Décidabilité de la rationnalité pour les WSTS

Lucas Bueri

Stage M2 - 2021

1 Réseaux de Petri

Un réseau de Petri $N = (P, T, B, F, M_0)$ est la donnée de

— un ensemble fini P de d emplacements,

— un ensemble fini T de transitions,

— une fonction de coût $B : P \times T \to \mathbb{N}$,

— une fonction de production $F : P \times T \to \mathbb{N}$,

— un marquage initial $M_0 : P \to \mathbb{N}$.

Les configurations sont les marquages $M : P \to \mathbb{N}$, aussi considérés comme les valeurs possibles de d compteurs (vecteur de $\mathbb{N}^d$). On peut déclencher la transition t à partir du marquage M si et seulement si $M(p) \geqslant B(p, t)$ pour tout $p \in P$ (noté $M \geqslant B(\cdot, t)$).

On obtient alors un nouveau marquage M' défini par $M' := M + D(\cdot, t)$ où $D \overset{def}{=} F - B$. B représente donc le coût de la transition (le nombre de jetons requis et consommés dans chaque emplacement), et F représente sa production (les jetons créés lors du déclenchement).

On notera $M\langle t\rangle$ lorsque t peut se déclencher sur M, et $M\langle t\rangle M'$ si déclencher t sur M donne M'. On étendra naturellement cette notation (ainsi que $B(p, \cdot)$ et $F(p, \cdot)$) aux séquences de transitions, ou mots $w \in T^*$.

Deux ensembles nous intéresseront alors : le langage $\mathcal{L}(N) \overset{def}{=} \{w \in T^* \mid M_0\langle w\rangle\}$ du réseau de Petri et les configurations accessibles $\mathcal{R}(N) \overset{def}{=} \{M' : P \to \mathbb{N} \mid \exists w \in T^*, M_0\langle w\rangle M'\}$.

2 VAS

Un *système d'addition de vecteurs de dimension* $d \in \mathbb{N}$ ($d-$VAS) $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ est la donnée d'un vecteur initial $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ et d'un ensemble fini A d'*actions*. À chaque action $a \in A$ est associé un unique vecteur $\overline{a} \in \mathbb{Z}^d$, de telle manière à ce que deux actions ne soient pas associées au même vecteur de $\mathbb{Z}^d$.

Les *configurations* de S sont alors les vecteurs de $\mathbb{N}^d$ (à coordonnées positives), et chaque action $a \in A$ agit sur $\mathbb{N}^d$ en additionnant à la configuration courante le vecteur $\overline{a}$ associé. On a alors une transition entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ étiquetée par l'action a lorsque $\mathbf{x} + \overline{a} = \mathbf{y}$.

De manière équivalente, on dira que l'action $a \in A$ est *franchissable* à partir de la configuration $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ lorsque $\mathbf{x} + \overline{a} \geqslant \mathbf{0}$, et son déclenchement aboutit à la configuration $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \overline{a}$ à travers la transition $(\mathbf{x}, a, \mathbf{y}) \in \mathbb{N}^d \times A \times \mathbb{N}^d$. On notera $\mathbf{x} \xrightarrow{a}_S \mathbf{y}$ lorsqu'un tel déclenchement est possible (ou simplement $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$ s'il n'y a pas ambiguité sur S).

Lorsqu'une séquence d'actions $w = a_1 \cdots a_k \in A^*$ permet d'aller de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{y}$ par la séquence de transition $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} \xrightarrow{a_1} \mathbf{x_1} \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} \mathbf{x_k} = \mathbf{y}$ (où $\mathbf{x_0}, \dots, \mathbf{x_k} \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{x_{i-1}} + \overline{a_i} = \mathbf{x_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$), on dit que w est franchissable à partir de $\mathbf{x}$, et qu'on a une *exécution* $\rho : \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y}$. $\mathbf{y}$ est alors dit accessible à partir de $\mathbf{x}$.

De plus, en notant $\overline{w} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^k \overline{a_i}$ le vecteur associé à w, on obtient $\mathbf{x} + \overline{w} = \mathbf{y}$. Attention, cette égalité peut-être vérifiée même si w n'est pas franchissable.

Nous allons étudier deux ensembles naturellement associés à un VAS $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$:

1. $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}) \overset{def}{=} \left\{ w \in A^* \;\middle|\; \exists \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$ qui est le *langage* des séquences d'actions franchissables à partir de la configuration $\mathbf{x}$,

2. $\mathcal{R}(A,\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \;\middle|\; \exists w \in A^*, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$ qui est l'ensemble des configurations *accessibles* à partir de $\mathbf{x}$.

En particulier, on regardera $\mathcal{L}(S) := \mathcal{L}(A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ le langage du VAS S, et $\mathcal{R}(S) := \mathcal{R}(A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ l'ensemble d'accessibilité de S.

Définition 1. Un VAS S est *rationnel* si $\mathcal{L}(S)$ est rationnel sur A^*.

3 Un algorithme de calcul du Graphe de couverture (pour les VAS)

On étend les configurations des VAS aux vecteurs à coordonnées dans $\mathbb{N}_\omega \stackrel{def}{=} \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Cela va nous permettre de représenter le graphe des configurations accessibles de manière finie (bien qu'il puisse exister une infinité de configurations accessibles).

Le *graphe de couverture* À revoir. a pour sommets des configurations de $\mathbb{N}_\omega^d$ et pour arêtes des transitions du VAS, étiquetés par une action de A. Il est obtenu en partant d'un sommet initial $s_0 : \mathbf{x}_{\text{init}}$ étiqueté par la configuration initiale $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$, puis par récurrence sur la profondeur des noeuds en indiquant les voisins des noeuds accessibles :

Pour chaque noeud $s : \mathbf{x}$ associé à la configuration $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$, on fait partir de s autant d'arêtes que d'actions $a \in A$ qui sont franchissables à partir de $\mathbf{x}$. Le sommet d'arrivée de l'arête associée à une action a est déterminé ainsi :

— Si $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$ (déclencher a aboutit à la configuration $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \overline{a}$) et qu'il existe un sommet déjà existant $r : \mathbf{y}$ associé à cette configuration, alors on crée une arête étiquetée par a de $s : \mathbf{x}$ vers $r : \mathbf{y}$;

— Si $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$ et qu'il existe un ancêtre $r : \mathbf{z}$ de s (c'est-à-dire tel qu'il existe une chemin dans le graphe déjà créé de r à s) avec $\mathbf{y} > \mathbf{z}$, alors on crée un nouveau sommet $s' : \mathbf{y}'$ et une arête de $s : \mathbf{y}$ vers $s' : \mathbf{y}'$ étiquetée par a, où $\mathbf{y}' \in \mathbb{N}_\omega^d$ est la configuration de coordonnées $\mathbf{y}'(i) := \mathbf{y}(i)$ pour les $1 \leqslant i \leqslant d$ tels que $\mathbf{y}(i) = \mathbf{z}(i)$, et $\mathbf{y}'(i) := \omega$ si $\mathbf{y}(i) > \mathbf{z}(i)$;

— Si la configuration $\mathbf{y}$ atteinte n'est pas dans les cas précédents, on crée simplement un nouveau sommet $s' : \mathbf{y}$ et une arête de s à s' étiquetée par a.

4 Une caractérisation pour la rationnalité

La preuve de décidabilité se divise en deux étapes. Tout d'abord, on va donner une caractérisation mathématique équivalente à la rationnalité. On montrera ainsi qu'un VAS est rationnel si et seulement s'il existe une borne $k \in \mathbb{N}$ telle que si on peut accéder à la configuration $\mathbf{x}$, puis à $\mathbf{y}$, alors $\mathbf{y}$ reste au dessus de $\mathbf{x} - \mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ désignera le vecteur $(k, k, ..., k) \in \mathbb{N}^d$).

4.1 La relation d'équivalence de Ginzburg et Yoeli n'est pas d'index fini

pour simplifier les notations, je propose de noter $\equiv_{\text{GY}}$ par $\equiv$ et celle de Nérode par $\sim_L$, short $\sim$

Ginzburg et Yoeli introduisent dans [2] une relation d'équivalence $\equiv_{\text{GY}}$ sur les configurations et énoncent que $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si $\equiv_{\text{GY}}$ admet un nombre fini de classes d'équivalence dans $\mathcal{R}(S)$ ([2], Théorème 1).

S'il est vrai que $\mathcal{R}(S)/\equiv_{\text{GY}}$ fini implique que $\mathcal{L}(S)$ est rationnel, la réciproque est fausse et nous donnerons un contre-exemple d'un langage $\mathcal{L}(S)$ rationnel tel que $\mathcal{R}(S)/\equiv_{\text{GY}}$ est infini. Nous proposerons de reprendre l'idée de Ginzburg et Yoeli, mais en définissant une autre relation d'équivalence /avec la congruence de Nérode/ pour laquelle on obtiendra cette fois-ci l'équivalence entre la rationnalité du langage et le quotient fini selon cette relation.

Définition 2 ([2] section 3)**.** Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS. La relation $\equiv_{\text{GY}}$ est définie pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S)$ par :

$$\mathbf{x} \equiv_{\text{GY}} \mathbf{y} \text{ ssi } \forall w \in A^*, \big(\mathbf{x} + \overline{w} \in \mathcal{R}(S) \Leftrightarrow \mathbf{y} + \overline{w} \in \mathcal{R}(S)\big)$$

ça donne quoi si on définit $\equiv_{\text{GY}}$ sur tout $\mathbb{N}^d$? Une classe de plus seulement ? Une infinité ?

Remarque. $\equiv_{\text{GY}}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{R}(S)$ des configurations accessibles.

On aurait envie d'obtenir un résultat similaire à celui de Nérode, à savoir dire que $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si $\equiv_{\text{GY}}$ admet un nombre fini de classes d'équivalence. Cela est malheureusement faux, puisque pour $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$ et $w \in A^*$, l'écriture $\mathbf{x} + \overline{w} \in \mathcal{R}(S)$ ne permet pas de dire si la séquence w est franchissable à partir de $\mathbf{x}$. Il pourrait en effet exister une autre séquence $w' \in A^*$ franchissable à partir de $\mathbf{x}$ aboutissant à la configuration $\mathbf{x} + \overline{w'} = \mathbf{x} + \overline{w}$, voire même un moyen d'accéder à la configuration $\mathbf{x} + \overline{w} = \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u}$ depuis la configuration initiale par une autre séquence d'action $u \in A^*$ sans que $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u}$ ne soit accessible depuis $\mathbf{x}$.

Plus précisément sur la preuve de Ginzburg et Yoeli, avoir $\mathcal{R}(S)/\equiv_{\text{GY}}$ fini implique bien $\mathcal{L}(S)$ rationnel, ce qui est prouvé en construisant explicitement l'automate. Par contre, la réciproque est fausse : L'erreur (avant-dernière ligne de la preuve du théorème 1 de [2]) était d'affirmer que savoir $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{uw} \in \mathcal{R}(S)$ pour $u \in \mathcal{L}(S)$ et $w \in A^*$ permettait d'en déduire que $uw \in \mathcal{L}(S)$.

On donne ci-dessous un contre-exemple pour illustrer ce point. Il est nécessaire de se placer au moins en dimension 3, car le résultat de Ginzburg et Yoeli reste vrai en dimension inférieure.

Exemple 3. Soit le 3−VAS $S = (A := \{a, b, c\}, \mathbf{x}_{\text{init}} := (0, 0, 0))$ dont les actions sont étiquetés par $\overline{a} = (1, 0, 0)$, $\overline{b} = (0, 1, -1)$ et $\overline{c} = (-1, -1, 1)$. Le langage reconnu $\mathcal{L}(S) = a^*$ est rationnel, et les configurations accessibles sont les $\mathbf{x}_n := (n, 0, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Cependant, pour deux entiers $m > n > 0$, bien que $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}_m) = \mathcal{L}(A, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(S)$, on a $\mathbf{x}_m \not\equiv_{\text{GY}} \mathbf{x}_n$: Cela se constate en considérant la séquence d'actions $b^{n+1}c^{n+1}$ qui n'est jamais franchissable, mais qui vérifie $\mathbf{x}_m + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (m-n-1, 0, 0) \in \mathcal{R}(S)$ alors que $\mathbf{x}_n + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (-1, 0, 0) \notin \mathcal{R}(S)$.

La relation $\equiv_{\text{GY}}$ admet alors une infinité de classes d'équivalences $(\{\mathbf{x}_n\})_{n\in\mathbb{N}}$.

Remark : La relation $\equiv_{\text{GY}}$ peut admettre une infinité de classes d'équivalences.

4.2 Une autre relation d'équivalence qui est d'index fini

Pour corriger ce problème, on va aussi regarder si les actions sont franchissables :

Définition 4. Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS. On introduit la relation $\equiv_S$ sur les configurations en posant pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$:

$$\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y} \text{ ssi } \mathcal{L}(A, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$$

Constatons déjà que cette nouvelle relation est plus grande que celle de Ginzburg et Yoeli (au sens de l'inclusion) :

Proposition 5. Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS et $\mathbf{x}, y \in \mathcal{L}(S)$. Si $\mathbf{x} \equiv_{\text{GY}} y$ alors $\mathbf{x} \equiv_S y$.

Démonstration. Supposons $\mathbf{x} \equiv_{\text{GY}} \mathbf{y}$ et montrons $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}) \subseteq \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$ par récurrence sur la longueur des mots. Soit $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$.

Si $w = \varepsilon$ est le mot vide, $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$ assure que $\varepsilon \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$.

Sinon, on écrit $w = ua$ avec $u \in A^*$ et $a \in A$. $u \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$ est plus court que w, donc par hypothèse de récurrence on a également $u \in \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$. u est donc franchissable depuis $\mathbf{y}$. Mais $ua \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$, ce qui assure que $\mathbf{x} + \overline{ua} \in \mathcal{R}(S)$.

Comme $\mathbf{x} \equiv_{\text{GY}} \mathbf{y}$, on obtient que $\mathbf{y} + \overline{ua} \in \mathcal{R}(S)$, aboutissant à $\mathbf{y} + \overline{ua} \geqslant \mathbf{0}$. L'action a est donc franchissable depuis $\mathbf{y} + \overline{u}$. En résumé, on a les transitions valides $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{x} + \overline{u} \xrightarrow{a}_S \mathbf{x} + \overline{w}$, d'où $w \in \mathcal{L}(A, y)$.

On conclut enfin que $\mathcal{L}(A, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(A, \mathbf{y})$ par symétrie. □

On va établir le lien avec la relation de Nérode $\sim_L$ associée à un langage $L \subseteq A^*$. Pour tout $u, v \in A^*$, on définit :

$$u \sim_L v \text{ ssi } \forall w \in A^*, uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$$

On sait que $\sim_L$ est une relation d'équivalence invariante par composition à droite et qu'un langage $L \subseteq A^*$ est rationnel si et seulement si $A^*/\sim_L$ est fini ([1], Théorème 2).

La congruence de Nérode concerne donc les mots plutôt que les configurations, mais est liée à l'équivalence $\equiv_S$ sur les VAS de la manière suivante :

Lemme 6. Soient $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS et $u, v \in \mathcal{L}(S)$. On a $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$ si et seulement si $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{v}$.

Démonstration. Si $u \in \mathcal{L}(S)$, alors pour tout mot $w \in A^*$, on a l'équivalence :

$$uw \in \mathcal{L}(S) \Leftrightarrow w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u})$$

On en déduit immédiatement le résultat en reprenant les définitions de chaque relation. □

Remarque. La relation de Nérode ne s'intéresse qu'aux mots du langage, et $\{w \in A^* \mid w \notin \mathcal{L}(S)\}$ forme une unique classe d'équivalence pour $\sim_{\mathcal{L}(S)}$. Ainsi, le lemme 6 devient faux dès lors que $u, v \notin \mathcal{L}(S)$, puisque l'on a toujours $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$ dans ce cas sans que $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{v}$ ne soit nécessairement vrai.

Théorème 7. Pour un VAS S, $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si $\mathcal{R}(S)/\equiv_S$ est fini.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :
$\mathcal{L}(S)$ est rationnel ssi $A^*/\sim_{\mathcal{L}(S)}$ est fini (raison)
ssi $\mathcal{L}(S)/\sim_{\mathcal{L}(S)}$ est fini (raison)
ssi $\mathcal{R}(S)/\equiv_S$ est fini (Lemme 6). □

Enfin, on donne une propriété de monotonie pour cette relation, qui appuie son intérêt pour l'étude du système de transition S.

Proposition 8. La relation d'équivalence $\equiv_S$ sur les configurations d'un $d-$VAS S est compatible/monotone avec les actions : Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ implique $\forall a \in A, \mathbf{x} + \overline{a} \equiv_S \mathbf{y} + \overline{a}$.

Remarque. La relation $\equiv_{\text{GY}}$ de Ginzburg et Yoeli vérifie également cette propriété.

Partie à supprimer :

Définition 9. Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un d-VAS. On appelle *congruence sur S* une relation d'équivalence $\equiv$ sur les configurations de $\mathbb{N}^d$ qui est compatible avec les actions, c'est-à-dire telle que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$ implique $\forall a \in A, \mathbf{x} + \overline{a} \equiv \mathbf{y} + \overline{a}$.

Lemme 10. $\equiv_S$ est une congruence sur le VAS S.

Démonstration. $\equiv_S$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^d$. De plus, $\equiv_S$ est stable par les déclenchements : si $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$, alors pour toute action $a \in A$ et tout mot $w \in A^*$, on a

$$(\mathbf{x} + \overline{a}) + \overline{w} \in \mathcal{R}(S) \Leftrightarrow \mathbf{x} + \overline{aw} \in \mathcal{R}(S) \Leftrightarrow \mathbf{y} + \overline{aw} \in \mathcal{R}(S) \Leftrightarrow (\mathbf{y} + \overline{a}) + \overline{w} \in \mathcal{R}(S)$$

d'où $\mathbf{x} + \overline{a} \equiv_S \mathbf{y} + \overline{a}$. □

Proposition 11. Soit un VAS $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$. Alors $\equiv_S$ est la plus grande congruence sur S au sens de l'inclusion.

Démonstration. Montrons d'abord que l'ensemble des congruences sur S est dirigé :

Si $\equiv_1$ et $\equiv_2$ sont deux congruences sur S, alors notons $\equiv_{1+2}$ la clôture transitive de l'union des deux relations $\equiv_1 \cup \equiv_2$. $\equiv_{1+2}$ est bien une relation d'équivalence, et si $\mathbf{x} \equiv_{1+2} \mathbf{y}$, alors il existe une séquence finie de vecteurs $(\mathbf{x}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ tels que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_n$ et pour tout $0 \leqslant i < n$, $\mathbf{x}_i \equiv_1 \mathbf{x}_{i+1}$ ou $\mathbf{x}_i \equiv_2 \mathbf{x}_{i+1}$.

On a alors $\mathbf{x}_i + \overline{a} \equiv_1 \mathbf{x}_{i+1} + \overline{a}$ ou $\mathbf{x}_i + \overline{a} \equiv_2 \mathbf{x}_{i+1} + \overline{a}$ pour tout $0 \leqslant i < n$, d'où $\mathbf{x} + \overline{a} \equiv_{1+2} \mathbf{y} + \overline{a}$, et $\equiv_{1+2}$ est bien une congruence sur S contenant $\equiv_1$ et $\equiv_2$.

Maintenant, si $\equiv_1$ est une congruence sur S, pour tout $\mathbf{x} \equiv_1 \mathbf{y}$ et $w = a_1 \dots a_n \in A$, on a $\mathbf{x} + \overline{a_1 \dots a_i} \equiv_1 \mathbf{y} + \overline{a_1 \dots a_i}$ par récurrence sur $1 \leqslant i \leqslant n$, d'où $\mathbf{x} + \overline{w} \equiv_1 \mathbf{y} + \overline{w}$. Ainsi, $\equiv_1 \subseteq \equiv_S$, et $\equiv_S$ est bien la plus grande congruence sur S. □

4.3 Borne sur la décroissance

Pour obtenir un nombre fini de classes d'équivalence pour $\equiv_S$, on cherche une borne à partir de laquelle les configurations accessibles sont indiscernables. Comme la seule règle restreignant les actions franchissables est un test de positivité, on va exiger que les configurations ne puissent pas trop décroître.

Ginzburg et Yoeli proposent une caractérisation au travers des deux lemmes suivants :

Énoncé ([2] Lemme 1)**.** Supposons que dans un VAS $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$, $n \leqslant d$ coordonnées (disons les n premières) soient non-bornées. Supposons aussi qu'il existe n entiers positifs $k_1, k_2, \dots, k_n$ tels que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$, tout $w \in A^*$ et tout $i = 1, 2, \dots, n$, $(\mathbf{x} + \overline{w}) \in \mathcal{R}(S)$ implique $\mathbf{x}(i) - (\mathbf{x} + \overline{w})(i) \leqslant k_i$. Alors $\mathcal{R}(S)/\equiv_{\text{GY}}$ est fini.

Ce résultat est correct, et nous l'adapterons facilement à la relation $\equiv_S$ en modifiant la propriété requise en conséquence. Notons qu'il n'est pas nécessaire de prendre des valeurs différentes pour les k_i, il est tout à fait possible de considérer leur maximum.

Énoncé ([2] Lemme 2)**.** Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS, et supposons qu'il existe une coordonnée non-bornée j telle que pour tout $k \geqslant 0$, il existe une configuration $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(S)$ et un mot $w \in A^*$ tels que $(\mathbf{x} + \overline{w}) \in \mathcal{R}(S)$ et $\mathbf{x}(j) - (\mathbf{x} + \overline{w})(j) > k$. Alors l'ensemble $\mathcal{R}(S)/\equiv_{\text{GY}}$ est infini.

Cette fois, la preuve donnée comporte une erreur de même nature que précédemment : Il est affirmé que si $\mathbf{x} + \overline{w} \in \mathcal{R}S$, alors toutes les étapes intermédiaires sont accessibles, ce qui n'est pas forcément vrai. Le résultat semble cependant vrai (à vérifier), mais n'apporte pas la caractérisation souhaitée.

Donnons maintenant une caractérisation similaire pour la relation $\equiv_S$. La preuve suit les idées de Ginzburg et Yoeli [2] en effectuant les modifications nécessaires.

Théorème 12. Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS. Alors $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, \big(\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{*}_S \mathbf{x} \xrightarrow{*}_S \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \geqslant \mathbf{x} - \mathbf{k}\big) \tag{1}$$

À modifier

Démonstration. Commençons par montrer le sens $\big(\,(1) \Rightarrow \mathcal{L}(S)$ rationnel$\,\big)$. Soit S un VAS vérifiant la propriété (1) pour un $k \in \mathbb{N}$.

Si pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S)$, on a $\mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)$ ou $\big(\mathbf{x}(i) \geqslant k$ et $\mathbf{y}(i) \geqslant k\big)$ pour toute coordonnée $i \in \{1, \dots, d\}$, alors $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$. En effet, on a $\mathbf{x} + \overline{w} \geqslant \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} + \overline{w} \geqslant \mathbf{0}$ pour tout $w \in A^*$, puisque les coordonnées qui diffèrent entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ne peuvent devenir négatives.

Ainsi, $\equiv_S$ admet au plus $(k+1)^d$ classes d'équivalences, donc $\mathcal{L}(S)$ est rationnel (théorème 7).

Prouvons maintenant $\big(\mathcal{L}(S)$ rationnel $\Rightarrow (1)\,\big)$, c'est-à-dire si S ne vérifie pas la propriété (1), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une configuration accessible $\mathbf{x}$, un mot $w \in \mathcal{L}(A, \mathbf{x})$ et une coordonnée $j \in \{1, \dots, d\}$ tels que $(\mathbf{x} + \overline{w})(j) \leqslant \mathbf{x}(j) - k$.

On note $\mathbf{x_p} := \mathbf{x} + \overline{a_1 \cdots a_p} \in \mathcal{R}(S)$ les différentes configurations obtenues en lisant $w = a_1 \cdots a_n$. On a alors $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} + \overline{w}$.

Notons $\xi = \max\{-\overline{a}(j) \mid a \in A\} > 0$ la valeur de la plus grande diminution en coordonnée j possible par une action. Alors, au moins k/ξ configurations $\mathbf{x}_p$ voient leur coordonnée j décroître, et l'on a une sous-séquence d'extractrice φ vérifiant $\mathbf{x}_{\varphi(0)}(j) > \mathbf{x}_{\varphi(1)}(j) > \dots > \mathbf{x}_{\varphi(m)}(j)$ où $m \geqslant k/\xi$.

Ces configurations ne sont pas équivalentes pour $\equiv_S$: En effet, si l'on avait $\mathbf{x}_{\varphi(p)} \equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(q)}$ avec $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$, en notant $u = a_{\varphi(p)+1} \cdots a_{\varphi(q)}$, on aurait $\mathbf{x}_{\varphi(p)} \equiv_S (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u})$, d'où $\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^r} \equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^{r+1}}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ (en procédant par récurrence sur r avec la proposition 8).

Or $\overline{u^r}(j) = r \times \overline{u}(j) = r \times (\mathbf{x}_{\varphi(q)}(j) - \mathbf{x}_{\varphi(p)}(j)) < r$, ce qui prouve que $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^r})(j) < 0$ à partir d'un certain $r \in \mathbb{N}$, et donc $\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^r} \not\equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(p)}$, d'où une contradiction.

On conclut qu'il existe au moins k/ξ classes d'équivalences pour $\equiv_S$ (et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$), ainsi $\mathcal{R}(S)/\equiv_S$ est infini. □

5 Décider la caractérisation

La procédure de décision nécessite de connaître deux choses :

1. D'abord, la liste des éléments maximaux de l'arbre de associé au VAS,
2. Ensuite, une procédure pour décider si les configurations accessibles d'un VAS sont bornés.

Définition 13. Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un d-VAS. Pour tout élément maximal $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\omega$ de l'arbre de couverture, notons $I_\mathbf{m} := \{j \mid \mathbf{m}(j) \neq \omega\}$ l'ensemble des coordonnées bornées pour les configurations accessibles en partant en dessous de $\mathbf{m}$. On écrit $I_\mathbf{m} = \{j_1, \dots, j_p\}$. Pour tout $i \notin I_\mathbf{m}$, on définit un $(p+1)$-VAS $S_{(\mathbf{m},i)} = (A_{(\mathbf{m},i)}, \mathbf{x}_{(\mathbf{m},i)})$ en posant $A_{(\mathbf{m},i)} := \{a(\mathbf{m}, i) \mid a \in A\}$ avec $\overline{a(\mathbf{m}, i)} := (a(j_1), \dots, a(j_p), -a(i))$, et $\mathbf{x}_{(\mathbf{m},i)} := (\mathbf{m}(j_1), \dots, \mathbf{m}(j_p), 0)$.

On regarde ainsi le comportement de chaque coordonnée non-bornée indépendamment des autres. Le théorème suivant est alors obtenu :

Théorème 14. Soit $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un d-VAS. Alors S satisfait la caractérisation (1) si et seulement si tous les VAS $S_{(\mathbf{m},i)}$ définis ci-dessus sont bornés pour tout élément maximal $\mathbf{m}$ et tout $i \notin I_\mathbf{m}$.

6 Bornes

Détaillons maintenant plusieurs propriétés de bornes sur les coordonnées des vecteurs configurations. On regarde $\{1, \ldots, d\}$ l'ensemble des indices des vecteurs codant les configurations d'un VAS $S = (A, \mathbf{x}_{\text{init}})$. On peut voir ces coordonnées comme des emplacements accueillant un certain nombre de jetons, qui sont ajoutés ou retirés lors du déclenchement d'une action (lien avec les réseaux de Petri).

Soit $I \subseteq \{1, \ldots, d\}$ un sous-ensemble d'indices. On dira que

— I est *borné* pour $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ lorsqu'il existe toujours une coordonnée d'indice dans I qui soit bornée pour toute configuration accessible depuis $\mathbf{x}$:

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S, \mathbf{x}), \exists i \in I, \mathbf{y}(i) \leqslant k$$

— I est *uniformément borné* pour $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ lorsque toutes les coordonnées d'indice dans I sont bornées pour toute configuration accessible depuis $\mathbf{x}$:

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S, \mathbf{x}), \forall i \in I, \mathbf{y}(i) \leqslant k$$

— I est *borné inférieurement* pour $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ lorsqu'au moins une coordonnée dans I ne diminue pas plus qu'une certaine borne (même en augmentant les ressources initiales) :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S, \mathbf{x} + n \cdot \mathbb{1}_I), \exists i \in I, \mathbf{y}(i) \geqslant \mathbf{x}(i) + n - k$$

— I est *uniformément borné inférieurement* pour $\mathbf{u} \in \mathbb{N}_\omega^d$ lorsque toutes les coordonnées de I ne décroissent pas plus d'une certaine valeur :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{R}(S, \mathbf{x} + n \cdot \mathbb{1}_I), \forall i \in I, \mathbf{y}(i) \geqslant \mathbf{x}(i) + n - k$$

7 Commentaires

biblio à commencer
vérifier qu'on peut énoncer Vidal-Naquet sur le graphe de couverture minimal défini par le graphe de Karp-Miller dans lequel on a gardé que les marquages maximaux.
vérifier que ce nouveau graphe peut être obtenu à partir de Clover en ajoutant les transitions possibles (prolongées par continuité sur $\mathbb{N}^d$). Vérifier qu'il ne manque pas de transitions utiles.

Références

[1] M. O. Rabin and D. Scott. Finite Automata and Their Decision Problems. *IBM Journal of Research and Development*, vol. 3, pages 114-125, 1959.

[2] A. Ginzburg and M. Yoeli. Vector Addition Systems and Regular Languages. *Journal of Computer and System Science* 20, pages 277-284, 1980.

[3] R. Valk and G. Vidal-Naquet. Petri Nets and Regular Languages. *Journal of Computer and System Science* 23, pages 299-325, 1981.