Décidabilité de la rationalité pour les WSTS

Lucas Bueri

Stage M2 - 2021

1 Introduction

On sait depuis 1980 que le problème de la rationalité du langage des traces d'un VAS (ou d'un réseau de Petri) étiqueté de façon injective est décidable [1, 4] et sa complexité est aussi connue (demri, schmitz 2013...). On sait aussi décider la rationlité structurelle [4], mais la complexité de ce problème n'était pas connue. on étudie les deux preuves, différentes, de yoeli et vv. Celle de yoeli a l'avantage et inconvénients de xxx, celle de VV a l'avantage et inconvénients...

Contribution

- La preuve de VV nécessite la construction du graphe de couverture dont la taille est au pire Ackermann tandis que celle de yoeli n'utilise que l'ensemble des configurations du graphe de Karp-Miller ; cela dit cet ensemble peut aussi être de taille Ackermann. Mais parfois l'ensemble des éléments maximaux de l'ensemble des configurations du graphe de Karp-Miller, appelé Clover, est petit et facile à calculer d'un point de vue algorithmique. En étudiant la preuve de yoili, nous avons vu que la relation d'équivalence qu'ils utilisent ne permet pas de prouver la décidabilité de la rationalité et donc la preuve de yoeli n'est pas satisfaisante. On donne un nouvel énoncé et une nouvelle preuve correcte, similaire à celle de yoeli mais avec la bonne relation d'équivalence, du fait que S est rationnel ssi un certain nombre de VAS associés à S sont bornés, ce qui montre que la construction de clover est suffisante pour décider la rationalité dun VAS.
- Pour un VAS S, une configuration $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ est *rationnelle pour S* si $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ est rationnel. On montre que l'ensemble des configurations rationnelles est clos par le bas et qu'on peut calculer ses idéaux maximaux (sous-ensembles clos par le bas et dirigés dans $\mathbb{N}^d$) mais qui sont représentés par des ensembles finis d'éléments dans $\mathbb{N}^d_\omega$.
- on donne un algo pour calculer les élements minimaux du complémentaire. Cet algorithme est au pire Ackermannian.
- on montre que le pb de rationalité structurelle est dans NP

2 Réseaux de Petri

Un réseau de Petri $N = (P, T, B, F, M_0)$ est la donnée de

- un ensemble fini P de d emplacements,
- un ensemble fini T de transitions,
- une fonction de coût $B : P \times T \to \mathbb{N}$,
- une fonction de production $F : P \times T \to \mathbb{N}$,
- un marquage initial $M_0 : P \to \mathbb{N}$.

Les configurations sont les marquages $M : P \to \mathbb{N}$, aussi considérés comme les valeurs possibles de d compteurs (vecteur de $\mathbb{N}^d$). On peut déclencher la transition t à partir du marquage M si et seulement si $M(p) \geqslant B(p, t)$ pour tout $p \in P$ (noté $M \geqslant B(\cdot, t)$).

On obtient alors un nouveau marquage M' défini par $M' \overset{def}{=} M + D(\cdot, t)$ où $D \overset{def}{=} F - B$. B représente donc le coût de la transition (le nombre de jetons requis et consommés dans chaque emplacement), et F représente sa production (les jetons créés lors du déclenchement).

On notera $M\langle t\rangle$ lorsque t peut se déclencher sur M, et $M\langle t\rangle M'$ si déclencher t sur M donne M'. On étendra naturellement cette notation (ainsi que $B(p, \cdot)$ et $F(p, \cdot)$) aux séquences de transitions, ou mots $w \in T^*$.

Deux ensembles nous intéresseront alors : le langage $\mathcal{L}(N) \overset{def}{=} \{w \in T^* \mid M_0\langle w\rangle\}$ du réseau de Petri et les configurations accessibles $Reach(N) \overset{def}{=} \{M' : P \to \mathbb{N} \mid \exists w \in T^*, M_0\langle w\rangle M'\}$.

3 VAS

3.1 La structure

Un *système d'addition de vecteurs de dimension* $d \in \mathbb{N}$ ($d-$VAS) $S = (A, \lambda)$ est la donnée d'un alphabet fini A muni d'un étiquetage $\lambda : A \to \mathbb{Z}^d$. À chaque *action* $a \in A$ est ainsi associé un unique vecteur $\lambda(a) \in \mathbb{Z}^d$, de telle manière à ce que deux actions ne soient pas associées au même vecteur. Pour des raisons de lisibilité, on notera $\overline{a} = \lambda(a)$.

Les *configurations* de S sont alors les vecteurs de $\mathbb{N}^d$ (à coordonnées positives), et chaque action $a \in A$ agit sur $\mathbb{N}^d$ en additionnant à la configuration courante le vecteur $\overline{a}$ associé. On a alors une transition entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ étiquetée par l'action a lorsque $\mathbf{x} + \overline{a} = \mathbf{y}$.
De manière équivalente, on dira que l'action $a \in A$ est *franchissable* à partir de la configuration $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ lorsque $\mathbf{x} + \overline{a} \geqslant \mathbf{0}$, et son déclenchement aboutit à la configuration $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{a}$ à travers la transition $(\mathbf{x}, a, \mathbf{y}) \in \mathbb{N}^d \times A \times \mathbb{N}^d$. On notera $\mathbf{x} \xrightarrow{a}_S \mathbf{y}$ lorsqu'un tel déclenchement est possible (ou simplement $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$ s'il n'y a pas ambiguïté sur S).

Par la suite, on notera $I \stackrel{def}{=} \{1, \ldots, d\}$ l'ensemble des coordonnées pour les configurations.

Lorsqu'une séquence d'actions $w = a_1 \cdots a_k \in A^*$ permet d'aller de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{y}$ par la séquence de transition $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} \xrightarrow{a_1} \mathbf{x_1} \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_k} \mathbf{x_k} = \mathbf{y}$ (où $\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_k} \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{x_{i-1}} + \overline{a_i} = \mathbf{x_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$), on dit que w est franchissable à partir de $\mathbf{x}$, et qu'on a une *exécution* $\rho : \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y}$.
$\mathbf{y}$ est alors dit accessible à partir de $\mathbf{x}$.
De plus, en notant $\overline{w} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^k \overline{a_i}$ le vecteur associé à w, on obtient $\mathbf{x} + \overline{w} = \mathbf{y}$. Attention, cette égalité peut-être vérifiée même si w n'est pas franchissable.

Nous allons étudier deux ensembles naturellement associés à un VAS $S = (A, \lambda)$:

1. $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \left\{ w \in A^* \;\middle|\; \exists \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$ qui est le *langage* des séquences d'actions franchissables à partir de la configuration $\mathbf{x}$,
2. $Reach(S, \mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \;\middle|\; \exists w \in A^*, \mathbf{x} \xrightarrow{w}_S \mathbf{y} \right\}$ qui est l'ensemble des configurations *accessibles* à partir de $\mathbf{x}$.

On choisira souvent une configuration initiale $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$, qu'on pourra ajouter à la définition du VAS. On pourra alors regarder $\mathcal{L}(S) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ le langage du VAS $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$, et $Reach(S) \stackrel{def}{=} Reach(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ son ensemble d'accessibilité.

Définition 1. Un VAS $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ est *rationnel* lorsque $\mathcal{L}(S)$ est rationnel sur A^*.

Définition 2. Soit $S = (A, \lambda)$ un $d-$VAS, $J \subseteq I$ un sous-ensemble d'indices et $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ une configuration. On dit que

— J est *borné* pour $\mathbf{x}$ sur S lorsque toute configuration accessible depuis $\mathbf{x}$ a ses coordonnées dans J bornées :
$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in Reach(S, \mathbf{x}), \forall j \in J, \mathbf{y}(j) \leqslant k$$

— J est *borné inférieurement* pour $\mathbf{x}$ sur S lorsque toutes les coordonnées de J ne diminue pas plus qu'une certaine borne (même en augmentant les ressources initiales) :
$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{y} \in Reach(S, \mathbf{x} + n \cdot \mathbf{u}_J), \forall j \in J, \mathbf{y}(j) \geqslant \mathbf{x}(j) + n - k$$
où $\mathbf{u}_J$ désigne le vecteur valant 1 aux coordonnées dans J, et 0 ailleurs.

Enfin, on dénotera par *Rat* l'ensemble des langages rationnels (sur un alphabet fini).

3.2 Clover et le graphe de couverture

On aimerait avoir un meilleur aperçu des configurations accessibles, et notamment décrire de manière finie les capacités pour le VAS d'atteindre des configurations non-bornées. Rappelons d'abord la notion d'idéal :

Définition 3. Soit $(X, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $E \subseteq X$ un sous-ensemble de E.

— E est dit *dirigé* lorsque pour tous $x, y \in E$ il existe un $z \in E$ vérifiant $x \leqslant z$ et $u \leqslant z$.

— E est dit *clos par le bas* lorsqu'il est égal à sa clôture par le bas $\downarrow E \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid \exists y \in E, x \leqslant y\}$.
— De la même façon, E est dit *clos par le haut* lorsqu'il est égal à sa clôture par le haut $\uparrow E \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid \exists y \in E, x \geqslant y\}$.
— Enfin, E est un *idéal* s'il est dirigé et clos par le bas.

$(\mathbb{N}^d, \leqslant)$ a la particularité d'être un bel ordre, ce qui permet d'obtenir des représentations finies de ces sous-ensembles. Les idéaux de $\mathbb{N}^d$ peuvent donc se voir comme des éléments de $\mathbb{N}_\omega^d$, obtenu en étendant $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}_\omega \stackrel{def}{=} \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ de façon naturelle. Ainsi, un élément $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}_\omega^d$ représente l'idéal $\{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \mid \mathbf{y} \leqslant \mathfrak{m}\}$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 4. référence ? Soit $E \subseteq \mathbb{N}^d$ clos par le bas. Alors E est une union finie d'idéaux de $\mathbb{N}^d$.

Par conséquent, tout sous-ensemble de $\mathbb{N}^d$ clos par le bas peut être représenté par un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{N}_\omega^d$.

Pour les sous-ensembles E de $\mathbb{N}^d$ clos par le haut, on va regarder ses éléments minimaux. Notons $\mathit{Min}(E) \stackrel{def}{=} \{x \in E \mid \forall y < x, y \notin E\}$.

Proposition 5. Soit $E \subseteq \mathbb{N}^d$ clos par le haut. Alors $\mathit{Min}(E)$ est fini et $\uparrow \mathit{Min}(E) = E$.

On peut maintenant introduire l'ensemble de couverture $\mathcal{C}(S) \stackrel{def}{=} \downarrow \mathit{Reach}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ d'un VAS $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$. Il est clos par le bas dans $(\mathbb{N}^d, \leqslant)$ bien ordonné, donc se décomposition comme une union finie d'idéaux.

Définition 6. Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un $d-$VAS. On définit $\mathit{Clover}(S) \subseteq \mathbb{N}_\omega^d$ comme l'ensemble des idéaux maximaux inclus dans $\mathcal{C}(S)$. C'est aussi l'unique ensemble de taille minimale d'idéaux dont l'union correspond à $\mathcal{C}(S)$.

À revoir.
Le *graphe de couverture* a pour sommets des configurations de $\mathbb{N}_\omega^d$ et pour arêtes des transitions du VAS, étiquetés par une action de A. Il est obtenu en partant d'un sommet initial $s_0 : \mathbf{x}_{\text{init}}$ étiqueté par la configuration initiale $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$, puis par récurrence sur la profondeur des noeuds en indiquant les voisins des noeuds accessibles :
Pour chaque noeud $s : \mathbf{x}$ associé à la configuration $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$, on fait partir de s autant d'arêtes que d'actions $a \in A$ qui sont franchissables à partir de $\mathbf{x}$. Le sommet d'arrivée de l'arête associée à une action a est déterminé ainsi :

— Si $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$ (déclencher a aboutit à la configuration $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{a}$) et qu'il existe un sommet déjà existant $r : \mathbf{y}$ associé à cette configuration, alors on crée une arête étiquetée par a de $s : \mathbf{x}$ vers $r : \mathbf{y}$;
— Si $\mathbf{x} \xrightarrow{a} \mathbf{y}$ et qu'il existe un ancêtre $r : \mathbf{z}$ de s (c'est-à-dire tel qu'il existe une chemin dans le graphe déjà créé de r à s) avec $\mathbf{y} > \mathbf{z}$, alors on crée un nouveau sommet $s' : \mathbf{y}'$ et une arête de $s : \mathbf{y}$ vers $s' : \mathbf{y}'$ étiquetée par a, où $\mathbf{y}' \in \mathbb{N}_\omega^d$ est la configuration de coordonnées $\mathbf{y}'(i) = \mathbf{y}(i)$ pour les $1 \leqslant i \leqslant d$ tels que $\mathbf{y}(i) = \mathbf{z}(i)$, et $\mathbf{y}'(i) = \omega$ si $\mathbf{y}(i) > \mathbf{z}(i)$;
— Si la configuration $\mathbf{y}$ atteinte n'est pas dans les cas précédents, on crée simplement un nouveau sommet $s' : \mathbf{y}$ et une arête de s à s' étiquetée par a.

4 Une caractérisation pour la rationalité

La preuve de décidabilité se divise en deux étapes. Tout d'abord, on va donner une caractérisation mathématique équivalente à la rationalité. On montrera ainsi qu'un VAS est rationnel si et seulement s'il existe une borne $k \in \mathbb{N}$ telle que si on peut accéder à la configuration $\mathbf{x}$, puis à $\mathbf{y}$, alors $\mathbf{y}$ reste au dessus de $\mathbf{x} - \mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ désignera le vecteur $(k, k, ..., k) \in \mathbb{N}^d$).

4.1 La relation d'équivalence de Ginzburg et Yoeli n'est pas d'index fini

Ginzburg et Yoeli introduisent dans [1] une relation d'équivalence $\equiv_S^{\mathrm{GY}}$ sur les configurations et énoncent que $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si $\equiv_S^{\mathrm{GY}}$ admet un nombre fini de classes d'équivalence dans $\mathit{Reach}(S)$ ([1], Théorème 1).
S'il est vrai que $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S^{\mathrm{GY}}$ fini implique que $\mathcal{L}(S)$ est rationnel, la réciproque est fausse et nous donnerons un contre-exemple d'un langage $\mathcal{L}(S)$ rationnel tel que $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S^{\mathrm{GY}}$ est infini.

Nous proposerons de reprendre l'idée de Ginzburg et Yoeli, mais en définissant une autre relation d'équivalence pour laquelle on obtiendra cette fois-ci l'équivalence entre la rationalité du langage et le quotient fini selon cette relation.

Définition 7 ([1] section 3)**.** Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS. La relation $\equiv_S^{\text{GY}}$ est définie pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathit{Reach}(S)$ par :

$$\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y} \text{ ssi } \forall w \in A^*, \big(\mathbf{x} + \overline{w} \in \mathit{Reach}(S) \Leftrightarrow \mathbf{y} + \overline{w} \in \mathit{Reach}(S)\big)$$

ça donne quoi si on définit $\equiv_S^{\text{GY}}$ sur tout $\mathbb{N}^d$? Une classe de plus seulement ? Une infinité ?

Remarque. $\equiv_S^{\text{GY}}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathit{Reach}(S)$ des configurations accessibles.

On aurait envie d'obtenir un résultat similaire à celui de Nérode, à savoir dire que $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si $\equiv_S^{\text{GY}}$ admet un nombre fini de classes d'équivalence. Cela est malheureusement faux, puisque pour $\mathbf{x} \in \mathit{Reach}(S)$ et $w \in A^*$, l'écriture $\mathbf{x} + \overline{w} \in \mathit{Reach}(S)$ ne permet pas de dire si la séquence w est franchissable à partir de $\mathbf{x}$. Il pourrait en effet exister une autre séquence $w' \in A^*$ franchissable à partir de $\mathbf{x}$ aboutissant à la configuration $\mathbf{x} + \overline{w'} = \mathbf{x} + \overline{w}$, voire même un moyen d'accéder à la configuration $\mathbf{x} + \overline{w} = \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u}$ depuis la configuration initiale par une autre séquence d'action $u \in A^*$ sans que $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u}$ ne soit accessible depuis $\mathbf{x}$.

Plus précisément sur la preuve de Ginzburg et Yoeli, avoir $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$ fini implique bien $\mathcal{L}(S)$ rationnel, ce qui est prouvé en construisant explicitement l'automate. Par contre, la réciproque est fausse : L'erreur (avant-dernière ligne de la preuve du théorème 1 de [1]) était d'affirmer que savoir $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{uw} \in \mathit{Reach}(S)$ pour $u \in \mathcal{L}(S)$ et $w \in A^*$ permettait d'en déduire que $uw \in \mathcal{L}(S)$.

On donne ci-dessous un contre-exemple pour illustrer ce point. Il est nécessaire de se placer au moins en dimension 3, car le résultat de Ginzburg et Yoeli reste vrai en dimension inférieure.

Ajouter preuve que le résultat reste vrai en dimension inférieure à 2.

Exemple 8. Soit le $3-$VAS $S = (A = \{a, b, c\}, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}} = (0, 0, 0))$ dont les actions sont étiquetés par $\overline{a} = (1, 0, 0)$, $\overline{b} = (0, 1, -1)$ et $\overline{c} = (-1, -1, 1)$. Le langage reconnu $\mathcal{L}(S) = a^*$ est rationnel, et les configurations accessibles sont les $\mathbf{x}_n = (n, 0, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Cependant, pour deux entiers $m > n > 0$, bien que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_m) = \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_n) = \mathcal{L}(S)$, on a $\mathbf{x}_m \not\equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{x}_n$: Cela se constate en considérant la séquence d'actions $b^{n+1}c^{n+1}$ qui n'est jamais franchissable, mais qui vérifie $\mathbf{x}_m + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (m-n-1, 0, 0) \in \mathit{Reach}(S)$ alors que $\mathbf{x}_n + \overline{b^{n+1}c^{n+1}} = (-1, 0, 0) \notin \mathit{Reach}(S)$.

La relation $\equiv_S^{\text{GY}}$ admet alors une infinité de classes d'équivalences $(\{\mathbf{x}_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ sur S.

4.2 Une autre relation d'équivalence qui est d'index fini

Pour corriger ce problème, on va aussi regarder si les actions sont franchissables :

Définition 9. Soit $S = (A, \lambda)$ un VAS. On introduit la relation $\equiv_S$ sur les configurations en posant pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$:

$$\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y} \text{ ssi } \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$$

Constatons déjà que cette nouvelle relation est plus grande que celle de Ginzburg et Yoeli (au sens de l'inclusion) :

Proposition 10. Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$. Si $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$ alors $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$.

Démonstration. Supposons $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$ et montrons $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \subseteq \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ par récurrence sur la longueur des mots. Soit $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$.

Si $w = \varepsilon$ est le mot vide, $\mathbf{y} \in \mathcal{L}(S)$ assure que $\varepsilon \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$.

Sinon, on écrit $w = ua$ avec $u \in A^*$ et $a \in A$. $u \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ est plus court que w, donc par hypothèse de récurrence on a également $u \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$. u est donc franchissable depuis $\mathbf{y}$. Mais $ua \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$, ce qui assure que $\mathbf{x} + \overline{ua} \in \mathit{Reach}(S)$.

Comme $\mathbf{x} \equiv_S^{\text{GY}} \mathbf{y}$, on obtient que $\mathbf{y} + \overline{ua} \in \mathit{Reach}(S)$, aboutissant à $\mathbf{y} + \overline{ua} \geqslant \mathbf{0}$. L'action a est donc franchissable depuis $\mathbf{y} + \overline{u}$. En résumé, on a les transitions valides $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{x} + \overline{u} \xrightarrow{a}_S \mathbf{x} + \overline{w}$, d'où $w \in \mathcal{L}(S, y)$.

On conclut enfin que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ par symétrie. $\square$

On va établir le lien avec la relation de Nérode $\sim_L$ associée à un langage $L \subseteq A^*$. Pour tout $u, v \in A^*$, on définit :

$$u \sim_L v \text{ ssi } \forall w \in A^*, uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$$

On sait que $\sim_L$ est une relation d'équivalence invariante par composition à droite et qu'un langage $L \subseteq A^*$ est rationnel si et seulement si $A^*/\sim_L$ est fini ([3], Théorème 2).

La congruence de Nérode concerne donc les mots plutôt que les configurations, mais est liée à l'équivalence $\equiv_S$ sur les VAS de la manière suivante :

Lemme 11. Soient $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS et $u, v \in \mathcal{L}(S)$. On a $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$ si et seulement si $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{v}$.

Démonstration. Si $u \in \mathcal{L}(S)$, alors pour tout mot $w \in A^*$, on a l'équivalence :

$$uw \in \mathcal{L}(S) \Leftrightarrow w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u})$$

On en déduit immédiatement le résultat en reprenant les définitions de chaque relation. □

Remarque. La relation de Nérode ne s'intéresse qu'aux mots du langage, et $\{w \in A^* \mid w \notin \mathcal{L}(S)\}$ forme une unique classe d'équivalence pour $\sim_{\mathcal{L}(S)}$. Ainsi, le lemme 11 devient faux dès lors que $u, v \notin \mathcal{L}(S)$, puisque l'on a toujours $u \sim_{\mathcal{L}(S)} v$ dans ce cas sans que $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} \equiv_S \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{v}$ ne soit nécessairement vrai.

Théorème 12. Pour un VAS S, $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S$ est fini.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :
$\mathcal{L}(S)$ est rationnel ssi $A^*/\sim_{\mathcal{L}(S)}$ est fini (propriété de la relation de Nérode)
ssi $\mathcal{L}(S)/\sim_{\mathcal{L}(S)}$ est fini (car $\sim_{\mathcal{L}(S)}$ admet un seule classe d'équivalence sur $A^* \setminus \mathcal{L}(S)$)
ssi $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S$ est fini (par le lemme 11). □

Enfin, on donne une propriété de monotonie pour cette relation, qui appuie son intérêt pour l'étude du système de transition S.

Proposition 13. La relation d'équivalence $\equiv_S$ sur les configurations d'un $d-$VAS S est compatible/monotone avec les actions : Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$ implique $\forall a \in A, \mathbf{x} + \overline{a} \equiv_S \mathbf{y} + \overline{a}$.

Remarque. La relation $\equiv_S^{\text{GY}}$ de Ginzburg et Yoeli vérifie également cette propriété.

4.3 Borne sur la décroissance

Pour obtenir un nombre fini de classes d'équivalence pour $\equiv_S$, on cherche une borne à partir de laquelle les configurations accessibles sont indiscernables. Comme la seule règle restreignant les actions franchissables est un test de positivité, on va exiger que les configurations ne puissent pas trop décroître.

Ginzburg et Yoeli proposent une caractérisation au travers des deux lemmes suivants :

Énoncé ([1] Lemme 1)**.** Supposons que dans un VAS $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$, les n premières coordonnées soient non-bornées. Supposons aussi qu'il existe n entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que pour tout $\mathbf{x} \in \mathit{Reach}(S)$, tout $w \in A^*$ et tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $(\mathbf{x} + \overline{w}) \in \mathit{Reach}(S)$ implique $\mathbf{x}(i) - (\mathbf{x} + \overline{w})(i) \leqslant k_i$. Alors $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$ est fini.

Ce résultat est correct, et nous l'adapterons facilement à la relation $\equiv_S$ en modifiant la propriété requise en conséquence. Notons qu'il n'est pas nécessaire de prendre des valeurs différentes pour les k_i, il est tout à fait possible de considérer leur maximum.

Énoncé ([1] Lemme 2)**.** Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS, et supposons qu'il existe une coordonnée non-bornée j telle que pour tout $k \geqslant 0$, il existe une configuration $\mathbf{x} \in \mathit{Reach}(S)$ et un mot $w \in A^*$ tels que $(\mathbf{x} + \overline{w}) \in \mathit{Reach}(S)$ et $\mathbf{x}(j) - (\mathbf{x} + \overline{w})(j) > k$. Alors l'ensemble $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S^{\text{GY}}$ est infini.

Cette fois, la preuve donnée comporte une erreur de même nature que précédemment : Il est affirmé que si $\mathbf{x} + \overline{w} \in \mathit{Reach}(S)$, alors toutes les étapes intermédiaires sont accessibles, ce qui n'est pas forcément vrai. Le résultat semble cependant vrai (à vérifier), mais n'apporte pas la caractérisation souhaitée.

Donnons maintenant une caractérisation similaire pour la relation $\equiv_S$. La preuve suit les idées de Ginzburg et Yoeli [1] en effectuant les modifications nécessaires.

Théorème 14. Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS. Alors $\mathcal{L}(S)$ est rationnel si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d, \big(\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{*}_S \mathbf{x} \xrightarrow{*}_S \mathbf{y} \implies \mathbf{y} \geqslant \mathbf{x} - \mathbf{k}\big) \tag{1}$$

Démonstration. Commençons par montrer le sens $\big((1) \Rightarrow \mathcal{L}(S)$ rationnel $\big)$. Soit S un VAS vérifiant la propriété (1) pour un $k \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathit{Reach}(S)$. Supposons que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont indiscernables pour les petites valeurs, c'est-à-dire que pour toute coordonnée $i \in I$, on a soit $\mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)$, soit $\big(\mathbf{x}(i) \geqslant k$ et $\mathbf{y}(i) \geqslant k\big)$. Alors $\mathbf{x} \equiv_S \mathbf{y}$. En effet, on a $\mathbf{x} + \overline{w} \geqslant \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} + \overline{w} \geqslant \mathbf{0}$ pour tout $w \in A^*$, puisque les coordonnées qui diffèrent entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ne peuvent devenir négatives.

Ainsi, $\equiv_S$ admet au plus $(k+1)^d$ classes d'équivalences, donc $\mathcal{L}(S)$ est rationnel (théorème 12).

Prouvons maintenant la réciproque $\big(\mathcal{L}(S)$ rationnel $\Rightarrow (1)\ \big)$ par contraposée. Si S ne vérifie pas la propriété (1), alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une configuration accessible $\mathbf{x}$, un mot $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ et une coordonnée $i \in I$ tels que $(\mathbf{x} + \overline{w})(i) \leqslant \mathbf{x}(i) - k$.

On note $\mathbf{x_p} = \mathbf{x} + \overline{a_1 \cdots a_p} \in \mathit{Reach}(S)$ les différentes configurations obtenues en lisant $w = a_1 \cdots a_n$. On a alors $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \xrightarrow{a_1} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} + \overline{w}$.

Notons $\xi = \max\{|\overline{a}(j)| \mid a \in A, j \in I\}$ la valeur de la plus grande variation d'une coordonnée possible par une action. Alors, au moins k/ξ configurations $\mathbf{x}_p$ voient leur coordonnée i décroître, et l'on a une sous-séquence d'extractrice φ vérifiant $\mathbf{x}_{\varphi(0)}(i) > \mathbf{x}_{\varphi(1)}(i) > \cdots > \mathbf{x}_{\varphi(h)}(i)$ où $h \geqslant k/\xi$.

Ces configurations ne sont pas équivalentes pour $\equiv_S$: En effet, si l'on avait $\mathbf{x}_{\varphi(p)} \equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(q)} = (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u})$ avec $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant h$ et en notant $u = a_{\varphi(p)+1} \cdots a_{\varphi(q)}$, alors on aurait $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^r}) \equiv_S (\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^{r+1}})$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ (en procédant par récurrence sur r avec la proposition 13).

Or $\overline{u^r}(i) = r \times \overline{u}(i) = r \times (\mathbf{x}_{\varphi(q)}(i) - \mathbf{x}_{\varphi(p)}(i)) < -r$, ce qui prouve que $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^r})(i) < 0$ à partir d'un certain $r \in \mathbb{N}$, et donc $(\mathbf{x}_{\varphi(p)} + \overline{u^r}) \not\equiv_S \mathbf{x}_{\varphi(p)}$, d'où une contradiction.

On conclut qu'il existe au moins k/ξ classes d'équivalences pour $\equiv_S$ (et ce pour tout $k \in \mathbb{N}$), ainsi $\mathit{Reach}(S)/\equiv_S$ est infini. □

4.4 Rationalité par les circuits

On étend les configurations de $\mathbb{N}^d$ à des ω-configurations dans $\mathbb{N}_\omega^d$. On retrouve alors le lien avec les idéaux exposé dans la section 2.2.

Pour une ω-configuration $\mathfrak{m} \in \mathbb{N}_\omega^d$, on notera $J_{\mathfrak{m}}^{\text{fin}} = \{i \in I \mid \mathfrak{m}(i) \text{ est fini}\}$ l'ensemble des coordonnées bornées et $J_{\mathfrak{m}}^{\text{inf}} = \{i \in I \mid \mathfrak{m}(i) = \omega\}$ l'ensemble des coordonnées non-bornées de $\mathfrak{m}$.

Une coordonnée valant ω dans une configuration signifie que l'on a autant de ressources que nécessaires. ces coordonnées n'entrent donc pasa en compte dans le franchissement.

Définition 15. Soit $S = (A, \lambda)$ un VAS, $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ une ω-configuration et $u \in A^*$ une séquence d'actions. On dit que u est *franchissable* sur $\mathbf{x}$ lorsque pour tout préfixe v de u et pour toute coordonnée $i \in J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}}$, on a $\mathbf{x}(i) + \overline{v}(i) \geqslant 0$.

La ω-configuration obtenue en appliquant u à $\mathbf{x}$ est alors $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{u}$. Ainsi, $J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}} = J_{\mathbf{y}}^{\text{inf}}$.

Maintenant, pour obtenir un ω depuis une coordonnée finie, on requiert de pouvoir augmenter cette coordonnée autant que nécessaire.

Définition 16. Soit $S = (A, \lambda)$ un VAS et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}_\omega^d$ deux ω-configurations. On dit que $\mathbf{y}$ est *ω-accessible* à partir de $\mathbf{x}$ lorsque pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un mot $u_k \in A^*$ franchissable sur $\mathbf{x}$ tel que

1. pour tout $i \in J_{\mathbf{y}}^{\text{fin}}$, on a $\mathbf{x}(i) + \overline{u_k}(i) = \mathbf{y}(i)$
2. pour tout $i \in J_{\mathbf{y}}^{\text{inf}} \cap J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}}$, on a $\mathbf{x}(i) + \overline{u_k}(i) \geqslant k$

On constate que cette notion correspond à l'accessibilité classique lorsque $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des configurations finies de $\mathbb{N}^d$.

Cette définition fait le lien avec une notion similaire introduite par Valk et Vidal-Naquet [4], nommé "unbounded with context", qui se reformule ainsi :

Définition 17 ([4] def p. 309)**.** Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS (avec configuration initiale) et $\mathbf{y} \in \mathbb{N}_\omega^d$ une ω-configuration. On dit que $\mathbf{y}$ est *ω-accessible dans S* lorsque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists \mathbf{x} \in \mathit{Reach}(S), \big(\forall i \in J_{\mathbf{y}}^{\text{inf}}, \mathbf{x}(i) \geqslant k \ \wedge\ \forall i \in J_{\mathbf{y}}^{\text{fin}}, \mathbf{x}(i) = \mathbf{y}(i)\big)$$

Si on ne peut pas accéder à une ω-configuration plus grande que $\mathbf{y}$, on dit que $\mathbf{y}$ est *maximal.*

Théorème 18 ([4] théorème 4)**.** Soit S un VAS. Alors $\mathcal{L}(S)$ n'est pas rationnel si et seulement si il existe une ω-configuration $\mathbf{y} \in \mathbb{N}_\omega^d$ tel que

1. $\mathbf{y}$ est ω-accessible maximal dans S,
2. $J_\mathbf{y}^{\text{inf}}$ n'est pas borné inférieurement pour la configuration $\mathbf{y}' \in \mathbb{N}^d$, obtenue en posant $\mathbf{y}'(i) = 0$ si $i \in J_\mathbf{y}^{\text{inf}}$ et $\mathbf{y}'(i) = \mathfrak{i}$ si $i \in J_\mathbf{y}^{\text{fin}}$.

Théorème 19 ([4] lemme 3)**.** Soit S un VAS. Alors $\mathcal{L}(S)$ n'est pas rationnel si et seulement si il existe un circuit étiqueté par $v \in A^*$ dans le graphe de couverture partant d'une ω-configuration ω-accessible maximale $\mathbf{y}$, tel que $\overline{v}(i) < 0$ pour une coordonnée $i \in J_\mathbf{y}^{\text{inf}}$.

Définition 20. Soit $S = (A, \lambda)$ un VAS, $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ une ω-configuration et $v \in A^*$ un mot. On dit que v est *cyclable* sur $\mathbf{x}$ lorsque v est franchissable sur $\mathbf{x}$, et qu'il permet d'accéder à la même ω-configuration $\mathbf{x}$ (i.e. $\mathbf{x} \xrightarrow{v}_S \mathbf{x}$).

Théorème 21. Soit $S = (A, \lambda)$ un VAS et $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ une ω-configuration. Alors $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ n'est pas rationnel si et seulement si il existe une ω-configuration $\mathbf{y} \in \mathbb{N}_\omega^d$ et un mot $v \in A^*$ tels que

1. $\mathbf{y}$ est ω-accessible depuis $\mathbf{x}$ dans S,
2. v est cyclable sur $\mathbf{y}$,
3. $\overline{v} \not\geqslant \mathbf{0}$ (i.e. il existe un $i \in I$ tel que $\overline{v}(i) < 0$).

Si un mot est cyclable, il l'est sur une ω-configuration plus grande. On peut donc exiger que $\mathbf{y}$ soit maximal (donc dans Clover).

$\mathbf{x}$ ω-configuration générable s'il existe une mot $u \in A^*$ cyclable sur $\mathbf{x}$ tel que $\overline{u}(i) > 0$ pour tout $i \in J$

Théorème 22. À rectifier Soit $S = (A, \lambda)$ un VAS et $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ une ω-configuration. On a $\downarrow \mathbf{x} \cap \overline{\mathcal{R}(S)} \neq \varnothing$ ssi il existe deux mots $u, v \in A^*$ vérifiant

1. $\overline{u} \geqslant \mathbf{0}$,
2. Pour tout $i \in I$, $\overline{u}(i) = 0$ implique $\overline{v}(i) \geqslant 0$,
3. Il existe $i \in I$ tel que $\overline{v}(i) < 0$,
4. On peut accéder depuis $\mathbf{x}$ à une ω-configuration $\mathbf{y}$ sur laquelle u est franchissable.

On se restreint aux coordonnées de $J_\mathbf{x}^{\text{fin}}$ et on demande à surpasser la configuration obtenue en prenant la valeur minimale pour chaque coordonnée franchissant u.

Démonstration. Pas encore au point, ne pas regarder

Supposons que $\downarrow \mathbf{x} \cap \overline{\mathcal{R}(S)} \neq \varnothing$. On a donc une configuration initiale $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ telle que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ n'est pas rationnel. Il existe alors (d'après le théorème 14) pour tout $k \in \mathbb{N}$ une séquence d'actions franchissable $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u_k}_S \mathbf{y}_k \xrightarrow{v_k}_S \mathbf{z}_k$ et une coordonnée $i_k \in I$ tels que $\overline{v_k}(i_k) \leqslant k$.

Remarquons qu'une séquence d'action qui convient pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fonctionne aussi pour les valeurs de k inférieures. Par conséquent, on peut sélectionner uniquement les séquences qui nous intéresse, pour peu qu'il en reste une infinité :

— Comme I est fini, les indices i_k ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, donc (par le principe des tiroirs) il existe un $\iota \in I$ apparaissant une infinité de fois. On peut ainsi supposer que $i_k = \iota$ pour tout k.

— Comme $(\mathbb{N}^d, \leqslant)$ forme un bel ordre, la suite $(\overline{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite croissante pour $\leqslant$. On peut donc se ramener au cas où $(\overline{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Notons $J \subseteq I$ l'ensemble des coordonnées bornées dans les $\overline{u_k}$. Formellement, on définit

$$J = \{j \in I \mid sup\{\overline{u_k}(j) \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ est fini}\}, \text{ et pour } j \in J,\ \ h_j = \max\{\overline{u_k}(j) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Il nous faut maintenant définir des mots u et v vérifiant les trois points du théorème. Commençons par fabriquer u satisfaisant le point 1 :

— Pour que les coordonnées dans J des $\overline{u_k}$ soient positives pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on construit u'_k en retirant de u_k pour tout $j \in J$ les h_j premières actions qui font décroître la coordonnée j (ou moins s'il n'y en a plus). On obtient ainsi $\overline{u'_k}(j) \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in J$.

— Posons $\xi = \{|\overline{a}(i)| \mid a \in A, i \in I\}$. Lors du passage de u_k à u'_k, les coordonnées $i \in I \setminus J$ ne peuvent décroître d'au plus $\xi \times \sum_{j\in J} h_j$. Par ailleurs, comme $(\overline{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que pour tout $i \in I \setminus J$, la suite d'entiers $(\overline{u_k}(i))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini, il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in I \setminus J$, $\overline{u_{k_0}}(i) > \xi \times \sum_{j\in J} h_j$. On en déduit que $\forall i \in I \setminus J$, $\overline{u_{k_0}}(i) > 0$.

Par conséquent, le mot u'_{k_0} vérifie le point 1 : $\overline{u'_{k_0}} > \mathbf{0}$.

Maintenant, procédons de façon similaire sur les v_k. Pour tout $j \in J$, $(\overline{u_k}(j))_{k\in\mathbb{N}}$ est borné, donc $(\mathbf{x}_k(j))_{k\in\mathbb{N}}$ est borné également par $\ell_j = h_j + \mathbf{x}_{\text{init}}(j)$. On construit alors v'_k en retirant de v_k pour tout $j \in J$ les ℓ_j premières actions qui font décroître la coordonnée j. Tous les v'_k vérifient le point 2 (avec $u = u'_{k_0}$), puisque si pour un $i \in I$, $\overline{u'_{k_0}}(i) = 0$, alors $i \in J$, d'où $\overline{v'_k}(i) \geqslant 0$.

Enfin, en prenant $k_1 = 1 + \xi \times \sum_{j\in J} \ell_j$, on a $\overline{v_{k_1}}(\iota) \leqslant k_1$, d'où $\overline{v'_{k_1}}(\iota) < 0$, et v'_{k_1} vérifie aussi le point 3. Finalement, u'_{k_0} et v'_{k_1} vérifient les trois points , ce qui montre l'implication directe.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux mots $u, v \in A^*$ vérifiant les points 1, 2, et 3. Soit $\mathbf{x}_{\text{init}}$ une configuration sur laquelle u est franchissable (on choisit des coordonnées aussi grandes que nécessaire). Montrons que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ n'est pas rationnel.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $\rho = \max\{-\overline{v}(i) \mid i \in I\}$, et montrons alors que $u^{\rho\times k}v^k \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$.

- D'après le point 1, on a $\overline{u} > \mathbf{0}$, donc $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} > \underline{\mathbf{x}_{\text{init}}}$. Comme u est franchissable sur $\mathbf{x}_{\text{init}}$, le mot $u^{\rho\times k}$ l'est également. Posons $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u^{\rho\times k}}$ la configuration atteinte.
- D'après le point 2, si pour un $i \in I$, on a $\overline{v^k}(i) < 0$, alors $\overline{u}(i) > 0$, d'où $\mathbf{x}_k(i) \geqslant \rho \times k$. Par définition de ρ, on en déduit que $\overline{v^k}$ a bien les ressources nécessaires pour se déclencher sur $\mathbf{x}_k$, donc est bien franchissable. Posons $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \overline{v^k}$ la nouvelle configuration atteinte.
- Enfin, d'après le point 3, il existe un $i \in I$ tel que $\overline{v}(i) < 0$, d'où $\overline{v^k}(i) \leqslant -k$.

Par conséquent, l'exécution $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u^{\rho\times k}}_S \mathbf{x}_k \xrightarrow{v^k}_S \mathbf{y}_k$ vérifie la propriété (1) pour ce k. On notera que $\mathbf{x}_{\text{init}}$ est bien indépendant de k. Le langage $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ n'est donc pas rationnel, et S n'est pas structurellement rationnel. □

5 Décider la caractérisation

La procédure de décision nécessite de connaître deux choses :

1. D'abord, on veut pouvoir accéder à la liste des idéaux maximaux *Clover*(S) du VAS étudié,
2. Ensuite, il nous faut une procédure pour décider si un VAS donné est bornées.

Lemme 23 ([1] lemme 3)**.** Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS et $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe une configuration $\mathbf{x} \in \mathit{Reach}(S)$ et un mot $v \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ franchissable tel que $\overline{v}(i) < -k$ pour un certain $i \in I$. Alors on peut trouver une autre configuration $\mathbf{y}$ et un autre mot $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ tel que $\overline{w}(i) < -k$ et $\overline{u}(i) \leqslant 0$ pour tout préfixe u de w.

Démonstration. Notons z le plus long préfixe de v tel que $\overline{z}(i) \geqslant 0$. On a alors $v = zw$, et le mot w ainsi obtenu est franchissable à partir de $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{z}$, et vérifie $\overline{w}(i) = \overline{v}(i) - \overline{z}(i) \leqslant \overline{v}(i) \leqslant k$. De plus, pour tout préfixe u de w, on a $\overline{u}(i) = \overline{zu}(i) - \overline{z}(i) \leqslant \overline{zu}(i) < 0$ puisque zu est un préfixe de v plus long que z. □

Définition 24. Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \in \mathit{Clover}(S)$ de l'ensemble de couverture, notons $J_{\mathfrak{m}} \overset{def}{=} \{j \mid \mathfrak{m}(j) \neq \omega\}$ l'ensemble des coordonnées bornées pour les configurations de $\mathfrak{m}$. On écrit $J_{\mathfrak{m}} = \{j_1, \ldots, j_r\}$.

Pour tout $i \notin J_{\mathfrak{m}}$, on définit un $(r+1)-$VAS $S(\mathfrak{m}, i) = \big(A(\mathfrak{m}, i), \lambda(\mathfrak{m}, i), \mathbf{x}_{\mathfrak{m}}\big)$ en posant

- $A(\mathfrak{m}, i) \overset{def}{=} \{a(\mathfrak{m}, i) \mid a \in A\}$ l'alphabet des actions
- λ l'étiquetage qui à toute lettre $a(\mathfrak{m}, i)$ associe le vecteur $\overline{a(\mathfrak{m}, i)} \overset{def}{=} \big(\overline{a}(j_1), \ldots, \overline{a}(j_r), -\overline{a}(i)\big)$,
- $\mathbf{x}_{\mathfrak{m}} \overset{def}{=} \big(\mathfrak{m}(j_1), \ldots, \mathfrak{m}(j_r), 0\big) \in \mathbb{N}^{r+1}$ la configuration initiale.

Revoir def, thm et preuve en gardant le même alphabet A, mais en changeant l'étiquetage. On regarde ainsi le comportement de chaque coordonnée non-bornée indépendamment expliquer des autres.

On étend la correspondance entre les actions de S et celles de $S(\mathfrak{m}, i)$ aux mots : pour $w = a_1 \cdots a_n \in A^*$, on pose $w(\mathfrak{m}, i) \overset{def}{=} a_1(\mathfrak{m}, i) \ \cdots \ a_n(\mathfrak{m}, i) \in A(\mathfrak{m}, i)^*$.

Le théorème suivant est alors obtenu :

Théorème 25 ([1] théorème 2)**.** ce n'est pas exactement le théorème 2, car ici on parle de Clover, dire donc que c'est similaire car ça ne parle que des Clover Un VAS $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ est rationnel si et seulement si tous les VAS $S(\mathfrak{m}, i)$ sont bornés pour tout ~~idéal maximal~~ $\mathfrak{m} \in \mathit{Clover}(S)$ et pour tout $i \in I \setminus J_{\mathfrak{m}}$.

Démonstration. Supposons que l'un des $S(\mathfrak{m}, i)$ ne soit pas borné, et posons $r = |J_\mathfrak{m}|$. La coordonnée $r+1$ (associée à $\mathfrak{m}(i)$) est la seule à pouvoir être non-bornée. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe donc un mot $w(\mathfrak{m}, i) \in \mathcal{L}(S(\mathfrak{m}, i))$ vérifiant $\overline{w(\mathfrak{m}, i)}(r+1) > k$.

Alors on peut trouver une configuration $\mathbf{x} \in \mathit{Reach}(S)$ de $\mathfrak{m}$ telle que $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x})$. En effet, w a le même effet sur les coordonnées $j_p \in J_\mathfrak{m}$ que $w(\mathfrak{m}, i)$ sur $p \leqslant r$, puisque pour tout $x \in \mathit{Reach}(S)$ et tout préfixe u de w, on a $(\mathbf{x} + \overline{u})(j_p) = \mathfrak{m}(j_p) + \overline{u}(j_p) = \mathbf{x}_\mathfrak{m}(p) + \overline{u(\mathfrak{m}, i)})(p) \geqslant 0$. Les autres coordonnées (non-bornées dans $\mathfrak{m}$) peuvent ensuite être choisies aussi grandes que nécessaire pour franchir w.

Comme $\overline{w}(i) = -\overline{w(\mathfrak{m}, i)}(r+1) < -k$, on sait que S ne vérifie pas (1) pour ce k, ce qui assure que $\mathcal{L}(S)$ n'est pas rationnel (par le théorème 14).

On suppose maintenant qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ majorant les coordonnées de toutes les configurations accessibles de tous les $S(\mathfrak{m}, i)$. Par l'absurde, supposons que la propriété (1) n'est pas vérifiée pour ce k. Par le lemme 23, il existe une coordonnée $i \leqslant d$, une configuration $\mathbf{y}$ et un mot $w \in \mathcal{L}(S, \mathbf{y})$ tel que $\overline{w}(i) < -k$ et $\overline{u}(i) \leqslant 0$ pour tout préfixe u de w.

Soit $\mathfrak{m} \in \mathit{Clover}(S)$ un élément maximal contenant $\mathbf{y}$. Alors il existe une configuration $\mathbf{z} \in \mathfrak{m}$ vérifiant $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{z}$. Dans le VAS $S(\mathfrak{m}, i)$, le mot $w(\mathfrak{m}, i)$ appartient au langage $\mathcal{L}(S(\mathfrak{m}, i))$ puisque pour tout préfixe $u(\mathfrak{m}, i)$ de $w(\mathfrak{m}, i)$, on a

— $(\mathbf{x}_\mathfrak{m} + \overline{u(\mathfrak{m}, i)})(p) = (\mathbf{z} + \overline{u})(j_p) \geqslant (\mathbf{y} + \overline{u})(j_p) \geqslant 0$ pour tout p car u est franchissable sur $\mathbf{y}$,

— $(\mathbf{x}_\mathfrak{m} + \overline{u(\mathfrak{m}, i)})(r+1) = -\overline{u}(i) \geqslant 0$ où $r = |J_\mathfrak{m}|$.

Néanmoins, la configuration accessible $(\mathbf{x}_\mathfrak{m} + \overline{w(\mathfrak{m}, i)}) \in \mathit{Reach}(S(\mathfrak{m}, i))$ contredit l'hypothèse de borne puisque $\overline{w(\mathfrak{m}, i)}(r+1) = -\overline{w}(i) > k$.

□

6 Calcul des configurations maximales rationnelles

on fait plus puisqu'on calcule les éléments minimaux pour lesquels le VAS n'est pas rationnel

Définition 26. Pour un VAS S, une configuration $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ est *rationnelle pour S* si $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ est rationnel.

Nous allons considérer l'ensemble des configurations $\mathbf{x}$ pour lesquelles $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ est rationnel et son complémentaire, l'ensemble des configurations $\mathbf{x}$ pour lesquelles $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$n'est pas rationnel. Dans cette partie, le comportement d'un VAS est donc étudié à partir de l'ensemble de ses configurations initiales possibles c'est-à-dire pour tout les $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$. Posons donc :

$$\mathcal{R}(S) \overset{def}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \text{ est rationnel} \right\}$$

Rappelons que nous notons $\overline{\mathcal{R}(S)} = \mathbb{N}^d - \mathcal{R}(S)$. Montrons que si $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ n'est pas rationnel alors $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}')$ n'est pas rationnel pour tout $\mathbf{x}' \geqslant \mathbf{x}$ ce qui revient à dire que la propriété de non-rationalité est monotone.

Proposition 27. Pour tout VAS $S = (A, \lambda)$, on a $\overline{\mathcal{R}(S)}$ est clos par le haut et $\overline{\mathcal{R}(S)} = \uparrow \mathit{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$ où $\mathit{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$ est l'ensemble fini des éléments minimaux de $\overline{\mathcal{R}(S)}$.

Démonstration. Montrons d'abord que $\overline{\mathcal{R}(S)}$ est clos par le haut. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{N}^d$ deux configurations vérifiant $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{x}'$. Supposons que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ ne soit pas rationnel.

D'après le théorème 14, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ une exécution $\mathbf{x} \xrightarrow{u}_S \mathbf{y}_k \xrightarrow{v}_S \mathbf{z}_k$ vérifiant $\overline{v} = \mathbf{z}_k - \mathbf{y}_k \ngeqslant -k$. Comme $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{x}'$, du fait de la monotonie des VAS, la séquence uv est aussi franchissable à partir de $\mathbf{x}'$, et l'on obtient l'exécution $\mathbf{x}' \xrightarrow{u}_S \mathbf{y'}_k \xrightarrow{v}_S \mathbf{z'}_k$. où $\mathbf{y'}_k = \mathbf{y}_k + (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ et $\mathbf{z'}_k = \mathbf{z}_k + (\mathbf{x}' - \mathbf{x})$.

On a alors $\mathbf{z'}_k - \mathbf{y'}_k = \overline{v} \ngeqslant -k$, donc $(S, \mathbf{x}')$ ne satisfait pas non plus la propriété (1). On en déduit que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}')$ n'est pas rationnel.

L'ensemble $\mathit{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$ est fini car $\leqslant$ est un bel-ordre sur $\mathbb{N}^d$. On déduit que $\overline{\mathcal{R}(S)} = \uparrow M_S$ d'après la proposition 5. □

Remarque. On en déduit que $\mathcal{R}(S) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \mid \mathcal{L}(S, \mathbf{x}) \text{ est rationnel} \right\}$ est clos par le bas. Nous allons calculer une représentation finie de $\mathcal{R}(S)$ en calculant $\mathit{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$ qui est une représentation finie de son complémentaire $\overline{\mathcal{R}(S)}$.

Montrons maintenant que l'ensemble fini $\mathit{Min}(\overline{\mathcal{R}(S)})$ est calculable. On utilise pour cela sur un résultat de Valk & Jantzen [5]. noter plutôt VJ pour être équitable envers les auteurs ou bien Valk & al. mais ValkJ est peu clair Les noms ne sont pas censés apparaître, seulement les numéros.

Théorème 28 ([5] théorème 2.14)**.** Soit $K \subseteq \mathbb{N}^d$ un ensemble clos par le haut. Alors $Min(K)$ est calculable si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$, le prédicat $p_K(\mathbf{x}) = (\downarrow \mathbf{x} \cap K \neq \varnothing)$ est décidable.

Proposition 29. L'ensemble M_S est calculable pour tout VAS S.
Rapprocher le "d" du "VAS". Euh, c'est-à-dire ?

Démonstration. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$, le prédicat $p_{\overline{\mathcal{R}(S)}}(\mathbf{x})$ est équivalent au prédicat "$\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ est rationnel". Reste à considérer les cas où certaines coordonnées de $\mathbf{x}$ valent ω.

Montrons que le prédicat $p_K(\mathbf{x}) = (\downarrow \mathbf{x} \cap \mathbb{N}^d \cap K \neq \emptyset)$ est décidable pour $K = \overline{\mathcal{R}(S)}$. Le principe doit être le même que la preuve du théorème 3.11 (toujours dans Valk) pour les 4 ensembles de marquages étudiés. la preuve est à faire !!! □

Corollaire 30. L'ensemble $Min(\overline{\mathcal{R}(S)})$ est fini et calculable pour tout VAS S.

On en déduit le corollaire suivant :

Proposition 31. L'ensemble des configurations rationnelles est clos par le bas et son ensemble d'idéaux maximaux est fini et calculable pour tout VAS S

Démonstration. On utilise le fait qu'on peut passer d'une représentation finie d'un ensemble clos par le haut dans $\mathbb{N}^d$ à une représentation finie de son complémentaire (qui est clos par le bas) dans $\mathbb{N}^d$ [2].

□

Remarque. Pour tout VAS S, nous avons donc découpé l'ensemble $\mathbb{N}^d$ des configurations initiales en deux sous-ensembles disjoints, $\mathcal{R}(S)$ et son complémentaire $\overline{\mathcal{R}(S)}$, tels que $\mathcal{R}(S)$ est clos par le bas (et $\overline{\mathcal{R}(S)}$ est clos par le haut). Quelle est la complexité du calcul de $Min(\overline{\mathcal{R}(S)})$? L'algorithme proposé demande de calculer $Clover(S)$ donc la complexité de l'algorithme est Ackermann. Ceci ne veut pas dire qu'on ne puisse pas faire mieux.

7 Complexité de la rationalité structurelle

Nous allons montrer qu'on peut décider dans NP si un VAS S est rationnel pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$. Bien sûr, une conséquence de la section précédente permet de conclure que ce problème est décidable puisqu'on peut calculer $Min(\overline{\mathcal{R}(S)})$ et décider si $Min(\overline{\mathcal{R}(S)}) = \varnothing$.

Définition 32. On dit qu'un VAS S est *structurellement rationnel* si $\mathcal{L}(S, \mathbf{x})$ est rationnel pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$.

Remarque. On a donc que S est structurellement rationnel si et seulement si $\mathcal{R}(S) = \mathbb{N}^d$ ou encore si $Min(\overline{\mathcal{R}(S)}) = \varnothing$. On observe que S n'est jamais rationnel si $Min(\overline{\mathcal{R}(S)}) = \{\mathbf{0}\}$.

Nous allons étudier le problème de décision suivant appelé *rationalité structurelle* :
Donnée : un $d-$VAS $S = (A, \lambda)$
Question : S est-il structurellement rationnel ?

Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ (pas forcément positifs), on note $\mathbf{x} \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$ pour $u \in A^*$ lorsque $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overline{u}$. Il s'agit ici d'une simple égalité vectorielle dans $\mathbb{Z}^d$, sans notion de franchissement (on pourra parler de $\mathbb{Z}$-VAS). On écrira $\mathbf{x} \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$ quand il existe $u \in A^*$ tel que $\mathbf{x} \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{y}$.

Valk et Vidal-Naquet proposent dans [4] VV une caractérisation pour la propriété de rationalité structurelle.

Théorème 33 ([4] théorème 6)**.** Un $d-$VAS $S = (A, \lambda)$ n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{Z}^d$ tels que

1. $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2$
2. Pour tout $i \in I$, $\mathbf{x}_1(i) = \mathbf{x}_2(i)$ implique $\mathbf{x}_3(i) \leqslant \mathbf{x}_4(i)$,
3. Il existe un $i \in I$ tel que $\mathbf{x}_3(i) > \mathbf{x}_4(i)$.
4. $\mathbf{0} \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_1 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_2 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_3 \overset{*}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_4$,

Énoncé ainsi, décider la rationalité avec le théorème 33 demande d'utiliser un algorithme pour résoudre l'accessibilité ce qui est maintenant connu comme Ackermann-dur (ref récentes). Mais on peut remarquer que lister les configurations rencontrées dans le point 4 ci-dessus est inutile pour la rationalité structurelle, puisqu'on peut augmenter au besoin la configuration initiale pour permettre les étapes intermédiaires. On propose ainsi un autre théorème qui ne demande pas de décider l'accessibilité et - mieux - qui sera dans NP. Reste à prouver la NP-dureté, c'est dommage si ce n'est pas fait.

Lemme 34. Soit $S = (A, \lambda, \mathbf{x}_{\text{init}})$ un VAS initialisé et $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_\omega^d$ une ω-configuration apparaissant dans le graphe de couverture G de S. Alors il existe un mot $u \in A^*$ tel que

1. pour tout $j \in J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}}$, on a $\overline{u}(j) \geqslant 0$,
2. pour tout $j \in J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}}$, on a $\overline{u}(j) \geqslant 1$.

Démonstration. Comme $\mathbf{x}$ étiquette un sommet de G, il existe un mot $w \in A^*$ permettant d'accéder à $\mathbf{x}$ depuis $\mathbf{x}_{\text{init}}$ dans G. Considérons la séquence des sommets du graphe parcourue en lisant le mot w, que l'on notera $\mathbf{x}_{\text{init}} = \mathbf{x_0} \xrightarrow{a_1}_G \mathbf{x_1} \xrightarrow{a_2}_G \cdots \xrightarrow{a_n}_G \mathbf{x_n} = \mathbf{x}$ pour $w = a_1 a_2 \dots a_n$.

Les omegas apparaissant dans une de ces ω-configurations ne peuvent disparaître au cours de l'exécution. On a donc les inclusions $\varnothing = J_{\mathbf{x_0}}^{\text{inf}} \subseteq J_{\mathbf{x_1}}^{\text{inf}} \subseteq \cdots \subseteq J_{\mathbf{x_n}}^{\text{inf}}$. Maintenant, pour chaque étape $1 \leqslant k \leqslant n$, par construction du graphe, il existe un entier $0 \leqslant \ell \leqslant k$ vérifiant :

— pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{fin}}$, on a $\mathbf{x}_\ell(j) = \mathbf{x_k}(j)$,

— pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{inf}} \cap J_{\mathbf{x_{k-1}}}^{\text{fin}}$, on a $\mathbf{x}_\ell(j) < \mathbf{x_k}(j)$.

On a donc l'existence d'un mot $w_k = a_{\ell+1} \dots a_k$ vérifiant $\overline{w_k}(j) = 0$ pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{fin}}$, et $\overline{w_k}(j) > 0$ pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{inf}} \cap J_{\mathbf{x_{k-1}}}^{\text{fin}}$.

Par récurrence sur $k \leqslant n$, on construit un mot u_k vérifiant $\overline{u_k}(j) = 0$ pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{fin}}$, et $\overline{u_k}(j) > 0$ pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{inf}}$. Prendre le mot vide pour u_0 convient puisque $J_{\mathbf{x}_{\text{init}}}^{\text{inf}} = \varnothing$.

Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Si un u_{k-1} convenable existe, notons $\delta = -\min \left\{ \overline{w_k}(j) \;\middle|\; j \in J_{\mathbf{x_{k-1}}}^{\text{inf}} \right\}$ la plus grande valeur négative dans une coordonnée de $\overline{w_k}$. Posons ensuite $u_k = (u_{k-1})^{\delta+1} w_k$, obtenu en concaténant $\delta + 1$ fois le mot u_{k-1} au mot w_k. On a alors

— pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{fin}}$, $\overline{u_k}(j) = \overline{u_{k-1}}(j) \times (\delta + 1) + \overline{w_k}(j) = 0$ puisque $J_{\mathbf{x_{k-1}}}^{\text{fin}} \subseteq J_{\mathbf{x_k}}^{\text{fin}}$,

— pour tout $j \in J_{\mathbf{x_k}}^{\text{inf}}$, $\overline{u_k}(j) = \overline{u_{k-1}}(j) \times (\delta + 1) + \overline{w_k}(j) \geqslant \delta + 1 - \delta > 0$.

ce qui conclut l'hérédité de la récurrence.

Ainsi, le mot $u = u_n$ satisfait le lemme. □

On notera que le mot u ainsi construit n'est pas forcément franchissable sur $\mathbf{x}_{\text{init}}$. Néanmoins, la rationnalité structurelle permet d'éviter cette contrainte.

Théorème 35. Un d−VAS $S = (A, \lambda)$ n'est pas structurellement rationnel si et seulement s'il existe $u, v \in A^*$ tels que

1. $\overline{u} > \mathbf{0}$,
2. Pour tout $i \in I$, $\overline{u}(i) = 0$ implique $\overline{v}(i) \geqslant 0$,
3. Il existe $i \in I$ tel que $\overline{v}(i) < 0$.

Remarque. Les caractérisations des théorèmes 33 et 35 sont bien équivalentes (mal dit) :
À partir des configurations $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$, on choisit simplement pour u le mot permettant d'aller de $\mathbf{x}_1$ à $\mathbf{x}_2$, et pour v le mot allant de $\mathbf{x}_3$ à $\mathbf{x}_4$.
Dans l'autre sens, avec les mots u, v, on regarde simplement l'exécution $\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 \overset{u}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 \overset{v}{\rightsquigarrow} \mathbf{x}_4$.

Démonstration. Supposons que S ne soit pas structurellement rationnel. Il existe donc une configuration initiale $\mathbf{x}_{\text{init}} \in \mathbb{N}^d$ telle que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ n'est pas rationnel. D'après le théorème 14, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une séquence d'actions franchissable $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u_k}_S \mathbf{x}_k \xrightarrow{v_k}_S \mathbf{y}_k$ et une coordonnée $i_k \in I$ tels que $\overline{v_k}(i_k) \leqslant k$.

Remarquons qu'une séquence d'actions qui convient pour un certain $k \in \mathbb{N}$ fonctionne aussi pour les valeurs inférieures à k. Par conséquent, on peut sélectionner uniquement les séquences qui nous intéresse, pour peu qu'il en reste une infinité.confus

— Comme I est fini, les indices i_k ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, donc (par le principe des tiroirs) il existe un $\iota \in I$ i apparaissant une infinité de fois. Considérerons la sous-suite infinie $(i_{\varphi(k)})$ telle que $i_{\varphi(k)} = \iota$, et à un renomage près des indices, on peut ainsi supposer que $i_k = \iota$ pour tout k.

— Comme $(\mathbb{N}^d, \leqslant)$ forme un bel ordre, la suite $(\overline{u_k})_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite croissante pour $\leqslant$. Là encore, à un renomage des indices près, on peut se ramener au cas où $(\overline{u_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Notons $J \subseteq I$ l'ensemble des coordonnées ~~bornées~~ dans les $\overline{u_k}$.confus : coordonnées entières, dans tous les u_k donc il faut expliquer que cette phrase a un sens car le coordonnées finies pourraient, à priori bouger selon les k considérés Formellement, on définit

$$J = \{ j \in I \mid \sup \{ \overline{u_k}(j) \mid k \in \mathbb{N} \} \text{ est fini} \}, \text{ et pour } j \in J, \;\; h_j = \max \{ \overline{u_k}(j) \mid k \in \mathbb{N} \}$$

— Comme $(\overline{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \exists j \in J, \overline{u_k}(j) < h_j\}$ est fini NON le cas stationnaire ? dire strictement croissante et prouver. On peut donc supposer en supprimant ces lesquelles ?séquences que les $\overline{u_k}(j)$ sont égaux pour tout $k \in \mathbb{N}$ ~~à $j \notin J$ fixé~~.

— Les ~~autres~~ coordonnées $\overline{u_k}(j)$ pour $j \in I - J$ sont aussi croissantes une suite peut être croissante mais pas des coordonnéeset tendent vers l'infini on pourrait utiliser la notation, après definition, $lim_{k\to\infty} u_k$ et même $lim\ u_k$. On peut donc supposer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \notin J$, on a $\overline{u_k}(j) \geqslant k$.

On va raisonner à l'aide du graphe de couverture de S ~~sur~~ à partir de la configuration initiale $\mathbf{x}_{\text{init}}$. Fixons un $k \in \mathbb{N}$ strictement plus grand que toutes les valeurs entières apparaissant dans les ~~coordonnées~~ configurations du graphe de couverture, et regardons le comportement du mot u_k sur ce graphe.

Le sommet atteint par franchissement de u_k à partir de XXXX pourquoi est-ce franchissable ? ? ?est étiqueté par une ω-configuration $\mathbf{x}$. considérons l'unique élément x' (on peut avoir x'=x) de Clover tel que $x \leqslant x'$ ~~On peut de plus supposer NON que $\mathbf{x}$ est maximal (donc appartient à Clover) en remplaçant $\mathbf{x}$ par une ω-configuration maximale au dessus de $\mathbf{x}$ (il en existe puisque le graphe G est fini)~~. Comme pour tout $j \notin J$, on a $\overline{u_k}(j) \geqslant k$, on est certain que $\mathbf{x}(j) = \omega$ dans ce cas. Ainsi, on a l'inclusion $J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}} \subseteq J$.

Maintenant, en utilisant le lemme 34 sur $\mathbf{x}$, on obtient l'existence d'un mot $u \in A^*$ tel que

— pour tout $j \in J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}}$, on a $\overline{u}(j) \geqslant 0$,

— pour tout $j \in J_{\mathbf{x}}^{\text{inf}}$, on a $\overline{u}(j) > 0$.

En particulier, $\overline{u} \geqslant \mathbf{0}$ (ce qui montre le point 1 du théorème), et pour tout $j \notin J$, $\overline{u}(j) > 0$.

Intéressons-nous maintenant aux mots v_k. Posons $\xi = \max\{|\overline{a}(i)| \mid a \in A, i \in I\}$, et notons γ le nombre de sommets du graphe de couverture G de $(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$.

En choisissant $k > \gamma\times\xi$, on peut ~~subdiv~~factoriser v_k en $\gamma+1$ mots w_i tel que $v_k = w_1 w_2 \dots w_{\gamma+1}$ satisfaisant

$$\mathbf{x_k} = \mathbf{z_0} \xrightarrow{w_1}_S \mathbf{z_1} \xrightarrow{w_2}_S \cdots \xrightarrow{w_{\gamma+1}}_S \mathbf{z}_{\gamma+1} = \mathbf{y_k}$$

de telle manière à ce que $\mathbf{z_0}(\iota) > \mathbf{z_1}(\iota) > \cdots > \mathbf{z}_{\gamma+1}(\iota)$. On rappelle que $\iota \in I$ est la coordonnée telle que $\overline{v_k}(\iota) \leqslant k$. Lire le mot v_k dans le graphe de couverture à partir du sommet associé à la ω-configuration $\mathbf{x}$ donne alors

$$\mathbf{x} = \mathbf{q_0} \xrightarrow{w_1}_G \mathbf{q_1} \xrightarrow{w_2}_G \cdots \xrightarrow{w_{\gamma+1}}_G \mathbf{q}_{\gamma+1}$$

où les $\mathbf{q}_\ell$ sont des ω-configurations. Soulignons que comme $\mathbf{x}$ ~~a été supposé~~ est maximal, on a $J_{\mathbf{q_0}}^{\text{inf}} = \cdots = J_{\mathbf{q}_{\gamma+1}}^{\text{inf}}$. Par le lemme des tiroirs, deux de ces ω-configurations $\mathbf{q}_\ell$ et $\mathbf{q}_{\ell'}$ sont identiques, et on obtient un circuit partant de la ω-configuration $\mathbf{q}_\ell$ et étiqueté par un facteur $v \in A^*$ de v_k.

En revenant aux configurations NON, coordonnées finies de quoi ?, on a donc $\mathbf{z}_\ell \xrightarrow{v}_S \mathbf{z}_{\ell'}$ avec $\mathbf{z}_\ell =_{\text{fin}} \mathbf{z}_\ell$ et $\mathbf{z}_\ell(\iota) > \mathbf{z}_\ell(\iota)$.

— $\mathbf{z}_\ell =_{\text{fin}} \mathbf{z}_\ell$ permet de montrer le point 2 : Pour $i \in I$, si $\overline{u}(i) = 0$, alors $i \in J_{\mathbf{x}}^{\text{fin}} = J_{\mathbf{z}_\ell}^{\text{fin}}$ (car $\mathbf{x}$ est maximal), ce qui assure que $\overline{v}(i) = 0$.

— $\mathbf{z}_\ell(\iota) > \mathbf{z}_\ell(\iota)$ prouve que $\overline{v}(\iota) < 0$, montrant le point 3.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux mots $u, v \in A^*$ vérifiant les points 1, 2, et 3. Soit $\mathbf{x}_{\text{init}}$ une configuration ~~sur~~ laquelle u est franchissable (on choisit des coordonnées aussi grandes que nécessaire) pourquoi on peut ?. Montrons que $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ n'est pas rationnel.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $\rho = \max\{-\overline{v}(i) \mid i \in I\}$, et montrons alors que $u^{\rho\times k} v^k \in \mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$.

— D'après le point 1, on a $\overline{u} > \mathbf{0}$, donc $\mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u} > \mathbf{x}_{\text{init}}$. Comme u est franchissable sur $\mathbf{x}_{\text{init}}$, le mot $u^{\rho\times k}$ l'est également. Posons $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{\text{init}} + \overline{u^{\rho\times k}}$ la configuration atteinte VAGUE, écrire $x --> x_k$.

— D'après le point 2, si pour un $i \in I$, on a $\overline{v^k}(i) < 0$, alors $\overline{u}(i) > 0$, d'où $\mathbf{x}_k(i) \geqslant \rho \times k$. Par définition de ρ, on en déduit que $\overline{v^k}$ ~~a bien les ressources nécessaires pour se déclencher sur~~ $\mathbf{x}_k$, ~~donc~~ est franchissable à partir de $\mathbf{x}_k$. Posons $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k + \overline{v^k}$ la nouvelle configuration atteinte à partir de xxx.

— Enfin, d'après le point 3, il existe un $i \in I$ tel que $\overline{v}(i) < 0$, d'où $\overline{v^k}(i) \leqslant -k$.

Par conséquent, ~~l'exécution~~ la séquence $\mathbf{x}_{\text{init}} \xrightarrow{u^{\rho\times k}}_S \mathbf{x}_k \xrightarrow{v^k}_S \mathbf{y}_k$ vérifie la propriété (1) pour ce k. On notera que $\mathbf{x}_{\text{init}}$ est bien indépendant de k. Le langage $\mathcal{L}(S, \mathbf{x}_{\text{init}})$ n'est donc pas rationnel, et S n'est pas structurellement rationnel. $\square$

Théorème 36. Le problème de la rationalité structurelle est dans NP pour les VAS.

Démonstration. Le théorème 35 montre que le problème de la rationalité structurelle revient à décider le problème de décision suivant.

Donnée : un ensemble de vecteurs $\lambda(A) \subseteq \mathbb{Z}^d$ (les étiquettes des actions de A).

Question : Existe-t-il deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ obtenus comme combinaison semi-linéaire de $\lambda(A)$ vérifiant les 3 conditions suivantes :

1. $\mathbf{u} > \mathbf{0}$,
2. Pour tout $i \in I$, $\mathbf{u}(i) = 0$ implique $\mathbf{v}(i) \geqslant 0$,
3. $\neg(\mathbf{v} \geqslant 0)$.

C'est du Presburger existentiel et c'est donc dans NP. □

8 Conclusion et perspectives

appliquer aux very-WSTS, aux affine VAS,...

9 Commentaires

Vérifier qu'on peut énoncer Vidal-Naquet sur le graphe de couverture minimal défini par le graphe de Karp-Miller dans lequel on a gardé que les marquages maximaux.
Vérifier que ce nouveau graphe peut être obtenu à partir de Clover en ajoutant les transitions possibles (prolongées par continuité sur $\mathbb{N}^d$). Vérifier qu'il ne manque pas de transitions utiles.

Tenter de se débarrasser du graphe, de Clover, voire plus dans la preuve de Valk et Vidal-Naquet.

Simplifier le thm 12 pour avoir un calcul facile dans les cas faciles (borné).

Voir Garey, Johnson : référence pour les problèmes de complexité sur les vecteurs

Regarder taille de l'automate (minimal ?) construit par GY et VVN. Est-ce Ackermann ?

Réduire la rationalité à la bornitude, la terminaison ou la couverture.

Programme : recherche jusqu'au 15 juin écriture article du 15 juin au 15 juillet

FSTTCS 2021 : 41st IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science

FSTTCS 2021 : December 15–18, 2021. Post-conference workshops : December 19, 2021.

deadline : unknown but usually 15-25 july, say **15 july**

Submissions must be in electronic form via EasyChair using the LIPIcs LaTeX style file. Submissions must not exceed 12 pages (excluding bibliography), but may include a clearly marked appendix containing technical details. The appendix will be read only at the discretion of the program committee. Simultaneous submissions to journals or other conferences with published proceedings are disallowed.

Références

[1] A. Ginzburg and M. Yoeli. Vector addition systems and regular languages. *Journal of Computer and System Sciences*, 20(3) :277–284, jun 1980.

[2] Jean Goubault-Larrecq, Simon Halfon, P. Karandikar, K. Narayan Kumar, and Philippe Schnoebelen. The ideal approach to computing closed subsets in well-quasi-orderings. In Peter M. Schuster, Monika Seisenberger, and Andreas Weiermann, editors, *Well-Quasi Orders in Computation, Logic, Language and Reasoning*, volume 53 of *Trends In Logic*, pages 55–105. Springer, 2020.

[3] Michael Rabin and Dana Scott. Finite automata and their decision problems. *IBM Journal of Research and Development*, 3 :114–125, 04 1959.

[4] R. Valk and G. Vidal-Naquet. Petri nets and regular languages. *J. Comput. Syst. Sci.*, 23 :299–325, 1981.

[5] Rüdiger Valk and Matthias Jantzen. The residue of vector sets with applications to decidability problems in petri nets. *Acta Informatica*, 21 :643–674, 1985.