

# Décidabilité de la rationalité pour les VAS

Lucas BUERI, encadré par Alain FINKEL, au LMF

Stage M2 du 22 mars au 30 juillet 2021

## 1 Introduction

### Le contexte général

L'idée des systèmes de transitions est de modéliser une situation par un marquage, un état global du système. Cet état courant (appelé configuration) varie alors en effectuant des actions. Chaque action va, si elle est exécutable, modifier les paramètres globaux du système.

On s'intéressera ici plus précisément aux systèmes d'addition de vecteurs (VAS) et aux réseaux de Petri (qui est un modèle équivalent). Dans ces deux modèles, une contrainte supplémentaire a été ajoutée au système : une notion de ressources, nécessaires pour effectuer certaines actions. Ainsi, les actions des réseaux de Petri exigent d'avoir suffisamment de jetons dans une place. Dans les VAS, ce sont les coordonnées des vecteurs qui doivent être suffisamment importantes.

Plus que l'effet des actions sur le système, c'est le respect des contraintes qui est modélisé ici. C'est pourquoi le lien de ces systèmes avec les langages formels est très fort, à travers l'étude du langage des séquences d'actions réalisables.

Les VAS et les réseaux de Petri sont difficiles à analyser car de nombreux problèmes y sont indécidables (comme l'inclusion des ensembles d'accessibilité ou l'inclusion des langages de deux VAS) et les problèmes décidables ont souvent une complexité élevée. Par exemple, l'accessibilité d'un état de contrôle (et de nombreux problèmes de model-checking qui s'y réduisent) est EXPSPACE-complet tandis que l'accessibilité d'une configuration est Ackermann-complet [6, 5].

Savoir si le langage d'un VAS est rationnel est important car dans ce cas, on peut effectivement construire un automate fini équivalent (la taille de celui-ci peut atteindre Ackermann [8]) et en conséquence, certains problèmes indécidables pour les VAS deviennent décidables pour les VAS rationnels (comme l'inclusion des langages de deux VAS étiquetés sur un même alphabet) et des problèmes décidables ont une complexité moindre. La rationalité du langage d'un VAS avec configurations finales, étiqueté même sans le mot vide, ainsi que l'universalité sont indécidables [4]. On considérera donc seulement les langages de traces (toutes les configurations sont finales) de VAS étiquetés injectivement et on dira qu'un VAS est rationnel quand son langage de traces est rationnel.

On sait depuis 1977, par deux énoncés différents, de Valk et Vidal-Naquet [8, 10] et de Yoeli et Ginzbourg [4], que le problème de la rationalité du langage des traces d'un VAS étiqueté de façon injective est décidable [4, 8]. Yoeli et Ginzbourg réduisent la rationalité d'un VAS  $S$  au fait qu'un nombre fini de VAS, construits à partir de  $Clover(S)$ , sont bornés (Théorème 2, [4]). Valk et Vidal-Naquet ont montré (Théorème 5, [8]) qu'un réseau de Petri  $S$  n'est pas rationnel s'il existe un circuit élémentaire, étiqueté par une séquence à effet strictement négatif sur au moins une coordonnée contenant un  $\omega$ , dans le graphe de couverture (ou de Karp-Miller) de  $S$ . Cet énoncé demande la construction du graphe de Karp-Miller mais nous verrons qu'on peut raisonner seulement sur  $Clover$  qui peut être beaucoup plus petit que le graphe de Karp-Miller. On sait aussi, par deux preuves différentes de Blockelet et Schmitz [1], et de Demri [2], que la complexité de la rationalité est EXPSPACE-complet.

Un autre problème de rationalité a été évoqué dans [8], à savoir de décider si un VAS est rationnel pour *toute* configuration initiale (problème de la *rationalité structurelle*). Il n'est pas évident que l'algorithme implicite demande de décider l'accessibilité car il s'agit de prouver l'existence d'une séquence de marquages accessibles mais pas de prouver l'accessibilité de deux marquages donnés.

## Le problème étudié

L'idée initiale du stage était d'étendre la décidabilité du problème de rationalité sur les VAS à d'autres systèmes. Les VAS sont en effet une sous-classe des systèmes de transition bien-structurés (WSTS). Comme la rationalité est indécidable sur les WSTS, nous cherchions une classe de systèmes intermédiaire parmi quelques extensions récentes intéressantes (comme les WSTS affines).

Cependant, lors de notre tour d'horizon des VAS, plusieurs autres problèmes ont attiré notre attention. Il nous a donc paru utile de développer ces problèmes, parmi lesquels des études de complexité, des preuves à détailler et des propriétés nouvelles. En plus de nous faire progresser vers l'objectif initial, ces problèmes ont permis de mieux comprendre les VAS et de donner de nouvelles pistes de réflexion.

## La contribution proposée

- Nous montrons que la preuve du (Théorème 2, [4]) est techniquement fautive bien qu'elle contienne les bonnes idées ; les auteurs ont considéré une relation d'équivalence  $\equiv_{YG}$  qui ne satisfait pas la propriété :  $S$  est rationnel ssi le quotient  $Reach(S)/\equiv_{YG}$  est fini. Nous introduisons une autre relation d'équivalence  $\equiv_S$  telle que :  $S$  est rationnel ssi le quotient  $Reach(S)/\equiv_S$  est fini.
- Le problème de la rationalité structurelle est énoncé décidable ([8], Théorème 6) mais la partie non triviale de la preuve est seulement évoquée informellement en une phrase. Nous donnons une preuve complète que ce problème est bien décidable. Nous reformulons la caractérisation de non-rationalité jusqu'à obtenir un problème NP-complet. (la complexité du problème de la rationalité structurelle semble n'avoir jamais été étudiée).
- On étudie l'ensemble  $R(S)$  des configurations rationnelles d'un VAS  $S$  (une configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$  est *rationnelle pour  $S$*  si  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  est rationnel) et on montre que  $R(S)$  est un ensemble clos par le bas. On cherche alors, en utilisant un résultat de Valk & Jantzen [9], à calculer une base finie  $Y \subseteq \mathbb{N}^d$  du complémentaire (clos par le haut) de  $R(S)$  et donc obtenir aussi un ensemble fini  $Z \subseteq \mathbb{N}_\omega^d$  qui représente cet ensemble clos par le bas.

## Les arguments en faveur de sa validité

Les notions de base des VAS ont été étudiées par plusieurs chercheurs, et plusieurs papiers valident les propriétés connus utilisés dans ce rapport. Quant aux résultats obtenus, qu'ils soient nouveaux ou précisent un travail déjà existant, ils sont intégralement démontrés.

Les nombreuses connaissances sur les langages rationnels permettent de décider plus rapidement les problèmes usuels lorsque les VAS sont rationnels (pour du model-checking par exemple). Cela justifie l'intérêt des résultats mis en évidence, ainsi que les pistes de recherche explorées.

Malheureusement, la preuve de calculabilité de l'ensemble des configurations rationnelles reste encore incomplète. Les différentes idées exploitées sont néanmoins prometteuses et à poursuivre.

## Le bilan et les perspectives

Si la preuve de décidabilité de la rationalité (classique) dans les VAS ne vient que reformuler les démonstrations existantes, les outils utilisés (caractérisations et congruences) permettent de mieux comprendre le problème et donne des idées pour les autres résultats.

La rationalité structurelle propose quant à elle un problème de rationalité alternatif avec une complexité moindre. En effet, alors que la rationalité classique est connue être Ackermann-complet pour les VAS, nous avons pu montrer que la rationalité structurelle est un problème dans la classe NP.

Enfin, les résultats de monotonie des configurations rationnelles apportent de nouveaux outils pour explorer la rationalité. Notamment, les propriétés mises en évidence permettent de poursuivre la classification des VAS rationnels. Elles apportent également de nouveaux éléments pour étendre le problème de rationalité à des systèmes de transitions plus développés.

Dans la partie 2, nous donnons les définitions de base nécessaires pour la suite du rapport. La partie 3 propose une preuve de la décidabilité de la rationalité des VAS, en s'appuyant sur une caractérisation (théorème 18) réutilisée par la suite. La partie 4 détaille la rationalité structurelle et apporte une preuve de complexité dans NP. Enfin, la partie 5 expose la notion de configuration rationnelle ainsi que les résultats intermédiaires rattachés.

## 2 Systèmes d'addition de vecteurs (VAS)

### 2.1 La structure

Un *système d'addition de vecteurs de dimension*  $d \in \mathbb{N}$  ( $d$ -VAS)  $S = (A, \lambda)$  est la donnée d'un alphabet fini  $A$  muni d'un étiquetage  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{Z}^d$  injectif. À chaque *action*  $a \in A$  est ainsi associé un unique vecteur  $\lambda(a) \in \mathbb{Z}^d$ , de telle manière à ce que deux actions ne soient pas associées au même vecteur. Pour des raisons de lisibilité, on notera  $\bar{a} = \lambda(a)$ .

Les *configurations* de  $S$  sont alors les vecteurs de  $\mathbb{N}^d$  (à coordonnées positives), et chaque action  $a \in A$  agit sur  $\mathbb{N}^d$  en additionnant à la configuration courante le vecteur  $\bar{a}$  associé. On a alors une transition entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  étiquetée par l'action  $a$  lorsque  $\mathbf{x} + \bar{a} = \mathbf{y}$ .

De manière équivalente, on dira que l'action  $a \in A$  est *franchissable* à partir de la configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$  lorsque  $\mathbf{x} + \bar{a} \geq \mathbf{0}$ , et son déclenchement aboutit à la configuration  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{a}$  à travers la transition  $(\mathbf{x}, a, \mathbf{y}) \in \mathbb{N}^d \times A \times \mathbb{N}^d$ . On notera  $\mathbf{x} \xrightarrow{a}_S \mathbf{y}$  lorsqu'un tel déclenchement est possible (ou simplement  $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$  s'il n'y a pas ambiguïté sur  $S$ ).

Par la suite, on notera  $I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, d\}$  l'ensemble des coordonnées pour les configurations.

Lorsqu'une séquence d'actions  $w = a_1 \cdots a_k \in A^*$  permet d'aller de  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{y}$  par la séquence de transition  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}$  (où  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{N}^d$  et  $\mathbf{x}_{i-1} + \bar{a}_i = \mathbf{x}_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ ), on dit que  $w$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ , et qu'on a une *exécution*  $\rho : \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y}$ .  $\mathbf{y}$  est alors dit accessible à partir de  $\mathbf{x}$ .

De plus, en notant  $\bar{w} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k \bar{a}_i$  le vecteur associé à  $w$ , on obtient  $\mathbf{x} + \bar{w} = \mathbf{y}$ . Attention, cette égalité peut-être vérifiée même si  $w$  n'est pas franchissable.

Nous allons étudier deux ensembles naturellement associés à un VAS  $S = (A, \lambda)$  :

1.  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ w \in A^* \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$  qui est le *langage* des séquences d'actions franchissables à partir de la configuration  $\mathbf{x}$ ,
2.  $\text{Reach}(S, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \exists w \in A^*, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$  qui est l'ensemble des *configurations accessibles* à partir de  $\mathbf{x}$ .

On choisira souvent une configuration *initiale*  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ , qu'on pourra ajouter à la définition du VAS. On pourra alors regarder  $\mathcal{L}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  le langage du VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ , et  $\text{Reach}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Reach}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  son ensemble d'accessibilité.

**Définition 1.** Un VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  est *rationnel* lorsque  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel sur  $A^*$ .

Enfin, on dénotera par *Rat* l'ensemble des langages rationnels (sur un alphabet fini).

### 2.2 Omega-configurations

Avant d'étudier le langage des séquences d'actions franchissables  $\mathcal{L}(S)$ , on va s'intéresser aux configurations accessibles  $\text{Reach}(S)$ . Comme c'est un ensemble généralement infini, il nous faut un moyen de représenter et d'exploiter cet ensemble d'accessibilité. Pour se faire, on commence par rappeler la notion d'idéal :

**Définition 2.** Soit  $(X, \leq)$  un ensemble ordonné et  $E \subseteq X$  un sous-ensemble de  $E$ .

- $E$  est dit *dirigé* lorsque pour tous  $x, y \in E$  il existe un  $z \in E$  vérifiant  $x \leq z$  et  $y \leq z$ .
- $E$  est dit *clos par le bas* lorsqu'il est égal à sa clôture par le bas  $\downarrow E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists y \in E, x \leq y\}$ .
- De la même façon,  $E$  est dit *clos par le haut* lorsqu'il est égal à sa clôture par le haut  $\uparrow E \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists y \in E, x \geq y\}$ .
- Enfin,  $E$  est un *idéal* s'il est dirigé et clos par le bas.

$(\mathbb{N}^d, \leq)$  a la particularité d'être un bel ordre, ce qui permet d'obtenir des représentations finies de ces sous-ensembles. Les idéaux de  $\mathbb{N}^d$  peuvent donc se voir comme des éléments de  $\mathbb{N}_\omega^d$ , obtenu en étendant  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{N}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{\omega\}$  de façon naturelle. Ainsi, un élément  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_\omega^d$  représente l'idéal  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{m}\}$ . On a alors le résultat suivant :

**Proposition 3.** Soit  $E \subseteq \mathbb{N}^d$  clos par le bas. Alors  $E$  est une union finie d'idéaux de  $\mathbb{N}^d$ .

Par conséquent, tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}^d$  clos par le bas peut être représenté par un ensemble fini d'éléments de  $\mathbb{N}_\omega^d$ . Pour les sous-ensembles  $E$  de  $\mathbb{N}^d$  clos par le haut, on va regarder ses éléments minimaux. Notons  $\text{Min}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E \mid \forall y < x, y \notin E\}$ .

**Proposition 4.** Soit  $E \subseteq \mathbb{N}^d$  clos par le haut. Alors  $\text{Min}(E)$  est fini et  $\uparrow \text{Min}(E) = E$ .

Pour poursuivre cette idée, on étend les configurations de  $\mathbb{N}^d$  à des  $\omega$ -configurations dans  $\mathbb{N}_\omega^d$ . Les omegas dans une coordonnée signifie que l'on a accès à autant de matériel que nécessaire, et qu'il n'y a plus à se préoccuper de franchissement pour cette coordonnée. Détaillons alors le fonctionnement du VAS sur ces  $\omega$ -configurations.

Pour une  $\omega$ -configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ , on notera  $J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}} = \{i \in I \mid \mathbf{x}(i) \text{ est fini}\}$  l'ensemble des coordonnées bornées et  $J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}} = \{i \in I \mid \mathbf{x}(i) = \omega\}$  l'ensemble des coordonnées non-bornées de  $\mathbf{x}$ .

**Définition 5.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un VAS,  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$  une  $\omega$ -configuration et  $u \in A^*$  une séquence d'actions. On dit que  $u$  est *franchissable* à partir de  $\mathbf{x}$  lorsque pour tout préfixe  $v$  de  $u$  et pour toute coordonnée  $i \in J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}}$ , on a  $\mathbf{x}(i) + \bar{v}(i) \geq 0$ .

La  $\omega$ -configuration obtenue en appliquant  $u$  à  $\mathbf{x}$  est alors  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{u}$ . Ainsi,  $J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}} = J_{\mathbf{y}}^{\text{inf}}$ .

Cette notion de franchissement ne modifie pas les coordonnées valant  $\omega$ , et agit sans en tenir compte. Dans le cas où  $\mathbf{x}$  a toutes ses coordonnées finies, on retrouve le franchissement classique dans  $\mathbb{N}^d$ .

Maintenant, pour permettre de générer des  $\omega$  depuis une coordonnée finie, on va exiger de pouvoir augmenter cette coordonnée autant que nécessaire.

**Définition 6.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un VAS et  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}_\omega^d$  deux  $\omega$ -configurations. On dit que  $\mathbf{y}$  est  *$\omega$ -accessible* à partir de  $\mathbf{x}$  lorsque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un mot  $u_k \in A^*$  franchissable à partir de  $\mathbf{x}$  tel que

1. pour tout  $i \in J_{\mathbf{y}}^{\text{fin}}$ , on a  $\mathbf{x}(i) + \bar{u}_k(i) = \mathbf{y}(i)$
2. pour tout  $i \in J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}} \cap J_{\mathbf{y}}^{\text{fin}}$ , on a  $\mathbf{x}(i) + \bar{u}_k(i) \geq k$

Ce processus correspond aux transitions du graphe de couverture que l'on va présenter ci-dessous. On le retrouve sous le nom d'*accélération* dans [3], et de *coordonnées non-bornées avec contexte*  $\mathbf{x}$  dans [8]. On constate que cette notion correspond à l'accessibilité classique lorsque  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des configurations (finies) de  $\mathbb{N}^d$ .

## 2.3 Clover et le graphe de couverture

On introduit l'ensemble de couverture  $\mathcal{C}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \downarrow \text{Reach}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  d'un VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ . Il est clos par le bas dans  $(\mathbb{N}^d, \leq)$ , donc il se décompose en une union finie d'idéaux.

**Définition 7.** Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un  $d$ -VAS. On définit  $\text{Clover}(S) \subseteq \mathbb{N}_\omega^d$  comme l'ensemble des idéaux maximaux inclus dans  $\mathcal{C}(S)$ . C'est aussi l'unique ensemble, de taille minimale, d'idéaux dont l'union représente  $\mathcal{C}(S)$ .

L'ensemble fini *Clover* permet ainsi en utilisant les idéaux de représenter les configurations *recouvrables* (c'est-à-dire celles en dessous d'une configuration accessible). La couverture remplace alors l'accessibilité, ce qui reste satisfaisant pour notre étude de  $\mathcal{L}(S)$  puisque toute action  $a \in A$  franchissable sur une configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$  reste franchissable sur une configuration  $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$  plus grande.

On pourra donc être intéressé par un *graphe de couverture* (ou graphe de Karp-Miller) du VAS  $S$ , qui a pour sommets des idéaux de  $\mathbb{N}^d$  (vus dans  $\mathbb{N}_\omega^d$ ) et pour arêtes des transitions du VAS, étiquetés par une action de  $A$ . On rappelle sa définition et ses propriétés de base dans la suite de cette partie.

**Définition 8.** Soit  $S$  un VAS. On construit l'*arbre de couverture* de  $S$  de la manière suivante : On part d'un nœud racine étiqueté par  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}_\omega^d$  (qui représente l'idéal  $\downarrow \mathbf{x}_{\text{init}}$ ). Ensuite, pour chaque nœud  $s$  étiqueté par  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$  et chaque action  $a \in A$  franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ , notons  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{a}$  la  $\omega$ -configuration atteinte en lisant  $a$  depuis  $\mathbf{x}$ .

- Si  $s$  a un ancêtre étiqueté par  $\mathbf{y}$ , alors on crée une arête étiquetée par  $a$  de  $s$  vers une nouvelle feuille étiquetée par  $\mathbf{y}$  ;
- Si  $s$  a un ancêtre étiqueté par une  $\omega$ -configuration  $\mathbf{z} > \mathbf{y}$ , alors on crée une arête étiquetée par  $a$  de  $s$  vers un nouveau nœud  $s'$  étiqueté par  $\mathbf{y}'$ , défini par  $\mathbf{y}'(i) = \mathbf{y}(i)$  pour les  $1 \leq i \leq d$  tels que  $\mathbf{y}(i) = \mathbf{z}(i)$ , et  $\mathbf{y}'(i) = \omega$  si  $\mathbf{y}(i) > \mathbf{z}(i)$  ;
- Sinon, on crée simplement une arête étiquetée par  $a$  de  $s$  vers un nouveau nœud  $s'$  étiqueté par  $\mathbf{y}$ .

On continue ensuite la construction en réappliquant le processus sur les nœuds ainsi créés.

**Théorème 9.** Soit  $S$  un VAS. Alors l'arbre de couverture de  $S$  (tel que construit ci-dessus) est fini.

**Définition 10.** À partir de l'arbre de couverture d'un VAS  $S$ , on construit le *graphe de couverture* de  $S$  en quotientant les sommets de manière à confondre ceux ayant la même étiquette de  $\mathbb{N}_\omega$ .

Ainsi, à chaque fois que le franchissement d'un mot aboutit à un sommet dont l'étiquette est déjà visitée, on obtient un cycle dans le graphe.

**Proposition 11.** Dans le graphe de couverture d'un VAS  $S$ , les étiquettes des sommets donnent une liste d'idéaux dont l'union correspond exactement aux configurations de  $\mathcal{C}(S)$ . Ce graphe étiqueté peut alors se voir comme un automate fini dont le langage reconnu est  $\mathcal{L}(S)$  et dont les idéaux étiquetant les sommets (ou états lorsque vu comme un automate) contiennent les configurations atteintes sur ce sommet.

### 3 Une preuve de décidabilité de la rationalité des VAS

La preuve de décidabilité se divise en deux étapes. Tout d'abord, on va donner une caractérisation mathématique équivalente à la rationalité. On montrera ainsi qu'un VAS est rationnel si et seulement s'il existe une borne  $k \in \mathbb{N}$  telle que si on peut accéder à la configuration  $\mathbf{x}$ , puis à  $\mathbf{y}$ , alors  $\mathbf{y}$  reste au dessus de  $\mathbf{x} - \mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}$  désignera le vecteur  $(k, k, \dots, k) \in \mathbb{N}^d$ ).

#### 3.1 Une nouvelle relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^d$

**Définition 12.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un VAS. On introduit la relation  $\equiv_S$  sur les configurations en posant pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$  :

$$\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y} \text{ ssi } \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$$

Constatons déjà que cette nouvelle relation est incluse dans celle de Ginzburg et Yoeli [4], dont on redonne la définition ci-dessous :

**Définition 13** ([4] section 3). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  est définie pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Reach}(S)$  par :  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$  ssi  $\forall w \in A^*, (\mathbf{x} + \overline{w} \in \text{Reach}(S) \Leftrightarrow \mathbf{y} + \overline{w} \in \text{Reach}(S))$

**Proposition 14.** Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$ . Si  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$  alors  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ .

*Démonstration.* Supposons  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$  et montrons  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \subseteq \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  par récurrence sur la longueur des mots. Soit  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ .

Si  $w = \varepsilon$  est le mot vide,  $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$  assure que  $\varepsilon \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ .

Sinon, on écrit  $w = ua$  avec  $u \in A^*$  et  $a \in A$ .  $u \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  est plus court que  $w$ , donc par hypothèse de récurrence on a également  $u \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ .  $u$  est donc franchissable depuis  $\mathbf{y}$ . Mais  $ua \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ , ce qui assure que  $\mathbf{x} + \overline{ua} \in \text{Reach}(S)$ .

Comme  $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$ , on obtient que  $\mathbf{y} + \overline{ua} \in \text{Reach}(S)$ , aboutissant à  $\mathbf{y} + \overline{ua} \geq \mathbf{0}$ . L'action  $a$  est donc franchissable depuis  $\mathbf{y} + \overline{u}$ . En résumé, on a les transitions valides  $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{x} + \overline{u} \xrightarrow{a}_S \mathbf{x} + \overline{w}$ , d'où  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ .

On conclut enfin que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  par symétrie.  $\square$

Attention, l'inclusion réciproque est fautive, un contre exemple est donnée en annexe (partie 7)

On va établir le lien avec la relation de Nérode  $\sim_L$  associée à un langage  $L \subseteq A^*$ . Pour tout  $u, v \in A^*$ , on définit :

$$u \sim_L v \text{ ssi } \forall w \in A^*, uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$$

On sait que  $\sim_L$  est une relation d'équivalence invariante par composition à droite et qu'un langage  $L \subseteq A^*$  est rationnel si et seulement si  $A^*/\sim_L$  est fini ([7], Théorème 2).

La congruence de Nérode concerne donc les mots plutôt que les configurations, mais est liée à l'équivalence  $\equiv_S$  sur les VAS de la manière suivante :

**Lemme 15.** Soient  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $u, v \in \mathcal{L}(S)$ . On a  $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$  si et seulement si  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{v}$ .

*Démonstration.* Si  $u \in \mathcal{L}(S)$ , alors pour tout mot  $w \in A^*$ , on a l'équivalence :

$$uw \in \mathcal{L}(S) \Leftrightarrow w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u})$$

On en déduit immédiatement le résultat en reprenant les définitions de chaque relation.  $\square$

**Remarque.** La relation de Nérode ne s'intéresse qu'aux mots du langage, et  $\{w \in A^* \mid w \notin \mathcal{L}(S)\}$  forme une unique classe d'équivalence pour  $\sim_{\mathcal{L}(S)}$ . Ainsi, le lemme 15 devient faux dès lors que  $u, v \notin \mathcal{L}(S)$ , puisque l'on a toujours  $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$  dans ce cas sans que  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{v}$  ne soit nécessairement vrai.

**Théorème 16.** Pour un VAS  $S$ ,  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\text{Reach}(S)/\equiv_S$  est fini.

*Démonstration.* On a les équivalences suivantes :

$\mathcal{L}(S)$  est rationnel ssi  $A^*/\sim_{\mathcal{L}(S)}$  est fini (propriété de la relation de Nérode)

ssi  $\mathcal{L}(S)/\sim_{\mathcal{L}(S)}$  est fini (car  $\sim_{\mathcal{L}(S)}$  admet une seule classe d'équivalence sur  $A^* \setminus \mathcal{L}(S)$ )

ssi  $\text{Reach}(S)/\equiv_S$  est fini (par le Lemme 15).  $\square$

Enfin, on montre que la relation d'équivalence  $\equiv_S$  est compatible/monotone avec les actions :

**Proposition 17.** Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$ ,  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$  implique  $\forall a \in A, \mathbf{x} + \bar{a} \equiv_S \mathbf{y} + \bar{a}$ .

### 3.2 Borne (décidable) sur la décroissance

Pour obtenir un nombre fini de classes d'équivalence pour  $\equiv_S$ , on cherche les configurations qui sont indiscernables pour le VAS. Comme seul le test de positivité permet d'identifier les actions franchissables, il va falloir qu'au delà d'une certaine valeur, les coordonnées ne peuvent plus décroître jusqu'à zéro.

Le théorème ci-dessous donne ainsi une caractérisation des VAS à langage rationnel en bornant la décroissance des coordonnées. Il correspond au théorème 3 de [8] et corrige les lemmes 1 et 2 de [4].

**Théorème 18** ([8] théorème 3, [4]). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. Alors  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, (\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{*}_S \mathbf{x} \xrightarrow{*}_S \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \geq \mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad (1)$$

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $S$  satisfait (1)  $\Rightarrow \mathcal{L}(S)$  rationnel. Soit  $S$  un VAS vérifiant la propriété (1) pour un  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Reach}(S)$ . Supposons que  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont indiscernables pour les petites valeurs, c'est-à-dire que pour toute coordonnée  $i \in I$ , on a soit  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)$ , soit  $(\mathbf{x}(i) \geq k \text{ et } \mathbf{y}(i) \geq k)$ . Alors  $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ . En effet, on a  $\mathbf{x} + \bar{w} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} + \bar{w} \geq \mathbf{0}$  pour tout  $w \in A^*$ , puisque les coordonnées qui diffèrent entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne peuvent devenir négatives. Ainsi,  $\equiv_S$  admet au plus  $(k+1)^d$  classes d'équivalences, donc  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel (Théorème 16).

Prouvons maintenant, par contraposée, la réciproque  $\mathcal{L}(S)$  rationnel  $\Rightarrow S$  vérifie (1). Si  $S$  ne vérifie pas la propriété (1), alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une configuration accessible  $\mathbf{x}$ , un mot  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  et une coordonnée  $i \in I$  tels que  $(\mathbf{x} + \bar{w})(i) \leq \mathbf{x}(i) - k$ .

On note  $\mathbf{x}_p = \mathbf{x} + \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_p \in \text{Reach}(S)$  les différentes configurations obtenues en franchissant  $w = a_1 \cdots a_n$ . On a alors  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_n} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} + \bar{w}$ .

Notons  $\xi = \max \{|\bar{a}(j)| \mid a \in A, j \in I\}$  la valeur de la plus grande variation d'une coordonnée possible par une action. Alors, au moins  $k/\xi$  configurations  $\mathbf{x}_p$  voient leur coordonnée  $i$  décroître, et l'on a une sous-séquence d'extractrice  $\varphi$  vérifiant  $\mathbf{x}_{\varphi(0)}(i) > \mathbf{x}_{\varphi(1)}(i) > \cdots > \mathbf{x}_{\varphi(h)}(i)$  où  $h \geq k/\xi$ .

Ces configurations ne sont pas équivalentes pour  $\equiv_S$  : En effet, si l'on avait  $\mathbf{x}_{\varphi(p)} \equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(q)} = (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u})$  avec  $0 \leq p \leq q \leq h$  et en notant  $u = a_{\varphi(p)+1} \cdots a_{\varphi(q)}$ , alors on aurait  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r) \equiv_S (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^{r+1})$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$  (en procédant par récurrence sur  $r$  avec la Proposition 17).

Or  $\bar{u}^r(i) = r \times \bar{u}(i) = r \times (\mathbf{x}_{\varphi(q)}(i) - \mathbf{x}_{\varphi(p)}(i)) < -r$ , ce qui prouve que  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r)(i) < 0$  à partir d'un certain  $r \in \mathbb{N}$ , et donc  $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \bar{u}^r) \not\equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(p)}$ , d'où une contradiction.

On conclut qu'il existe au moins  $k/\xi$  classes d'équivalences pour  $\equiv_S$  (et ce pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ), ainsi  $\text{Reach}(S)/\equiv_S$  est infini.  $\square$

On conclut cette sous-partie en présentant une transformation de la caractérisation 1, permettant de décider la rationalité des VAS à partir du graphe de couverture.

**Théorème 19** ([8] lemme 3). Soit  $S$  un VAS. Alors  $\mathcal{L}(S)$  n'est pas rationnel si et seulement si il existe un circuit étiqueté par  $v \in A^*$  dans le graphe de couverture partant d'une  $\omega$ -configuration  $\omega$ -accessible maximale  $\mathbf{y}$ , tel que  $\bar{v}(i) < 0$  pour une coordonnée  $i \in J_{\mathbf{y}}^{\text{inf}}$ .

### 3.3 Décider la caractérisation

On présente ici une façon de décider la rationalité des langages de VAS en utilisant le théorème 18. On s'inspire du théorème 2 de [4], en faisant appel à l'ensemble *Clover* plutôt qu'au graphe de couverture.

**Lemme 20** ([4] lemme 3). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons qu'il existe une configuration  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  et un mot  $v \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  franchissable tel que  $\bar{v}(i) < -k$  pour un certain  $i \in I$ . Alors on peut trouver une autre configuration  $\mathbf{y}$  et un autre mot  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  tel que  $\bar{w}(i) < -k$  et  $\bar{u}(i) \leq 0$  pour tout préfixe  $u$  de  $w$ .

*Démonstration.* Notons  $z$  le plus long préfixe de  $v$  tel que  $\bar{z}(i) \geq 0$ . On a alors  $v = zw$ , et le mot  $w$  ainsi obtenu est franchissable à partir de  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{z}$ , et vérifie  $\bar{w}(i) = \bar{v}(i) - \bar{z}(i) \leq \bar{v}(i) \leq k$ . De plus, pour tout préfixe  $u$  de  $w$ , on a  $\bar{u}(i) = \bar{zu}(i) - \bar{z}(i) \leq \bar{zu}(i) < 0$  puisque  $zu$  est un préfixe de  $v$  plus long que  $z$ .  $\square$

**Définition 21.** Soient  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS et  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$ . Regardons  $J_{\mathbf{m}}^{\text{fin}} = \{j \mid \mathbf{m}(j) \neq \omega\}$  l'ensemble des coordonnées bornées pour les configurations de  $\mathbf{m}$ . On écrit  $J_{\mathbf{m}} = \{j_1, \dots, j_r\}$ .

- Pour tout  $i \in J_{\mathbf{m}}^{\text{inf}}$ , on définit un  $(r+1)$ -VAS que l'on notera  $S_{(\mathbf{m}, i)} = (A, \lambda_{(\mathbf{m}, i)}, \mathbf{x}_{\mathbf{m}})$  en posant
  - $\lambda_{(\mathbf{m}, i)}$  l'étiquetage qui à toute lettre  $a \in A$  associe le vecteur  $(\bar{a}(j_1), \dots, \bar{a}(j_r), -\bar{a}(i))$ ,
  - $\mathbf{x}_{\mathbf{m}} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{m}(j_1), \dots, \mathbf{m}(j_r), 0) \in \mathbb{N}^{r+1}$  la configuration initiale.

On isole ainsi chaque coordonnée de  $J_{\mathbf{m}}^{\text{inf}}$  pour regarder son comportement.

Le théorème suivant est alors obtenu :

**Théorème 22** ([4] théorème 2). Un VAS  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  est rationnel si et seulement si tous les VAS  $S_{(\mathbf{m}, i)}$  sont bornés pour tout  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  et pour tout  $i \in J_{\mathbf{m}}^{\text{inf}}$ .

*Démonstration.* Supposons que l'un des  $S_{(\mathbf{m}, i)}$  ne soit pas borné, et posons  $r = |J_{\mathbf{m}}^{\text{fin}}|$ . La coordonnée  $r+1$  (associée à  $\mathbf{m}(i)$ ) est la seule à pouvoir être non-bornée. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe donc un mot  $w \in \mathcal{L}(S_{(\mathbf{m}, i)})$  vérifiant  $\lambda_{(\mathbf{m}, i)}(w)(r+1) > k$ .

Alors on peut trouver une configuration  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  de  $\mathbf{m}$  telle que  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ . En effet,  $w$  a le même effet sur les coordonnées  $j_p \in J_{\mathbf{m}}^{\text{fin}}$  que sur  $p \leq r$ , puisque pour tout  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  et tout préfixe  $u$  de  $w$ , on a  $(\mathbf{x} + \bar{u})(j_p) = \mathbf{m}(j_p) + \bar{u}(j_p) = \mathbf{x}_{\mathbf{m}}(p) + \lambda_{(\mathbf{m}, i)}(u)(p) \geq 0$ . Les autres coordonnées (non-bornées dans  $\mathbf{m}$ ) peuvent ensuite être choisies aussi grandes que nécessaire pour franchir  $w$ .

Comme  $\bar{w}(i) = -\lambda_{(\mathbf{m}, i)}(w)(r+1) < -k$ , on sait que  $S$  ne vérifie pas (1) pour ce  $k$ , ce qui assure que  $\mathcal{L}(S)$  n'est pas rationnel (par le théorème 18).

On suppose maintenant qu'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  majorant les coordonnées de toutes les configurations accessibles de tous les  $S_{(\mathbf{m}, i)}$ . Par l'absurde, supposons que la propriété (1) n'est pas vérifiée pour ce  $k$ . Par le lemme 20, il existe une coordonnée  $i \leq d$ , une configuration  $\mathbf{y}$  et un mot  $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$  tel que  $\bar{w}(i) < -k$  et  $\bar{u}(i) \leq 0$  pour tout préfixe  $u$  de  $w$ .

Soit  $\mathbf{m} \in \text{Clover}(S)$  un élément maximal contenant  $\mathbf{y}$ . Alors il existe une configuration  $\mathbf{z} \in \mathbf{m}$  vérifiant  $\mathbf{y} \leq \mathbf{z}$ . Dans le VAS  $S_{(\mathbf{m}, i)}$ , le mot  $w$  appartient au langage  $\mathcal{L}(S_{(\mathbf{m}, i)})$  puisque pour tout préfixe  $u$  de  $w$ , on a

- $(\mathbf{x}_{\mathbf{m}} + \lambda_{(\mathbf{m}, i)}(u))(p) = (\mathbf{z} + \bar{u})(j_p) \geq (\mathbf{y} + \bar{u})(j_p) \geq 0$  pour tout  $p$  car  $u$  est franchissable à partir de  $\mathbf{y}$ ,
- $(\mathbf{x}_{\mathbf{m}} + \lambda_{(\mathbf{m}, i)}(u))(r+1) = -\bar{u}(i) \geq 0$  où  $r = |J_{\mathbf{m}}^{\text{fin}}|$ .

Néanmoins, la configuration accessible  $(\mathbf{x}_{\mathbf{m}} + \lambda_{(\mathbf{m}, i)}(w)) \in \text{Reach}(S_{(\mathbf{m}, i)})$  contredit l'hypothèse de borne puisque  $\lambda_{(\mathbf{m}, i)}(w)(r+1) = -\bar{w}(i) > k$ .  $\square$

La procédure de décision induite par le théorème 22 nécessite donc de connaître deux choses :

1.  $\text{Clover}(S)$  c'est-à-dire la liste des idéaux maximaux
2. Une procédure pour décider si un VAS est borné.

## 4 Décidabilité et complexité de la rationalité structurelle

Nous allons montrer qu'on peut décider dans NP si un VAS  $S$  est rationnel pour toute configuration initiale  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ .

**Définition 23.** On dit qu'un VAS  $S$  est *structurellement rationnel* si  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  est rationnel pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ .

Nous allons étudier le problème de décision suivant appelé *rationalité structurelle* :

- Donnée : un  $d$ -VAS  $S = (A, \lambda)$
- Question :  $S$  est-il structurellement rationnel ?

Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$  (pas forcément positifs), on note  $\mathbf{x} \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$  pour  $u \in A^*$  lorsque  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \bar{u}$ . Il s'agit ici d'une simple égalité vectorielle dans  $\mathbb{Z}^d$ , sans notion de franchissement (on pourra parler de  $\mathbb{Z}$ -VAS). On écrira  $\mathbf{x} \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$  quand il existe  $u \in A^*$  tel que  $\mathbf{x} \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$ .

Valk et Vidal-Naquet proposent dans [8] une caractérisation pour la propriété de rationalité structurelle.

**Théorème 24** ([8] théorème 6). Un  $d$ -VAS  $S = (A, \lambda)$  n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{Z}^d$  tels que

1.  $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2$
2. Pour tout  $i \in I$ ,  $\mathbf{x}_1(i) = \mathbf{x}_2(i)$  implique  $\mathbf{x}_3(i) \leq \mathbf{x}_4(i)$ ,
3. Il existe un  $i \in I$  tel que  $\mathbf{x}_3(i) > \mathbf{x}_4(i)$ .
4.  $\mathbf{0} \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_1 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_2 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_3 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_4$ ,

On peut déjà remarquer que le problème d'accessibilité n'est pas nécessaire (évitant ainsi sa complexité Ackermann-dur) puisqu'on évite la notion de franchissement. En effet, on peut augmenter au besoin la configuration initiale pour permettre de franchir les étapes intermédiaires.

Donnons maintenant une version simplifiée de ce résultat qui se débarrasse également des configurations du théorème 24. On donnera une preuve de ce résultat et - mieux - une borne de complexité dans NP. On rappelle les définitions  $J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}} = \{i \in I \mid \mathbf{x}(i) \text{ est fini}\}$  et  $J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}} = \{i \in I \mid \mathbf{x}(i) = \omega\}$  pour une  $\omega$ -configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_{\omega}^d$ .

**Lemme 25.** Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS initialisé et  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_{\omega}^d$  une  $\omega$ -configuration apparaissant dans le graphe de couverture  $G$  de  $S$ . Alors il existe un mot  $u \in A^*$  tel que

1. pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}}$ , on a  $\bar{u}(j) \geq 0$ ,
2. pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}}$ , on a  $\bar{u}(j) \geq 1$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathbf{x}$  étiquette un sommet de  $G$ , il existe un chemin dans  $G$  de la forme  $\mathbf{x}_{\text{init}} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1}_G \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2}_G \dots \xrightarrow{a_n}_G \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$  pour  $w = a_1 a_2 \dots a_n$ .

Les omegas apparaissant dans une de ces  $\omega$ -configurations ne peuvent disparaître au cours de l'exécution. On a donc les inclusions  $\emptyset = J_{\mathbf{x}_0}^{\text{inf}} \subseteq J_{\mathbf{x}_1}^{\text{inf}} \subseteq \dots \subseteq J_{\mathbf{x}_n}^{\text{inf}}$ . Maintenant, pour chaque étape  $1 \leq k \leq n$ , par construction du graphe, il existe un entier  $0 \leq \ell \leq k$  vérifiant :

- pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{fin}}$ , on a  $\mathbf{x}_{\ell}(j) = \mathbf{x}_k(j)$ ,
- pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{inf}} \cap J_{\mathbf{x}_{k-1}}^{\text{fin}}$ , on a  $\mathbf{x}_{\ell}(j) < \mathbf{x}_k(j)$ .

On a donc l'existence d'un mot  $w_k = a_{\ell+1} \dots a_k$  vérifiant  $\bar{w}_k(j) = 0$  pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{fin}}$ , et  $\bar{w}_k(j) > 0$  pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{inf}} \cap J_{\mathbf{x}_{k-1}}^{\text{fin}}$ .

Par récurrence sur  $k \leq n$ , on construit un mot  $u_k$  vérifiant  $\bar{u}_k(j) = 0$  pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{fin}}$ , et  $\bar{u}_k(j) > 0$  pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{inf}}$ . Prendre le mot vide pour  $u_0$  convient puisque  $J_{\mathbf{x}_{\text{init}}}^{\text{inf}} = \emptyset$ .

Soit  $1 \leq k \leq n$ . Si un  $u_{k-1}$  convenable existe, notons  $\delta = -\min \left\{ \bar{w}_k(j) \mid j \in J_{\mathbf{x}_{k-1}}^{\text{inf}} \right\}$  la plus grande valeur négative dans une coordonnée de  $\bar{w}_k$ . Posons ensuite  $u_k = (u_{k-1})^{\delta+1} w_k$ , obtenu en concaténant  $\delta + 1$  fois le mot  $u_{k-1}$  au mot  $w_k$ . On a alors

- pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{fin}}$ ,  $\bar{u}_k(j) = \bar{u}_{k-1}(j) \times (\delta + 1) + \bar{w}_k(j) = 0$  puisque  $J_{\mathbf{x}_{k-1}}^{\text{fin}} \subseteq J_{\mathbf{x}_k}^{\text{fin}}$ ,
- pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}_k}^{\text{inf}}$ ,  $\bar{u}_k(j) = \bar{u}_{k-1}(j) \times (\delta + 1) + \bar{w}_k(j) \geq \delta + 1 - \delta > 0$ .

ce qui conclut l'hérédité de la récurrence.

Ainsi, le mot  $u = u_n$  satisfait le lemme. □



On notera que le mot  $u$  ainsi construit n'est pas forcément franchissable à partir de  $\mathbf{x}_{\text{init}}$ . Néanmoins, la rationalité structurelle permet d'éviter cette contrainte.

**Théorème 26.** Un  $d$ -VAS  $S = (A, \lambda)$  n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe  $u, v \in A^*$  tels que

1.  $\bar{u} > \mathbf{0}$ ,
2. Pour tout  $i \in I$ ,  $\bar{u}(i) = 0$  implique  $\bar{v}(i) \geq 0$ ,
3. Il existe  $i \in I$  tel que  $\bar{v}(i) < 0$ .

**Remarque.** Les caractérisations des théorèmes 24 et 26 sont bien équivalentes :

À partir des configurations  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ , on choisit simplement pour  $u$  le mot permettant d'aller de  $\mathbf{x}_1$  à  $\mathbf{x}_2$ , et pour  $v$  le mot allant de  $\mathbf{x}_3$  à  $\mathbf{x}_4$ .

Dans l'autre sens, avec les mots  $u, v$ , on regarde simplement l'exécution  $\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 \xrightarrow{u} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 \xrightarrow{v} \mathbf{x}_4$ .

Prouvons maintenant le théorème 26. Commençons par le sens direct, et construisons deux mots  $u$  et  $v$  vérifiant les points 1, 2 et 3 lorsque le VAS  $S$  n'est pas structurellement borné.

*Démonstration.* Supposons que  $S$  ne soit pas structurellement rationnel. Il existe donc une configuration initiale  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$  telle que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  n'est pas rationnel. D'après le théorème 18, on sait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe une séquence d'actions franchissable  $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u_k} \mathbf{x}_k \xrightarrow{v_k} \mathbf{y}_k$  et une coordonnée  $i_k \in I$  tels que  $\bar{v}_k(i_k) \leq -k$ .

Un fois la séquence d'action fixée, on notera  $J \subseteq I$  l'ensemble des coordonnées  $j$  gardant  $(\bar{u}_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$  borné. Formellement, on définit

$$J = \{j \in I \mid \sup \{\bar{u}_k(j) \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ est fini}\}, \text{ et pour } j \in J, h_j = \max \{\bar{u}_k(j) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Commençons par ajouter des propriétés supplémentaires à la suite  $((u_k, v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ . Pour se faire, remarquons que si on remplace cette suite par une sous-suite  $((u_{\varphi(k)}, v_{\varphi(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$  extraite avec  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante, alors les mêmes propriétés sont vérifiées : Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

- le mot  $u_{\varphi(k)}v_{\varphi(k)}$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}_{\text{init}}$ , et on a  $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u_{\varphi(k)}} \mathbf{x}_{\varphi(k)} \xrightarrow{v_{\varphi(k)}} \mathbf{y}_{\varphi(k)}$ ,
- il existe une coordonnée  $i_{\varphi(k)} \in I$  telle que  $\bar{v}_{\varphi(k)}(i_{\varphi(k)}) \leq -\varphi(k) \leq -k$ .

Par conséquent, on peut se restreindre à une sous-suite, et ainsi sélectionner uniquement les séquences d'actions qui nous intéressent.

- Comme  $I$  est fini, les indices  $i_k$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, donc (par le principe des tiroirs) il existe un  $i \in I$  apparaissant une infinité de fois. On choisit une extractrice  $\varphi$  telle que  $i_{\varphi(k)} = i$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- Comme  $(\mathbb{N}^d, \leq)$  forme un bel ordre, la suite  $(\bar{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite croissante pour  $\leq$ , que l'on sélectionne.

On notera  $J \subseteq I$  l'ensemble des coordonnées  $j$  gardant  $(\bar{u}_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$  borné. Formellement, on définit  $J = \{j \in I \mid \sup \{\bar{u}_k(j) \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ est fini}\}$ , et pour  $j \in J$ ,  $h_j = \max \{\bar{u}_k(j) \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

- Pour tout  $j \in J$ , comme  $(\bar{u}_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante, l'ensemble  $\{k \in \mathbb{N} \mid \bar{u}_k(j) < h_j\}$  est fini. Il existe donc un  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq k_0$  et tout  $j \in J$ , on ait  $\bar{u}_k(j) = h_j$ . On se restreint alors à la sous-suite obtenue en sélectionnant les  $k \geq k_0$ .
- Pour tout  $j \in I - J$ , la suite  $(\bar{u}_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et tend vers  $+\infty$ . On peut donc se restreindre aux  $k \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $j \notin J$ , on ait  $\bar{u}_k(j) \geq k$ .

On va raisonner à l'aide du graphe de couverture de  $S$  à partir de la configuration initiale  $\mathbf{x}_{\text{init}}$ . Fixons un  $k \in \mathbb{N}$  strictement plus grand que toutes les valeurs entières apparaissant dans les  $\omega$ -configurations du graphe de couverture, et regardons le comportement du mot  $u_k$  sur ce graphe.

$u_k$  est bien franchissable à partir de  $\mathbf{x}_{\text{init}}$ , et son franchissement dans le graphe de couverture atteint une  $\omega$ -configuration  $\mathbf{x}$ . Choisissons un élément maximal  $\mathbf{x}' \in \text{Clover}$  tel que  $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$ . Pour tout  $j \in I - J$ , on a  $\bar{u}_k(j) \geq k$ , d'où  $\mathbf{x}'(j) \geq \mathbf{x}(j) \geq k$ , ce qui assure que  $\mathbf{x}'(j) = \omega$  (grâce au le choix de  $k$ ). Ainsi, on a l'inclusion  $I - J \subseteq J_{\mathbf{x}'}^{\text{fin}}$  (ce qui se réécrit en  $J_{\mathbf{x}'}^{\text{fin}} \subseteq J$ ).

Maintenant, en utilisant le lemme 25 sur  $\mathbf{x}'$ , on obtient l'existence d'un mot  $u \in A^*$  tel que

- pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}'}^{\text{fin}}$ , on a  $\bar{u}(j) \geq 0$ ,
- pour tout  $j \in J_{\mathbf{x}'}^{\text{inf}}$ , on a  $\bar{u}(j) > 0$ .

En particulier,  $\bar{u} \geq 0$  (ce qui montre le point 1 du théorème), et pour tout  $j \notin J$ ,  $\bar{u}(j) > 0$ .

Intéressons-nous maintenant aux mots  $v_k$ . Posons  $\xi = \max\{|\bar{a}(i)| \mid a \in A, i \in I\}$ , et notons  $\gamma$  le nombre de sommets du graphe de couverture  $G$  de  $(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ . En choisissant  $k > \gamma \times \xi$ , on peut factoriser  $v_k$  en  $\gamma + 1$  mots  $w_i$  avec le franchissement de  $v_k = w_1 w_2 \dots w_{\gamma+1}$  à partir de  $\mathbf{x}_k$  suivant :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{z}_0 \xrightarrow{w_1}_S \mathbf{z}_1 \xrightarrow{w_2}_S \dots \xrightarrow{w_{\gamma+1}}_S \mathbf{z}_{\gamma+1} = \mathbf{y}_k$$

de telle manière à ce que  $\mathbf{z}_0(i) > \mathbf{z}_1(i) > \dots > \mathbf{z}_{\gamma+1}(i)$ . On rappelle que  $i \in I$  est la coordonnée telle que  $\bar{v}_k(i) \leq k$ .

Le mot  $v_k$  est franchissable à partir de  $x_k$ , donc à partir de la  $\omega$ -configuration  $\mathbf{x}$ , mais également à partir de  $\mathbf{x}'$ . Ce franchissement se factorise ainsi :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q}_0 \xrightarrow{w_1}_G \mathbf{q}_1 \xrightarrow{w_2}_G \dots \xrightarrow{w_{\gamma+1}}_G \mathbf{q}_{\gamma+1}$$

où les  $\mathbf{q}_\ell$  sont des  $\omega$ -configurations. Soulignons que comme  $\mathbf{x}'$  est maximal, on a  $J_{\mathbf{q}_0}^{\text{inf}} = \dots = J_{\mathbf{q}_{\gamma+1}}^{\text{inf}}$ . Par le lemme des tiroirs, deux de ces  $\omega$ -configurations  $\mathbf{q}_\ell$  et  $\mathbf{q}_{\ell'}$  sont identiques, et on obtient un circuit partant de la  $\omega$ -configuration  $\mathbf{q}_\ell$  et étiqueté par un facteur  $v \in A^*$  de  $v_k$ .

En revenant au franchissement de  $v_k$  à partir de  $\mathbf{x}_k$ , on a donc un facteur  $v$  tel que  $\mathbf{z}_\ell \xrightarrow{v}_S \mathbf{z}_{\ell'}$  avec

- $\mathbf{z}_\ell =_{\text{fin}} \mathbf{z}'_\ell$  qui permet de montrer le point 2. En effet, pour  $i \in I$ , si  $\bar{u}(i) = 0$ , alors  $i \in J_{\mathbf{x}'}^{\text{fin}}$  (car  $\mathbf{x}'$  est maximal), ce qui assure que  $\bar{v}(i) = 0$ .
- $\mathbf{z}_\ell(i) > \mathbf{z}_{\ell'}(i)$  qui prouve que  $\bar{v}(i) < 0$ , montrant ainsi le point 3.

□

Prouvons maintenant le sens réciproque du théorème 26.

*Démonstration.* Réciproquement, supposons qu'il existe deux mots  $u, v \in A^*$  vérifiant les points 1, 2 et 3. En choisissant des coordonnées suffisamment grandes, on peut trouver une configuration  $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$  à partir de laquelle le mot  $u$  est franchissable. Montrons que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  n'est pas rationnel.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Notons  $\rho = \max\{-\bar{v}(i) \mid i \in I\}$ , et montrons alors que  $u^{\rho \times k} v^k \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ .

- D'après le point 1, on a  $\bar{u} > 0$ , donc  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \bar{u} > \mathbf{x}_{\text{init}}$ . Comme  $u$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}_{\text{init}}$ , le mot  $u^{\rho \times k}$  l'est également. Le franchissement  $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u^{\rho \times k}}_S \mathbf{x}_k$  permet d'atteindre une configuration  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{N}^d$ .
- D'après le point 2, si pour un  $i \in I$ , on a  $\bar{v}^k(i) < 0$ , alors  $\bar{u}(i) > 0$ , d'où  $\mathbf{x}_k(i) \geq \rho \times k$ . Par définition de  $\rho$ , on en déduit que  $v^k$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}_k$ , et le franchissement donne  $\mathbf{x}_k \xrightarrow{v^k}_S \mathbf{y}_k$  avec  $\mathbf{y}_k \in \mathbb{N}^d$ .
- Enfin, d'après le point 3, il existe un  $i \in I$  tel que  $\bar{v}(i) < 0$ , d'où  $\bar{v}^k(i) \leq -k$ .

Par conséquent, la séquence  $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u^{\rho \times k}}_S \mathbf{x}_k \xrightarrow{v^k}_S \mathbf{y}_k$  vérifie la propriété (1) pour ce  $k$ . On notera que  $\mathbf{x}_{\text{init}}$  est bien indépendant de  $k$ . Le langage  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$  n'est donc pas rationnel, et  $S$  n'est pas structurellement rationnel. □

**Théorème 27.** Le problème de la rationalité structurelle est dans co-NP pour les VAS.

*Démonstration.* Le théorème 26 montre que le problème de la rationalité structurelle revient à décider le problème de décision suivant.

Donnée : un ensemble fini de  $n$  vecteurs  $\lambda(A) = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$  et  $M_A$  la matrice associée.

Question : Existe-t-il  $2n$  entiers positifs  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  vérifiant les 3 conditions suivantes :

1.  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i > \mathbf{0}$
2. Pour tout  $j \in I$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i(j) = 0$  implique  $\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{a}_i(j) \geq 0$ ,
3.  $\neg(\sum_{i=1}^n y_i \mathbf{a}_i \geq \mathbf{0})$ .

Le théorème précédent montre que décider la non-rationalité structurelle revient à décider la satisfaisabilité d'une formule de Presburger avec uniquement des quantificateurs existentiels. Dans ce cas, on sait que le problème est dans NP, donc la rationalité structurelle est dans co-NP. □

## 5 Configurations maximales rationnelles

### 5.1 Monotonie de la rationalité

**Définition 28.** Pour un VAS  $S$ , une configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$  est *rationnelle pour  $S$*  si  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  est rationnel.

Nous allons considérer l'ensemble des configurations  $\mathbf{x}$  pour lesquelles  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  est rationnel et son complémentaire, l'ensemble des configurations  $\mathbf{x}$  pour lesquelles  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  n'est pas rationnel. Dans cette partie, le comportement d'un VAS est donc étudié à partir de l'ensemble de ses configurations initiales possibles c'est-à-dire pour tout les  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ . Posons donc :

$$\mathcal{R}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \text{ est rationnel}\}$$

Rappelons que nous notons  $\overline{\mathcal{R}(S)} = \mathbb{N}^d - \mathcal{R}(S)$ . Montrons que si  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  n'est pas rationnel alors  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}')$  n'est pas rationnel pour tout  $\mathbf{x}' \geq \mathbf{x}$  ce qui revient à dire que la propriété de non-rationalité est monotone.

**Théorème 29.** Pour tout VAS  $S = (A, \lambda)$ , on a  $\overline{\mathcal{R}(S)} = \uparrow \text{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\overline{\mathcal{R}(S)}$  est clos par le haut. Soit  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{N}^d$  deux configurations vérifiant  $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$ . Supposons que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  ne soit pas rationnel.

D'après le théorème 18, il existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$  une exécution  $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{y}_k \xrightarrow{v}_S \mathbf{z}_k$  vérifiant  $\bar{v} = \mathbf{z}_k - \mathbf{y}_k \not\geq -k$ . Comme  $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'$ , du fait de la monotonie des VAS, la séquence  $uv$  est aussi franchissable à partir de  $\mathbf{x}'$ , et l'on obtient l'exécution  $\mathbf{x}' \xrightarrow{u}_S \mathbf{y}'_k \xrightarrow{v}_S \mathbf{z}'_k$ , où  $\mathbf{y}'_k = \mathbf{y}_k + (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$  et  $\mathbf{z}'_k = \mathbf{z}_k + (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ .

On a alors  $\mathbf{z}'_k - \mathbf{y}'_k = \bar{v} \not\geq -k$ , donc  $(S, \mathbf{x}')$  ne satisfait pas non plus la propriété (1). On en déduit que  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}')$  n'est pas rationnel.

L'ensemble  $\text{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$  est fini car  $\leq$  est un bel-ordre sur  $\mathbb{N}^d$ . On déduit que  $\overline{\mathcal{R}(S)} = \uparrow \text{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$  d'après la proposition 4.  $\square$

**Remarque.** On en déduit que  $\mathcal{R}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \text{ est rationnel}\}$  est clos par le bas.

Il est alors naturel de se demander si l'ensemble fini  $\text{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$  est calculable. Une piste explorée est issue d'un résultat de Valk & Jantzen [9].

**Théorème 30** ([9] théorème 2.14). Soit  $K \subseteq \mathbb{N}^d$  un ensemble clos par le haut. Alors  $\text{Min}(K)$  est calculable si et seulement si pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ , le prédicat  $p_K(\mathbf{x}) = (\downarrow \mathbf{x} \cap K \neq \emptyset)$  est décidable.

**Remarque.** Pour tout VAS  $S$ , nous avons donc découpé l'ensemble  $\mathbb{N}^d$  des configurations initiales en deux sous-ensembles disjoints,  $\mathcal{R}(S)$  et son complémentaire  $\overline{\mathcal{R}(S)}$ , tels que  $\mathcal{R}(S)$  est clos par le bas (et  $\overline{\mathcal{R}(S)}$  est clos par le haut).

### 5.2 Travail sur la rationalité des $\omega$ -configurations

L'objectif est de calculer  $\text{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$ . On s'appuie pour cela sur le théorème 30, en réduisant le calcul au problème suivant :

- Donnée : un VAS  $S = (A, \lambda)$  et une  $\omega$ -configuration  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$  ;
- Question :  $S$  admet une configuration rationnelle dans  $\downarrow \mathbf{x}$ .

Il nous faut donc des outils pour traiter la rationalité des  $\omega$ -configurations.

**Définition 31.** Soient  $S = (A, \lambda)$  un VAS,  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$  une  $\omega$ -configuration et  $v \in A^*$ . On dit que  $v$  est *cyclable* à partir de  $\mathbf{x}$  lorsque  $v$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ , et qu'il permet d'accéder à la même  $\omega$ -configuration  $\mathbf{x}$  (i.e.  $\mathbf{x} \xrightarrow{v}_S \mathbf{x}$ ).

**Théorème 32.** Soit  $S = (A, \lambda)$  un VAS et  $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$  une  $\omega$ -configuration. Alors  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$  n'est pas rationnel si et seulement si il existe une  $\omega$ -configuration  $\mathbf{y} \in \mathbb{N}_\omega^d$  et un mot  $v \in A^*$  tels que

1.  $\mathbf{y}$  est  $\omega$ -accessible depuis  $\mathbf{x}$  dans  $S$ ,
2.  $v$  est cyclable à partir de  $\mathbf{y}$ ,
3.  $\bar{v} \not\geq \mathbf{0}$  (i.e. il existe un  $i \in I$  tel que  $\bar{v}(i) < 0$ ).

La preuve de ce théorème est similaire à la preuve du lemme 3 de Valk et Vidal-Naquet [8]. Elle n'est pas détaillée ici comme le théorème n'a pas permis de conclure notre problème. C'est une façon parmi plusieurs de caractériser la rationalité des  $\omega$ -configurations qui semble intéressante.

Par ailleurs, notons que si un mot est cyclable à partir de  $\mathbf{x}$ , il l'est à partir de  $\mathbf{y} > \mathbf{x}$  une  $\omega$ -configuration plus grande. On peut donc exiger que  $\mathbf{y}$  soit maximal (donc dans *Clover*).

Quelques pistes de réflexion :

1. On peut adapter la preuve de la rationalité classique (théorème 18, et preuve de Vidal-Naquet). Nécessite de s'appuyer soit sur le graphe de Karp-Miller (fini), soit sur l'ensemble *Clover*. Mais ces deux notions ne sont pas définies de manière satisfaisante lorsque la configuration initiale peut varier (dans  $\downarrow \mathbf{x}$ , certaines coordonnées peuvent être choisies arbitrairement).
2. On ne peut ignorer les coordonnées valant  $\omega$  dans  $\mathbf{x}$  comme on le faisait pour la rationalité structurelle, car arbitraire ne veut pas dire infini : il est toujours nécessaire de vérifier si besoin que l'on peut faire croître ces coordonnées infiniment.
3. On peut s'inspirer de la preuve de rationalité structurelle (comme le fait le théorème ci-dessus), mais certaines choses deviennent aussi impossible, comme d'intervertir des actions (même résultat final, mais peut entraver le franchissement).
4. Une idée partiellement explorée est de mélanger les deux preuves (de rationalité classique et structurelle), en distinguant les coordonnées finies et infinies de  $\mathbf{x}$ .
5. Une autre idée consiste à modifier le VAS pour se ramener à un problème de rationalité de VAS classique. Pour gérer les omegas dans  $\mathbf{x}$ , on peut par exemple dupliquer les coordonnées associées pour simuler (dans un graphe fini comme pour le graphe de couverture) une coordonnée initialisé à 0 qui peut valoir des coordonnées négatives.

## 6 Conclusion

Revisiter les preuves existantes de rationalité a permis d'explorer de nombreuses reformulation équivalentes au problème de rationalité. Notamment, le théorème 18, déjà présent chez Valk et Vidal-Naquet, a orienté nos recherches pour la rationalité structurelle, et reste très prometteur pour trouver les configurations rationnelles minimales.

La monotonie de la rationalité exposé en partie 5 offre beaucoup de perspectives. D'abord cette hiérarchie peut permettre d'identifier plus facilement les configurations rationnelles - qui permettent, rappelons-le, de réduire la complexité des problèmes classiques (model-checking). Par ailleurs, tout comme la rationalité structurelle, cela permet d'avoir une vision globale du comportement du VAS, sans avoir à fixer une configuration initiale.

Pour conclure ce stage, je dirai que cela m'a permis de comprendre en profondeur les systèmes de transition rattachés aux VAS. Les problèmes liés à la rationalité dans des structures formelles sont au cœur des thèmes sur lesquels je me spécialise. Par conséquent, les méthodes de preuve utilisées me seront sans doute bénéfiques pour mes travaux de recherche futurs. Malheureusement, les conditions actuelles ont freiné mon insertion à une équipe et ont rendu difficile la progression du travail de recherche.

## 7 Appendix

### 7.1 La relation d'équivalence de Ginzburg et Yoeli n'est pas d'index fini

Ginzburg et Yoeli introduisent dans [4] une relation d'équivalence  $\equiv_S^{\mathbf{GY}}$  sur les configurations et énoncent que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\equiv_S^{\mathbf{GY}}$  admet un nombre fini de classes d'équivalence dans  $\text{Reach}(S)$  ([4], Théorème 1).

S'il est vrai que  $\text{Reach}(S)/\equiv_S^{\mathbf{GY}}$  fini implique que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel, la réciproque est fausse et nous donnerons un contre-exemple d'un langage  $\mathcal{L}(S)$  rationnel tel que  $\text{Reach}(S)/\equiv_S^{\mathbf{GY}}$  est infini. Nous proposerons de reprendre l'idée de Ginzburg et Yoeli, mais en définissant une autre relation d'équivalence pour laquelle on obtiendra cette fois-ci l'équivalence entre la rationalité du langage et le quotient fini selon cette relation.

**Définition 33** ([4] section 3). Soit  $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$  un VAS. La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  est définie pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Reach}(S)$  par :

$$\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y} \text{ ssi } \forall w \in A^*, (\mathbf{x} + \overline{w} \in \text{Reach}(S) \Leftrightarrow \mathbf{y} + \overline{w} \in \text{Reach}(S))$$

**Remarque.**  $\equiv_S^{\text{GY}}$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\text{Reach}(S)$  des configurations accessibles. Il n'est pas intéressant de la prolonger à  $\mathbb{N}^d$ , cela ne rajoute qu'une seule classe d'équivalence, sans autre information pour distinguer les configurations inaccessibles.

On aurait envie d'obtenir un résultat similaire à celui de Nérode, à savoir dire que  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel si et seulement si  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet un nombre fini de classes d'équivalence. Cela est malheureusement faux, puisque pour  $\mathbf{x} \in \text{Reach}(S)$  et  $w \in A^*$ , l'écriture  $\mathbf{x} + \overline{w} \in \text{Reach}(S)$  ne permet pas de dire si la séquence  $w$  est franchissable à partir de  $\mathbf{x}$ . Il pourrait en effet exister une autre séquence  $w' \in A^*$  franchissable à partir de  $\mathbf{x}$  aboutissant à la configuration  $\mathbf{x} + \overline{w'} = \mathbf{x} + \overline{w}$ , voire même un moyen d'accéder à la configuration  $\mathbf{x} + \overline{w} = \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u}$  depuis la configuration initiale par une autre séquence d'action  $u \in A^*$  sans que  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u}$  ne soit accessible depuis  $\mathbf{x}$ .

**Énoncé** ([4] théorème 1). Soit  $S$  un VAS. Alors  $\text{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  est fini si et seulement si  $\mathcal{L}(S)$  est rationnel

Cet énoncé est faux : avoir  $\text{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$  fini implique bien  $\mathcal{L}(S)$  rationnel, ce qui est prouvé en construisant explicitement l'automate. Par contre, la réciproque est fausse. L'erreur (avant-dernière ligne de la preuve du théorème 1 de [4]) était d'affirmer que savoir  $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{uw} \in \text{Reach}(S)$  pour  $u \in \mathcal{L}(S)$  et  $w \in A^*$  permettait d'en déduire que  $uw \in \mathcal{L}(S)$ .

On donne ci-dessous un contre-exemple pour illustrer ce point. Il est nécessaire de se placer au moins en dimension 3, car le résultat de Ginzburg et Yoeli reste vrai en dimension inférieure.

**Exemple 34.** Soit le 3-VAS  $S = (A = \{a, b, c\}, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}} = (0, 0, 0))$  dont les actions sont étiquetées par  $\overline{a} = (1, 0, 0)$ ,  $\overline{b} = (0, 1, -1)$  et  $\overline{c} = (-1, -1, 1)$ . Le langage reconnu  $\mathcal{L}(S) = a^*$  est rationnel, et les configurations accessibles sont les  $\mathbf{x}_n = (n, 0, 0)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Cependant, pour deux entiers  $m > n > 0$ , bien qu'on ait  $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_m) = \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(S)$ , il apparaît que  $\mathbf{x}_m \not\equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{x}_n$  : Cela se constate en considérant la séquence d'actions  $b^{n+1}c^{n+1}$  qui n'est jamais franchissable, mais qui vérifie  $\mathbf{x}_m + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (m - n - 1, 0, 0) \in \text{Reach}(S)$  alors que  $\mathbf{x}_n + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (-1, 0, 0) \notin \text{Reach}(S)$ .

La relation  $\equiv_S^{\text{GY}}$  admet alors une infinité de classes d'équivalences  $(\{\mathbf{x}_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $S$ .

## Références

- [1] Michel Blockelet and Sylvain Schmitz. Model checking coverability graphs of vector addition systems. In Filip Murlak and Piotr Sankowski, editors, *Mathematical Foundations of Computer Science 2011 - 36th International Symposium, MFCS 2011, Warsaw, Poland, August 22-26, 2011. Proceedings*, volume 6907 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 108–119. Springer, 2011.
- [2] Stéphane Demri. On selective unboundedness of VASS. *J. Comput. Syst. Sci.*, 79(5) :689–713, 2013.
- [3] Alain Finkel, Serge Haddad, and Igor Khmelnitsky. Minimal coverability tree construction made complete and efficient. In Barbara König and Jean Goubault-Larrecq, editors, *Proceedings of the 23rd International Conference on Foundations of Software Science and Computation Structures (FoSSaCS'20)*, Lecture Notes in Computer Science, pages 237–256, Dublin, Ireland, April 2020. Springer.
- [4] A. Ginzburg and M. Yoeli. Vector addition systems and regular languages. *Journal of Computer and System Sciences*, 20(3) :277–284, jun 1980.
- [5] Slawomir Lasota. Improved ackermannian lower bound for the VASS reachability problem. *CoRR*, abs/2105.08551, 2021.
- [6] Jérôme Leroux. The reachability problem for petri nets is not primitive recursive. *CoRR*, abs/2104.12695, 2021.
- [7] Michael Rabin and Dana Scott. Finite automata and their decision problems. *IBM Journal of Research and Development*, 3 :114–125, 04 1959.
- [8] R. Valk and G. Vidal-Naquet. Petri nets and regular languages. *J. Comput. Syst. Sci.*, 23 :299–325, 1981.

- [9] Rüdiger Valk and Matthias Jantzen. The residue of vector sets with applications to decidability problems in petri nets. *Acta Informatica*, 21 :643–674, 1985.
- [10] Rüdiger Valk and G. Vidal. On the rationality of petri net languages. In Hans Tzschach, H. Waldschmidt, and Hermann K.-G. Walter, editors, *Theoretical Computer Science, 3rd GI-Conference, Darmstadt, Germany, March 28-30, 1977, Proceedings*, volume 48 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–328. Springer, 1977.