemme 11).  $\square$

Enfin, on donne une propriété de monotonie pour cette relation, qui appuie son intérêt pour l'étude du système de transition  $S$ .

**Proposition 13.** La relation d'équivalence  $\equiv_S$  sur les configurations d'un  $d$ -VAS  $S$  est compatible/monotone avec les actions : Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$ ,  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$  implique  $\forall a \in A, \mathbf{x} + \bar{a} \equiv_S \mathbf{y} + \bar{a}$ .

**Remarque.** La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  de Ginzburg et Yoeli vérifie également cette propriété.

### 3.3 Borne sur la décroissance

Pour obtenir un nombre fini de classes d'équivalence pour  $\equiv_S$ , on cherche une borne à partir de laquelle les configurations accessibles sont indiscernables. Comme la seule règle restreignant les actions franchissables est un test de positivité, on va exiger que les configurations ne puissent pas trop décroître.

Ginzburg et Yoeli proposent une caractérisation au travers des deux lemmes suivants :

**Énoncé** ([giyo80] Lemme 1). Supposons que dans un VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ , les  $n$  premières coordonnées soient non-bornées. Supposons aussi qu'il existe  $n$  entiers positifs  $k_1, k_2, \dots, k_n$  tels que pour tout  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$ , tout  $w \in A^*$  et tout  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $(\mathbf{x} + \bar{w}) \in \text{Reach}(S)$  implique  $\mathbf{x}(i) - (\mathbf{x} + \bar{w})(i) \leq k_i$ . Alors  $\text{Reach}(S) / \equiv_S^{\text{GY}}$  est fini.

Ce résultat est correct pour la relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$ , et nous l'adapterons facilement à la relation  $\equiv_S$  en modifiant la propriété requise en conséquence. Notons qu'il n'est pas nécessaire de prendre des valeurs différentes pour les  $k_i$ , il est tout à fait possible de considérer leur maximum.

**Énoncé** ([giyo80] Lemme 2). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS, et supposons qu'il existe une coordonnée non-bornée  $j$  telle que pour tout  $k \geq 0$ , il existe une configuration  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  et un mot  $w \in A^*$  tels que  $(\mathbf{x} + \bar{w}) \in \text{Reach}(S)$  et  $\mathbf{x}(j) - (\mathbf{x} + \bar{w})(j) > k$ . Alors l'ensemble  $\text{Reach}(S) / \equiv_S^{\text{GY}}$  est infini.

Cette fois, la preuve donnée comporte une erreur de même nature que précédemment : Il est affirmé que si  $\mathbf{x} + \bar{w} \in \text{Reach}(S)$ , alors toutes les étapes intermédiaires sont accessibles, ce qui n'est pas forcément vrai. L'énoncé semble cependant vrai (à vérifier), mais n'apporte pas, de toute manière, la caractérisation souhaitée.

Donnons maintenant une caractérisation similaire pour la relation  $\equiv_S$ . La preuve suit les idées de Ginzburg et Yoeli [giyo80] en effectuant les modifications nécessaires.

**Théorème 14.** Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. Alors  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, (\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{*}_S \mathbf{x} \xrightarrow{*}_S \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \geq \mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad (1)$$

*Démonstration.* Commençons par montrer le sens  $((1) \implies \mathcal{L}(S) \text{ rationnel})$ . Soit  $S$  un VAS vérifiant la propriété (1) pour un  $k \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Reach}(S)$ . Supposons que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont indiscernables pour les petites valeurs, c'est-à-dire que pour toute coordonnée  $i \in I$ , on a soit  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)$ , soit  $(\mathbf{x}(i) \geq k \text{ et } \mathbf{y}(i) \geq k)$ . Alors  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ . En effet, on a  $\mathbf{x} + \bar{w} \geq \mathbf{0} \iff \mathbf{y} + \bar{w} \geq \mathbf{0}$  pour tout  $w \in A^*$ , puisque les coordonnées qui diffèrent entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne peuvent devenir négatives.

Ainsi,  $\equiv_S$  admet au plus  $(k+1)^d$  classes d'équivalences, donc  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel (théorème 12).

Prouvons maintenant la réciproque  $(\mathcal{L}(S) \text{ rationnel} \implies (1))$  par contraposée. Si  $S$  ne vérifie pas la propriété (1), alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une configuration accessible  $\mathbf{x}$ , un mot  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  et une coordonnée  $i \in I$  tels que  $(\mathbf{x} + \bar{w})(i) \leq \mathbf{x}(i) - k$ .

On note  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x} + \overline{a_1 \cdots a_p} \in \text{Reach}(S)$  les différentes configurations obtenues en lisant  $w = a_1 \cdots a_n$ . On a alors  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} + \bar{w}$ .

Notons  $\xi = \max \{|\bar{a}(j)| \mid a \in A, j \in I\}$  la valeur de la plus grande variation d'une coordonnée possible par une action. Alors, au moins  $k/\xi$  configurations  $\mathbf{x}_p$  voient leur coordonnée  $i$  décroître, et l'on a une sous-séquence d'extractrice  $\varphi$  vérifiant  $\mathbf{x}_{\varphi(0)}(i) > \mathbf{x}_{\varphi(1)}(i) > \dots > \mathbf{x}_{\varphi(h)}(i)$  où  $h \geq k/\xi$ .

Ces configurations ne sont pas équivalentes pour  $\equiv_S$  : En effet, si l'on avait  $\mathbf{x}_{\varphi(p)} \equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(q)} = (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u})$  avec  $0 \leq p \leq q \leq h$  et en notant  $u = a_{\varphi(p)+1} \cdots a_{\varphi(q)}$ , alors on aurait  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r) \equiv_S (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^{r+1})$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$  (en procédant par récurrence sur  $r$  avec la proposition 13).

Or  $\bar{u}^r(i) = r \times \bar{u}(i) = r \times (\mathbf{x}_{\varphi(q)}(i) - \mathbf{x}_{\varphi(p)}(i)) < -r$ , ce qui prouve que  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r)(i) < 0$  à partir d'un certain  $r \in \mathbb{N}$ , et donc  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r) \not\equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(p)}$ , d'où une contradiction.

On conclut qu'il existe au moins  $k/\xi$  classes d'équivalences pour  $\equiv_S$  (et ce pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ), ainsi  $\text{Reach}(S) / \equiv_S$  est infini.  $\square$

### 3.4 Rationalité par les circuits

On étend les configurations de  $\mathbb{N}^d$  à des pseudo-configurations dans  $\mathbb{N}_\omega^d$ . On retrouve alors le lien avec les idéaux exposé dans la section 2.2.

Pour une configuration  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\omega^d$ , on notera  $J_\mathbf{m} = \{i \in I \mid \mathbf{m}(i) = \omega\}$  l'ensemble des coordonnées non-bornées de  $\mathbf{m}$ .

**Définition 15.** Soit  $S$  un VAS et  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\omega^d$  une pseudo-configuration. On dit que  $\mathbf{m}$  est *accessible* dans  $S$  lorsque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{x} \in \text{Reach}(S), (\forall i \in J_{\mathbf{m}}, \mathbf{x}(i) \geq k \wedge \forall i \notin J_{\mathbf{m}}, \mathbf{x}(i) = \mathbf{m}(i))$$

Si de plus on ne peut pas accéder à une configuration plus grande, on dit que  $\mathbf{m}$  est *maximal*.

**Théorème 16** ([vavn81] théorème 4). Soit  $S$  un VAS. Alors  $\mathcal{L}(S)$  n'est pas rationnel si et seulement si il existe une configuration  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\omega^d$  tel que

1.  $\mathbf{m}$  est accessible maximal dans  $S$ , *as-tu généralisé la relation d'accessibilité aux omega-conf?*
2.  $J_{\mathbf{m}}$  n'est pas borné inférieurement pour la configuration  $\mathbf{x}$ , obtenue en posant  $\mathbf{x}(i) = 0$  si  $i \in J$  et  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{m}(i)$  si  $i \in I - J$ .

**Théorème 17** ([vavn81] lemme 3). Soit  $S$  un VAS. Alors  $\mathcal{L}(S)$  n'est pas rationnel si et seulement si il existe un circuit étiqueté par  $u \in A^*$  dans le graphe de couverture partant d'une configuration accessible maximale  $\mathbf{m}$ , tel que  $\bar{u}(i) < 0$  pour une coordonnée  $i \in J_{\mathbf{m}}$ .

*Étendre avant les configurations à  $\mathbb{N}_\omega^d$ , et les définitions qui vont avec (accessibilité).*

**Définition 18.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un VAS,  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$  une configuration et  $v \in A^*$  un mot. On dit que  $v$  est *cyclable* sur  $\mathbf{x}$  lorsque  $v$  est franchissable sur  $\mathbf{x}$ , et qu'il permet d'accéder à la même configuration  $\mathbf{x}$  (i.e.  $\mathbf{x} \xrightarrow{v}_S \mathbf{x}$ ).

**Théorème 19.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un VAS et  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$  une configuration. Alors  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  n'est pas rationnel si et seulement si il existe une configuration  $\mathbf{y} \in \mathbb{N}_\omega^d$  et un mot  $v \in A^*$  tels que

1.  $\mathbf{y}$  est accessible depuis  $\mathbf{x}$  dans  $S$ ,
2.  $v$  est cyclable sur  $\mathbf{y}$ ,
3.  $\bar{v} \not\geq \mathbf{0}$  (i.e. il existe un  $i \in I$  tel que  $\bar{v}(i) < 0$ ).

Si un mot est cyclable, il l'est sur une configuration plus grande. On peut donc exiger que  $\mathbf{y}$  soit maximal (donc dans Clover).

## 4 Décider la caractérisation

La procédure de décision nécessite de connaître deux choses :

1. D'abord, on veut pouvoir accéder à la liste des idéaux maximaux  $\text{Clover}(S)$  du VAS étudié,
2. Ensuite, il nous faut une procédure pour décider si un VAS donné est bornées.

**Lemme 20** ([giyo80] lemme 3). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons qu'il existe une configuration  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  et un mot  $v \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  franchissable tel que  $\bar{v}(i) < -k$  pour un certain  $i \in I$ . Alors on peut trouver une autre configuration  $\mathbf{y}$  et un autre mot  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  tel que  $\bar{w}(i) < -k$  et  $\bar{u}(i) \leq 0$  pour tout préfixe  $u$  de  $w$ .

*Démonstration.* Notons  $z$  le plus long préfixe de  $v$  tel que  $\bar{z}(i) \geq 0$ . On a alors  $v = zw$ , et le mot  $w$  ainsi obtenu est franchissable à partir de  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{z}$ , et vérifie  $\bar{w}(i) = \bar{v}(i) - \bar{z}(i) \leq \bar{v}(i) \leq k$ . De plus, pour tout préfixe  $u$  de  $w$ , on a  $\bar{u}(i) = \bar{zu}(i) - \bar{z}(i) \leq \bar{zu}(i) < 0$  puisque  $zu$  est un préfixe de  $v$  plus long que  $z$ .  $\square$

**Définition 21.** Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. Pour tout idéal maximal  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  de l'ensemble de couverture, notons  $J_{\mathbf{m}} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid \mathbf{m}(j) \neq \omega\}$  l'ensemble des coordonnées bornées pour les configurations de  $\mathbf{m}$ . On écrit  $J_{\mathbf{m}} = \{j_1, \dots, j_r\}$ .

Pour tout  $i \notin J_{\mathbf{m}}$ , on définit un  $(r+1)$ -VAS  $S(\mathbf{m}, i) = (A(\mathbf{m}, i), \lambda(\mathbf{m}, i), \mathbf{x}_{\mathbf{m}})$  en posant

- $A(\mathbf{m}, i) \stackrel{\text{def}}{=} \{a(\mathbf{m}, i) \mid a \in A\}$  l'alphabet des actions
- $\lambda$  l'étiquetage qui à toute lettre  $a(\mathbf{m}, i)$  associe le vecteur  $\overline{a(\mathbf{m}, i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{a}(j_1), \dots, \bar{a}(j_r), -\bar{a}(i))$ ,
- $\mathbf{x}_{\mathbf{m}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{m}(j_1), \dots, \mathbf{m}(j_r), 0) \in \mathbb{N}^{r+1}$  la configuration initiale.

*Revoir def, thm et preuve en gardant le même alphabet  $A$ , mais en changeant l'étiquetage.*

On regarde ainsi le comportement de chaque coordonnée non-bornée indépendamment des autres.

On étend la correspondance entre les actions de  $S$  et celles de  $S(\mathbf{m}, i)$  aux mots : pour  $w = a_1 \cdots a_n \in A^*$ , on pose  $w(\mathbf{m}, i) \stackrel{\text{def}}{=} a_1(\mathbf{m}, i) \cdots a_n(\mathbf{m}, i) \in A(\mathbf{m}, i)^*$ .

Le théorème suivant est alors obtenu :

**Théorème 22** ([giyo80] théorème 2). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un  $d$ -VAS. Alors  $S$  est rationnel si et seulement si tous les VAS  $S(\mathbf{m}, i)$  sont bornés pour tout idéal maximal  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  et tout  $i \in I \setminus J_{\mathbf{m}}$ .

*Démonstration.* Supposons que l'un des  $S(\mathbf{m}, i)$  ne soit pas borné, et posons  $r = |J_{\mathbf{m}}|$ . La coordonnée  $r + 1$  (associée à  $\mathbf{m}(i)$ ) est la seule à pouvoir être non-bornée. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe donc un mot  $w(\mathbf{m}, i) \in \mathcal{L}(S(\mathbf{m}, i))$  vérifiant  $\overline{w}(\mathbf{m}, i)(r + 1) > k$ .

Alors on peut trouver une configuration  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  de  $\mathbf{m}$  telle que  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ . En effet,  $w$  a le même effet sur les coordonnées  $j_p \in J_{\mathbf{m}}$  que  $w(\mathbf{m}, i)$  sur  $p \leq r$ , puisque pour tout  $x \in \text{Reach}(S)$  et tout préfixe  $u$  de  $w$ , on a  $(\mathbf{x} + \overline{u})(j_p) = \mathbf{m}(j_p) + \overline{u}(j_p) = \mathbf{x}_{\mathbf{m}}(p) + \overline{u}(\mathbf{m}, i)(p) \geq 0$ . Les autres coordonnées (non-bornées dans  $\mathbf{m}$ ) peuvent ensuite être choisies aussi grandes que nécessaire pour franchir  $w$ .

Comme  $\overline{w}(i) = -\overline{w}(\mathbf{m}, i)(r + 1) < -k$ , on sait que  $S$  ne vérifie pas (1) pour ce  $k$ , ce qui assure que  $\mathcal{L}(S)$  n'est pas rationnel (par le théorème 14).

On suppose maintenant qu'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  majorant les coordonnées de toutes les configurations accessibles de tous les  $S(\mathbf{m}, i)$ . Par l'absurde, supposons que la propriété (1) n'est pas vérifiée pour ce  $k$ . Par le lemme 20, il existe une coordonnée  $i \leq d$ , une configuration  $\mathbf{y}$  et un mot  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  tel que  $\overline{w}(i) < -k$  et  $\overline{u}(i) \leq 0$  pour tout préfixe  $u$  de  $w$ .

Soit  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  un élément maximal contenant  $\mathbf{y}$ . Alors il existe une configuration  $\mathbf{z} \in \mathbf{m}$  vérifiant  $\mathbf{y} \leq \mathbf{z}$ . Dans le VAS  $S(\mathbf{m}, i)$ , le mot  $w(\mathbf{m}, i)$  appartient au langage  $\mathcal{L}(S(\mathbf{m}, i))$  puisque pour tout préfixe  $u(\mathbf{m}, i)$  de  $w(\mathbf{m}, i)$ , on a

- $(\mathbf{x}_{\mathbf{m}} + \overline{u}(\mathbf{m}, i))(p) = (\mathbf{z} + \overline{u})(j_p) \geq (\mathbf{y} + \overline{u})(j_p) \geq 0$  pour tout  $p$  car  $u$  est franchissable sur  $\mathbf{y}$ ,
- $(\mathbf{x}_{\mathbf{m}} + \overline{u}(\mathbf{m}, i))(r + 1) = -\overline{u}(i) \geq 0$  où  $r = |J_{\mathbf{m}}|$ .

Néanmoins, la configuration accessible  $(\mathbf{x}_{\mathbf{m}} + \overline{w}(\mathbf{m}, i)) \in \text{Reach}(S(\mathbf{m}, i))$  contredit l'hypothèse de borne puisque  $\overline{w}(\mathbf{m}, i)(r + 1) = -\overline{w}(i) > k$ . □

## 5 Rationalité structurelle

Dans cette partie, les VAS n'auront pas de configuration initiale fixée. Nous allons considérer l'ensemble des configurations  $\mathbf{x}$  pour lesquelles  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  n'est pas rationnel ainsi que l'ensemble de ses éléments minimaux. Posons pour cela

- $\mathcal{R}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \text{ est rationnel}\},$
- $\overline{\mathcal{R}(S)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \text{ n'est pas rationnel}\} = \mathbb{N}^d - \mathcal{R}(S),$
- $M_S \stackrel{\text{def}}{=} \text{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$  l'ensemble des configurations minimales de  $\overline{\mathcal{R}(S)}$ .

Commençons par énoncer une propriété de monotonie de la non-rationalité.

**Proposition 23.** Pour tout VAS  $S = (A, \lambda)$ , on a  $\overline{\mathcal{R}(S)} = \uparrow M_S$  et  $M_S$  est fini.

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\overline{\mathcal{R}(S)}$  est clos par le haut. Soit  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{N}^d$  deux configurations vérifiant  $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$ . Supposons que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  ne soit pas rationnel.

D'après le théorème 14, il existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$  une exécution  $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{y}_k \xrightarrow{v}_S \mathbf{z}_k$  vérifiant  $\overline{v} = \mathbf{z}_k - \mathbf{y}_k \not\geq -k$ . Comme  $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$ , du fait de la monotonie des VAS, la séquence  $uv$  est aussi franchissable à partir de  $\mathbf{x}'$ , et l'on obtient l'exécution  $\mathbf{x}' \xrightarrow{u}_S \mathbf{y}'_k \xrightarrow{v}_S \mathbf{z}'_k$  où  $\mathbf{y}'_k = \mathbf{y}_k + (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$  et  $\mathbf{z}'_k = \mathbf{z}_k + (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ .

On a alors  $\mathbf{z}'_k - \mathbf{y}'_k = \overline{v} \not\geq -k$ , donc  $(S, \mathbf{x}')$  ne satisfait pas non plus la propriété (1). On en déduit que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}')$  n'est pas rationnel.

L'ensemble  $M_S$  est fini car  $\leq$  est un bel-ordre sur  $\mathbb{N}^d$ . On déduit que  $\overline{\mathcal{R}(S)} = \uparrow M_S$ . Faire référence à la proposition 5 ? □

Montrons maintenant que  $M_S$  est calculable. On s'appuie pour cela sur un résultat de Valk

**Théorème 24** ([ValkJ85] théorème 2.14). Soit  $K \subseteq \mathbb{N}^d$  un ensemble clos par le haut. Alors  $\text{Min}(K)$  est calculable si et seulement si pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_{\omega}^d$ , le prédicat  $p_K(\mathbf{x}) = (\downarrow \mathbf{x} \cap K \neq \emptyset)$  est décidable.

**Proposition 25.** L'ensemble  $M_S$  est calculable pour tout VAS  $S$ .



*Démonstration.* Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ , le prédicat  $p_{\overline{\mathcal{R}(S)}}(\mathbf{x})$  est équivalent au prédicat " $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  est rationnel". Reste à considérer les cas où certaines coordonnées de  $\mathbf{x}$  valent  $\omega$ .

Montrons que le prédicat  $p_K(\mathbf{x}) = (\downarrow \mathbf{x} \cap \mathbb{N}^d \cap K \neq \emptyset)$  est décidable pour  $K = \overline{\mathcal{R}(S)}$ . Le principe doit être le même que la preuve du théorème 3.11 (toujours dans Valk) pour les 4 ensembles de marquages étudiés.  $\square$

**Définition 26.** On dit qu'un VAS  $S$  est *structurellement rationnel* si  $M_S = \emptyset$  et qu'il n'est *jamais rationnel* si  $M_S = \{\mathbf{0}\}$ .

Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$  (pas forcément positifs), on note  $\mathbf{x} \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$  pour  $u \in A^*$  lorsque  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{u}$ . Il s'agit ici d'une simple égalité vectorielle dans  $\mathbb{Z}^d$ , sans notion de franchissement (on pourra parler de  $\mathbb{Z}$ -VAS). On écrira  $\mathbf{x} \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$  quand il existe  $u \in A^*$  tel que  $\mathbf{x} \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$ .

Valk et Vidal-Naquet proposent une caractérisation pour la propriété de rationalité structurelle.

**Théorème 27** ([vavn81] théorème 6). Un  $d$ -VAS  $S = (A, \lambda)$  n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{Z}^d$  tels que

1.  $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2$
2. Pour tout  $i \in I$ ,  $\mathbf{x}_1(i) = \mathbf{x}_2(i)$  implique  $\mathbf{x}_3(i) \leq \mathbf{x}_4(i)$ ,
3. Il existe un  $i \in I$  tel que  $\mathbf{x}_3(i) > \mathbf{x}_4(i)$ .
4.  $\mathbf{0} \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_1 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_2 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_3 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_4$ ,

Lister les configurations rencontrés comme dans le point 4 ci-dessus est inutile pour la rationalité structurelle, puisqu'on peut augmenter au besoin la configuration initiale pour permettre les étapes intermédiaires. On propose ainsi une définition équivalente simplifiée avec des mots, dont on donnera une démonstration.

**Théorème 28.** Un  $d$ -VAS  $S = (A, \lambda)$  n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe  $u, v \in A^*$  tels que

1.  $\overline{u} > \mathbf{0}$ ,
2. Pour tout  $i \in I$ ,  $\overline{u}(i) = 0$  implique  $\overline{v}(i) \geq 0$ ,
3. Il existe  $i \in I$  tel que  $\overline{v}(i) < 0$ .

**Remarque.** Les propriétés des théorèmes 17 et 18 sont bien équivalentes :

À partir des configurations  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ , on choisit simplement pour  $u$  le mot permettant d'aller de  $\mathbf{x}_1$  à  $\mathbf{x}_2$ , et pour  $v$  le mot allant de  $\mathbf{x}_3$  à  $\mathbf{x}_4$ .

Dans l'autre sens, avec les mots  $u, v$ , on regarde simplement l'exécution  $\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 \overset{v}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_4$ .

*Démonstration.* Supposons que  $S$  ne soit pas structurellement rationnel. Si  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  n'est pas rationnel pour une configuration initiale  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ , il existe (d'après le théorème 14) pour tout  $k \in \mathbb{N}$  une séquence d'actions franchissable  $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u_k}_S \mathbf{x}_k \xrightarrow{v_k}_S \mathbf{y}_k$  et une coordonnée  $i_k \in I$  tels que  $\overline{v_k}(i_k) \leq k$ .

Remarquons qu'une séquence d'action qui convient pour un certain  $k \in \mathbb{N}$  fonctionne aussi pour les valeurs de  $k$  inférieures. Par conséquent, on peut sélectionner uniquement les séquences qui nous intéressent, pour peu qu'il en reste une infinité :

- Comme  $I$  est fini, les indices  $i_k$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, donc (par le principe des tiroirs) il existe un  $\iota \in I$  apparaissant une infinité de fois. On peut ainsi supposer que  $i_k = \iota$  pour tout  $k$ .
- Comme  $(\mathbb{N}^d, \leq)$  forme un bel ordre, la suite  $(\overline{u_k})_{k \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite croissante pour  $\leq$ . On peut donc se ramener au cas où  $(\overline{u_k})_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Notons  $J \subseteq I$  l'ensemble des coordonnées bornées dans les  $\overline{u_k}$ . Formellement, on définit

$$J = \{j \in I \mid \exists h_j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \overline{u_k}(j) \leq h_j\}, \text{ et pour } j \in J, h_j = \max \{\overline{u_k}(j) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

**on peut définir  $J = j$  tel que  $\sup(\overline{u_k}(j))/k$  est fini** Il nous faut maintenant définir des mots  $u$  et  $v$  vérifiant les trois points du théorème. Commençons par fabriquer  $u$  satisfaisant le point 1 :

- Pour que les coordonnées dans  $J$  des  $\overline{u_k}$  soient positives pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on construit  $u'_k$  en retirant de  $u_k$  pour tout  $j \in J$  les  $h_j$  premières actions qui font décroître la coordonnée  $j$  (ou moins s'il n'y en a plus). On obtient ainsi  $\overline{u'_k}(j) \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $j \in J$ .



- Posons  $\xi = \{|\bar{a}(i)| \mid a \in A, i \in I\}$ . Lors du passage de  $u_k$  à  $u'_k$ , les coordonnées  $i \in I \setminus J$  ne peuvent décroître d'au plus  $\xi \times \sum_{j \in J} h_j$ . Par ailleurs, comme  $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et que pour tout  $i \in I \setminus J$ , la suite d'entiers  $(\bar{u}_k(i))_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini, il existe un  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \in I \setminus J$ ,  $\bar{u}_{k_0}(i) > \xi \times \sum_{j \in J} h_j$ . On en déduit que  $\forall i \in I \setminus J$ ,  $\bar{u}_{k_0}(i) > 0$ .

Par conséquent, le mot  $u'_{k_0}$  vérifie le point 1 :  $\bar{u}'_{k_0} > \mathbf{0}$ .

Maintenant, procédons de façon similaire sur les  $v_k$ . Pour tout  $j \in J$ ,  $(\bar{u}_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$  est borné, donc  $(\mathbf{x}_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$  est borné également par  $\ell_j = h_j + \mathbf{x}_{\text{init}}(j)$ . On construit alors  $v'_k$  en retirant de  $v_k$  pour tout  $j \in J$  les  $\ell_j$  premières actions qui font décroître la coordonnée  $j$ . Tous les  $v'_k$  vérifient le point 2 (avec  $u = u'_{k_0}$ ), puisque si pour un  $i \in I$ ,  $\bar{u}'_{k_0}(i) = 0$ , alors  $i \in J$ , d'où  $\bar{v}'_k(i) \geq 0$ .

Enfin, en prenant  $k_1 = 1 + \xi \times \sum_{j \in J} \ell_j$ , on a  $\bar{v}'_{k_1}(i) \leq k_1$ , d'où  $\bar{v}'_{k_1}(i) < 0$ , et  $v'_{k_1}$  vérifie aussi le point 3. Finalement,  $u'_{k_0}$  et  $v'_{k_1}$  vérifient les trois points, ce qui montre l'implication directe.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux mots  $u, v \in A^*$  vérifiant les points 1, 2, et 3. Soit  $\mathbf{x}_{\text{init}}$  une configuration sur laquelle  $u$  est franchissable (on choisit des coordonnées aussi grandes que nécessaire). Montrons que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  n'est pas rationnel.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Notons  $\rho = \max \{-\bar{v}(i) \mid i \in I\}$ , et montrons alors que  $u^{\rho \times k} v^k \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ .

- D'après le point 1, on a  $\bar{u} > \mathbf{0}$ , donc  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u} > \mathbf{x}_{\text{init}}$ . Comme  $u$  est franchissable sur  $\mathbf{x}_{\text{init}}$ , le mot  $u^{\rho \times k}$  l'est également. Posons  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{\text{init}} + u^{\rho \times k}$  la configuration atteinte.
- D'après le point 2, si pour un  $i \in I$ , on a  $\bar{v}^k(i) < 0$ , alors  $\bar{u}(i) > 0$ , d'où  $\mathbf{x}_k(i) \geq \rho \times k$ . Par définition de  $\rho$ , on en déduit que  $\bar{v}^k$  a bien les ressources nécessaires pour se déclencher sur  $\mathbf{x}_k$ , donc est bien franchissable. Posons  $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \bar{v}^k$  la nouvelle configuration atteinte.
- Enfin, d'après le point 3, il existe un  $i \in I$  tel que  $\bar{v}(i) < 0$ , d'où  $\bar{v}^k(i) \leq -k$ .

Par conséquent, l'exécution  $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u^{\rho \times k}}_S \mathbf{x}_k \xrightarrow{v^k}_S \mathbf{y}_k$  vérifie la propriété (1) pour ce  $k$ . On notera que  $\mathbf{x}_{\text{init}}$  est bien indépendant de  $k$ . Le langage  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  n'est donc pas rationnel, et  $S$  n'est pas structurellement rationnel.  $\square$

**Proposition 29.** Problème de décision

Donnée : un ensemble de vecteurs  $\lambda(A) \subseteq \mathbb{Z}^d$  (les étiquettes des actions de  $A$ ).

Question : Existe-t-il deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  obtenus comme combinaison semi-linéaire de  $\lambda(A)$  vérifiant les 3 conditions suivantes :

1.  $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ ,
2. Pour tout  $i \in I$ ,  $\mathbf{u}(i) = 0$  implique  $\mathbf{v}(i) \geq 0$ ,
3.  $\neg(\mathbf{v} \geq \mathbf{0})$ .

C'est du Presburger existentiel sans autre quantificateur et c'est dans NP

## 6 Commentaires

Vérifier qu'on peut énoncer Vidal-Naquet sur le graphe de couverture minimal défini par le graphe de Karp-Miller dans lequel on a gardé que les marquages maximaux.

Vérifier que ce nouveau graphe peut être obtenu à partir de Clover en ajoutant les transitions possibles (prolongées par continuité sur  $\mathbb{N}^d$ ). Vérifier qu'il ne manque pas de transitions utiles.

Tenter de se débarrasser du graphe, de Clover, voire plus dans la preuve de Valk et Vidal-Naquet.

Simplifier le thm 12 pour avoir un calcul facile dans les cas faciles (borné).

Voir Garey, Johnson : référence pour les problèmes de complexité sur les vecteurs

Regarder taille de l'automate (minimal ?) construit par GY et VVN. Est-ce Ackermann ?

Regarder les propriétés de monotonie des VAS pour la rationalité : Augmenter la configuration initiale peut-il permettre de retrouver la rationalité ? Voir ainsi si l'ensemble des configurations qui lorsque choisit initialement aboutissent à un VAS non-rationnel est clos par le haut.

Réduire la rationalité à la bornitude, la terminaison ou la couverture.

Programme : recherche jusqu'au 15 juin écriture article du 15 juin au 15 juillet

**FSTTCS 2021** : 41st IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science

FSTTCS 2021 : December 15–18, 2021. Post-conference workshops : December 19, 2021.

deadline : unknown but usually 15-25 july, say **15 july**

Submissions must be in electronic form via EasyChair using the LIPICs LaTeX style file. Submissions must not exceed 12 pages (excluding bibliography), but may include a clearly marked appendix containing technical details. The appendix will be read only at the discretion of the program committee. Simultaneous submissions to journals or other conferences with published proceedings are disallowed.