

Zusammenfassung Analysis I und II

Bachelorstudium Informatik HSZ-T

Benjamin Bütikofer

15. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen und Kurven	4
1.1 Grundlagen	4
1.2 Symmetrie	5
1.3 Monotonie	6
1.4 Periodizität	6
1.5 Reelle Zahlenfolgen	6
2 Differentialrechnen	8
2.1 Differenzierbarkeit einer Funktion	8
2.2 Ableitungsregeln	9
2.3 Tangente und Normale	10
2.4 Linearisierung einer Funktion	10
2.5 Charakterische Kurvenpunkte	11
2.6 Kurvendiskussion	11
3 Integralrechnen	13
3.1 Einführung	13
3.2 Das unbestimmte Integral	13
3.3 Das bestimmte Integral	14
3.4 Integration durch Substitution	14
3.5 Partielle Integration	15
3.6 Flächeninhalt	15
3.7 Volumen eines Rotationkörpers	16
3.8 Beispiele aus Physik und Technik	17
4 Potenzreihenentwicklung	18
4.1 Unendliche Reihen	18
4.2 Taylor-Reihen	21

5	Differential- und Integralrechnung für Funktion von mehreren Variablen	24
5.1	Funktion von mehreren Variablen	24
5.2	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	25
5.3	Partielle Differentiation	27
6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	32
6.1	Grundbegriffe	32
6.2	DGL mit trennbaren Variablen	34
6.3	Integration einer DGL durch Substitution	35
6.4	Lineare DGL 1. Ordnung	37

1 Funktionen und Kurven

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition

Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge M zuordnet.

1.1.2 Darstellung

Symbolische Schreibweise:

$$y = f(x) \text{ mit } x \in D \text{ oder } f : x \rightarrow y = f(x) \text{ mit } x \in D$$

1.1.3 Analytische Schreibweise

Explizite Darstellung: $y = f(x)$

Implizierte Darstellung: $F(x; y) = 0$

1.1.4 Nullstellen

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ ist. In einer Nullstelle schneidet oder berührt die Funktionskurve die x-Achse!

1.2 Symmetrie

1.2.1 Gerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst gerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

1.2.2 Ungerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst ungerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

1.2.3 Beweis

Um zu Beweisen ob eine Funktion gerade oder ungerade ist, setzt man $-x$ in die Funktion ein. **TODO:** *Elaborate this!!!*

1.2.4 HornerSchema

Vorgehen:

1. Erstes x muss geraten werden. Gute Kandidaten: $\pm 1, \pm 2$.
2. In Tabelle einsetzen. Jede Reihe steht für ein x , auch wenn $x = 0$ ist.
3. Solange wiederholen bis alle x gefunden sind.

Funktion: $x^3 - 6x^2 - 4x^3 + 24$

	1	-6	-4	24
2		2	-8	-24
	1	-4	-12	

1.3 Monotonie

x_1 und x_2 seien zwei beliebige Werte aus dem Definitionsbereich D einer Funktion $y = f(x)$ mit $x_1 < x_2$. Dann heisst die Funktion:

- monoton wachsend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$

1.4 Periodizität

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst periodisch mit Periode p , wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm p$ zum Definitionsbereich D der Funktion gehört und es gilt:

$$f(x \pm p) = f(x)$$

1.5 Reelle Zahlenfolgen

1.5.1 Grenzwert/Limes

- Die reelle Zahl g heisst **Grenzwert** (Limes) der Zahlenfolge a_n , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ stets gilt: $|a_n - g| < \epsilon$
- Eine Folge a_n heisst **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert g besitzt.
Symbolische Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

1.5.2 Stetigkeit einer Funktion

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierten Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Graphisch: Die Funktion macht keinen Sprung.

1.5.3 Unstetigkeit

Stellen, in denen eine Funktion die Stetigkeitsbedingung $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nicht erfüllt ist, heissen Unstetigkeitsstellen.

Eine Funktion $f(x)$ ist also an der Stelle x_0 unstetig, wenn mindestens einer der folgenden Aussagen zutrifft:

- $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert
- Der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist nicht vorhanden
- Funktions- und Grenzwert sind zwar vorhanden, jedoch voneinander verschieden

2 Differentialrechnen

2.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha = m_{S(ekante)/T(angente)}$$

definiert ist. Man bezeichnet die Stelle als die (erste) Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 oder als **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 und kennzeichnet ihn durch das Symbol:

$$y'(x_0), f'(x_0) \text{ oder } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ oder } \frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

- Die Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt.
- Die Ableitungsfunktion $y'(x) = f'(x)$ ordnet jeder Stelle x aus einem Intervall I als Funktionswert den Steigungswert (Grenzwert) zu. Man spricht dann kurz von der Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x

Eine Betragsfunktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, da sie dort keine eindeutig bestimmte Tangente besitzt. Man muss also zu erst die rechts- und dann die linksseitige Ableitung ausrechnen.

2.2 Ableitungsregeln

2.2.1 Faktorregel

$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$; C = Reelle Konstante, bleibt erhalten.

2.2.2 Summenregel

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow y' = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x)$$

Es darf gliedweise differenziert werden.

2.2.3 Produktregel

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Bei mehreren Termen:

$$y = u \cdot v \cdot w \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

2.2.4 Quotientenregel

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

2.2.5 Kettenregel

Überlegung: Was muss zuerst berechnet werden, was gehört zusammen?

Beispiel: $f(x) = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$

innerste Funktion z	$z : x \rightarrow z(x) = x^2 - 1$
mittlere Funktion u	$u : z \rightarrow u(z) = \sqrt{z}$
äusserste Funktion F	$F : u \rightarrow F(u) = \arccos(u)$

Somit gilt: $f(x) = F(u) \cdot u(z) \cdot z(x)$.

Daraus schliessen wir das:

$$f'(x) = F'(u) \cdot u'(z) \cdot z'(x)$$

gilt. Jetzt nur noch zurück substituieren und die abgeleitete Funktion ist gefunden.

2.3 Tangente und Normale

Steigung der Tangente	$m_T = f'(x)$
Gleichung der Tangente	$y_T = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
Steigung der Normalen	$m_N = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$
Gleichung der Normalen	$y_N = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

2.4 Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung des Kurvenpunkts $P = (x_0, y_0)$ kann die nichtlineare Funktion $y = f(x)$ näherungsweise durch die lineare Funktion

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ oder } \Delta y = f'(x_0) \Delta x$$

ersetzt werden.

Vorgehen:

1. Arbeitspunkt P bestimmen: x_0, y_0

2. Tangentensteigung:

a) $m_T = f'(x_0)$

3. Gleichung der Tangente in P

a) $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m_T$

4. Im Arbeitspunkt P gibt linearisierte Funktion

5. Exakter Wert: Ursprungsfunktion

6. Näherungswert: Linearisierte Funktion

2.5 Charakterische Kurvenpunkte

2.5.1 Extremum

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. ein relatives Minimum, wenn in einer gewissen Umgebung von x_0 stets $f(x_0) > f(x)$ bzw. $f(x_0) < f(x)$ ist ($x \neq x_0$).

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$$

Für $f''(x_0) > 0$ liegt dabei ein relatives Minimum vor, für $f''(x_0) < 0$ dagegen ein relatives Maximum.

2.5.2 Wendepunkte, Sattelpunkte

Punkte x_0 mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ heissen **Wendepunkte** (die Krümmung wechselt ihre Richtung). Kurven mit waagrechter Tangente werden als **Sattelpunkte** bezeichnet.

Hinreichende Bedingung für einen **Wendepunkt**:

$$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$$

Notwendige Bedingung für einen **Sattelpunkt**:

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$$

2.6 Kurvendiskussion

Ablauf:

- Definitionsbereich/lücken
- Symmetrie (gerade, ungerade Funktion)
- Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse

- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden)
- Ableitungen (i. d. R. bis zur 3. Ordnung)
- Relative Extremwerte (Maxima, Minima)
- Wendepunkte, Sattelpunkte
- Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen
- Wertebereich der Funktion
- Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Massstab

3 Integralrechnen

3.1 Einführung

3.1.1 Definition

Die Integration ist die Umkehrung der Ableitung. Es gilt:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) \, dx$$

3.1.2 Stammfunktion

Def Unter einer Stammfunktion einer reellen Funktion f versteht man eine differenzierbare Funktion F , deren Ableitungsfunktion F' mit f übereinstimmt.

1. Falls es eine Stammfunktion zu einer stetigen Funktion $f(x)$ gibt, gibt es *unendlich* viele Stammfunktionen
2. Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich durch eine *additive* Konstante: $F_1(x) - F_2(x) = C$
3. Ist $F_1(x)$ eine *beliebige* Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F_1(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Daher lässt sich die *Menge aller Stammfunktionen* in der Form $F(x) = F_1(x) + C$ darstellen.

3.2 Das unbestimmte Integral

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

$$\rightarrow F'(x) = f(x)$$

3.3 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral berechnet eine Fläche zwischen zwei Punkten a und b .
Allgemein:

$$I(b) = \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b$$

3.4 Integration durch Substitution

Beispiel: Unbestimmtes Integral:

$$\int x \cdot \cos(x^2) \, dx$$

1. Aufstellung der Substitutionsgleichung

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

2. Durchführung der Integralsubstitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) \, dx = \int x \cdot \cos(u) \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \cos(u) \, du$$

3. Integration

$$\frac{1}{2} \int \cos(u) \, du = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C$$

4. Rücksubstitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + C$$

Beispiel: Bestimmtes Integral:

$$F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} \, dx$$

1. Substitution

$$u = 2x \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

2. Grenzen substituieren

$$u(-1) = -2 ; u(1) = 2$$

3. Rücksubstitution

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} (e^2 - e^{-2}) = 3.627$$

3.5 Partielle Integration

$$\int (u \cdot v') dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$\int_a^b u \cdot v' dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v dx$$

Wenn der Integral-Minuend auf der rechten Seite gleich wie das Integral auf der linken Seite ist, kann es zur rechten Seite addiert werden und *verschwindet* somit.

Beispiel:

$$F(x) = \int x \cdot e^{k \cdot x} dx$$

TODO

3.6 Flächeninhalt

3.6.1 Bezgl. x-Achse

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$A = A_1 + A_2 + \dots A_n$$

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \right| \dots$$

Vorgehen:

1. Nullstellen berechnen (HornerSchema) und als Grenzen benützen
2. Funktion ins Integral einsetzen und lösen

3.6.2 Zwischen zwei Kurven

$$A = \int_a^b (y_o - y_u) \, dx = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)] \, dx$$

Dabei bedeuten:

$y_o = f_o(x)$: Gleichung der *oberen* Randkurve

$y_u = f_u(x)$: Gleichung der *unteren* Randkurve

Vorgehen:

1. Kurvenschnittpunkte berechnen:

$$f_o(x) = f_u(x)$$

2. Integral mit der/den gegebenen Funktion(en) berechnen.

3.7 Volumen eines Rotationkörpers

3.7.1 Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 \, dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

3.7.2 Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 \, dy = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 \, dy$$

Die Grenzen liegen auf der y-Achse!

1. Kurvenschnittpunkte P_1, P_2 berechnen
 - a) Dazu Gleichung nach x auflösen und in zweite Gleichung einsetzen
2. Skizze erstellen und zu berechnende Flächen markieren
3. Volumen berechnen $V_t = V_1 + V_2 + \dots$

3.7.3 Funktion einer Parabel herleiten

Voraussetzung: Spiegelsymmetrische Parabel, die Verschiebung der Parabel auf der x-Achse und ein Punkt P_1 muss bekannt sein.

Ansatz: $y = ax^2 + b = ax^2 + 0.5$

Der Öffnungsparameter a bestimmt man aus dem Parabelpunkt $P_1 = (1; 0.25)$.
 $a \cdot 1^2 + 0.5 = 0.25 \Rightarrow a = -0.25 \Rightarrow y = 0.25x^2 + 0.5 = -0.25(x^2 - 2) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2)$
Jetzt nur noch in die bekannte Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers einsetzen.

3.8 Beispiele aus Physik und Technik

Durch das Ableiten der Ortsfunktion $s(t)$ erhalten wir die Momentan-Geschwindigkeit $v(t)$ und durch nochmaliges Ableiten erhält man die Momentan-Beschleunigung $a(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \dot{v} = \ddot{s}$$

Umgekehrt gilt, falls $a = a(t)$ bekannt ist, erhalten wir die Geschwindigkeit, bzw. den Ort durch Integration:

$$v(t) = \int a(t) \, dt$$

$$s(t) = \int v(t) \, dt = \iint a(t) \, dt$$

4 Potenzreihenentwicklung

4.1 Unendliche Reihen

4.1.1 Grundbegriffe

Unendliche Zahlenfolge

Def Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen einer unendlichen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heisst *unendliche Reihe*. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + ..$$

Konvergenz/Divergenz

Def Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst *konvergent* wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ einen Grenzwert s besitzt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$$

Dieser Grenzwert wird als *Summenwert* der unendlichen Reihe bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = s$$

Besitzt die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ jedoch *keinen* Grenzwert, so ist die unendliche Reihe divergent.

4.1.2 Konvergenzkriterien

Def Für die *Konvergenz* einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

notwendig, nicht aber *hinreichend*. Eine Reihe, die das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt, ist *divergent*.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n+2} &= \left(\frac{n}{n+2} \right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 = \left(\frac{n+2}{n} \right)^{-n} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{-n} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{e^2} \cdot 1^2 = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \text{Divergent!} \end{aligned}$$

Quotientenkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Wurzelkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*.

Für beide Kriterien gilt: Bei $q = 1$ versagt das Kriterium (keine Aussage möglich). Das Quotienten- oder Wurzelkriterium ist hinreichend aber nicht notwendig, d. h. es gibt Reihen, für die der Grenzwert nicht vorhanden ist aber trotzdem konvergieren.

Leibnizskriterium

Def Eine *alternierende* Reihe vom Typ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist konvergent, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3 \dots$ strikt monoton sinkend
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} = 0$$

4.1.3 Potenzreihen

Def Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Die reellen Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe. Der *Konvergenzbereich* ist der gesamte Bereich in welchem die Reihe konvergiert. Der *Konvergenzradius* ist eine Teilmenge des Konvergenzbereichs.

Allgemeine Darstellungsform der Potenzreihen:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

Formel Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe lässt sich nach den Formeln

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ und } r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnen (Voraussetzung: alle Koeffizienten $a_n \neq 0$ und der Grenzwert ist vorhanden). Die Reihe konvergiert dann für $|x| < r$ und divergiert für $|x| > r$. In den beiden Randpunkten $x_1 = \pm r$ ist das Konvergenzverhalten der Potenzreihe zunächst unbestimmt. Ist $r = \pm\infty$ konvergiert die Reihe für jedes reelle x . Der *Konvergenzbereich* ist daher $x \in \mathbb{R}$!

Berechnen des Konvergenzradius und Bestimmung des Verhaltens von $\pm r$

1. Konvergenzradius r bestimmen
2. Konvergenzverhalten in den Randpunkten bestimmen

4.2 Taylor-Reihen

Falls eine Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar ist und das Restglied für $n \rightarrow \infty$ verschwindet (also gegen 0 strebt), erhält man die Taylorsche Reihe, bzw. den Spezialfall der Mac Laurinschen Reihe (für $x_0 = 0$).

Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Die *Mac Laurinsche Reihe* ist eine spezielle Form der Taylorschen Reihe für das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$ (Nullpunkt):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Um die MacLaurinsche Reihe zu bilden muss die Funktion zu erst bis zur gewünschten Stelle Abgeleitet werden. Danach muss das gegebene x_0 in den abgeleiteten Funktionen eingesetzt werden. Daraus kann man nachher die Reihe bilden.

4.2.1 Beispiele der Taylorreihen

Taylorreihe der Sinusfunktion

Wir entwickeln die Sinusfunktion um die Stelle $x_0 = \pi/2$:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \\ f'(x) = \cos(x) &\Rightarrow f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0 \\ f''(x) = -\sin(x) &\Rightarrow f''(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1 \\ f'''(x) = -\cos(x) &\Rightarrow f'''(\pi/2) = -\cos(\pi/2) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \sin(x) &\Rightarrow f^{(4)}(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(x) &= 1 - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 \pm \dots \\ &= 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} \pm \dots \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x - \pi/2)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

4.2.2 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hopital

Def Für Grenzwert, die auf einen *unbestimmten Ausdruck* der Form $\gg \frac{0}{0} \ll$ oder $\gg \frac{\infty}{\infty} \ll$ führen, gilt die BdH Regel:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anmerkungen:

- Die Bernoulli-de L'Hospitalsche Regel setzt voraus, dass die Funktion $f(x)$ und $g(x)$ in der Umgebung von x_0 stetig differenzierbar sind und der Grenzwert der rechten Seite existiert.
- Die BdH Regel gilt sinngemäss auch für Grenzübergänge vom Typ $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$.
- In einigen Fällen muss man mehrere Male Ableiten um zum Ziel zu kommen

Nützliche Umformungen

Da die BdH Regel nur für unbestimmte Ausdrücke der Form $\gg \frac{0}{0} \ll$ oder $\gg \frac{\infty}{\infty} \ll$ anwendbar ist, müssen alle anderen Formen durch elementare Umformung in diese spezielle Form umgeformt werden.

Funktion $\varphi(x)$	Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$	Elementare Umformung
(A) $u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ bzw. $\frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
(B) $u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
(C) $u(x)^{v(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$

Abbildung 4.1: Elementare Umformungen für unbestimmte Ausdrücke

5 Differential- und Integralrechnung für Funktion von mehreren Variablen

5.1 Funktion von mehreren Variablen

5.1.1 Definition

Def Unter einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x; y)$ aus einer Menge D genau ein Element z aus einer Menge W zuordnet, Symbolische Schreibweise:

$$z = f(x; y)$$

Analog gelangt man zu Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen:

$$u = f(x; y; z)$$

5.1.2 Darstellungsformen

Es gibt vier verschiedene Darstellungsformen:

1. *Explizit* dargestellt:

$$z = 2x + y + 1 \text{ oder } z = 2 \cdot \sin(x - y)$$

2. *Implizit* dargestellt:

$$x^2 + y^2 + z - 1 = 0$$

3. Dargestellt in einer *Funktionstabelle*.

4. Graphische Darstellung (als Fläche, Höhenlinien, Schnittkurven..).

Die dritte und vierte Form eignen sich nur für Funktionen mit maximal drei Variablen.

5.1.2.1 Höhenliniendiagramm

Def Die *Höhenlinien* einer Funktion $z = f(x; y)$ genügen der impliziten Kurvengleichung

$$f(x; y) = \text{const.} = c$$

c : Wert der Höhenkoordinate z (Kurvenparameter)

Die *Höhenlinien* sind die Projektionen der *Linien gleicher Höhe* in die x, y -Koordinatenebene.

5.1.3 Definitions- und Wertebereich

Der Definitionsbereich D einer Funktion $z = f(x, y)$ kann als eine flächenhafte Punktmenge in der x, y -Ebene aufgefasst werden.

Beispiel:

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Definitionsbereich: $25 - x^2 - y^2 \geq 0$, d. h. $x^2 + y^2 \leq 25$.

Wertebereich: $0 \leq z \leq 5$ (wegen $0 \leq 25 - x^2 - y^2 \leq 25$).

5.2 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

5.2.1 Grenzwert

Def Eine Funktion zweier Variablen hat an der Stelle (x, y_0) den Grenzwert g , wenn sich die Funktionswerte $f(x, y)$ beim Grenzübergang $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ unabhängig vom eingeschlagenen Weg dem Wert g beliebig nähern. Symbolische Schreibweise:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = g$$

1. Eine Funktion kann auch in einer Definitionslücke (x_0, y_0) einen Grenzwert haben, obwohl sie dort nicht definiert ist.
2. Grenzwert auf einer Bildfläche: Je näher man zur Stelle (x_0, y_0) kommt, desto flacher wird die Ebene auf der man sich bewegt.

Um den Grenzwert berechnen zu können, muss man versuchen eine Variable loszuwerden.

Beispiel: x und y können auch in Polarkoordinatenform ausgedrückt werden: $x = r \cdot \cos \phi$ und $y = r \cdot \sin \phi$. Die Verwendung des trigonometrischen Pythagoras ($\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$) kann sich in diesem Fall anbieten:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \sin^2 \phi + r^2 \cdot \cos^2 \phi = r^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = r^2$$

Die Grenzwertberechnung vereinfacht sich nun auf eine unabhängige Variable $(\lim_{r \rightarrow n} f(x))$.

5.2.2 Stetigkeit

Def Eine in (x_0, y_0) und einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) definierten Funktion $z = f(x, y)$ heisst an der Stelle (x_0, y_0) *stetig*, wenn der Grenzwert der Funktion an der Stelle *vorhanden* ist und mit dem dortigen Funktionswert *übereinstimmt*.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Anmerkung:

1. Die Stetigkeit an einer bestimmten Stelle setzt voraus, dass die Funktion dort auf *definiert* ist. Ferner muss der Grenzwert an dieser Stelle existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen.
2. Eine Funktion $z = f(x, y)$ heisst dagegen an der Stelle (x_0, y_0) *unstetig*, wenn $f(x_0, y_0)$ *nicht* vorhanden ist oder $f(x_0, y_0)$ vom Grenzwert *verschieden* ist oder dieser *nicht* existiert.
3. Eine Funktion, die an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist, wird als stetige Funktion bezeichnet.

Für Stetigkeit im Nullpunkt $(0, 0)$ muss gelten: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = f(0, 0) = a$

5.3 Partielle Differentiation

5.3.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung

Def Ist $z = f(x, y)$ an *jeder* Stelle (x, y) einer gewissen Bereiches *partiell* differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung selbst wieder *Funktionen* von x und y .

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Übliche Symbole für partielle Ableitungen sind:

$$f_x(x, y), z_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$$

Beispiel: $z = \sqrt{2xy - y^2}$; $u = 2xy - y^2 \Rightarrow z = \sqrt{u}$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{2xy - y^2}}$$
$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x - 2y) = \frac{x - y}{\sqrt{u}} = \frac{x - y}{\sqrt{2xy - y^2}}$$

Beispiel: Von $z = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$ die partielle Ableitung 1. Ordnung bestimmen und die Werte an der Stelle $x = 1, y = 2$ berechnen:

- $f_x = -12x^2y^2 + 3y^4 - 3$
- $f_y = -8x^3y + 12xy^3 + 2$
- $f_x(1; 2) = -3, f_y(1, 2) = 82$, Höhenkoordinate: $z = f(1; 2) = 38$
- Die im Flächenpunkt $P = (1, 2, 38)$ errichteten Tangenten besitzen den folgenden Anstieg, bzw Steigungswinkel:
 - Tangente in x -Richtung: $m_x = \tan\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = 180^\circ + \arctan(-3) = 180^\circ - 71.6^\circ = 108.4^\circ$
 - Tangente in y -Richtung: $m_y = \tan\beta = 82 \Rightarrow \beta = \arctan 82 = 89.3^\circ$

5.3.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Def Es wird genau gleich vorgegangen wie bei der Ableitung erster Ordnung. Die einzelnen Differentiationsschritte sind in der Reihenfolge, in der die als Indizes angehängten Differentiationsvariablen im Ableitungssymbol auftreten, auszuführen.

f_{xy} : Hier wird zunächst nach der Variablen x und anschliessend nach der Variablen y differenziert.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung lassen sich auch in der Form partielle Differentialquotienten darstellen:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Beispiel 3. Ordnung:

$$f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

5.3.2.1 Satz von Schwarz

Def Bei einer gemischten partiellen Ableitung k -ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k -ter Ordnung stetige Funktionen sind.

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad f_{xxy} = f_{yxx}, \quad \text{usw...}$$

5.3.3 Das totale/vollständige Differential einer Funktion

Def Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Flächenpunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ lautet in symmetrischer Schreibweise:

$$\Delta z = t(x, y) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Um z zu erhalten, müssen nur x_0 und y_0 in die Ursprungsfunktion $f(x, y)$ eingesetzt werden!

5.3.3.1 Vollständiges Differential

Def Bei einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen beschreibt das totale Differential:

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

die Änderung der Höhenkoordinate bzw. des Funktionswerts z auf der im Berührungspunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ errichteten Tangentialebene. Dabei sind die "Differential" dx, dy, dz die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangentialebene, bezogen auf den Punkt P .

Hier kommt noch das Bild von Slide 14

Bei n unabhängigen Variablen versteht man den linearen Differentialausdruck

$$dy = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 + \dots + f_{x_n}dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Bemerkung: $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \Delta z \approx dz$

5.3.3.2 Implizite Differentiation

Def Der Anstieg einer in der impliziten Form $F(x, y) = 0$ dargestellten Funktionskurve im Kurvenpunkt $P = (x, y)$ lässt sich wie folgt bestimmen:

$$y'(P) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

5.3.3.3 Linearisierung einer Funktion

Def In der Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, y_0)$ kann die nichtlineare Funktion $y = f(x)$ näherungsweise durch die lineare Funktion (Kurventangente)

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ oder } \Delta y = f'(x_0)$$

ersetzt werden.

Analog können wir eine nichtlineare Funktion $z = f(x, y)$ in der Nähe des Punktes $P = (x_0, y_0, z_0)$ durch die Tangentialebene annähern:

$$z = f(x, y) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0$$

auch

$$V = f_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z$$

5.3.3.4 Relative Extremwerte

Def Wie bei Analysis 1 gibt es zwei Bedingungen für Extremwerte:

- **Notwendige** Bedingung: $f_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f_y(x_0, y_0) = 0$
- **Hinreichende** Bedingung: $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 = \Delta$
- Das Vorzeichen von $f_{xx}(x_0, y_0)$ entscheidet über die Art des Extremwertes:
 - $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ relatives **Maximum**
 - $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$ relatives **Minimum**
 - falls $\Delta < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt
 - falls $\Delta = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

5.3.4 Doppelintegrale

Wenn wir ein Doppelintegral berechnen wollen, müssen wir wissen, wie der Integrationsbereich A aussieht und führen dann zwei Integrationsschritte durch.

- **1. Fall:** x liegt zwischen konstanten Grenzen, y zwischen zwei Funktionen

$$\iint_{(A)} f(x, y) dA$$

- **2. Fall:** x liegt zwischen zwei Funktionen, y zwischen konstanten Grenzen.

5.3.4.1 Allgemein

1. Fall: Wir müssen zuerst nach y integrieren (inneres Integral) und danach das äussere Integral nach x integrieren.
2. Fall: Wir müssen zuerst nach x integrieren (inneres Integral) und danach das äussere Integral nach y integrieren.

5.3.4.2 Doppelintegrale in Polarkoordinaten

Je nach Problemstellung vereinfacht sich die Berechnung eines Doppelintegrals erheblich, wenn man an Stelle der kartesischen Koordinaten die Polarkoordinaten verwendet:

- $x = r \cdot \cos\phi$
- $y = r \cdot \sin\phi$
- $r^2 = x^2 + y^2$
- $r \geq 0$ und $0 \leq \phi < 2\pi$

Integrationsbereiche bei denen diese Form angewendet werden kann werden von zwei Strahlen ϕ_1 und ϕ_2 , sowie einer inneren Kurve $r_i(\phi)$ und einer äusseren Kurve $r_a(\phi)$ begrenzt. Für das infinitesimale Flächenelement gilt: $dA = (r d\phi) \cdot dr = r d\phi dr$. Das Doppelintegral besitzt die folgende Form:

$$\iint_{(A)} f(x, y) da = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} f(r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi) \cdot r \cdot dr d\phi$$

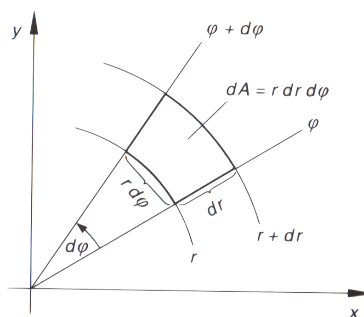


Abbildung 5.1: Flächenelement dA in Polarkoordinaten

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1 Grundbegriffe

6.1.1 Definition

Def Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung mit den Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = f(x)$. Die Ordnung der DGL entspricht der Ordnung der höchsten Ableitung.

Schreibweisen:

- Implizit: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
 - $y'' + 4y = 0$
- Explizit: $y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$
 - $y''(t) = -4y$

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt. Wir unterscheiden:

- Allgemeine Lösung: Enthält noch n Integrationskonstanten.
- Spezielle oder partikuläre Lösung: Die n Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung werden durch n zusätzliche Bedingungen (z. B. Anfangs- oder Randwertbedingungen) festgelegt.
- Singuläre Lösung: eine Lösung der DGL die sich nicht aus der allgemeinen Lösung gewinnen lässt. (?)

n bezieht sich auf die Anzahl unterschiedlichen Konstanten und wird durch die Ordnung der DGL festgelegt. In unserem Fall ist n immer 1.

6.1.2 Lösung einer DGL

Im einfachsten Fall, z. B. für die DGL vom Typ $y^{(n)} = f(x)$ kann die *allgemeine* Lösung (Integrale) durch mehrmalige (n -mal) (unbestimmte) Integration der DGL gewonnen werden.

Gegeben: $y' = 2x$

$$y = \int y' dx = \int 2x dx = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Anfangswertprobleme

- Von der gesuchten Lösung $y = y(x)$ einer DGL n -ter Ordnung sind genau n Werte, nämlich der Funktionswert $y(x_0)$ sowie die Werte der ersten $n-1$ Ableitungen an der Stelle x_0 vorgegeben, also:

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$$

- Aus diesen Anfangsbedingungen lassen sich die n Integrationskonstanten C_1, \dots, C_n der allg. Lösung bestimmen.

Für die DGL 1. Ordnung heisst das: Gesucht ist diejenige spezielle Lösungskurve der DGL, die durch den vorgegebenen Punkt $P = (x_0, y(x_0))$ verläuft.

Beispiel:

Gegeben: $y' = 2x$, $y(0) = 1$

$$y = \int y' dx = \int 2x dx = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Bestimmung des Parameters: $y(0) = 1 \Rightarrow 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

Gesuchte spezielle Lösung: $y = x^2 + 1$

Randwertprobleme

- Von der gesuchten Lösung $y = y(x)$ einer DGL n -ter Ordnung sind genau die Funktionswert $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ an den Stellen x_1, x_2, \dots, x_n vorgegeben.

- Aus diesen Anfangsbedingungen lassen sich die n Integrationskonstanten C_1, \dots, C_n der allg. Lsg. bestimmen.

Für die DGL 1. Ordnung heisst das: Die Lösungskurve $y = y(x)$ ist so zu bestimmen, dass sie durch den vorgegebenen Punkt $P_y = (x_1, y_1)$ verläuft.

6.2 DGL mit trennbaren Variablen

eine DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

heisst separabel und lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Dabei wird die DGL zuerst umgestellt und anschliessend integriert:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

Auflösen nach $y(x)$ liefert schliesslich (häufig) die gewünschte Lösung.

6.2.1 Vorgehen

1. *Trennung* der beiden Variablen
2. *Integration* auf beiden Seiten der Gleichung, Konstante C auf der rechten Seite nicht vergessen!
3. *Auflösen* der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen y (falls möglich)

Beispiel:

$$\text{Gegeben: } x + yy' = 0, y(0) = 2$$

$$\text{Trennung der Variablen: } x + y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y \frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow ydy = -x dx$$

$$\text{Integ. auf b. Seiten: } \int ydy = - \int xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y^2 = -x^2 + 2C$$

$$\text{Gesuchte spezielle Lösung: } y = x^2 + 1$$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$y^2 = -x^2 + 2C \text{ oder } x^2 + y^2 = 2C$$

Spezielle Lsg für $y(0) = 2$ (Lsgkurve durch Punkt $(0, 2)$):

$$y(0) = 2 \Rightarrow 4 = 2C, \text{ d. h. } C = 2 \text{ und somit } R = "$$

Die Lösung unserer Anfangswertaufgabe führt zu dem Mittelpunktskreis $x^2 + y^2 = 4$ mit dem Radius $R = 2$

6.3 Integration einer DGL durch Substitution

In einigen Fällen ist es möglich, eine explizite DGL 1. Ordnung mittels einer geeigneten Substitution auf eine separable DGL zurückzuführen. Diese lässt sich dann wie vorher beschrieben durch Trennung der Variablen lösen. Es gibt dabei zwei Typen:

1. Typ: $y' = f(ax + by + c)$
2. Typ: $y' = f(\frac{y}{x})$

6.3.1 Typ 1

- Substitution: $u = ax + by + c$, wobei $u = u(x)$ und $y = y(x)$ Funktionen in x sind!
- Unter Berücksichtigung, dass $y' = f(u)$ ist, erhalten wir:

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot y' = a + b \cdot f(u)$$

- Daraus können wir $u(x)$ mittels Separation der Variablen bestimmen
- Durch anschließendes Einsetzen (Rücksubstitution) erhalten wir $y(x) = \frac{u(x) - ax - c}{b}$

Beispiel: $y' = (1 + x + y)^2$; $y(0) = 2$

$$u = 1 + x + y \rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow y' = u' - 1$$

$$u' - 1 = u^2$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \int 1 dx \Rightarrow \arctan(u) = x + C \Rightarrow u = \tan(x + C)$$

$$1 + x + y = \tan(x + C) \Rightarrow y = \tan(x + C) - 1 - x \Rightarrow \arctan(3) = C$$

$$y = \arctan(3) - 1 - x$$

6.3.2 Typ 2

- Substitution: $u = \frac{y}{x}$, wobei $u = u(x)$ und $y = y(x)$ Funktionen in x sind!
- Unter Berücksichtigung, dass $y' = f(u)$ ist, erhalten wir:

$$\frac{du}{dx} = \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{x} = \frac{f(u) - u}{x}$$

- Daraus können wir $u(x)$ mittel Separation der Variablen bestimmen
- Durch anschliessendes Einsetzen (Rücksubstitution) erhalten wir $y(x) = u(x) \cdot x$

Beispiel: $y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$

$$u = \frac{y}{x}, \text{ d. h. } y = xu, y' = 1 \cdot u + x \cdot u' = u + xu'$$

$$y' = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = 1 + 2u$$

$$xu' = x \frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|xC|$$

$$u + 1 = CX \text{ oder } u = Cx - 1$$

$$y = xu = x(Cx - 1) = Cx^2 - x$$

6.3.3 Rechenregeln

Kommen mehrere Integrationskonstanten vor, werden die zu einer Integrationskonstante zusammengefasst. Häufig benötigte Rechenregeln beim Lösen von DGL:

- $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$; $\ln(a) - \ln(b) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$
- $n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$; $\ln(e^n) = n$
- $\ln(a) = b \Rightarrow a = e^b$; $\ln(a) = \ln(b) \Rightarrow a = b$; $e^{\ln(a)} = a$
- $|x| = a > 0 \Rightarrow x = \pm a$; $|x| = |a| \Rightarrow x = \pm a$

6.4 Lineare DGL 1. Ordnung

6.4.1 Definition

Def Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist. Die Funktion $g(x)$ wird als Störfunktion bezeichnet. Verschwindet sie, als $g(x) = 0$ für alle x , heisst die lineare DGL **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

Beispiel: Linear:

- $x'1 - xy = 0$ Homogen
- $xy' + 2y = e^x$ Inhomogen
- $x' + (\tan x) \cdot y = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ Inhomogen

6.4.2 Integration einer homogenen linearen DGL

Eine *homogene* lineare DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst. Die allgemeine Lösung ist dann in der Form

$$y = C \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

darstellbar ($C \in \mathbb{R}$).

Beispiel: $y' - 2xy = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - 2xy &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2xdx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int 2xdx \Rightarrow \ln|y| \\ &= \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x^2 \\ \Rightarrow \frac{y}{C} &= e^{x^2} \\ y &= e^{x^2} \cdot C\end{aligned}$$

6.4.3 Integration einer inhomogenen linearen DGL

Eine *inhomogene* lineare DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

wird durch *Variation der Konstanten* schrittweise wie folgt gelöst.

1. Integration der zugehörigen homogenen DGL $y' + f(x) \cdot y = 0$ durch Trennung der Variablen:

$$y_0 = K \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

- Die Integrationskonstante K wird durch eine (noch unbekannte) Funktion $K(x)$ ersetzt. Mit dem Lösungsansatz:

$$y = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$$

geht man dann in die inhomogen lineare DGL ein und erhält eine einfache DGL 1. Ordnung für die Faktorfunktion $K(x)$, die durch unbestimmte Integration gelöst werden kann.

Beispiel: $y' + \frac{y}{x} = \cos x, (x \neq 0)$.

- Zugehörige homogene DGL lösen:

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow y_0 = \frac{K}{x}$$

- inhomogene DGL durch Variation der Konstanten lösen ($K \rightarrow K(x)$).

$$y = \frac{K(x)}{x}, y' = \frac{K'(x) \cdot x - 1 \cdot K(x)}{x^2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$$

- Diese Ausdrücke in die inhomogene DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \cos(x) \\ \Rightarrow \frac{K'(x)}{x} &= \cos x \text{ oder } K'(x) = x \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

- Durch unbestimmte Integration folgt hieraus

$$K(x) = \int K'(x)dx = \int x \cdot \cos(x) = \cos(x) + x \sin(x) + C$$

- Die inhomogene DGL besitzt als folgende allgemeine Lösung:

$$y = \frac{K(x)}{x} = \frac{\cos(x) + x \cdot \sin(x) + C}{x}$$