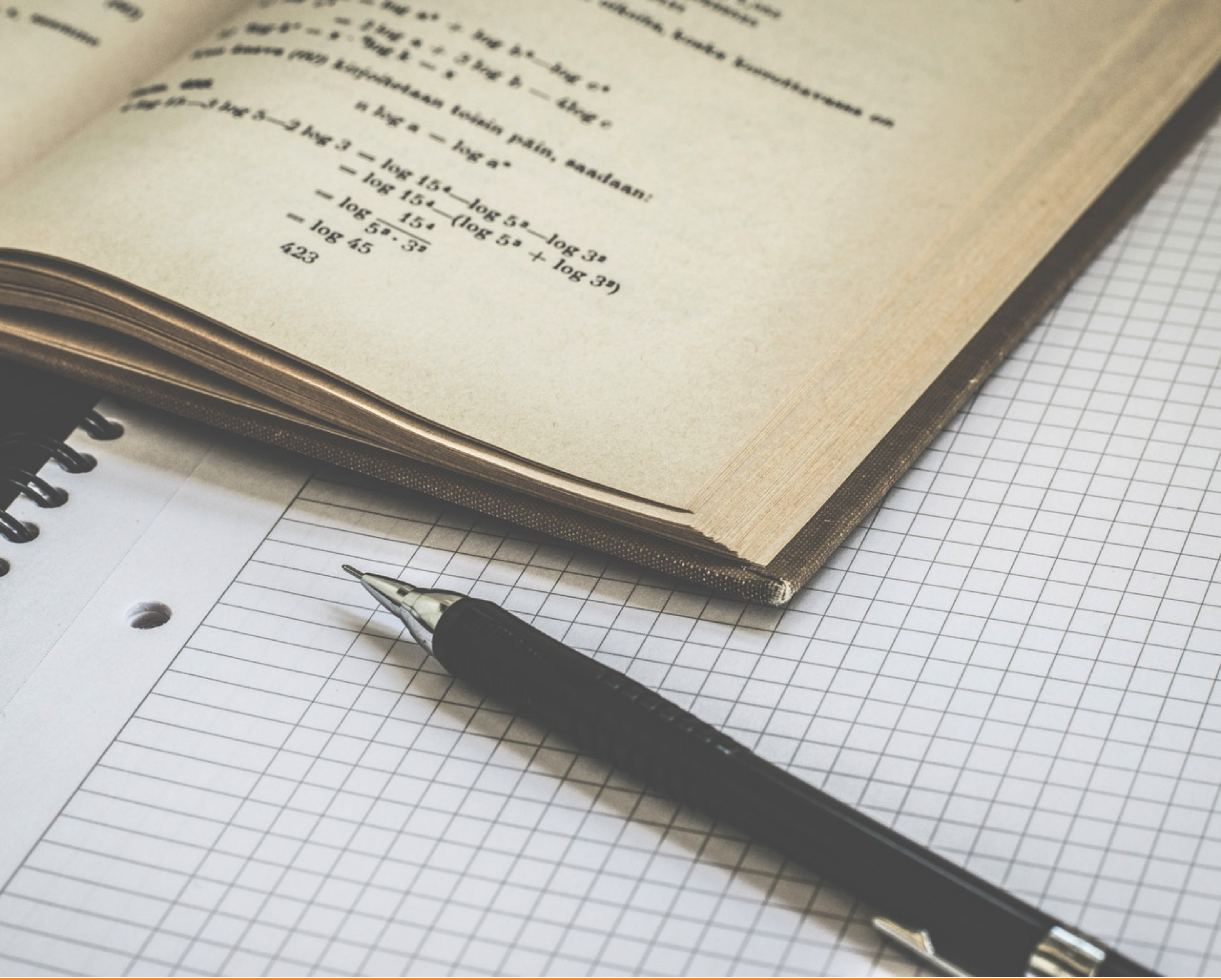

工科数学试卷汇总

高数、线代、概率、复变

作者：sikouhjw、xajzh

组织：临时组织起来的重排小组

时间：May 13, 2019

版本：1.00

确实，时　　间和空间
是有限的。确实，我们总会有
分开的时候。但是正因为这样，
我们才会努力学习，我们才会
努力前进。我们的信仰是
享受数学。因为“数
学穿越时空”。
♡

“不论一个人的数学水平有多高，只要对数学拥有一颗真诚的心，他就在自己的心灵上得到了升华。”—*SCIbird*

目　　录

第 1 章 声明

本汇总不得用于商业用途，最新版下载地址：Github，不保证题目、答案的正确性，如有错误可通过 QQ 群[1]或者邮箱[2]联系我们

[1]991832226
[2]489765924@qq.com

第 2 章 高等数学试卷汇总

2.1 高数 (一) 期中

2.1.1 2018-2019 A7

一、选择题

1. 微分方程 $(y')^3+3\sqrt{y''}+x^4y'''=\sin x$ 的阶数是 ( )

   (A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 3

2. 设 $f(x,y)=x-y-\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $f_x(3,4)=$( )

   (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $-\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

3. 微分方程 $y'=\frac{y}{x}$ 的一个特解是 ( )

   (A) $y=2x$ (B) $\mathrm{e}^y=x$ (C) $y=x^2$ (D) $y=\ln x$

4. 若 $z=\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$( )

   (A) $\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{3}$ (B) $\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{2}$ (C) $\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{1}$ (D) $3(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

5. 设直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$, 平面 η : $4x-2y+z-2=0$, 则 ( )

   (A) L 在 η 上 (B) L 平行于 η (C) L 垂直于 η (D) L 与 η 斜交

6. 方程 $y'+3xy=6x^2y$ 是 ( )

   (A) 二阶微分方程 (B) 非线性微分方程

   (C) 一阶线性非齐次微分方程 (D) 可分离变量的微分方程

7. 曲面 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$ 与平面 $x=y$ 的交线是 ( )

   (A) 两条直线 (B) 双曲线 (C) 椭圆 (D) 抛物线

8. 设 $z=\mathrm{e}^{x^2y}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$( )

   (A) $2y\left(1+x^3\right)\mathrm{e}^{x^2y}$ (B) e^{x^2y}

   (C) $2x\left(1+x^2y\right)\mathrm{e}^{x^2y}$ (D) $2x\mathrm{e}^{x^2y}$

9. 下列结论正确的是 ( )

   (A) $\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}$ (B) 若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$, 则 $\vec{b}=\vec{c}$

   (C) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$ (D) 若 $|\vec{a}|=1,\left|\vec{b}\right|=1$, 则 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=1$

二、填空题

1. 平面过点 $(2,0,0),(0,1,0),(0,0,0.5)$, 则该平面的方程是________________

2. 设 y_1 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, y_2 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, 则 y_1+y_2 是________________ 方程的解

3. 设 $z = y\arctan x$，则 $\mathrm{grad}\, z|_{(1,2)} =$________________
4. 过点 $P(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-2z=2$ 平行的直线方程是________________
5. 设 $f(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x}$，则 $f_y(1,0) =$________________
6. $y = \mathrm{e}^x$ 是微分方程 $y'' + py' + 6y = 0$ 的一个特解, 则 $p =$________________
7. 已知平面 η_1：$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与平面 η_2：$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 则 $\eta_1 \perp \eta_2$ 的充要条件是________________
8. 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为 $y =$________________
9. 设 $z = \mathrm{e}^{xy} + \cos\left(x^2 + y\right)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$________________

三、大题

1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -z + 4x$ 的通解
2. 求曲线 $2z + 1 = \ln(xy) + \mathrm{e}^z$ 在点 $M_0(1,1,0)$ 处的切平面和法线方程
3. 设由方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 确定了隐函数 $x = x(z), y = y(z)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$
4. 求方程 $y'' + 6y' + 13y = \mathrm{e}^t$ 的通解
5. 设 $z = x^2y + \sin x + \varphi(xy+1)$，且 $\varphi(u)$ 具有一阶连续导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

2.1.2 2018-2019 A7 答案

一、选择题

1. 微分方程 $(y')^3 + 3\sqrt{y''} + x^4y''' = \sin x$ 的阶数是 (D)

   (A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 3

2. 设 $f(x,y) = x - y - \sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x(3,4) =$(B)

   (A) $\dfrac{3}{5}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $-\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{1}{5}$

3. 微分方程 $y' = \dfrac{y}{x}$ 的一个特解是 (A)

   (A) $y = 2x$ (B) $\mathrm{e}^y = x$ (C) $y = x^2$ (D) $y = \ln x$

4. 若 $z = \ln\sqrt{1+x^2+y^2}$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)} =$(A)

   (A) $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{3}$ (B) $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{2}$ (C) $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{1}$ (D) $3(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

5. 设直线 L：$\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$，平面 η：$4x-2y+z-2=0$，则 (C)

   (A) L 在 η 上 (B) L 平行于 η (C) L 垂直于 η (D) L 与 η 斜交

6. 方程 $y' + 3xy = 6x^2y$ 是 (D)

   (A) 二阶微分方程 (B) 非线性微分方程

   (C) 一阶线性非齐次微分方程 (D) 可分离变量的微分方程

7. 曲面 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ 与平面 $x = y$ 的交线是 (B)

(A) 两条直线 (B) 双曲线 (C) 椭圆 (D) 抛物线

8. 设 $z=\mathrm{e}^{x^2y}$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ =(C)

(A) $2y\left(1+x^3\right)\mathrm{e}^{x^2y}$ (B) e^{x^2y}

(C) $2x\left(1+x^2y\right)\mathrm{e}^{x^2y}$ (D) $2x\mathrm{e}^{x^2y}$

9. 下列结论正确的是 (A)

(A) $\vec{a}\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}$ (B) 若 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$, 则 $\vec{b}=\vec{c}$

(C) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$ (D) 若 $|\vec{a}|=1,\left|\vec{b}\right|=1$, 则 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=1$

二、填空题

1. 平面过点 $(2,0,0),(0,1,0),(0,0,0.5)$, 则该平面的方程是 $\underline{\dfrac{x}{2}+y+2z=1}$
2. 设 y_1 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, y_2 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, 则 y_1+y_2 是 $\underline{y''+p(x)y'+q(x)y=2f(x)}$ 方程的解
3. 设 $z=y\arctan x$, 则 $\operatorname{grad} z|_{(1,2)}=$ $\underline{\mathrm{d}x+\dfrac{\pi}{4}\mathrm{d}y}$
4. 过点 $P(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-2z=2$ 平行的直线方程是 $\underline{\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}}$
5. 设 $f(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$, 则 $f_y(1,0)=\underline{\ 1\ }$
6. $y=\mathrm{e}^x$ 是微分方程 $y''+py'+6y=0$ 的一个特解, 则 $p=\underline{\ -7\ }$
7. 已知平面 η_1 : $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 η_2 : $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则 $\eta_1\perp\eta_2$ 的充要条件是 $\underline{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0}$
8. 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为 $y=\underline{C_1\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)+C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(2x)}$
9. 设 $z=\mathrm{e}^{xy}+\cos\left(x^2+y\right)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{x\mathrm{e}^{xy}-\sin\left(x^2+y\right)}$

三、大题

1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-z+4x$ 的通解

解 运用一阶线性非齐次微分方程公式, 得

$$
\begin{aligned}
z&=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int 4x\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int 4x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-x}\left(4(x-1)\mathrm{e}^x+C\right)=4(x-1)+C\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

2. 求曲线 $2z+1=\ln(xy)+\mathrm{e}^z$ 在点 $M_0(1,1,0)$ 处的切平面和法线方程
3. 设由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定了隐函数 $x=x(z),y=y(z)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$

解 对方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 两式求微分, 得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0 \\ 2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}z=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{x+2z}{2x+z} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{y+2x}{2y+z} \end{cases}$$

4. 求方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 的通解

解 方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 对应的齐次方程 $y''+6y'+13y=0$ 的特征方程为 $r^2+6r+13=0$, 解得 $r=-3\pm 2\mathrm{i}$, 那么齐次方程的通解为 $C_1\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t)+C_2\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t)$
设特解为 $a\mathrm{e}^t$, 代入方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 后解得 $a=\dfrac{1}{20}$
综上, 方程 $y''+6y'+13y=\mathrm{e}^t$ 的通解为 $C_1\mathrm{e}^{-3t}\sin(2t)+C_2\mathrm{e}^{-3t}\cos(2t)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{20}$

5. 设 $z=x^2y+\sin x+\varphi(xy+1)$, 且 $\varphi(u)$ 具有一阶连续导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy+\cos x+y\varphi'(xy+1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+x\varphi'(xy+1)$

2.2 高数 (一) 期终

2.2.1 2018-2019 A15

2.2.2 2018-2019 A15 答案

2.3 高数 (二) 期中

2.3.1 2017-2018

2.3.2 2017-2018 答案

2.3.3 2018-2019 B10

2.4 高数 (二) 期终

2.4.1 2014-2015

一、选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^x$ 的待定特解 y_* 的一个形式是 $y_*=($　$)$

(A) e^x　　(B) $ax^2\mathrm{e}^x$　　(C) $a\mathrm{e}^x$　　(D) $ax\mathrm{e}^x$

2. 过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程 ( )

(A) $5x+2y+z-15=0$ (B) $\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y-1}{-9}=\dfrac{z+2}{-22}$

(C) $8x-9y-22z-59=0$ (D) $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$

3. 设 $f(x,y)=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$, 则 $f_y(1,0)=($ $)$

(A) 1 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) 0

4. $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$, 利用二重积分的性质, $\iint_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的最佳估值区间为 ( )

(A) $\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right]$ (B) $\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\dfrac{2}{5},1\right]$ (D) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

5. Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 、平面 $z=1$ 及三个坐标面围成的在第一卦限内的闭区域, 则 $\iiint_\Omega xy\,\mathrm{d}V=($ $)$

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^1\rho^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}z$ (B) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^1\rho^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}z$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^1\rho^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}z$ (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^1\rho^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}z$

6. 设 L 是 xoy 平面上的有向曲线, 下列曲线积分中, ( ) 是与路径无关的

(A) $\int_L 3yx^2\,\mathrm{d}x+x^3\,\mathrm{d}y$ (B) $\int_L y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y$

(C) $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y$ (D) $\int_L 3yx^2\,\mathrm{d}x+y^3\,\mathrm{d}y$

7. 设 L 为圆周 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 则 $\oint_L\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=($ $)$

(A) a^3 (B) πa^3 (C) $2\pi a^3$ (D) $3\pi a^3$

8. 下列级数中收敛的是 ( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

二、填空题 (每空 3 分, 共 24 分)

1. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-3y+\mathrm{e}^{2x}$ 的通解是 $y=$____________

2. 平行于 y 轴且通过曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+4z^2=1\\ x^2=y^2+z^2\end{cases}$ 的柱面方程是____________

3. 设 $z=x^2y+xy^2$, 则 $\mathrm{d}z=$____________

4. $\iint_D y^2\sin^3 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________(区域 D 为: $-4\leqslant x\leqslant 4, -1\leqslant y\leqslant 1$)

5. 设 D 为平面闭区域: $x^2+y^2\leqslant 1$, 则 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 化为极坐标系下二次积分的表达式为____________

6. 设 L 是任意一条分段光滑的有向闭曲线, 则 $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$____________

7. $I=\iint_\Sigma(x+z\sin y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+x\sin z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$____________, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 与平面 $z=0$ 围成区域的表面, 取外侧.

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n$ 的收敛半径为________

三、综合题 (请写出求解过程, 8 小题, 共 52 分)

1. 求过点 $(2,1,1)$，且与直线 $\begin{cases}x-y+3z-7=0\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程. (6 分)
2. 设 $z=f\left(\mathrm{e}^{x+y},\sin(xy)\right)$，且 f 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$. (6 分)
3. 计算 $\iint_D\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$D$ 是曲线 $y=x^2,x=y^2$ 围成的闭区域. (8 分)
4. 计算 $\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 及平面 $z=2$ 围成的闭区域. (6 分)
5. 计算 $\int_\Gamma x^3\,\mathrm{d}x+3zy^2\,\mathrm{d}y-x^2y\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点 $A(2,2,1)$ 到原点 O 的直线段 AO. (6 分)
6. 空间区域 Ω 由开口向下的旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 所围, Ω 的表面取外侧为 Σ，利用高斯公式计算 $\oiint_\Sigma x^2yz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-xy^2z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z(1+xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. (8 分)
7. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^n}$ 的敛散性. (6 分)
8. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}(x\in(-1,1))$ 的和函数. (6 分)

2.4.2 2014-2015 答案

2.4.3 2017-2018 A

一、选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 微分方程 $y''-6y'+9y=\left(6x^2+2\right)\mathrm{e}^x$ 的待定特解的一个形式可为 ( )
   (A) $y^*=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^x$ (B) $y^*=x\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^x$
   (C) $y^*=x^2\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^x$ (D) $y^*=x^2\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$
2. 设向量 $\vec{a}$ 的三个方向角为 α、β、γ，且已知 $\alpha=60^\circ$、$\beta=120^\circ$，则 $\gamma=$ ( )
   (A) 120° (B) 60° (C) 45° (D) 30°
3. 设 $z=\arctan\mathrm{e}^{xy}$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$ ( )
   (A) $-\frac{x\mathrm{e}^{xy}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2xy}}}$ (B) $\frac{x\mathrm{e}^{xy}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2xy}}}$ (C) $-\frac{x\mathrm{e}^{xy}}{1+\mathrm{e}^{2xy}}$ (D) $\frac{x\mathrm{e}^{xy}}{1+\mathrm{e}^{2xy}}$
4. D 为平面区域 $x^2+y^2\leqslant4$，利用二重积分的性质, $\iint_D\left(x^2+4y^2+9\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的最佳估值区间为 ( )
   (A) $[36\pi,52\pi]$ (B) $[36\pi,100\pi]$ (C) $[52\pi,100\pi]$ (D) $[9\pi,25\pi]$
5. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant2,x\geqslant0\right\}$，则以下等式错误的是 ( )
   (A) $\iiint_\Omega x^2y\,\mathrm{d}v=0$ (B) $\iiint_\Omega(x+y)\,\mathrm{d}v=0$ (C) $\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v=0$ (D) $\iiint_\Omega xy\,\mathrm{d}v=0$

6. 设 L 为直线 $y=y_0$ 上从点 $A(0,y_0)$ 到点 $B(3,y_0)$ 的有向直线段, 则 $\int_L 2\,\mathrm{d}y=(\quad)$

(A) 6　　(B) $6y_0$　　(C) $3y_0$　　(D) 0

7. Σ 为平面 $x+y+z=1$ 与三坐标面所围区域表面的外侧, 则 $\iint_\Sigma (2y+3z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+2z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(\quad)$

(A) 0　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{5}{3}$

8. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}$ $(\quad)$

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 无法确定

二、填空题 (每空 3 分, 共 24 分)

1. 以 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=x\mathrm{e}^x$ 为特解的阶数最低的常系数齐次线性微分方程是________

2. 直线 $L:\begin{cases}x=3t-2\\ y=t+2\\ z=2t-1\end{cases}$ 和平面 $\pi:\ 2x+3y+3z-8=0$ 的交点是________

3. 设 $z=xy^3$, 则 $\mathrm{d}z=$________

4. 交换二次积分的积分次序后, $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$________

5. 设 $\Omega=\{-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 3,0\leqslant z\leqslant 2\}$, 则 $\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$________

6. 设 L 为由三点 $(0,0),(3,0),(3,2)$ 围成的平面区域 D 的正向边界曲线, 由格林公式知 $\int_L (3x-y+4)\,\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\,\mathrm{d}y=$________

7. 设 Σ 是上半圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$, 则曲面积分 $\iint_\Sigma \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S=$________

8. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2^n}\right)$ 的和为________

三、综合题 (8 小题, 共 52 分)

1. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy}{1+x^2}$ 的通解. (6 分)

2. 设 $z=\ln\left(x^2-y\right)$, 而 $y=\tan x$, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. (6 分)

3. 计算 $\iint_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D 为曲线 $x^2-2x+y^2=0, y=0$ 围成的在第一象限的闭区域. (6 分)

4. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 围成的区域. (6 分)

5. 用高斯公式计算 $\oiint_\Sigma \left(a^2x+x^3\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 取外侧. (8 分)

6. 用格林公式计算 $\oint_C x^2y\,\mathrm{d}x-xy^2\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=4$, 取正向. (8 分)

7. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}(2n-1)}$ 的敛散性. (6 分)

8. 在区间 $(-1,1)$ 内求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和函数 $s(x)$. (6 分)

2.4.4 2017-2018 A 答案

2.4.5 2017-2018 B

2.4.6 2017-2018 B 答案

2.5 额外的练习

第 3 章 线性代数试卷汇总

3.1 2018-2019 14B

一、选择题 (每题 3 分, 共 21 分)

1. 从 $0,1,2,\ldots,9$ 中任意选出 3 个不同的数字, 三个数字中不含 0 与 5 的概率是 ( )

   (A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{2}{15}$ (C) $\frac{14}{15}$ (D) $\frac{7}{15}$

2. 某人射击中靶的概率为 $\frac{3}{4}$. 若射击直到中靶为止, 则射击次数为 3 的概率为 ( )

   (A) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (B) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}$ (C) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ (D) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$

3. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$, $F(x)$ 是分布函数, 则 ( )

   (A) $F(-a)=1-F(a)$ (B) $F(-a)=\frac{1}{2}F(a)$

   (C) $F(-a)=F(a)$ (D) $F(-a)=\frac{1}{2}-F(a)$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=i,Y=j\}=c\cdot i\cdot j, i=1,2,3, j=1,2,3$, 则 $c=$ ( )

   (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{36}$ (D) $\frac{1}{2}$

5. 设随机变量 X 服从均匀分布, 其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 则 $D(X)=$ ( )

   (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

6. 设总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是总体 X 的一个样本, $\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差, 则下列样本函数中, 服从 $\chi^2(n)$ 分布的是 ( )

   (A) $\sum_{i=1}^n X_i^2$ (B) $\frac{\overline{X}}{S/\sqrt{n-1}}$ (C) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (D) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n X_i^2$

7. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个样本, σ^2 未知, $\overline{X}$ 是样本均值, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, 如果 $\overline{X}-k\frac{S}{\sqrt{n}}$ 是 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限, 则 k 应取 ( )

   (A) $t_{1-\alpha}(n)$ (B) $t_\alpha(n)$ (C) $t_\alpha(n-1)$ (D) $t_{\alpha/2}(n-1)$

第 4 章 概率统计试卷汇总

第 5 章 复变函数试卷汇总

5.1 2018-2019A

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8}=(\quad)$

   (A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$

   (C) $\dfrac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$ (D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2. 设 $f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$, 则 $f(z)$ (　)

   (A) 处处不可导 (B) 仅在 $6x^2=9y^2$ 上可导, 处处不解析

   (C) 处处解析 (D) 仅在 $(0,0)$ 点可导

3. 下列等式正确的是 (　)

   (A) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i},\ \ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (B) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i},\ \ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

   (C) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i},\ \ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (D) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i},\ \ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

4. $z=0$ 是函数 $\dfrac{1-\cos z}{z-\sin z}$ 的 (　)

   (A) 本性奇点 (B) 可去奇点 (C) 二级极点 (D) 一级极点

5. 设 C 为 $z=(1-\mathrm{i})t$, t 从 1 到 0 的一段, 则 $\displaystyle\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=(\quad)$

   (A) -1 (B) 1 (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 $z+|z|=2+\mathrm{i}$, 则 $z=$____________
2. 若 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z=$____________
3. 若 $z=2-\pi\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{e}^z=$____________
4. 若 $f(z)=\cos z^2$, 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^4 项的系数 $a_4=$____________
5. 函数 $f(t)=\sin t$ 的拉普拉斯变换 $F(s)=$____________

三、计算题 (70 分)

1. 设 $u(x,y)=x-2xy$ 且 $f(0)=0$, 求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$. (10 分)
2. 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{2\mathrm{e}^x}{z^5}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z|=1$. (7 分)
3. 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{3z+5}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$. (7 分)
4. 求函数 $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)
5. 求函数 $\dfrac{2z^2+1}{z^2+2z}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

6. 将 $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-6)}$ 在 $2<|z|<6$ 内展开为洛朗级数. (10 分)

7. 若函数 $f(z)=ay^3+bx^2y+\mathrm{i}\left(x^3+cxy^2\right)$ 是复平面上的解析函数，求 a,b,c 的值. (12 分)

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题: $\begin{cases}x''(t)+6x'(t)+9x(t)=\mathrm{e}^{-3t}\\x(0)=0,x'(0)=0\end{cases}$. (10 分)

5.2 2018-2019A 答案

一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^8}=$ (D)

   (A) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$

   (C) $\dfrac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$ (D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

2. 设 $f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$, 则 $f(z)$ (B)

   (A) 处处不可导 (B) 仅在 $6x^2=9y^2$ 上可导, 处处不解析

   (C) 处处解析 (D) 仅在 $(0,0)$ 点可导

3. 下列等式正确的是 (C)

   (A) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (B) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

   (C) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ (D) $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $\ln\mathrm{i}=-\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$

4. $z=0$ 是函数 $\dfrac{1-\cos z}{z-\sin z}$ 的 (D)

   (A) 本性奇点 (B) 可去奇点 (C) 二级极点 (D) 一级极点

5. 设 C 为 $z=(1-\mathrm{i})t$, t 从 1 到 0 的一段, 则 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z=$ (A)

   (A) -1 (B) 1 (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 $z+|z|=2+\mathrm{i}$, 则 $z=$ $\underline{\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}}$

2. 若 C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$, 则 $\oint_C \dfrac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z=$ $\underline{\quad 0\quad}$

3. 若 $z=2-\pi\mathrm{i}$, 则 $\mathrm{e}^z=$ $\underline{\ -\mathrm{e}^2\ }$

4. 若 $f(z)=\cos z^2$, 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处泰勒展开式中 z^4 项的系数 $a_4=$ $\underline{-\dfrac{1}{2}}$

5. 函数 $f(t)=\sin t$ 的拉普拉斯变换 $F(s)=$ $\underline{\dfrac{1}{s^2+1}}$

三、计算题 (70 分)

1. 设 $u(x,y)=x-2xy$ 且 $f(0)=0$, 求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$. (10 分)

解 解析函数的 u, v 必定满足 C. – R. 方程, 即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 - 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 对 y 积分得 $v = y - y^2 + \varphi(x)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\varphi'(x)$, 可以得出 $\varphi(x) = x^2 + C$

由于 $f(0) = 0$, 因此 $C = 0$, 即 $f(z) = x - 2xy + \mathrm{i}\left(y - y^2 + x^2\right)$

2. 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{2\mathrm{e}^x}{z^5}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z| = 1$. (7 分)

解 根据高阶导数公式 $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$, 那么

$$\oint_C \frac{2\mathrm{e}^z}{(z-0)^5}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}\left.(2\mathrm{e}^z)^{(4)}\right|_{z=0} = \frac{\pi\mathrm{i}}{6}$$

3. 计算积分 $\displaystyle\oint_C \frac{3z+5}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 C 为正向圆周 $|z| = \dfrac{1}{2}$. (7 分)

解

$$\oint_C \frac{3z+5}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{3z+5}{z(z-1)} = 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{3z+5}{z-1}\right|_{z=0} = -10\pi\mathrm{i}$$

4. 求函数 $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

解 对 $\cos z$ 进行洛朗展开, $\cos z = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, 那么 $1 - \cos z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$

那么 $\dfrac{1-\cos z}{z^3} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, 根据洛朗系数公式, $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{1-\cos z}{z^3} = c_{-1} = \dfrac{1}{2}$

5. 求函数 $\dfrac{2z^2+1}{z^2+2z}$ 在有限奇点处的留数. (7 分)

解

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{2z^2+1}{z^2+2z} = \left.\frac{2z^2+1}{z+2}\right|_{z=0} = \frac{1}{2}, \operatorname*{Res}_{z=-2}\frac{2z^2+1}{z^2+2z} = \left.\frac{2z^2+1}{z}\right|_{z=-2} = -\frac{9}{2}$$

6. 将 $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-6)}$ 在 $2 < |z| < 6$ 内展开为洛朗级数. (10 分)

解

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{4}\left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z-2}\right) = \frac{z}{4}\left(-\frac{1}{6}\frac{1}{1-z/6} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}\right) \\ &= \frac{z}{4}\left(-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(z/6)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z/6)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n\right) \end{aligned}$$

7. 若函数 $f(z) = ay^3 + bx^2y + \mathrm{i}\left(x^3 + cxy^2\right)$ 是复平面上的解析函数，求 a, b, c 的值. (12 分)

解 若 $f(z)$ 为解析函数, 则其实部、虚部满足 C. – R. 方程, 设 $u = ay^3 + bx^2y$, $v = x^3 + cxy^2$, 则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2bxy = 2cxy = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 3ay^2 + bx^2 = -3x^2 - cy^2 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = c = -3 \end{cases}$$

8. 利用拉普拉斯变换解常微分方程初值问题: $\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = \mathrm{e}^{-3t} \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$. (10 分)

解 设 $\mathscr{L}[x] = X(s)$, 对等式两边作拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[x'' + 6x' + 9x] &= s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 6sX(s) - 6x(0) + 9X(s) \\ &= s^2X(s) + 6sX(s) + 9X(s) = \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

那么有 $X(s) = \dfrac{1}{(s+3)^3}$, 根据拉普拉斯变换的微分性质 $F''(s) = \mathscr{L}[t^2 f(t)]$

$$\frac{1}{(s+3)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+3}\right)'' = \frac{\mathscr{L}[t^2\mathrm{e}^{-3t}]}{2}$$

那么 $x(t) = \dfrac{t^2\mathrm{e}^{-3t}}{2}$