

# Décidabilité de la rationalité pour les WSTS

Lucas BUERI

Stage M2 - 2021

## 1 Réseaux de Petri

Un réseau de Petri  $N = (P, T, B, F, M_0)$  est la donnée de

- un ensemble fini  $P$  de  $d$  emplacements,
- un ensemble fini  $T$  de transitions,
- une fonction de coût  $B : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ ,
- une fonction de production  $F : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ ,
- un marquage initial  $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$ .

Les configurations sont les marquages  $M : P \rightarrow \mathbb{N}$ , aussi considérés comme les valeurs possibles de  $d$  compteurs (vecteur de  $\mathbb{N}^d$ ). On peut déclencher la transition  $t$  à partir du marquage  $M$  si et seulement si  $M(p) \geq B(p, t)$  pour tout  $p \in P$  (noté  $M \geq B(\cdot, t)$ ).

On obtient alors un nouveau marquage  $M'$  défini par  $M' \stackrel{\text{def}}{=} M + D(\cdot, t)$  où  $D \stackrel{\text{def}}{=} F - B$ .  $B$  représente donc le coût de la transition (le nombre de jetons requis et consommés dans chaque emplacement), et  $F$  représente sa production (les jetons créés lors du déclenchement).

On notera  $M(t)$  lorsque  $t$  peut se déclencher sur  $M$ , et  $M(t)M'$  si déclencher  $t$  sur  $M$  donne  $M'$ . On étendra naturellement cette notation (ainsi que  $B(p, \cdot)$  et  $F(p, \cdot)$ ) aux séquences de transitions, ou mots  $w \in T^*$ .

Deux ensembles nous intéresseront alors : le langage  $\mathcal{L}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in T^* \mid M_0(w)\}$  du réseau de Petri et les configurations accessibles  $\mathcal{R}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{M' : P \rightarrow \mathbb{N} \mid \exists w \in T^*, M_0(w)M'\}$ .

## 2 VAS

### 2.1 La structure

Un *système d'addition de vecteurs de dimension*  $d \in \mathbb{N}$  ( $d$ -VAS)  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  est la donnée d'un vecteur initial  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$  et d'un ensemble fini  $A$  d'actions. À chaque action  $a \in A$  est associé un unique vecteur  $\bar{a} \in \mathbb{Z}^d$ , de telle manière à ce que deux actions ne soient pas associées au même vecteur de  $\mathbb{Z}^d$ .

Les *configurations* de  $S$  sont alors les vecteurs de  $\mathbb{N}^d$  (à coordonnées positives), et chaque action  $a \in A$  agit sur  $\mathbb{N}^d$  en additionnant à la configuration courante le vecteur  $\bar{a}$  associé. On a alors une transition entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  étiquetée par l'action  $a$  lorsque  $\mathbf{x} + \bar{a} = \mathbf{y}$ .

De manière équivalente, on dira que l'action  $a \in A$  est *franchissable* à partir de la configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$  lorsque  $\mathbf{x} + \bar{a} \geq \mathbf{0}$ , et son déclenchement aboutit à la configuration  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{a}$  à travers la transition  $(\mathbf{x}, a, \mathbf{y}) \in \mathbb{N}^d \times A \times \mathbb{N}^d$ . On notera  $\mathbf{x} \xrightarrow{a}_S \mathbf{y}$  lorsqu'un tel déclenchement est possible (ou simplement  $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$  s'il n'y a pas ambiguïté sur  $S$ ).

Par la suite, on notera  $I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, d\}$  l'ensemble des coordonnées pour les configurations.

Lorsqu'une séquence d'actions  $w = a_1 \cdots a_k \in A^*$  permet d'aller de  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{y}$  par la séquence de transition  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}$  (où  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{N}^d$  et  $\mathbf{x}_{i-1} + \bar{a}_i = \mathbf{x}_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ ), on dit que  $w$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ , et qu'on a une *exécution*  $\rho : \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y}$ .  $\mathbf{y}$  est alors dit accessible à partir de  $\mathbf{x}$ .

De plus, en notant  $\bar{w} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \bar{a}_i$  le vecteur associé à  $w$ , on obtient  $\mathbf{x} + \bar{w} = \mathbf{y}$ . Attention, cette égalité peut-être vérifiée même si  $w$  n'est pas franchissable.

Nous allons étudier deux ensembles naturellement associés à un VAS  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  :

1.  $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in A^* \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$  qui est le *langage* des séquences d'actions franchissables à partir de la configuration  $\mathbf{x}$ ,
2.  $\mathcal{R}(A, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \exists w \in A^*, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$  qui est l'ensemble des configurations *accessibles* à partir de  $\mathbf{x}$ .

En particulier, on regardera  $\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  le langage du VAS  $S$ , et  $\mathcal{R}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}(A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  l'ensemble d'accessibilité de  $S$ .

**Définition 1.** Un VAS  $S$  est *rationnel* si  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel sur  $A^*$ .

**Définition 2.** Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un  $d$ -VAS et  $J \subseteq I$  un sous-ensemble d'indices.

—  $S$  est *borné* sur  $J$  lorsque toute configuration accessible a ses coordonnées de  $J$  bornées :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S), \forall j \in J, \mathbf{y}(j) \leq k$$

—  $S$  est *borné inférieurement* sur  $J$  lorsque toutes les coordonnées de  $J$  ne diminuent pas plus qu'une certaine borne (même en augmentant les ressources initiales) :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}(A, \mathbf{x}_{\text{init}} + n \cdot \mathbf{1}_J), \forall j \in J, \mathbf{y}(j) \geq \mathbf{x}(j) + n - k$$

## 2.2 Clover et le graphe de couverture

On aimerait avoir un meilleur aperçu des configurations accessibles, et notamment décrire de manière finie les capacités pour le VAS d'atteindre des configurations non-bornées. Rappelons d'abord la notion d'idéal :

**Définition 3.** Soit  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné et  $E \subseteq X$  un sous-ensemble de  $E$ .

- $E$  est dit *dirigé* lorsque pour tous  $x, y \in E$  il existe un  $z \in E$  vérifiant  $x \leq z$  et  $y \leq z$ .
- $E$  est dit *clos par le bas* lorsqu'il est égal à sa clôture par le bas  $\downarrow E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists y \in E, x \leq y\}$ .
- Enfin,  $E$  est un *idéal* s'il est dirigé et clos par le bas.

On peut maintenant introduire l'ensemble de couverture  $\mathcal{C}(A, x) \stackrel{\text{def}}{=} \downarrow \mathcal{R}(A, x)$  d'un VAS. Il est clos par le bas dans  $(\mathbb{N}^d, \leq)$  bien ordonné, donc se décompose comme une union finie d'idéaux.

Les idéaux de  $\mathbb{N}^d$  peuvent se voir comme des éléments de  $\mathbb{N}_\omega^d$ , obtenu en étendant  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{\omega\}$  de façon naturelle.

**Définition 4.** Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un  $d$ -VAS. On définit  $\text{Clover}(S) \subseteq \mathbb{N}_\omega^d$  comme l'ensemble des idéaux maximaux inclus dans  $\mathcal{C}(S)$ . C'est aussi l'unique ensemble de taille minimale d'idéaux dont l'union correspond à  $\mathcal{C}(S)$ .

**À revoir.**

Le *graphe de couverture* a pour sommets des configurations de  $\mathbb{N}_\omega^d$  et pour arêtes des transitions du VAS, étiquetées par une action de  $A$ . Il est obtenu en partant d'un sommet initial  $s_0 : \mathbf{x}_{\text{init}}$  étiqueté par la configuration initiale  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ , puis par récurrence sur la profondeur des noeuds en indiquant les voisins des noeuds accessibles :

Pour chaque noeud  $s : \mathbf{x}$  associé à la configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ , on fait partir de  $s$  autant d'arêtes que d'actions  $a \in A$  qui sont franchissables à partir de  $\mathbf{x}$ . Le sommet d'arrivée de l'arête associée à une action  $a$  est déterminé ainsi :

- Si  $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$  (déclencher  $a$  aboutit à la configuration  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{a}$ ) et qu'il existe un sommet déjà existant  $r : \mathbf{y}$  associé à cette configuration, alors on crée une arête étiquetée par  $a$  de  $s : \mathbf{x}$  vers  $r : \mathbf{y}$  ;
- Si  $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$  et qu'il existe un ancêtre  $r : \mathbf{z}$  de  $s$  (c'est-à-dire tel qu'il existe un chemin dans le graphe déjà créé de  $r$  à  $s$ ) avec  $\mathbf{y} > \mathbf{z}$ , alors on crée un nouveau sommet  $s' : \mathbf{y}'$  et une arête de  $s : \mathbf{y}$  vers  $s' : \mathbf{y}'$  étiquetée par  $a$ , où  $\mathbf{y}' \in \mathbb{N}_\omega^d$  est la configuration de coordonnées  $\mathbf{y}'(i) = \mathbf{y}(i)$  pour les  $1 \leq i \leq d$  tels que  $\mathbf{y}(i) = \mathbf{z}(i)$ , et  $\mathbf{y}'(i) = \omega$  si  $\mathbf{y}(i) > \mathbf{z}(i)$  ;
- Si la configuration  $\mathbf{y}$  atteinte n'est pas dans les cas précédents, on crée simplement un nouveau sommet  $s' : \mathbf{y}$  et une arête de  $s$  à  $s'$  étiquetée par  $a$ .

### 3 Une caractérisation pour la rationalité

La preuve de décidabilité se divise en deux étapes. Tout d'abord, on va donner une caractérisation mathématique équivalente à la rationalité. On montrera ainsi qu'un VAS est rationnel si et seulement s'il existe une borne  $k \in \mathbb{N}$  telle que si on peut accéder à la configuration  $\mathbf{x}$ , puis à  $\mathbf{y}$ , alors  $\mathbf{y}$  reste au dessus de  $\mathbf{x} - \mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}$  désignera le vecteur  $(k, k, \dots, k) \in \mathbb{N}^d$ ).

#### 3.1 La relation d'équivalence de Ginzburg et Yoeli n'est pas d'index fini

Ginzburg et Yoeli introduisent dans [2] une relation d'équivalence  $\equiv_S^{\text{GY}}$  sur les configurations et énoncent que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet un nombre fini de classes d'équivalence dans  $\mathcal{R}(S)$  ([2], Théorème 1).

S'il est vrai que  $\mathcal{R}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  fini implique que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel, la réciproque est fausse et nous donnerons un contre-exemple d'un langage  $\mathcal{L}(S)$  rationnel tel que  $\mathcal{R}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  est infini. Nous proposerons de reprendre l'idée de Ginzburg et Yoeli, mais en définissant une autre relation d'équivalence pour laquelle on obtiendra cette fois-ci l'équivalence entre la rationalité du langage et le quotient fini selon cette relation.

**Définition 5** ([2] section 3). Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  est définie pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S)$  par :

$$\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y} \text{ ssi } \forall w \in A^*, (\mathbf{x} + \bar{w} \in \mathcal{R}(S) \Leftrightarrow \mathbf{y} + \bar{w} \in \mathcal{R}(S))$$

ça donne quoi si on définit  $\equiv_S^{\text{GY}}$  sur tout  $\mathbb{N}^d$ ? Une classe de plus seulement? Une infinité?

**Remarque.**  $\equiv_S^{\text{GY}}$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\mathcal{R}(S)$  des configurations accessibles.

On aurait envie d'obtenir un résultat similaire à celui de Nérède, à savoir dire que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet un nombre fini de classes d'équivalence. Cela est malheureusement faux, puisque pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$  et  $w \in A^*$ , l'écriture  $\mathbf{x} + \bar{w} \in \mathcal{R}(S)$  ne permet pas de dire si la séquence  $w$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ . Il pourrait en effet exister une autre séquence  $w' \in A^*$  franchissable à partir de  $\mathbf{x}$  aboutissant à la configuration  $\mathbf{x} + \bar{w}' = \mathbf{x} + \bar{w}$ , voire même un moyen d'accéder à la configuration  $\mathbf{x} + \bar{w} = \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u}$  depuis la configuration initiale par une autre séquence d'action  $u \in A^*$  sans que  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u}$  ne soit accessible depuis  $\mathbf{x}$ .

Plus précisément sur la preuve de Ginzburg et Yoeli, avoir  $\mathcal{R}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  fini implique bien  $\mathcal{L}(S)$  rationnel, ce qui est prouvé en construisant explicitement l'automate. Par contre, la réciproque est fausse : L'erreur (avant-dernière ligne de la preuve du théorème 1 de [2]) était d'affirmer que savoir  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{uw} \in \mathcal{R}(S)$  pour  $u \in \mathcal{L}(S)$  et  $w \in A^*$  permettait d'en déduire que  $uw \in \mathcal{L}(S)$ .

On donne ci-dessous un contre-exemple pour illustrer ce point. Il est nécessaire de se placer au moins en dimension 3, car le résultat de Ginzburg et Yoeli reste vrai en dimension inférieure.

Ajouter preuve que le résultat reste vrai en dimension inférieure à 2.

**Exemple 6.** Soit le 3-VAS  $S = (A = \{a, b, c\}, \mathbf{x}_{\text{init}} = (0, 0, 0))$  dont les actions sont étiquetées par  $\bar{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{b} = (0, 1, -1)$  et  $\bar{c} = (-1, -1, 1)$ . Le langage reconnu  $\mathcal{L}(S) = a^*$  est rationnel, et les configurations accessibles sont les  $\mathbf{x}_n = (n, 0, 0)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Cependant, pour deux entiers  $m > n > 0$ , bien que  $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}_m) = \mathcal{L}(A, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(S)$ , on a  $\mathbf{x}_m \not\equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{x}_n$  : Cela se constate en considérant la séquence d'actions  $b^{n+1}c^{n+1}$  qui n'est jamais franchissable, mais qui vérifie  $\mathbf{x}_m + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (m - n - 1, 0, 0) \in \mathcal{R}(S)$  alors que  $\mathbf{x}_n + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (-1, 0, 0) \notin \mathcal{R}(S)$ .

La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet alors une infinité de classes d'équivalences  $(\{\mathbf{x}_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $S$ .

#### 3.2 Une autre relation d'équivalence qui est d'index fini

Pour corriger ce problème, on va aussi regarder si les actions sont franchissables :

**Définition 7.** Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. On introduit la relation  $\equiv_S$  sur les configurations en posant pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$  :

$$\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y} \text{ ssi } \mathcal{L}(A, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$$

Constatons déjà que cette nouvelle relation est plus grande que celle de Ginzburg et Yoeli (au sens de l'inclusion) :

**Proposition 8.** Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$ . Si  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$  alors  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ .

*Démonstration.* Supposons  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$  et montrons  $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}) \subseteq \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$  par récurrence sur la longueur des mots. Soit  $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$ .

Si  $w = \varepsilon$  est le mot vide,  $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$  assure que  $\varepsilon \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ .

Sinon, on écrit  $w = ua$  avec  $u \in A^*$  et  $a \in A$ .  $u \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$  est plus court que  $w$ , donc par hypothèse de récurrence on a également  $u \in \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$ .  $u$  est donc franchissable depuis  $\mathbf{y}$ . Mais  $ua \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$ , ce qui assure que  $\mathbf{x} + \overline{ua} \in \mathcal{R}(S)$ .

Comme  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$ , on obtient que  $\mathbf{y} + \overline{ua} \in \mathcal{R}(S)$ , aboutissant à  $\mathbf{y} + \overline{ua} \geq \mathbf{0}$ . L'action  $a$  est donc franchissable depuis  $\mathbf{y} + \overline{u}$ . En résumé, on a les transitions valides  $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{x} + \overline{u} \xrightarrow{a}_S \mathbf{x} + \overline{ua}$ , d'où  $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$ .

On conclut enfin que  $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$  par symétrie.  $\square$

On va établir le lien avec la relation de Nérode  $\sim_L$  associée à un langage  $L \subseteq A^*$ . Pour tout  $u, v \in A^*$ , on définit :

$$u \sim_L v \text{ ssi } \forall w \in A^*, uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$$

On sait que  $\sim_L$  est une relation d'équivalence invariante par composition à droite et qu'un langage  $L \subseteq A^*$  est rationnel si et seulement si  $A^*/\sim_L$  est fini ([1], Théorème 2).

La congruence de Nérode concerne donc les mots plutôt que les configurations, mais est liée à l'équivalence  $\equiv_S$  sur les VAS de la manière suivante :

**Lemme 9.** Soient  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $u, v \in \mathcal{L}(S)$ . On a  $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$  si et seulement si  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{v}$ .

*Démonstration.* Si  $u \in \mathcal{L}(S)$ , alors pour tout mot  $w \in A^*$ , on a l'équivalence :

$$uw \in \mathcal{L}(S) \Leftrightarrow w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u})$$

On en déduit immédiatement le résultat en reprenant les définitions de chaque relation.  $\square$

**Remarque.** La relation de Nérode ne s'intéresse qu'aux mots du langage, et  $\{w \in A^* \mid w \notin \mathcal{L}(S)\}$  forme une unique classe d'équivalence pour  $\sim_{\mathcal{L}(S)}$ . Ainsi, le lemme 9 devient faux dès lors que  $u, v \notin \mathcal{L}(S)$ , puisque l'on a toujours  $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$  dans ce cas sans que  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{v}$  ne soit nécessairement vrai.

**Théorème 10.** Pour un VAS  $S$ ,  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\mathcal{R}(S)/\equiv_S$  est fini.

*Démonstration.* On a les équivalences suivantes :

$\mathcal{L}(S)$  est rationnel ssi  $A^*/\sim_{\mathcal{L}(S)}$  est fini (propriété de la relation de Nérode)

ssi  $\mathcal{L}(S)/\sim_{\mathcal{L}(S)}$  est fini (car  $\sim_{\mathcal{L}(S)}$  admet une seule classe d'équivalence sur  $A^* \setminus \mathcal{L}(S)$ )

ssi  $\mathcal{R}(S)/\equiv_S$  est fini (par le lemme 9).  $\square$

Enfin, on donne une propriété de monotonie pour cette relation, qui appuie son intérêt pour l'étude du système de transition  $S$ .

**Proposition 11.** La relation d'équivalence  $\equiv_S$  sur les configurations d'un  $d$ -VAS  $S$  est compatible/monotone avec les actions : Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$ ,  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$  implique  $\forall a \in A, \mathbf{x} + \overline{a} \equiv_S \mathbf{y} + \overline{a}$ .

**Remarque.** La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  de Ginzburg et Yoeli vérifie également cette propriété.

### 3.3 Borne sur la décroissance

Pour obtenir un nombre fini de classes d'équivalence pour  $\equiv_S$ , on cherche une borne à partir de laquelle les configurations accessibles sont indiscernables. Comme la seule règle restreignant les actions franchissables est un test de positivité, on va exiger que les configurations ne puissent pas trop décroître.

Ginzburg et Yoeli proposent une caractérisation au travers des deux lemmes suivants :

**Énoncé** ([2] Lemme 1). Supposons que dans un VAS  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ ,  $n \leq d$  coordonnées (disons les  $n$  premières) soient non-bornées. Supposons aussi qu'il existe  $n$  entiers positifs  $k_1, k_2, \dots, k_n$  tels que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$ , tout  $w \in A^*$  et tout  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $(\mathbf{x} + \overline{w}) \in \mathcal{R}(S)$  implique  $\mathbf{x}(i) - (\mathbf{x} + \overline{w})(i) \leq k_i$ . Alors  $\mathcal{R}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  est fini.

Ce résultat est correct, et nous l'adapterons facilement à la relation  $\equiv_S$  en modifiant la propriété requise en conséquence. Notons qu'il n'est pas nécessaire de prendre des valeurs différentes pour les  $k_i$ , il est tout à fait possible de considérer leur maximum.

**Énoncé** ([2] Lemme 2). Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS, et supposons qu'il existe une coordonnée non-bornée  $j$  telle que pour tout  $k \geq 0$ , il existe une configuration  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$  et un mot  $w \in A^*$  tels que  $(\mathbf{x} + \bar{w}) \in \mathcal{R}(S)$  et  $\mathbf{x}(j) - (\mathbf{x} + \bar{w})(j) > k$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{R}(S) / \equiv_S^Y$  est infini.

Cette fois, la preuve donnée comporte une erreur de même nature que précédemment : Il est affirmé que si  $\mathbf{x} + \bar{w} \in \mathcal{R}(S)$ , alors toutes les étapes intermédiaires sont accessibles, ce qui n'est pas forcément vrai. Le résultat semble cependant vrai (à vérifier), mais n'apporte pas la caractérisation souhaitée.

Donnons maintenant une caractérisation similaire pour la relation  $\equiv_S$ . La preuve suit les idées de Ginzburg et Yoeli [2] en effectuant les modifications nécessaires.

**Théorème 12.** Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. Alors  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, (\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{*}_S \mathbf{x} \xrightarrow{*}_S \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \geq \mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad (1)$$

*Démonstration.* Commençons par montrer le sens  $((1) \implies \mathcal{L}(S) \text{ rationnel})$ . Soit  $S$  un VAS vérifiant la propriété (1) pour un  $k \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S)$ . Supposons que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont indiscernables pour les petites valeurs, c'est-à-dire que pour toute coordonnée  $i \in I$ , on a soit  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)$ , soit  $(\mathbf{x}(i) \geq k \text{ et } \mathbf{y}(i) \geq k)$ . Alors  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ . En effet, on a  $\mathbf{x} + \bar{w} \geq \mathbf{0} \iff \mathbf{y} + \bar{w} \geq \mathbf{0}$  pour tout  $w \in A^*$ , puisque les coordonnées qui diffèrent entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne peuvent devenir négatives.

Ainsi,  $\equiv_S$  admet au plus  $(k+1)^d$  classes d'équivalences, donc  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel (théorème 10).

Prouvons maintenant la réciproque  $(\mathcal{L}(S) \text{ rationnel} \implies (1))$  par contraposée. Si  $S$  ne vérifie pas la propriété (1), alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une configuration accessible  $\mathbf{x}$ , un mot  $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$  et une coordonnée  $i \in I$  tels que  $(\mathbf{x} + \bar{w})(i) \leq \mathbf{x}(i) - k$ .

On note  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x} + \bar{a_1} \cdots \bar{a_p} \in \mathcal{R}(S)$  les différentes configurations obtenues en lisant  $w = a_1 \cdots a_n$ . On a alors  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} + \bar{w}$ .

Notons  $\xi = \max \{|\bar{a}(j)| \mid a \in A, j \in I\}$  la valeur de la plus grande variation d'une coordonnée possible par une action. Alors, au moins  $k/\xi$  configurations  $\mathbf{x}_p$  voient leur coordonnée  $i$  décroître, et l'on a une sous-séquence d'extractrice  $\varphi$  vérifiant  $\mathbf{x}_{\varphi(0)}(i) > \mathbf{x}_{\varphi(1)}(i) > \cdots > \mathbf{x}_{\varphi(h)}(i)$  où  $h \geq k/\xi$ .

Ces configurations ne sont pas équivalentes pour  $\equiv_S$  : En effet, si l'on avait  $\mathbf{x}_{\varphi(p)} \equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(q)} = (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u})$  avec  $0 \leq p \leq q \leq h$  et en notant  $u = a_{\varphi(p)+1} \cdots a_{\varphi(q)}$ , alors on aurait  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r) \equiv_S (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^{r+1})$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$  (en procédant par récurrence sur  $r$  avec la proposition 11).

Or  $\bar{u}^r(i) = r \times \bar{u}(i) = r \times (\mathbf{x}_{\varphi(q)}(i) - \mathbf{x}_{\varphi(p)}(i)) < -r$ , ce qui prouve que  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r)(i) < 0$  à partir d'un certain  $r \in \mathbb{N}$ , et donc  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r) \not\equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(p)}$ , d'où une contradiction.

On conclut qu'il existe au moins  $k/\xi$  classes d'équivalences pour  $\equiv_S$  (et ce pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ), ainsi  $\mathcal{R}(S) / \equiv_S$  est infini.  $\square$

## 4 Décider la caractérisation

La procédure de décision nécessite de connaître deux choses :

1. D'abord, on veut pouvoir accéder à la liste des idéaux maximaux  $\text{Clover}(S)$  du VAS étudié,
2. Ensuite, il nous faut une procédure pour décider si un VAS donné est bornées.

**Lemme 13** ([2] lemme 3). Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons qu'il existe une configuration  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$  et un mot  $v \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$  franchissable tel que  $\bar{v}(i) < -k$  pour un certain  $i \in I$ . Alors on peut trouver une autre configuration  $\mathbf{y}$  et un autre mot  $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$  tel que  $\bar{w}(i) < -k$  et  $\bar{u}(i) \leq 0$  pour tout préfixe  $u$  de  $w$ .

*Démonstration.* Notons  $z$  le plus long préfixe de  $v$  tel que  $\bar{z}(i) \geq 0$ . On a alors  $v = zw$ , et le mot  $w$  ainsi obtenu est franchissable à partir de  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{z}$ , et vérifie  $\bar{w}(i) = \bar{v}(i) - \bar{z}(i) \leq \bar{v}(i) \leq k$ . De plus, pour tout préfixe  $u$  de  $w$ , on a  $\bar{u}(i) = \bar{zu}(i) - \bar{z}(i) \leq \bar{zu}(i) < 0$  puisque  $zu$  est un préfixe de  $v$  plus long que  $z$ .  $\square$

**Définition 14.** Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un  $d$ -VAS. Pour tout idéal maximal  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  de l'ensemble de couverture, notons  $J_{\mathbf{m}} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid \mathbf{m}(j) \neq \omega\}$  l'ensemble des coordonnées bornées pour les configurations de  $\mathbf{m}$ . On écrit  $J_{\mathbf{m}} = \{j_1, \dots, j_r\}$ .

Pour tout  $i \notin J_{\mathbf{m}}$ , on définit un  $(r+1)$ -VAS  $S(\mathbf{m}, i) = (A(\mathbf{m}, i), \mathbf{x}_{\mathbf{m}})$  en posant

—  $A(\mathbf{m}, i) \stackrel{\text{def}}{=} \{a(\mathbf{m}, i) \mid a \in A\}$  les actions étiquetées par  $\overline{a(\mathbf{m}, i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{a}(j_1), \dots, \bar{a}(j_r), -\bar{a}(i))$ ,

—  $\mathbf{x}_m \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{m}(j_1), \dots, \mathbf{m}(j_r), 0) \in \mathbb{N}^{r+1}$  la configuration initiale.

On regarde ainsi le comportement de chaque coordonnée non-bornée indépendamment des autres.

On étend la correspondance entre les actions de  $S$  et celles de  $S(\mathbf{m}, i)$  aux mots : pour  $w = a_1 \cdots a_n \in A^*$ , on pose  $w(\mathbf{m}, i) \stackrel{\text{def}}{=} a_1(\mathbf{m}, i) \cdots a_n(\mathbf{m}, i) \in A(\mathbf{m}, i)^*$ .

Le théorème suivant est alors obtenu :

**Théorème 15** ([2] théorème 2). Soit  $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un  $d$ -VAS. Alors  $S$  est rationnel si et seulement si tous les VAS  $S(\mathbf{m}, i)$  sont bornés pour tout idéal maximal  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  et tout  $i \in I \setminus J_m$ .

*Démonstration.* Supposons que l'un des  $S(\mathbf{m}, i)$  ne soit pas borné, et posons  $r = |J_m|$ . La coordonnée  $r + 1$  (associée à  $\mathbf{m}(i)$ ) est la seule à pouvoir être non-bornée. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe donc un mot  $w(\mathbf{m}, i) \in \mathcal{L}(S(\mathbf{m}, i))$  vérifiant  $\overline{w(\mathbf{m}, i)}(r + 1) > k$ .

Alors on peut trouver une configuration  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$  de  $\mathbf{m}$  telle que  $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$ . En effet,  $w$  a le même effet sur les coordonnées  $j_p \in J_m$  que  $w(\mathbf{m}, i)$  sur  $p \leq r$ , puisque pour tout  $x \in \mathcal{R}(S)$  et tout préfixe  $u$  de  $w$ , on a  $(\mathbf{x} + \overline{u})(j_p) = \mathbf{m}(j_p) + \overline{u}(j_p) = \mathbf{x}_m(p) + \overline{u(\mathbf{m}, i)}(p) \geq 0$ . Les autres coordonnées (non-bornées dans  $\mathbf{m}$ ) peuvent ensuite être choisies aussi grandes que nécessaire pour franchir  $w$ .

Comme  $\overline{w}(i) = -\overline{w(\mathbf{m}, i)}(r + 1) < -k$ , on sait que  $S$  ne vérifie pas (1) pour ce  $k$ , ce qui assure que  $\mathcal{L}(S)$  n'est pas rationnel (par le théorème 12).

On suppose maintenant qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  majorant les coordonnées de toutes les configurations accessibles de tous les  $S(\mathbf{m}, i)$ . Par l'absurde, supposons que la propriété (1) n'est pas vérifiée pour ce  $k$ . Par le lemme 13, il existe une coordonnée  $i \leq d$ , une configuration  $\mathbf{y}$  et un mot  $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$  tel que  $\overline{w}(i) < -k$  et  $\overline{u}(i) \leq 0$  pour tout préfixe  $u$  de  $w$ .

Soit  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  un élément maximal contenant  $\mathbf{y}$ . Alors il existe une configuration  $\mathbf{z} \in \mathbf{m}$  vérifiant  $\mathbf{y} \leq \mathbf{z}$ . Dans le VAS  $S(\mathbf{m}, i)$ , le mot  $w(\mathbf{m}, i)$  appartient au langage  $\mathcal{L}(S(\mathbf{m}, i))$  puisque pour tout préfixe  $u(\mathbf{m}, i)$  de  $w(\mathbf{m}, i)$ , on a

- $(\mathbf{x}_m + \overline{u(\mathbf{m}, i)})(p) = (\mathbf{z} + \overline{u})(j_p) \geq (\mathbf{y} + \overline{u})(j_p) \geq 0$  pour tout  $p$  car  $u$  est franchissable sur  $\mathbf{y}$ ,
- $(\mathbf{x}_m + \overline{u(\mathbf{m}, i)})(r + 1) = -\overline{u}(i) \geq 0$  où  $r = |J_m|$ .

Néanmoins, la configuration accessible  $(\mathbf{x}_m + \overline{w(\mathbf{m}, i)}) \in \mathcal{R}(S(\mathbf{m}, i))$  contredit l'hypothèse de borne puisque  $\overline{w(\mathbf{m}, i)}(r + 1) = -\overline{w}(i) > k$ . □

## 5 Rationalité structurelle

Dans cette partie, les VAS n'auront pas de configuration initiale fixée.

**Définition 16.** On dit qu'un  $d$ -VAS  $S = (A)$  (sans configuration initiale) est *structurellement rationnel* lorsque  $\mathcal{L}(A, \mathbf{x})$  est rationnel pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ .

Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$  (pas forcément positifs), on note  $\mathbf{x} \stackrel{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$  pour  $u \in A^*$  lorsque  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{u}$ . Il s'agit ici d'une simple égalité vectorielle dans  $\mathbb{Z}^d$ , sans notion de franchissement. On écrira  $\mathbf{x} \stackrel{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$  quand il existe  $u \in A^*$  tel que  $\mathbf{x} \stackrel{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$ .

Valk et Vidal-Naquet proposent une caractérisation pour la propriété de rationalité structurelle.

**Théorème 17** ([3] théorème 6). Un  $d$ -VAS  $S = (A)$  n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{Z}^d$  tels que

1.  $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2$
2. Pour tout  $i \in I$ ,  $\mathbf{x}_1(i) = \mathbf{x}_2(i)$  implique  $\mathbf{x}_3(i) \leq \mathbf{x}_4(i)$ ,
3. Il existe un  $i \in I$  tel que  $\mathbf{x}_3(i) > \mathbf{x}_4(i)$ .
4.  $\mathbf{0} \stackrel{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_1 \stackrel{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_2 \stackrel{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_3 \stackrel{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_4$ ,

Donnons maintenant une définition équivalente à [prouver](#) avec les mots.

**Théorème 18.** Un  $d$ -VAS  $S = (A)$  n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe  $u, v \in A^*$  tels que

1.  $\overline{u} > \mathbf{0}$ ,
2. Pour tout  $i \in I$ ,  $\overline{u}(i) = 0$  implique  $\overline{v}(i) \geq 0$ ,
3. Il existe  $i \in I$  tel que  $\overline{v}(i) < 0$ .

On a alors  $\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 \xrightarrow{u} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 \xrightarrow{v} \mathbf{x}_4$

*Démonstration.* Supposons que  $S$  ne soit pas structurellement rationnel. Si  $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}_0)$  n'est pas rationnel pour une configuration initiale  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^d$ , il existe (d'après le théorème 12) pour tout  $k \in \mathbb{N}$  une séquence d'actions franchissable  $\mathbf{x}_0 \xrightarrow{u_k}_S \mathbf{x}_k \xrightarrow{v_k}_S \mathbf{y}_k$  et une coordonnée  $i_k \in I$  tels que  $\overline{v_k}(i_k) < k$ .

Comme  $I$  est fini, les indices  $i_k$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, donc (principe des tiroirs) il existe un  $i \in I$  apparaissant une infinité de fois. On peut ainsi supposer [expliquer même si ça semble évident](#) que  $i_k = i$  pour tout  $k$ . De plus, comme  $(\mathbb{N}^d, \leq)$  forme un bel ordre, la suite  $(\overline{u_k})_{k \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite croissante pour  $\leq$ . On peut donc se ramener au cas où  $(\overline{u_k})_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Notons  $J \subseteq I$  l'ensemble des coordonnées bornées dans les  $\overline{u_k}$ . Formellement, on définit

$$J = \{j \in I \mid \exists h_j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \overline{u_k}(j) \leq h_j\}, \text{ et pour } j \in J, h_j = \max \{\overline{u_k}(j) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

[on peut définir  \$J = j\$  tel que  \$\sup\(\overline{u\_k}\(j\)/k\)\$  est fini](#) Il nous faut maintenant définir des mots  $u$  et  $v$  vérifiant les trois points du théorème. Commençons par fabriquer  $u$  satisfaisant le point 1 :

- Pour que les coordonnées dans  $J$  des  $\overline{u_k}$  soient positives pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on construit  $u'_k$  en retirant de  $u_k$  pour tout  $j \in J$  les  $h_j$  premières actions qui font décroître la coordonnée  $j$  (ou moins s'il n'y en a plus). On obtient ainsi  $\overline{u'_k}(j) \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $j \in J$ .
- Posons  $\xi = \{|\overline{a}(i)| \mid a \in A, i \in I\}$ . Lors du passage de  $u_k$  à  $u'_k$ , les coordonnées  $i \in I \setminus J$  ne peuvent décroître d'au plus  $\xi \times \sum_{j \in J} h_j$ . Comme  $(\overline{u_k})_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et que pour tout  $i \in I \setminus J$ ,  $(\overline{u_k}(i))_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini, il existe un  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $i \in I \setminus J$ ,  $\overline{u_{k_0}}(i) > \xi \times \sum_{j \in J} h_j$ .

Par conséquent, le mot  $u'_{k_0}$  vérifie le point 1 du théorème 18 :  $\overline{u'_{k_0}} > \mathbf{0}$ . [et les 2 autres points ?](#)  $\square$

## 6 Commentaires

Vérifier qu'on peut énoncer Vidal-Naquet sur le graphe de couverture minimal défini par le graphe de Karp-Miller dans lequel on a gardé que les marquages maximaux.

Vérifier que ce nouveau graphe peut être obtenu à partir de Clover en ajoutant les transitions possibles (prolongées par continuité sur  $\mathbb{N}^d$ ). Vérifier qu'il ne manque pas de transitions utiles.

Réécrire le thm 6 de Valk et Vidal-Naquet. Rationnalité structurelle serait décidable (arithmétique de Presburger donne 3-exptime), peut-être NP ?

Simplifier le thm 12 pour avoir un calcul facile dans les cas faciles (borné).

Voir Garey, Johnson : référence pour les problèmes de complexité sur les vecteurs

Regarder taille de l'automate (minimal ?) construit par GY et VVN. Est-ce Ackermann ?

Sortir la config initiale  $\mathbf{x}_{\text{init}}$  du VAS (plus facile pour gérer les VAS structurellement)

## Références

- [1] M. O. Rabin and D. Scott. Finite Automata and Their Decision Problems. *IBM Journal of Research and Development*, vol. 3, pages 114-125, 1959.
- [2] A. Ginzburg and M. Yoeli. Vector Addition Systems and Regular Languages. *Journal of Computer and System Science* 20, pages 277-284, 1980.
- [3] R. Valk and G. Vidal-Naquet. Petri Nets and Regular Languages. *Journal of Computer and System Science* 23, pages 299-325, 1981.