Zusammenfassung Analysis

Bachelorstudium Informatik HSZ-T

Benjamin Bütikofer

5. März 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen und Kurven

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition

Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge M zuordnet.

1.1.2 Darstellung

Symbolische Schreibweise
$y = f(x)$ mit $x \in D$ oder
$f : x \to y = f(x)$ mit $x \in D$

1.1.3 Analytische Schreibweise

Explizite Darstellung: $y = f(x)$
Implizierte Darstellung: $F(x; y) = 0$

1.1.4 Nullstellen

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ ist.
In einer Nullstelle schneidet oder berührt die Funktionskurve die x-Achse!

1.2 Symmetrie

1.2.1 Gerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst gerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:
$f(-x) = f(x)$

1.2.2 Ungerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst ungerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:
$f(-x) = -f(x)$

1.2.3 Beweis

Um zu Beweisen ob eine Funktione gerade oder ungerade ist, setzt man -x in die Funktion ein.

1.2.4 Hornerschema

Vorgehen:

1. Erstes x muss geraten werden. Gute Kandidaten: $\pm 1, \pm 2$.
2. In Tabelle einsetzen. Jede Reihe steht für ein x, auch wenn $x = 0$ ist.
3. Solange wiederholen bis alle x gefunden sind.

Funktion: $x^3 - 6x^2 - 4x^3 + 24$

	1	-6	-4	24
2		2	-8	-24
	1	-4	-12	

1.3 Monotonie

x_1 und x_2 seien zwei beliebige Werte aus dem Definitionsbereich D einer Funktion $y = f(x)$ mit $x_1 < x_2$. Dann heisst die Funktion:

- monoton wachsend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$)
- streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$)
- monoton fallend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$)
- streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$)

1.4 Periodizität

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst periodisch mit Periode p, wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm p$ zum Definitionsbereich D der Funktion gehört und es gilt:
$f(x \pm p) = f(x)$

1.5 Umkehr/inverse Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst umkehrbar, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. Sie muss streng monoton sein!

Der Definitions- und Wertebereich wird bei einer Umkehrung getauscht:
$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$
Bestimmung:

1. nach x auflösen
2. x und y tauschen

1.6 Reelle Zahlenfolgen

1.6.1 Grenzwert/Limes

- Die reelle Zahl g heisst **Grenzwert** (Limes) der Zahlenfolge a_n, wenn es zu jedem $\in> 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n > n0$ stets gilt: $|a_n - g| <\in$
- Eine Folge a_n heisst **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert g besitzt. Symbolische Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

1.6.2 Stetigkeit einer Funktion

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierten Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Graphisch: Die Funktion macht keinen Sprung.

1.6.3 Unstetigkeit

Stellen in denen eine Funktion die Stetigkeitsbedingung $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ nicht erfüllt ist, heissen Unstetigkeitsstellen.

Eine Funktion $f(x)$ ist also an der Stelle x_0 unstetig, wenn mindestens einer der folgenden Aussagen zutrifft:

- $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert
- Der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist nicht vorhanden
- Funktions- und Grenzwert sind zwar vorhanden, jedoch voneinander verschieden

2 Differentialrechnen

2.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tan\alpha = m_{S(ekante)/T(angente)}$$

definiert ist. Man bezeichnet ihn als die (erste) Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 oder als **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 und kennzeichnet ihn durch das Symbol:

$y'(x_0)$, $f'(x_0)$ oder $\frac{dy}{dx} \mid_{x=x_0}$.

Weitere nützliche Schreibweise:

$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$

- Die Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt.
- Die Ableitungsfunktion $y'(x) = f'(x)$ ordnet jeder Stelle x aus einem Intervall I als funktionswert den Steigungswert (Grenzwert) zu. Man spricht dann kurz von der Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x

Eine Betragsfunktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, da sie dort keine eindeutig bestimmte Tangente besitzt. Man muss also zu erst die rechts- und dann die linksseitige Ableitung ausrechnen.

Tangenten: Für die Ableitung und den Steigungswinkel α gilt $y' = tan\alpha$

2.2 Ableitungen der elementaren Funktionen

Funktion f(x)		Ableitung f'(x)
Konstante Funktion	c = const	0
Potenzfunktion	x^n $(x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$n \cdot x^{n-1}$ $\frac{1}{(x^2)^{\frac{1}{2}}}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$ gilt nur für 2. Wurzel	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$sinx$ $sin2x$	$cosx$ $2cos(2x)$
	$cos(x)$	$-sinx$
	$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$, $1 + tan^2(x)$
	$cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$arccot(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	e^{2x}	$2e^{2x}$
	a^x	$(lna) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	lnx	$\frac{1}{x}$
	$log_a x$	$\frac{1}{(lna) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen, Areafunktionen: Siehe Seite 17 im Skript.		

2.3 Ableitungsregeln

2.3.1 Faktorregel

$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$; C = Reelle Konstante, bleibt erhalten.

2.3.2 Summenregel

$y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$

Es darf gliedweise differenziert werden.

2.3.3 Produktregel

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$

Bei mehreren Termen:

$y = u \cdot v \cdot w \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$

2.3.4 Quotientenregel

$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

2.4 Kettenregel

Überlegung: Was muss zuerst berechnet werde, was gehört zusammen?

Beispiel: $f(x) = arccos\sqrt{x^2 - 1}$

innerste Funktion z	$z : x \rightarrow z(x) = x^2 - 1$
mittlere Funktion u	$u : z \rightarrow u(z) = \sqrt{z}$
äusserste Funktion F	$F : u \rightarrow F(u) = arccos(u)$

Somit gilt: $f(x) = F(u) \cdot u(z) \cdot z(x)$.
Daraus schliessen wir das:

$$f'(x) = F'(u) \cdot u'(z) \cdot z'(x)$$

gilt. Jetzt nur noch zurück substituieren und die abgeleitete Funktion ist gefunden.

2.5 Tangente und Normale

Steigung der Tangente	$m_T = f'(x)$
Gleichung der Tangente	$y_T = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
Steigung der Normalen	$m_N = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$
Gleichung der Normalen	$y_N = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

2.6 Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung des Kurvenpunkts $P = (x_0, y_0)$ kann die nichtlineare Funktion $y = f(x)$ näherungsweise durch die lineare Funktion
$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ oder $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$
ersetzt werden.

Vorgehen:

1. Arbeitspunkt P bestimmen: x_0, y_0
2. Tangentensteigung:
   a) erste Ableitung
   b) $m_T = f'(x_0)$
3. Gleichung der Tangente in P
   a) $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m_T \Rightarrow y = 2x - 3\pi$
4. Im Arbeitspunkt P gibt linearisierte Funktion
5. Exakter Wert: Ursprungsfunktion
6. Näherungswert: Linearisierte Funktion

2.7 Monotonie einer Kurve

$y' = f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend
$y' = f'(x) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

2.8 Krümmung einer Kurve

2.8.1 Allgemein

$y'' = f''(x_0) > 0$: Links-Krümmung. $f'(x_0)$ muss streng monoton wachsend sein.
$y'' = f''(x_0) < 0$: Rechts-Krümmung. $f'(x_0)$ muss streng monoton fallend sein.
Formel zur Berechnung der Krümmung einer ebenen Kurve $y = f(x)$:

$\kappa = \kappa(x) = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(x)}{[1+[f'(x)]^2]^{\frac{3}{2}}}$

2.9 Charakterische Kurvenpunkte

2.9.1 Extremum

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. ein relatives Minimum, wenn in einer gewissen Umgebung von x_0 stets
$f(x_0) > f(x)$ bzw. $f(x_0) < f(x)$
ist ($x \neq x_0$).

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$$

Für $f''(x_0) > 0$ liegt dabei eine relatives Minimum vor, für $f''(x_0) < 0$ dagegen ein relatives Maximum.

2.9.2 Wendepunkte, Sattelpunkte

Punkte x_0 mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ heissen **Wendepunkte** (die Krümmung wechselt ihre Richtung).

Kurven mit waagrechter Tangente werden als Sattelpunkte bezeichnet.

Hinreichende Bedingung für einen **Wendepunkt**:

$$f''(x_0) = 0$$

und

$$f'''(x_0) \neq 0$$

Notwendige Bedingung für einen **Sattelpunkt**:

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$$

2.10 Kurvendisskusion

Ablauf:

- Definitionsbereich/lücken
- Symmetrie (gerade, ungerade Funktion)
- Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse
- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden)
- Ableitungen (i. d. R. bis zur 3. Ordnung)
- Relative Extremwerte (Maxima, Minima)
- Wendepunkte, Sattelpunkte
- Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen
- Wertebereich der Funktion
- Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Massstab

3 Integralrechnen

3.1 Einführung

3.1.1 Definition

Die Integration ist die Umkehrung der Ableitung. Es gilt:

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.1.2 Stammfunktion

1. Falls es eine Stammfunktion zu einer stetigen Funktion $f(x)$ gibt, gibt es *unendlich* viele Stammfunktionen
2. Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich durch eine *additive* Konstante: $F_1(x) - F_2(x) = C$
3. Ist $F_1(x)$ eine *beliebige* Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F_1(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Daher lässt sich die *Menge aller Stammfunktionen* in der Form $F(x) = F_1(x) + C$ darstellen.

3.2 Unter- und Obersumme

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.3 Das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$\rightarrow F'(x) = f(x)$

3.4 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral berechnet eine Fläche.
Allgemein:

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Beispiel:

$$A = \int_0^\pi sin(x)\,\mathrm{d}x = [-cos(x)]_0^\pi$$

3.5 Integration durch Substitution

Beispiel unbestimmtes Integral:

$$\int x \cdot cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

1. Aufstellung der Substitutionsgleichung

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

2. Durchführung der Integralsubstitution

$$\int x \cdot cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int x \cdot cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2}\int cos(u)\,\mathrm{d}u$$

3. Integration

$$\frac{1}{2}\int cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot sin(u) + C$$

4. Rücksubstitution

$$\int x \cdot cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot sin(x^2) + C$$

3.6 Partielle Integration

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u \cdot v' \, \mathrm{d}x = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

Wenn der Integral-Minuend auf der rechten Seite gleich wie das Integral auf der linken Seite ist, kann es zur rechten Seite addiert werden und *verschwindet* somit.

3.7 Flächeninhalt

3.7.1 Bezgl. x-Achse

$$A = \left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right|$$

$$A = A_1 + A_2 + ...A_n$$

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \, \mathrm{d}x \right| ...$$

Vorgehen:

1. Nullstellen berechnen (Hornerschema) und als Grenzen benützen
2. Funktion ins Integral einsetzen und lösen

3.7.2 Zwischen zwei Kurven

$$A = \int_a^b (y_o - y_u) \, \mathrm{d}x = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)] \, \mathrm{d}x$$

Dabei bedeuten:
$y_o = f_o(x)$: Gleichung der *oberen* Randkurve
$y_u = f_u(x)$: Gleichung der *unteren* Randkurve

Vorgehen:

1. Kurvenschnittpunkte berechnen:

$$f_o(x) = f_u(x)$$

2. Integral mit der/den gegebenen Funktion(en) berechnen.

3.8 Volumen eines Rotationkörpers

3.8.1 Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

3.8.2 Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 \, \mathrm{d}y$$

Die Grenzen liegen auf der y-Achse!

1. Kurvenschnittpunkte P_1, P_2 berechnen
   a) Dazu Gleichung nach x auflösen und in zweite Gleichung einsetzen
2. Skizze erstellen und zu berechnende Flächen markieren
3. Volumen berechen $V_t = V_1 + V_2 + ...$

3.8.3 Funktion einer Parabel herleiten

Voraussetzung: Spiegelsymmetrische Parabel, die Verschiebung der Parabel auf der x-Achse und ein Punkt P_1 muss bekannt sein.
Ansatz: $y = ax^2 + b = ax^2 + 0.5$
Der Öffnungsparameter a bestimmt man aus dem Parabelpunkt $P_1 = (1; 0.25)$.
$a \cdot 1^2 + 0.5 = 0.25 \Rightarrow a = -0.25 \Rightarrow y = 0.25x^2 + 0.5 = -0.25(x^2 - 2) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2)$
Jetzt nur noch in die bekannte Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationkörpers einsetzen.

3.9 Beispiele aus Physik und Technik

Durch das Ableiten der Ortsfunktion $s(t)$ erhalten wir die Momentan-Geschwindigkeit $v(t)$ und durch nochmaliges Ableiten erhält man die Momentan-Beschleunigung $a(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \dot{v} = \ddot{s}$$

Umgekehrt gilt, falls $a = a(t)$ bekannt ist, erhalten wir die Geschwindigkeit, bzw. den Ort durch Integration:

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \iint a(t)\,\mathrm{d}t$$

4 Potenzreihenentwicklung

4.1 Unendliche Reihen

4.1.1 Grundbegriffe

Unendliche Zahlenfolge

Def Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen einer unendlichen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heisst *unendliche Reihe*. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..$$

Konvergenz/Divergenz

Def Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst *konvergent* wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ einen Grenzwert s besitzt:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

Dieser Grenzwert wird als *Summenwert* der unendlichen Reihe bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = s$$

Besitzt die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ jedoch *keinen* Grenzwert, so ist die unendliche Reihe divergent.

4.1.2 Konvergenzkriterien

Def Für die *Konvergenz* einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

notwendig, nicht aber hinreichend. Mit anderen Worten: Damit die unendliche Reihe *konvergiert*, müssen die Reihenglieder diese Bedingung erfüllen. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heisst aber keineswegs, das die unendliche Reihe konvergiert. Eine Reihe jedoch, die das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt, kann nicht konvergent sein und ist daher *divergent*.

Quotientenkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right| = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Wurzelkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*.

Für beide Kriterien gilt: Für $q = 1$ versagt das Kriterium (keine Aussage möglich). Das Quotienten- oder Wurzelkriterium ist hinreichend aber nicht notwendig, d. h. es gibt Reihen, für die der Grenzwert nicht vorhanden ist aber trotzdem konvergieren.

Leibnizscheskriterium

Def Eine *alternierende* Reihe vom Typ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - 1a_2 + a_3 - a_4 + -...$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist konvergent, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedinungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3...$ strikt monoton sinkend
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}...$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3...} = 0$$

Wichtige konvergente Reihen

- Geometrische Reihe:
  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \frac{a}{1-q}$ $(|q| < 1)$
- Harmonische Reihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$
- Alternierende harmonische Reihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... = ln2$
- $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = e$

Gut zu wissen:

- $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}$
- $n! = n(n-1)(n-2)(...) = n(n-1)!$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2})^n = e$

4.1.3 Potenzreihen

Def Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 ...$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, ...$ heissen *Koeffizienten* der Potenzreihe. Der *Konvergenzbereich* ist der gesamte Bereich in welchem die Reihe konvergiert. Der *Konvergenzradius* ist eine Teilmenge des Konvergenzbereichs.

Zu einer etwas allgemeineren Darstellungsform der Potenzreihen gelangt man durch die Definitionsvorschrift:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + ... + a_n (x - x_0)^n + ...$$

Formel Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe lässit sich nach der Formel

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnen (Voraussetzung: alle Koeffizienten $a_n \neq 0$ und der Grenzwert ist vorhanden). Die Reihe konvergiert dann für $|x| < r$ und divergiert für $|x| > r$. In den beiden Randpunkten $x_1 = \pm r$ ist das Konvergenzverhalten der Potenzreihe zunächst unbestimmt.

Berechnen des Konvergenzradius und Bestimmung des Verhaltens von $\pm r$

1. Konvergenzradius r bestimmen
2. Konvergenzverhalten in den Randpunkten bestimmen

4.2 Taylor-Reihen

Die Taylorsche Formel sagt aus, dass man eine Funktion f an der Stelle x in der Umgebung eines bekannten Wertes x_0 als ein Polynom in x schreiben kann, bis auf das sogenannte Lagrangsche Restglied. Das Restglied interessiert uns aber nicht wirklich.

Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Die *Mac Laurinsche Reihe* ist eine spezielle Form der Taylorschen Reihe für das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$ (Nullpunkt):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

4.2.1 Beispiele der Taylorreihen

Taylorreihe der Sinusfunktion

Wir entwickeln die Sinusfunktion um die Stell $x_0 = \pi/2$: ...

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x - \pi/2)^{2n}}{(2n)!}$$

Mac Laurin Reihe der Exponentialfunktion

Wir bestimmen die Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$:
$f(x) = f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n)}(x) = ... = e^x$
$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(0)}(x) = ... = e^0 = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Mac Laurin Reihe der Cosinusfunktion

...

Formel

$$cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + -... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Mac Laurin Reihe der Sinusfunktion

Die Mac Laurinsche Reihe der sinusfunktion erhalten wir am bequemsten durch gliedweise Differentiation der Kosinusreihe:
...

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Näherungspolynome der Kosinusfunktion

Maybe... not!