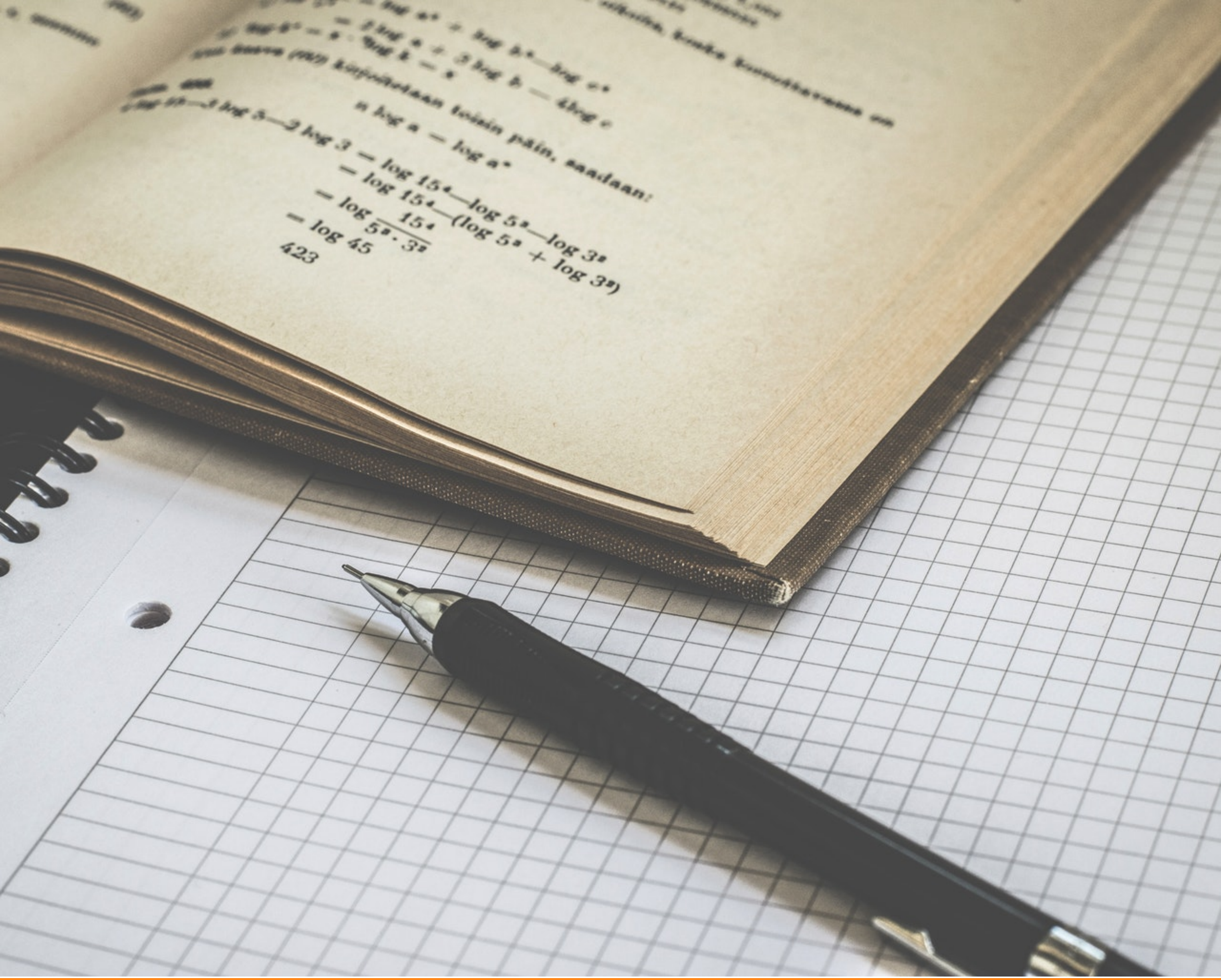

工科数学试卷汇总

高数、线代、概率、复变

作者：sikouhjw、xajzh

组织：临时组织起来的重排小组

时间：May 12, 2019

版本：1.00

确实，时　间和空间
是有限的。确实，我们总会有
分开的时候。但是正因为这样，
我们才会努力学习，我们才会
努力前进。我们的信仰是
享受数学。因为“数
学穿越时空”。
♡

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。”—*SCIbird*

目 录

1 声明 **1**

2 高等数学试卷汇总 **2**

2.1 高数 (一) 期中 2

2.1.1 2018-2019A7 2

2.1.2 2018-2019A7 答案 3

2.2 高数 (一) 期终 6

2.2.1 2018-2019A15 6

2.2.2 2018-2019A15 答案 6

2.3 高数 (二) 期中 6

2.3.1 2017-2018 6

2.3.2 2017-2018 答案 6

2.3.3 2018-2019B10 6

2.4 高数 (二) 期终 6

2.4.1 2014-2015 6

2.4.2 2017-2018A 6

2.4.3 2017-2018A 答案 6

2.4.4 2017-2018B 6

2.4.5 2017-2018B 答案 6

2.5 额外的练习 6

3 线性代数试卷汇总 **7**

4 概率统计试卷汇总 **8**

5 复变函数试卷汇总 **9**

5.1 2018-2019A 9

5.2 2018-2019A 答案 10

第 1 章 声明

本汇总不得用于商业用途，最新版下载地址：Github，不保证题目、答案的正确性，如有错误可通过 QQ 群[1]或者邮箱[2]联系我们

[1]991832226
[2]489765924@qq.com

第 2 章 高等数学试卷汇总

2.1 高数 (一) 期中

2.1.1 2018-2019A7

一、选择题

1. 微分方程 $(y')^3 + 3\sqrt{y''} + x^4 y''' = \sin x$ 的阶数是 ( )

(A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 3

2. 设 $f(x, y) = x - y - \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $f_x(3, 4) =$( )

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $-\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

3. 微分方程 $y' = \frac{y}{x}$ 的一个特解是 ( )

(A) $y = 2x$ (B) $e^y = x$ (C) $y = x^2$ (D) $y = \ln x$

4. 若 $z = \ln\sqrt{1 + x^2 + y^2}$, 则 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,1)} =$( )

(A) $\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{3}$ (B) $\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{2}$ (C) $\frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{1}$ (D) $3(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$

5. 设直线 $L:\begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$, 平面 η : $4x - 2y + z - 2 = 0$, 则 ( )

(A) L 在 η 上 (B) L 平行于 η (C) L 垂直于 η (D) L 与 η 斜交

6. 方程 $y' + 3xy = 6x^2 y$ 是 ( )

(A) 二阶微分方程 (B) 非线性微分方程

(C) 一阶线性非齐次微分方程 (D) 可分离变量的微分方程

7. 曲面 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ 与平面 $x = y$ 的交线是 ( )

(A) 两条直线 (B) 双曲线 (C) 椭圆 (D) 抛物线

8. 设 $z = e^{x^2 y}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$( )

(A) $2y\left(1 + x^3\right) e^{x^2 y}$ (B) $e^{x^2 y}$

(C) $2x\left(1 + x^2 y\right) e^{x^2 y}$ (D) $2x e^{x^2 y}$

9. 下列结论正确的是 ( )

(A) $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}$ (B) 若 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ 且 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 则 $\vec{b} = \vec{c}$

(C) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ (D) 若 $|\vec{a}| = 1, \left|\vec{b}\right| = 1$, 则 $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 1$

二、填空题

1. 平面过点 $(2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0.5)$, 则该平面的方程是________________

2. 设 y_1 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, y_2 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, 则 $y_1 + y_2$ 是________________ 方程的解

3. 设 $z = y\arctan x$，则 $\operatorname{grad} z|_{(1,2)} =$________

4. 过点 $P(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-2z=2$ 平行的直线方程是________

5. 设 $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$，则 $f_y(1,0)=$________

6. $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $y''+py'+6y=0$ 的一个特解, 则 $p=$________

7. 已知平面 η_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 η_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则 $\eta_1\perp\eta_2$ 的充要条件是________

8. 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 $y=$________

9. 设 $z=\mathrm{e}^{xy}+\cos\left(x^2+y\right)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________

三、大题

1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-z+4x$ 的通解
2. 求曲线 $2z+1=\ln(xy)+\mathrm{e}^z$ 在点 $M_0(1,1,0)$ 处的切平面和法线方程
3. 设由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定了隐函数 $x=x(z), y=y(z)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$
4. 求方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 的通解
5. 设 $z=x^2y+\sin x+\varphi(xy+1)$，且 $\varphi(u)$ 具有一阶连续导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

2.1.2 2018-2019A7 答案

一、选择题

1. 微分方程 $(y')^3+3\sqrt{y''}+x^4y'''=\sin x$ 的阶数是 (D)

   (A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 3

2. 设 $f(x,y)=x-y-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x(3,4)=$(B)

   (A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $-\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{1}{5}$

3. 微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}$ 的一个特解是 (A)

   (A) $y=2x$ (B) $\mathrm{e}^y=x$ (C) $y=x^2$ (D) $y=\ln x$

4. 若 $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$(A)

   (A) $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{3}$ (B) $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{2}$ (C) $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{1}$ (D) $3(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

5. 设直线 L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 η：$4x-2y+z-2=0$，则 (C)

   (A) L 在 η 上 (B) L 平行于 η (C) L 垂直于 η (D) L 与 η 斜交

6. 方程 $y'+3xy=6x^2y$ 是 (D)

   (A) 二阶微分方程 (B) 非线性微分方程

   (C) 一阶线性非齐次微分方程 (D) 可分离变量的微分方程

7. 曲面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 与平面 $x=y$ 的交线是 (B)

(A) 两条直线 (B) 双曲线 (C) 椭圆 (D) 抛物线

8. 设 $z=\mathrm{e}^{x^2y}$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ =(C)

(A) $2y\left(1+x^3\right)\mathrm{e}^{x^2y}$ (B) e^{x^2y}

(C) $2x\left(1+x^2y\right)\mathrm{e}^{x^2y}$ (D) $2x\mathrm{e}^{x^2y}$

9. 下列结论正确的是 (A)

(A) $\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}$ (B) 若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$, 则 $\vec{b}=\vec{c}$

(C) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$ (D) 若 $|\vec{a}|=1,\left|\vec{b}\right|=1$, 则 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=1$

二、填空题

1. 平面过点 $(2,0,0),(0,1,0),(0,0,0.5)$, 则该平面的方程是 $\underline{\quad\dfrac{x}{2}+y+2z=1\quad}$
2. 设 y_1 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, y_2 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, 则 y_1+y_2 是 $\underline{\quad y''+p(x)y'+q(x)y=2f(x)\quad}$ 方程的解
3. 设 $z=y\arctan x$, 则 $\operatorname{grad} z|_{(1,2)}=\underline{\quad \mathrm{d}x+\dfrac{\pi}{4}\mathrm{d}y\quad}$
4. 过点 $P(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-2z=2$ 平行的直线方程是 $\underline{\quad\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}\quad}$
5. 设 $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$, 则 $f_y(1,0)=\underline{\quad 1\quad}$
6. $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $y''+py'+6y=0$ 的一个特解, 则 $p=\underline{\quad -7\quad}$
7. 已知平面 η_1 : $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 η_2 : $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则 $\eta_1\perp\eta_2$ 的充要条件是 $\underline{\quad A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\quad}$
8. 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 $y=\underline{\quad C_1\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)+C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\quad}$
9. 设 $z=\mathrm{e}^{xy}+\cos\left(x^2+y\right)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{\quad x\mathrm{e}^{xy}-\sin\left(x^2+y\right)\quad}$

三、大题

1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-z+4x$ 的通解

解 运用一阶线性非齐次微分方程公式, 得

$$
\begin{aligned}
z&=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int 4x\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int 4x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x}\left(4(x-1)\mathrm{e}^x+C\right)=4(x-1)+C\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

2. 求曲线 $2z+1=\ln(xy)+\mathrm{e}^z$ 在点 $M_0(1,1,0)$ 处的切平面和法线方程
3. 设由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定了隐函数 $x=x(z),y=y(z)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$

解 对方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 两式求微分, 得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x+\ \mathrm{d}y+\ \mathrm{d}z=0 \\ 2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}z=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{x+2z}{2x+z} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{y+2x}{2y+z} \end{cases}$$

4. 求方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 的通解

解 方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 对应的齐次方程 $y''+6y'+13y=0$ 的特征方程为 $r^2+6r+13=0$, 解得 $r=-3\pm 2\mathrm{i}$, 那么齐次方程的通解为 $C_1\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t)+C_2\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t)$

设特解为 $a\mathrm{e}^t$, 代入方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 后解得 $a=\dfrac{1}{20}$

综上, 方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 的通解为 $C_1\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t)+C_2\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{20}$

5. 设 $z=x^2y+\sin x+\varphi(xy+1)$, 且 $\varphi(u)$ 具有一阶连续导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy+\cos x+y\varphi'(xy+1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+x\varphi'(xy+1)$

2.2 高数 (一) 期终

2.2.1 2018-2019A15

2.2.2 2018-2019A15 答案

2.3 高数 (二) 期中

2.3.1 2017-2018

2.3.2 2017-2018 答案

2.3.3 2018-2019B10

2.4 高数 (二) 期终

2.4.1 2014-2015

2.4.2 2017-2018A

2.4.3 2017-2018A 答案

2.4.4 2017-2018B

2.4.5 2017-2018B 答案

2.5 额外的练习

第 3 章 线性代数试卷汇总

第 4 章 概率统计试卷汇总

第 5 章 复变函数试卷汇总

5.1 2018-2019A

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8} = (\quad)$

   (A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$

   (C) $\dfrac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$ (D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2. 设 $f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$, 则 $f(z)$ ( )

   (A) 处处不可导 (B) 仅在 $6x^2=9y^2$ 上可导, 处处不解析

   (C) 处处解析 (D) 仅在 $(0,0)$ 点可导

3. 下列等式正确的是 ( )

   (A) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (B) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

   (C) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (D) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

4. $z=0$ 是函数 $\dfrac{1-\cos z}{z-\sin z}$ 的 ( )

   (A) 本性奇点 (B) 可去奇点 (C) 二级极点 (D) 一级极点

5. 设 C 为 $z=(1-\mathrm{i})t$, t 从 1 到 0 的一段, 则 $\displaystyle\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z = (\quad)$

   (A) -1 (B) 1 (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 $z+|z|=2+\mathrm{i}$, 则 $z=$____________
2. 若 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z=$____________
3. 若 $z=2-\pi\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{e}^z=$____________
4. 若 $f(z)=\cos z^2$, 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^4 项的系数 $a_4=$____________
5. 函数 $f(t)=\sin t$ 的拉普拉斯变换 $F(s)=$____________

三、计算题 (70 分)

1. 设 $u(x,y)=x-2xy$ 且 $f(0)=0$, 求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$. (10 分)
2. 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{2\mathrm{e}^x}{z^5}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z|=1$. (7 分)
3. 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{3z+5}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$. (7 分)
4. 求函数 $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)
5. 求函数 $\dfrac{2z^2+1}{z^2+2z}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

6. 将 $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-6)}$ 在 $2<|z|<6$ 内展开为洛朗级数. (10 分)

7. 若函数 $f(z)=ay^3+bx^2y+\mathrm{i}\left(x^3+cxy^2\right)$ 是复平面上的解析函数，求 a,b,c 的值. (12 分)

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题: $\begin{cases} x''(t)+6x'(t)+9x(t)=\mathrm{e}^{-3t} \\ x(0)=0, x'(0)=0 \end{cases}$. (10 分)

5.2 2018-2019A 答案

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8}=$ (D)
   (A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(B) $-\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$
   (C) $\dfrac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$　(D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
2. 设 $f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$, 则 $f(z)$ (B)
   (A) 处处不可导　(B) 仅在 $6x^2=9y^2$ 上可导, 处处不解析
   (C) 处处解析　(D) 仅在 $(0,0)$ 点可导
3. 下列等式正确的是 (C)
   (A) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$　(B) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$
   (C) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$　(D) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}, \ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$
4. $z=0$ 是函数 $\dfrac{1-\cos z}{z-\sin z}$ 的 (D)
   (A) 本性奇点　(B) 可去奇点　(C) 二级极点　(D) 一级极点
5. 设 C 为 $z=(1-\mathrm{i})t$, t 从 1 到 0 的一段, 则 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=$ (A)
   (A) -1　(B) 1　(C) $-\mathrm{i}$　(D) i

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 $z+|z|=2+\mathrm{i}$, 则 $z=$ $\underline{\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}}$
2. 若 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\oint_C \dfrac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z=$ $\underline{\quad 0 \quad}$
3. 若 $z=2-\pi\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{e}^z=$ $\underline{\;-\mathrm{e}^2\;}$
4. 若 $f(z)=\cos z^2$, 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^4 项的系数 $a_4=$ $\underline{-\dfrac{1}{2}}$
5. 函数 $f(t)=\sin t$ 的拉普拉斯变换 $F(s)=$ $\underline{\dfrac{1}{s^2+1}}$

三、计算题 (70 分)

1. 设 $u(x,y)=x-2xy$ 且 $f(0)=0$, 求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$. (10 分)

解 解析函数的 u, v 必定满足 C. – R. 方程, 即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 - 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 对 y 积分得 $v = y - y^2 + \varphi(x)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\varphi'(x)$, 可以得出 $\varphi(x) = x^2 + C$

由于 $f(0) = 0$, 因此 $C = 0$, 即 $f(z) = x - 2xy + \mathrm{i}\left(y - y^2 + x^2\right)$

2. 计算积分 $\oint_C \dfrac{2\mathrm{e}^x}{z^5}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z| = 1$. (7 分)

解 根据高阶导数公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$, 那么

$$\oint_C \frac{2\mathrm{e}^z}{(z-0)^5}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}\left(2\mathrm{e}^z\right)^{(4)}\Big|_{z=0} = \frac{\pi\mathrm{i}}{6}$$

3. 计算积分 $\oint_C \dfrac{3z+5}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z| = \dfrac{1}{2}$. (7 分)

解

$$\oint_C \frac{3z+5}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{3z+5}{z(z-1)} = 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{3z+5}{z-1}\right|_{z=0} = -10\pi\mathrm{i}$$

4. 求函数 $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

解 对 $\cos z$ 进行洛朗展开, $\cos z = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, 那么 $1 - \cos z = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$

那么 $\dfrac{1-\cos z}{z^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, 根据洛朗系数公式, $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{1-\cos z}{z^3} = c_{-1} = \dfrac{1}{2}$

5. 求函数 $\dfrac{2z^2+1}{z^2+2z}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

解

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{2z^2+1}{z^2+2z} = \left.\frac{2z^2+1}{z+2}\right|_{z=0} = \frac{1}{2}, \operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{2z^2+1}{z^2+2z} = \left.\frac{2z^2+1}{z}\right|_{z=-2} = -\frac{9}{2}$$

6. 将 $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-6)}$ 在 $2 < |z| < 6$ 内展开为洛朗级数. (10 分)

解

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{4}\left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z-2}\right) = \frac{z}{4}\left(-\frac{1}{6}\frac{1}{1-z/6} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}\right) \\ &= \frac{z}{4}\left(-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(z/6)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z/6)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n\right) \end{aligned}$$

7. 若函数 $f(z) = ay^3 + bx^2y + \mathrm{i}\left(x^3 + cxy^2\right)$ 是复平面上的解析函数，求 a, b, c 的值. (12 分)

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题: $\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = \mathrm{e}^{-3t} \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$. (10 分)