Zusammenfassung Analysis I und II

Bachelorstudium Informatik HSZ-T

Benjamin Bütikofer

9. Juni 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen und Kurven

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition

Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge M zuordnet.

1.1.2 Darstellung

Symbolische Schreibweise
$y = f(x)$ mit $x \in D$ oder
$f : x \to y = f(x)$ mit $x \in D$

1.1.3 Analytische Schreibweise

Explizite Darstellung: $y = f(x)$
Implizierte Darstellung: $F(x; y) = 0$

1.1.4 Nullstellen

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ ist.
In einer Nullstelle schneidet oder berührt die Funktionskurve die x-Achse!

1.2 Symmetrie

1.2.1 Gerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst gerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:
$f(-x) = f(x)$

1.2.2 Ungerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst ungerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:
$f(-x) = -f(x)$

1.2.3 Beweis

Um zu Beweisen ob eine Funktione gerade oder ungerade ist, setzt man -x in die Funktion ein.

1.2.4 Hornerschema

Vorgehen:

1. Erstes x muss geraten werden. Gute Kandidaten: $\pm 1, \pm 2$.
2. In Tabelle einsetzen. Jede Reihe steht für ein x, auch wenn $x = 0$ ist.
3. Solange wiederholen bis alle x gefunden sind.

Funktion: $x^3 - 6x^2 - 4x^3 + 24$

	1	-6	-4	24
2		2	-8	-24
	1	-4	-12	

1.3 Monotonie

x_1 und x_2 seien zwei beliebige Werte aus dem Definitionsbereich D einer Funktion $y = f(x)$ mit $x_1 < x_2$. Dann heisst die Funktion:

- monoton wachsend, falls $f(x_1) \geq f(x_2))$
- streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2))$
- monoton fallend, falls $f(x_1) \leq f(x_2))$
- streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2))$

1.4 Periodizität

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst periodisch mit Periode p, wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm p$ zum Definitionsbereich D der Funktion gehört und es gilt:
$f(x \pm p) = f(x)$

1.5 Umkehr/inverse Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst umkehrbar, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. Sie muss streng monoton sein!

Der Definitions- und Wertebereich wird bei einer Umkehrung getauscht:
$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$
Bestimmung:

1. nach x auflösen
2. x und y tauschen

1.6 Reelle Zahlenfolgen

1.6.1 Grenzwert/Limes

- Die reelle Zahl g heisst **Grenzwert** (Limes) der Zahlenfolge a_n, wenn es zu jedem $\in > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n > n0$ stets gilt: $|a_n - g| < \in$
- Eine Folge a_n heisst **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert g besitzt. Symbolische Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$

1.6.2 Stetigkeit einer Funktion

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierten Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Graphisch: Die Funktion macht keinen Sprung.

1.6.3 Unstetigkeit

Stellen in denen eine Funktion die Stetigkeitsbedingung $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ nicht erfüllt ist, heissen Unstetigkeitsstellen.
Eine Funktion $f(x)$ ist also an der Stelle x_0 unstetig, wenn mindestens einer der folgenden Aussagen zutrifft:

- $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert
- Der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist nicht vorhanden
- Funktions- und Grenzwert sind zwar vorhanden, jedoch voneinander verschieden

2 Differentialrechnen

2.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tan\alpha = m_{S(ekante)/T(angente)}$$

definiert ist. Man bezeichnet ihn als die (erste) Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 oder als **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 und kennzeichnet ihn durch das Symbol:

$y'(x_0)$, $f'(x_0)$ oder $\frac{dy}{dx} \mid_{x=x_0}$.

Weitere nützliche Schreibweise:

$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$

- Die Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt.
- Die Ableitungsfunktion $y'(x) = f'(x)$ ordnet jeder Stelle x aus einem Intervall I als funktionswert den Steigungswert (Grenzwert) zu. Man spricht dann kurz von der Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x

Eine Betragsfunktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, da sie dort keine eindeutig bestimmte Tangente besitzt. Man muss also zu erst die rechts- und dann die linksseitige Ableitung ausrechnen.

Tangenten: Für die Ableitung und den Steigungswinkel α gilt $y' = tan\alpha$

2.2 Ableitungen der elementaren Funktionen

Funktion f(x)		Ableitung f'(x)
Konstante Funktion	c = const	0
Potenzfunktion	x^n $(x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$n \cdot x^{n-1}$ $\frac{1}{(x^2)^{\frac{1}{2}}}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$ gilt nur für 2. Wurzel	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$sinx$ $sin2x$	$cosx$ $2cos(2x)$
	$cos(x)$	$-sinx$
	$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$, $1 + tan^2(x)$
	$cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$arccot(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	e^{2x}	$2e^{2x}$
	a^x	$(lna) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	lnx	$\frac{1}{x}$
	$log_a x$	$\frac{1}{(lna) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen, Areafunktionen: Siehe Seite 17 im Skript.		

2.3 Ableitungsregeln

2.3.1 Faktorregel

$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$; C = Reelle Konstante, bleibt erhalten.

2.3.2 Summenregel

$y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \Rightarrow y' = f'_1(x) + f'_2(x) + ... + f'_n(x)$

Es darf gliedweise differenziert werden.

2.3.3 Produktregel

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$

Bei mehreren Termen:

$y = u \cdot v \cdot w \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$

2.3.4 Quotientenregel

$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

2.4 Kettenregel

Überlegung: Was muss zuerst berechnet werde, was gehört zusammen?

Beispiel: $f(x) = arccos\sqrt{x^2 - 1}$

innerste Funktion z	$z : x \rightarrow z(x) = x^2 - 1$
mittlere Funktion u	$u : z \rightarrow u(z) = \sqrt{z}$
äusserste Funktion F	$F : u \rightarrow F(u) = arccos(u)$

Somit gilt: $f(x) = F(u) \cdot u(z) \cdot z(x)$.
Daraus schliessen wir das:

$$f'(x) = F'(u) \cdot u'(z) \cdot z'(x)$$

gilt. Jetzt nur noch zurück substituieren und die abgeleitete Funktion ist gefunden.

2.5 Tangente und Normale

Steigung der Tangente	$m_T = f'(x)$
Gleichung der Tangente	$y_T = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
Steigung der Normalen	$m_N = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$
Gleichung der Normalen	$y_N = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

2.6 Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung des Kurvenpunkts $P = (x_0, y_0)$ kann die nichtlineare Funktion $y = f(x)$ näherungsweise durch die lineare Funktion
$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ oder $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$
ersetzt werden.

Vorgehen:

1. Arbeitspunkt P bestimmen: x_0, y_0
2. Tangentensteigung:
   a) erste Ableitung
   b) $m_T = f'(x_0)$
3. Gleichung der Tangente in P
   a) $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m_T \Rightarrow y = 2x - 3\pi$
4. Im Arbeitspunkt P gibt linearisierte Funktion
5. Exakter Wert: Ursprungsfunktion
6. Näherungswert: Linearisierte Funktion

2.7 Monotonie einer Kurve

$y' = f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend
$y' = f'(x) < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend

2.8 Krümmung einer Kurve

2.8.1 Allgemein

$y'' = f''(x_0) > 0$: Links-Krümmung. $f'(x_0)$ muss streng monoton wachsend sein.
$y'' = f''(x_0) < 0$: Rechts-Krümmung. $f'(x_0)$ muss streng monoton fallend sein.
Formel zur Berechnung der Krümmung einer ebenen Kurve $y = f(x)$:

$\kappa = \kappa(x) = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(x)}{[1+[f'(x)]^2]^{\frac{3}{2}}}$

2.9 Charakterische Kurvenpunkte

2.9.1 Extremum

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. ein relatives Minimum, wenn in einer gewissen Umgebung von x_0 stets
$f(x_0) > f(x)$ bzw. $f(x_0) < f(x)$
ist ($x \neq x_0$).

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$$

Für $f''(x_0) > 0$ liegt dabei eine relatives Minimum vor, für $f''(x_0) < 0$ dagegen ein relatives Maximum.

2.9.2 Wendepunkte, Sattelpunkte

Punkte x_0 mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ heissen **Wendepunkte** (die Krümmung wechselt ihre Richtung).

Kurven mit waagrechter Tangente werden als Sattelpunkte bezeichnet.

Hinreichende Bedingung für einen **Wendepunkt**:

$$f''(x_0) = 0$$

und

$$f'''(x_0) \neq 0$$

Notwendige Bedingung für einen **Sattelpunkt**:

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$$

2.10 Kurvendisskusion

Ablauf:

- Definitionsbereich/lücken
- Symmetrie (gerade, ungerade Funktion)
- Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse
- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden)
- Ableitungen (i. d. R. bis zur 3. Ordnung)
- Relative Extremwerte (Maxima, Minima)
- Wendepunkte, Sattelpunkte
- Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen
- Wertebereich der Funktion
- Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Massstab

3 Integralrechnen

3.1 Einführung

3.1.1 Definition

Die Integration ist die Umkehrung der Ableitung. Es gilt:

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3.1.2 Stammfunktion

1. Falls es eine Stammfunktion zu einer stetigen Funktion $f(x)$ gibt, gibt es *unendlich* viele Stammfunktionen
2. Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich durch eine *additive* Konstante: $F_1(x) - F_2(x) = C$
3. Ist $F_1(x)$ eine *beliebige* Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F_1(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Daher lässt sich die *Menge aller Stammfunktionen* in der Form $F(x) = F_1(x) + C$ darstellen.

3.2 Unter- und Obersumme

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.3 Das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$\rightarrow F'(x) = f(x)$

3.4 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral berechnet eine Fläche.
Allgemein:

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Beispiel:

$$A = \int_0^\pi sin(x)\,\mathrm{d}x = [-cos(x)]_0^\pi$$

3.5 Integration durch Substitution

Beispiel unbestimmtes Integral:

$$\int x \cdot cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

1. Aufstellung der Substitutionsgleichung

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$$

2. Durchführung der Integralsubstitution

$$\int x \cdot cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int x \cdot cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2}\int cos(u)\,\mathrm{d}u$$

3. Integration

$$\frac{1}{2}\int cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot sin(u) + C$$

4. Rücksubstitution

$$\int x \cdot cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot sin(x^2) + C$$

3.6 Partielle Integration

$$\int u \cdot v' \,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b u \cdot v' \,\mathrm{d}x = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \,\mathrm{d}x$$

Wenn der Integral-Minuend auf der rechten Seite gleich wie das Integral auf der linken Seite ist, kann es zur rechten Seite addiert werden und *verschwindet* somit.

3.7 Flächeninhalt

3.7.1 Bezgl. x-Achse

$$A = \left| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \right|$$

$$A = A_1 + A_2 + ...A_n$$

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \,\mathrm{d}x \right| ...$$

Vorgehen:

1. Nullstellen berechnen (Hornerschema) und als Grenzen benützen
2. Funktion ins Integral einsetzen und lösen

3.7.2 Zwischen zwei Kurven

$$A = \int_a^b (y_o - y_u) \,\mathrm{d}x = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)] \,\mathrm{d}x$$

Dabei bedeuten:
$y_o = f_o(x)$: Gleichung der *oberen* Randkurve
$y_u = f_u(x)$: Gleichung der *unteren* Randkurve

Vorgehen:

1. Kurvenschnittpunkte berechnen:

$$f_o(x) = f_u(x)$$

2. Integral mit der/den gegebenen Funktion(en) berechnen.

3.8 Volumen eines Rotationkörpers

3.8.1 Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

3.8.2 Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 \,\mathrm{d}y$$

Die Grenzen liegen auf der y-Achse!

1. Kurvenschnittpunkte P_1, P_2 berechnen
   a) Dazu Gleichung nach x auflösen und in zweite Gleichung einsetzen
2. Skizze erstellen und zu berechnende Flächen markieren
3. Volumen berechen $V_t = V_1 + V_2 + ...$

3.8.3 Funktion einer Parabel herleiten

Voraussetzung: Spiegelsymmetrische Parabel, die Verschiebung der Parabel auf der x-Achse und ein Punkt P_1 muss bekannt sein.
Ansatz: $y = ax^2 + b = ax^2 + 0.5$
Der Öffnungsparameter a bestimmt man aus dem Parabelpunkt $P_1 = (1; 0.25)$.
$a \cdot 1^2 + 0.5 = 0.25 \Rightarrow a = -0.25 \Rightarrow y = 0.25x^2 + 0.5 = -0.25(x^2 - 2) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2)$
Jetzt nur noch in die bekannte Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationkörpers einsetzen.

3.9 Beispiele aus Physik und Technik

Durch das Ableiten der Ortsfunktion $s(t)$ erhalten wir die Momentan-Geschwindigkeit $v(t)$ und durch nochmaliges Ableiten erhält man die Momentan-Beschleunigung $a(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \dot{v} = \ddot{s}$$

Umgekehrt gilt, falls $a = a(t)$ bekannt ist, erhalten wir die Geschwindigkeit, bzw. den Ort durch Integration:

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \iint a(t)\,\mathrm{d}t$$

4 Potenzreihenentwicklung

4.1 Unendliche Reihen

4.1.1 Grundbegriffe

Unendliche Zahlenfolge

Def Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen einer unendlichen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heisst *unendliche Reihe*. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..$$

Konvergenz/Divergenz

Def Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst *konvergent* wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ einen Grenzwert s besitzt:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

Dieser Grenzwert wird als *Summenwert* der unendlichen Reihe bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = s$$

Besitzt die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ jedoch *keinen* Grenzwert, so ist die unendliche Reihe divergent.

4.1.2 Konvergenzkriterien

Def Für die *Konvergenz* einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

notwendig, nicht aber hinreichend. Mit anderen Worten: Damit die unendliche Reihe *konvergiert*, müssen die Reihenglieder diese Bedingung erfüllen. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heisst aber keineswegs, das die unendliche Reihe konvergiert. Eine Reihe jedoch, die das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt, kann nicht konvergent sein und ist daher *divergent*.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n+2} &= \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n}\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2} \\
&= \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n}\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2} = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2} \\
&= \frac{1}{e^2}\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2} \\
&= \frac{1}{e^2}\cdot 1^2 = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \text{ Divergent!}
\end{aligned}$$

Quotientenkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Wurzelkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*.

Für beide Kriterien gilt: Für $q = 1$ versagt das Kriterium (keine Aussage möglich). Das Quotienten- oder Wurzelkriterium ist hinreichend aber nicht notwendig, d. h. es gibt Reihen, für die der Grenzwert nicht vorhanden ist aber trotzdem konvergieren.

Leibnizscheskriterium

Def Eine *alternierende* Reihe vom Typ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - 1a_2 + a_3 - a_4 + -...$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist konvergent, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedinungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3...$ strikt monoton sinkend
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}...$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3...} = 0$$

Wichtige Reihen

- Geometrische Reihe:
  $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \frac{a}{1-q}$ $(|q| < 1)$ konvergiert!
- Harmonische Reihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... \Rightarrow$ divergiert!
- Alternierende harmonische Reihe: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... = ln2 \Rightarrow$ konvergiert!
- $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = e \Rightarrow$ absolute Konvergenz!

Gut zu wissen:

- $(n + 1)! = (n + 1)n!$
- $(n + 2)! = (n + 2)(n + 1)!$

- $n! = n(n-1)(n-2)(...) = n(n-1)!$
- $2n! = 2n(2n-1)!$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

4.1.3 Potenzreihen

Def Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 ...$$

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, ...$ heissen *Koeffizienten* der Potenzreihe. Der *Konvergenzbereich* ist der gesamte Bereich in welchem die Reihe konvergiert. Der *Konvergenzradius* ist eine Teilmenge des Konvergenzbereichs.

Zu einer etwas allgemeineren Darstellungsform der Potenzreihen gelangt man durch die Definitionsvorschrift:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ...$$

Formel Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe lässt sich nach den Formeln

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ und } r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnen (Voraussetzung: alle Koeffizienten $a_n \neq 0$ und der Grenzwert ist vorhanden). Die Reihe konvergiert dann für $|x| < r$ und divergiert für $|x| > r$. In den beiden Randpunkten $x_1 = \pm r$ ist das Konvergenzverhalten der Potenzreihe zunächst unbestimmt. Ist $r = \pm\infty$ konvergiert die Reihe für jedes reelle x. Der *Konvergenzbereich* ist daher $x \in \mathbb{R}$!

Berechnen des Konvergenzradius und Bestimmung des Verhaltens von $\pm r$

1. Konvergenzradius r bestimmen
2. Konvergenzverhalten in den Randpunkten bestimmen

4.2 Taylor-Reihen

Falls eine Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbar ist und das Restglied für $n \to \infty$ verschwindet (also gegen 0 strebt), erhält man die Taylorsche Reihe, bzw. den Spezialfall der Mac Laurinschen Reihe (für $x_0 = 0$).

Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Die *Mac Laurinsche Reihe* ist eine spezielle Form der Taylorschen Reihe für das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$ (Nullpunkt):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Um die MacLaurinsche Reihe zu bilden muss die Funktion zu erst bis zur gewünschten Stelle Abgleitet werden. Danach muss das gegebene x_0 in den abgeleiteten Funktionen eingesetzt werden. Daraus kann man nachher die Reihe bilden.

4.2.1 Beispiele der Taylorreihen

Taylorreihe der Sinusfunktion

Wir entwickeln die Sinusfunktion um die Stelle $x_0 = \pi/2$:

$$\begin{aligned}
f(x) = sin(x) \Rightarrow & \qquad f(\pi/2) = sin(\pi/2) = 1 \\
f'(x) = cos(x) \Rightarrow & \qquad f'(\pi/2) = cos(\pi/2) = 0 \\
f''(x) = -sin(x) \Rightarrow & \qquad f''(\pi/2) = -sin(\pi/2) = -1 \\
f'''(x) = -cos(x) \Rightarrow & \qquad f'''(\pi/2) = -cos(\pi/2) = 0 \\
f^{(4)}(x) = sin(x) \Rightarrow & \qquad f^{(4)}(\pi/2) = sin(\pi/2) = 1 \\
\vdots &
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow sin(x) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 \pm ...$$

$$= 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} \pm ...$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x - \pi/2)^{2n}}{(2n)!}$$

Mac Laurin Reihe der Exponentialfunktion

Wir bestimmen die Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$:
$f(x) = f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n)}(x) = ... = e^x$
$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(0)}(x) = ... = e^0 = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Mac Laurin Reihe der Cosinusfunktion

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + -... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Mac Laurin Reihe der Sinusfunktion

Die Mac Laurinsche Reihe der Sinusfunktion erhalten wir am bequemsten durch gliedweise Differentiation der Kosinusreihe:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4.2.2 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hopital

Def Für Grenzwert, die auf einen *unbestimmten Ausdruck* der Form »$\frac{0}{0}$« oder »$\frac{\infty}{\infty}$« führen, gilt die BdH Regel:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anmerkungen:

- Die Bernoulli-de L'Hospitalsche Regel setzt voraus, dass die Funktion $f(x)$ und $g(x)$ in der Umgebung von x_0 stetig differenzierbar sind und der Grenzwert der rechten Seite existiert.

- Die BdH Regel gilt sinngemäss auch für Grenzübergänge vom Typ $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.
- In einigen Fällen muss man mehrere Male Ableiten um zum Ziel zu kommen

Nützliche Umformungen

Da die BdH Regel nur für unbestimmte Ausdrücke der Form »$\frac{0}{0}$« oder »$\frac{\infty}{\infty}$« anwendbar ist, müssen alle anderen Formen durch elementare Umformung in diese spezielle Forum umgeformt werden.

Funktion $\varphi(x)$	Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$	Elementare Umformung
(A) $u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$	$\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ bzw. $\dfrac{v(x)}{\dfrac{1}{u(x)}}$
(B) $u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\dfrac{\dfrac{1}{v(x)} - \dfrac{1}{u(x)}}{\dfrac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
(C) $u(x)^{v(x)}$	0^0, ∞^0, 1^∞	$e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$

Abbildung 4.1: Elementare Umformungen für unbestimmte Ausdrücke

5 Komplexe Zahlen und Funktionen

5.1 Definition einer komplexen Zahl

Unter einer komplexen Zahl z versteht man ein geordnetes Paar (x, y) aus zwei reellen Zahlen x und y. Symbolische Schreibweise:

$$z = x + jy$$

Die komplexe Zahl $z = x + jy$ wird dabei durch den Punkt $P(z) = (z; y)$ der x, y-Ebene eindeutig repräsentiert. Die reellen Bestandteile x und y der komplexen Zahl $z = x + jy$ werden als Realteil und Imaginärteil von z bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$Re(z), Im(z)$$

Die Menge $\mathbb{C} = \{z|z = x + jy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$ heisst Menge der komplexen Zahlen.

5.1.1 Weitere Grundbegriffe

- Zwei komplexe Zahlen sind genau dann **gleich**, wenn $Re(z_1) = Re(z_2)$ und $Im(z_1) = Im(z_2)$ gilt.
- Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist die Länge des dazugehörigen Zeigers: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Der Übergang von der komplexen Zahl z zur **konjugiert** komplexen Zahl z^* bedeutet einen Vorzeichenwechsel im Imaginärteil. Der dazugehörige Zeiger liegt daher spiegelsymmetrisch zur reellen Achse. $z^* = (x+jy)^* = x + j(-y) = x - jy$

5.1.2 Darstellungsformen

- Normalform:

$$z = x + jy$$

- Trigonometrische Form:

$$z = r \cdot (cos\phi + j \cdot sin\phi)$$

- Exponentialform:

$$e^{j\phi} = cos\phi + j \cdot sin\phi$$

$$\Rightarrow z = r \cdot (cos\phi + j \cdot sin\phi) = r \cdot e^{j\phi}$$

Die trigonometrische Form und die Exponentialform werden auch Polarform genannt.

5.1.3 Umrechnung Polarform → Kartesische Form

Eine in der Polarform $z = r(cos\phi + j \cdot sin\phi)$ oder $z = r \cdot e^{j\phi}$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichung

$$x = r \cdot cos\phi, y = r \cdot sin\phi$$

in die kartesische Form $z = x + jy$ überführen.

5.1.4 Umrechnung Kartesische Form → Polarform

eine in der kartesischen Form $z = x + jy$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, tan\phi = \frac{y}{x}$$

und unter Berüksichtigung des Quadranten, in dem der zugehörige Punkt liegt, in die trigonometrische Form $z = r(cos\phi + j \cdot sin\phi)$ bzw. die Exponentialform $z = e^{j\phi}$ überführen.

Quadrant	I	II, III	IV
$\phi =$	$arctan\frac{y}{x}$	$arctan\frac{y}{x} + \pi$	$arctan\frac{y}{x} + 2\pi$

Tabelle 5.1: Tabelle zum Quadranten

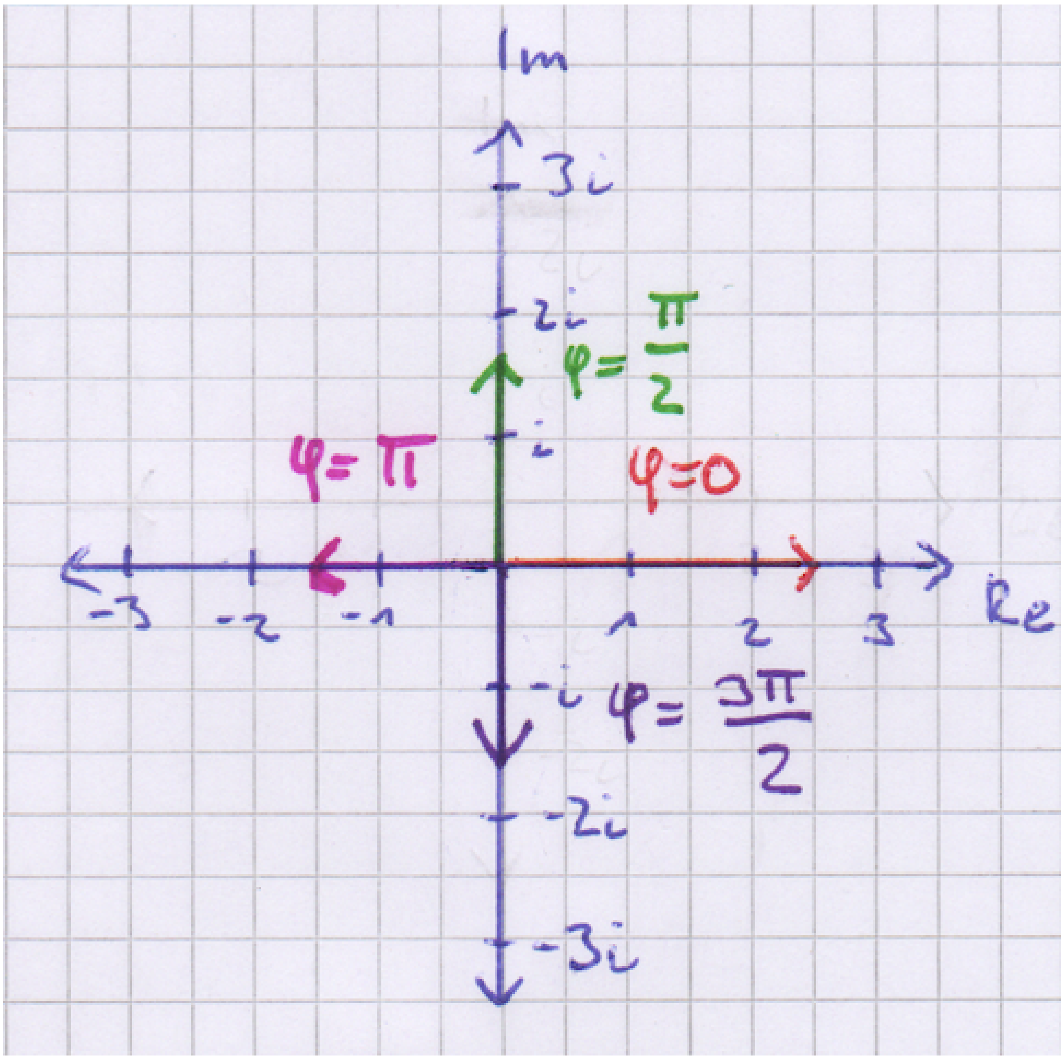

Abbildung 5.1: Verhalten von ϕ

5.2 Komplexe Rechnung

5.2.1 Grundrechenarten

Addition und Subtraktion

Def Summe z_1+z_2 und Differenz z_1-z_2 zweier komplexen Zahlen $z_1 = x_1+jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ werden nach den folgenden Vorschriften gebildet:

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \\
z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:

- Realteile und Imaginärteile werden jeweils für sich addiert, bzw. subtrahiert.
- Addition und Subtraktion lassen am einfachsten in der kartesischen Form durchführen.
- Die Addition ist kommutativ.
- Ungleichungen wie $z_1 < z_2$ oder $z_1 > z_2$ machen, im Gegensatz zu den reellen Zahlen, keinen Sinn.

Multiplikation in der kartesischen Form

Def Das Produkt $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2)$ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 wird im Reellen durch »Ausmultiplizieren« der Klammern unter Beachtung der Beziehung $j^2 = -1$ berechnet. Das geht am einfachsten in der trigonometrischen Form.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\
&= x_1x_2 + x_1jy_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2 \\
&= (x1_x2 - y_1y2) + j(x_1y_2 + x_2y_2)
\end{aligned}
$$

Multiplikation in der Polarform

Def Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (Winkel) addiert.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 r_2)[cos(\phi_1 + \phi_2) + j \cdot sin(\phi_1 + \phi_2)] \\ &= (r_1 r_2) \cdot e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \end{aligned}$$

Division in der kartesischen Form

Def Der Quotien z_1/z_2 zweier komplexen Zahlen z_1 und z_2 in kartesischer Form lässt sich schrittweise berechnen:

1. Der Bruch z_1/z_2 wird zunächst mit z_2^*, also dem konjugiert komplexen Nenner, erweitert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} \qquad = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)}$$

2. Zähler und Nenner werden dann nach den aus dem Rellen bekanten Regeln äusmultipliziertüngter Beachtung der Beziehung $j^2 = -1$. Der Nenner des Bruchs wird dadurch (positiv) reell.
3. Die im Zähler stehende komplexe Zahl wird jetzt gliedweise durch den (reellen) Nenner dividiert.

Man beachte: Wie im Rellen so ist auch im Komplexen die Division durch die Zahl Null nicht erlaubt.

Division in der Polarform

Def Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[cos(\phi_1 - \phi_2) + j \cdot sin(\phi_1 - \phi_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \end{aligned}$$

5.2.2 Potenzieren

Def Eine in der Polarform vorliegende komplexe Zahl z wird wie folgt **potenziert**:

- In exponentieller Schreibweise:

$$z^n = [r \cdot e^{j\phi}]^n = r^n \cdot e^{jn\phi}$$

- In trigonometrischer Schreibweise:

$$z^n = [r(cos\phi + j \cdot sin\phi)]^n = r^n[cos(n\phi) + j \cdot sin(n\phi)]$$

Eine komplexe Zahl wird in die n-te Potenz erhoben, in dem man ihren Betrag r in die n-te Potenz erhebt und ihr Argument (Winkel ϕ) mit dem Exponenten n multipliziert.

5.2.3 Radizieren

Def Die Gleichung $z^n = a = a_0 \cdot e^{ja}$ $(a_0 > 0; n = 1)$ besitzt im Komplexen genau n verschiedene Lösungen (Wurzeln).

$$r^n \cdot e^{jn\phi} = a_0 \cdot e^{j\alpha} = a_0 \cdot e^{j(\alpha + k \cdot 2\pi)}$$

Somit gilt:

$$r^n = a_0 \text{ und } n\phi = \alpha + k \cdot 2\pi$$

Alle Lösungen besitzen daher den gleichen Betrag (r). Der Winkel wird durch ϕ_k bestimmt:

$$r = \sqrt[n]{a_0} \,, \phi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}$$

Die Koordinaten lauten:

$$z_k = r(cos\phi_k + j \cdot sin\phi_k) = r \cdot e^{j\phi_k}$$

$(k = 0, 1, 2, ..., n - 1)$. Die dazugehörigen Bildpunkte liegen in der Gaussschen Zahlenebene auf dem Mittelpunktskreis mit dem Radius $R = \sqrt[n]{a_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks

6 Differential- und Integralrechnung für Funktion von mehreren Variablen

6.1 Funktion von mehreren Variablen

6.1.1 Definition

Def Unter einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x; y)$ aus einer Menge D genau ein Element z aus einer Menge W zuordnet, Symbolische Schreibweise:

$$z = f(x; y)$$

Analog gelangt man zu Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen:

$$u = f(x; y; z)$$

6.1.2 Darstellungsformen

Es gibt vier verschiedene Darstellungsformen:

1. *Explizit* dargestellt:

$$z = 2x + y + 1 \text{ oder } z = 2 \cdot sin(x - y)$$

2. *Implizit* dargestellt:

$$x^2 + y^2 + z - 1 = 0$$

3. Dargestellt in einer *Funktionstabelle*.

4. Graphische Darstellung (als Fläche, Höhenlinien, Schnittkurven..).

Die dritte und vierte Form eigenen sich nur für Funktionen mit maximal drei Variablen.

6.1.2.1 Höhenliniendiagramm

Def Die *Höhenlinien* einer Funktion $z = f(x; y)$ genügen der impliziten Kurvengleichung

$$f(x; y) = const. = c$$

c: Wert der Höhenkoordinate z (Kurvenparameter)

Die *Höhenlinien* sind die Projektionen der *Linien gleicher Höhe* in die x, y-Koordinatenebene.

6.1.3 Definitions- und Wertebereich

Der Definitionsbereich D einer Funktion $z = f(x, y)$ kann als eine flächenhafte Punktmenge in der x, y-Ebene aufgefasst werden.

Beispiel:

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Definitionsbereich: $25 - x^2 - y^2 \geq 0$, d. h. $x^2 + y^2 \leq 25$.
Wertebereich: $0 \leq z \leq 5$ (wegen $0 \leq 25 - x^2 - y^2 \leq 25$).

6.2 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

6.2.1 Grenzwert

Def Eine Funktion zweier Variablen hat an der Stelle $(x_, y_0)$ den Grenzwert g, wenn sich die Funktionswerte $f(x, y)$ beim Grenzübergang $(x, y) \to (x_0, y_0)$ unabhängig vom eingeschlagenen Weg dem Wert g beliebig nähern. Symbolische Schreibweise:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g$$

1. Eine Funktion kann auch in einer Definitionslücke (x_0, y_0) einen Grenzwert haben, obwohl sie dort nicht definiert ist.
2. Grenzwert auf einer Bildfläche: Je näher man zur Stelle (x_0, y_0) kommt, desto flacher wird die Ebene auf der man sich bewegt.

Um den Grenzwert berechnen zu können, muss an versuchen eine Variable loszuwerden.

Beispiel: x und y können auch in Polarkoordinatenform ausgedrückt werden: $x = r{\cdot}\cos\phi$ und $y = r{\cdot}\sin\phi$. Die Verwendung des trigonometrischen Pythagoras $(\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1)$ kann sich in diesem Fall anbieten:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \sin^2\phi + r^2 \cdot \cos^2\phi = r^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = r^2$$

Die Grenzwertberechnung vereinfacht sich nun auf eine unabhängige Variable $(\lim\limits_{r \to n} f(x))$.

6.2.2 Stetigkeit

Def Eine in (x_0, y_0) und einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) definierten Funktion $z = f(x; y)$ heisst an der Stelle (x_0, y_0) *stetig*, wenn der *Grenzwert* der Funktion an der Stelle *vorhanden* ist und mit dem dortigen Funktionswert *übereinstimmt.*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Anmerkung:

1. Die Stetigkeit an einer bestimmten Stelle setzt voraus, dass die Funktion dort auf *definiert* ist. Ferner muss der Grenzwert an dieser Stelle existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen.
2. Eine Funktion $z = f(x, y)$ heisst dagegen an der Stelle (x_0, y_0) *unstetig*, wenn $f(x_0, y_0)$ *nicht* vorhanden ist oder $f(x_0, y_0)$ vom Grenzwert *verschieden* ist oder dieser *nicht* existiert.
3. Eine Funktion, die an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist, wird als stetige Funktion bezeichnet.

Für Stetigkeit im Nullpunkt $(0, 0)$ muss gelten: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = f(0, 0) = a$

6.3 Partielle Differentiation

6.3.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung

Def Ist $z = f(x,y)$ an *jeder* Stelle (x,y) einer gewissen Bereiches *partiell* differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung selbst wieder *Funktionen* von x und y.

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Übliche Symbole für partielle Ableitungen sind:

$$f_x(x,y)\ ,\ z_x(x,y)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$$

Beispiel: $z = \sqrt{2xy - y^2}$; $u = 2xy - y^2 \Rightarrow z = \sqrt{u}$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{2xy - y^2}}$$
$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x - 2y) = \frac{x - y}{\sqrt{u}} = \frac{x - y}{\sqrt{2xy - y^2}}$$

Beispiel: Von $z = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$ die partielle Ableitung 1. Ordnung bestimmen und die Werte an der Stelle $x = 1$, $y = 2$ berechnen:

- $f_x = -12x^2y^2 + 3y^4 - 3$
- $f_y = -8x^3y + 12xy3 + 2$
- $f_x(1;2) = -3$, $f_y(1,2) = 82$, Höhenkoordinate: $z = f(1;2) = 38$
- Die im Flächenpunkt $P = (1,2,38)$ errichteten Tangenten besitzen den folgenden Anstieg, bzw Steigungswinkel:
  - Tangente in x-Richtung: $m_x = \tan\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = 180° + \arctan(-3) = 180° - 71.6° = 108.4°$
  - Tangente in y-Richtung: $m_y = \tan\beta = 82 \Rightarrow \beta = \arctan 82 = 89.3°$

6.3.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Def Es wird genau gleich vorgegangen wie bei der Ableitung erster Ordnung. Die einzelnen Differentiationsschritte sind in der Reihenfolge, in der die als Indizes angehängten Differentiationsvariablen im Ableitungssymbol auftreten, auszuführen.

f_{xy}: Hier wird zunächst nach der Variablen x und anschliessend nach der Variablen y differenziert.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung lassen sich auch in der Form partielle Differentialquotienten darstellen:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ ,\ f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Beispiel 3. Ordnung:

$$f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

6.3.2.1 Satz von Schwarz

Def Bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetige Funktionen sind.

$$f_{xy} = f_{yx},\ f_{xxy} = f_{yxx},\ \text{usw...}$$

6.3.3 Das totale/vollständige Differential einer Funktion

Def Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Flächenpunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ lautet in symmetrischer Schreibweise:

$$\Delta z = t(x, y) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Um z zu erhalten, müssen nur x_0 und y_0 in die Ursprungsfunktion $f(x, y)$ eingesetzt werden!

6.3.3.1 Vollständiges Differential

Def Bei einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen beschreibt das totale Differential:

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

die Änderung der Höhenkoordinate bzw. des Funktionswerts z auf der im Berührungspunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ errichteten Tantentialebene. Dabei sind die "Differentiale"dx, dy, dz die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangentialebene, bezogen auf den Punkt P.

Hier kommt noch das Bild von Slide 14

Bei n unabhängigen Variablen versteht man den linearen Differentialausdruck

$$dy = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 + ... + f_{x_n}dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

Bemerkung: $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \Delta z \approx dz$

6.3.3.2 Implizite Differentiation

Def Der Anstieg einer in der impliziten Form $F(x, y) = 0$ dargestellten Funktionskurve im Kurvenpunkt $P = (x, y)$ lässt sich wie folgt bestimmen:

$$y'(P) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

6.3.3.3 Linearisierung einer Funktion

Def In der Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, y_0)$ kann die nichtlineare Funktion $y = f(x)$ nährungsweise durch die lineare Funktion (Kurventangente)

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ oder } \Delta y = f'(x_0)$$

ersetzt werden.

Analog können wir eine nichtlineare Funktion $z = f(x, y)$ in der Nähe des Punktes $P = (x_0, y_0, z_0)$ durch die Tangentialebene annähern:

$$z = f(x, y) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z_0$$

auch

$$V = f_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z$$

6.3.3.4 Relative Extremwerte

Def Wie bei Analysis 1 gibt es zwei Bedingungen für Extremwerte:

- **Notwendige** Bedingung: $f_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f_y(x_0, y_0) = 0$
- **Hinreichende** Bedingung: $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 = \Delta$
- Das Vorzeichen von $f_{xx}(x_0, y_0)$ entscheidet über die Art des Extremwertes:
  - $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ relatives **Maximum**
  - $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow$ relatives **Minimum**
  - falls $\Delta < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt
  - falls $\Delta = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

6.3.4 Doppelintegrale

Wenn wir ein Doppelintegral berechnen wollen, müssen wir wissen, wie der Integrationsbereich A aussieht und führen dann zwei Integrationsschritte durch.

- **1. Fall:** x liegt zwischen konstanten Grenzen, y zwischen zwei Funktionen

$$\iint_{(A)} f(x, y) dA$$

- **2. Fall:** x liegt zwischen zwei Funktionen, y zwischen konstanten Grenzen.

6.3.4.1 Allgemein

1. Fall: Wir müssen zuerst nach y integrieren (inneres Integral) und danach das äussere Integral nach x integrieren.
2. Fall:Wir müssen zuerst nach x integrieren (inneres Integral) und danach das äussere Integral nach y integrieren.

6.3.4.2 Doppelintegrale in Polarkoordinaten

Je nach Problemstellung vereinfacht sich die Berechnung eines Doppelintegrals erheblich, wenn man an Stelle der kartesischen Koordinaten die Polarkoordiaten verwendet:

- $x = r \cdot cos\phi$
- $y = r \cdot sin\phi$
- ≥ 0 und $0 \leq \phi < 2\pi$

Integrationsbereiche bei denen diese Form angewendet werden kann werden von zwei Strahlen ϕ_1 und ϕ_2, sowie einer inneren Kurve $r_i(\phi)$ und einer äusseren Kurve $r_a(\phi)$ begrenzt. Für das infinitesimale Flächenelement gilt: $dA = (rd\phi) \cdot dr = rd\phi dr$. Das Doppelintegral besitzt die folgende Form:

$$\iint\limits_{(A)} f(x,y)da = \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi 2} \int\limits_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} f(r \cdot cos\phi, r \cdot sin\phi) \cdot r \cdot drd\phi$$

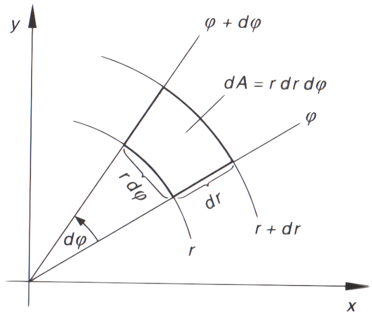

Abbildung 6.1: Flächenelemen dA in Polarkoordinaten

7 Gewöhnliche Differentialgleichungen

7.1 Grundbegriffe

7.1.1 Definition

Def Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung mit den Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = f(x)$. Die Ordnung der DGL entspricht der Ordnung der höchsten Ableitung.

Schreibweisen:

- Implizit: $F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0$
- Explizit: $y^{(n)} = f(x, y, y'..y^{(n-1)})$

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt. Wir unterscheiden:

- Allgemeine Lösung: Enthält noch n Integrationskonstanten.
- Spezielle oder partikuläre Lösung: Die n Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung werden durch n usätzliche Bedinungen (z. B. Anfangs- oder Randwertbedinungen) festgelegt.
- Singuläre Lösung: eine Lösung der DGL die sicht nicht aus der allgemeinen Lösung gewinnen lässt. (?)

n bezieht sich auf die Anzahl unterschiedlichen Konstanten und wird durch die Ordnung der DGL festgelegt. In unserem Fall ist n immer 1.

7.1.2 Lösung einer DGL

Im einfachsten Fall, z. B. für die DGL vom Typ $y^{(n)} = f(x)$ kann die *allgemeine* Lösung (Integrale) durch mehrmalige (n-mal) (unbestimmte) Integration der DGL gewonnen werden.

$$\text{Gegeben: } y' = 2x$$
$$y = \int y'dx = \int 2xdx = x^2 + C \ (C \in \mathbb{R})$$

Anfangswertprobleme

- Von der gesuchten Lösung $y = y(x)$ einer DGL n-ter Ordnung sind genau n Werte, nämlich der Funktionswert $y(x_0)$ sowie die Werte der ersten $n-1$ Ableitungen an der Stelle x_0 vorgegeben, also:

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), ..., y(^{n-1})(x_0)$$

- Aus diesen Anfangsbedingungen lassen sich die n Integrationskonstanten $C_1, ..., C_n$ der allg. Lösung bestimmen.

Für die DGL 1. Ordnung heisst das: Gesuch ist diejenige spezielle Lösungskurve der DGL, die durch den vorgegebenen Punkt $P = (x_0, y(x_0))$ verläuft.

Beispiel:

$$\text{Gegeben: } y' = 2x \ , \ y(0) = 1$$
$$y = \int y'dx = \int 2xdx = x^2 + C \ (C \in \mathbb{R})$$
$$\text{Bestimmung des Parameters: } y(0) = 1 \Rightarrow 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$
$$\text{Gesuchte spezielle Lösung: } y = x^2 + 1$$

Randwertprobleme

- Von der gesuchten Lösung $y = y(x)$ einer DGL n-ter Ordunung sind genau die Funktionswert $y(x_1), y(x_2), ...y(x_n)$ an den Stellen $x_1, x_2, ..., x_n$ vorgegeben.

- Aus diesen Anfangsbedingungen lassen sich die n Integrationskonstanten $C_1, ..., C_2$ der allg. Lsg. bestimmen.

Für die DGL 1. Ordnung heisst das: Die Lösungskurve $y = y(x)$ ist so zu bestimmen, dass sie durch den vorgegebenen Punkt $P_y = (x_1, y_1)$ verläuft.

7.2 DGL mit trennbaren Variablen

eine DGL 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

heisst separabel und lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Dabei wird die DGL zuerst umgestellt und anschliessend integriert:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

Auflösen nach $y(x)$ liefert schliesslich (häufig) die gewünschte Lösung.

7.2.1 Vorgehen

1. *Trennung* der beiden Variablen
2. *Integration* auf beiden Seiten der Gleichung
3. *Auflösen* der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen y (falls möglich)

Beispiel:

Gegeben: $x + yy' = 0$, $y(0) = 2$

Trennung der Variablen: $x + y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow ydy = -xdx$

Integ. auf b. Seiten: $\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y^2 = -x^2 + 2C$

Gesuchte spezielle Lösung: $y = x^2 + 1$

Allgemeine Lösung der DGL:

$$y^2 = -x^2 + 2C \text{ oder } x^2 + y^2 = 2C$$

Spezielle Lsg für $y(0) = 2$ (Lsgkurve durch Punkt (0, 2):

$$y(0) = 2 \Rightarrow 4 = 2C, \text{ d. h. } C = 2 \text{ und somit } R = \text{''}$$

Die Lösung unserer Anfangswertaufgabe führt zu dem Mittelpunktskreis $x^2 + y^2 = 4$ mit dem Radius $R = 2$

7.3 Integration einer DGL durch Substitution

In einigen Fällen ist es möglich, eine explizite DGL 1. Ordnung mittels eine geeigneten Substitution auf eine seperable DGL zurückzuführen. Diese lässt sich dann wie vorher beschrieben durch Trennung der Variablen lösen. Es gibt dabei zwei Typen:

1. Typ: $y' = f(ax + by + c)$
2. Typ: $y' = f(\frac{y}{x})$

7.3.1 Typ 1

- Substitution: $u = ax + by + x$, wobei $u = u(x)$ und $y = y(x)$ Funktionen in x sind!
- Unter Berücksichtigung, dass $y' = f(u)$ ist, erhalten wir:

$$\frac{du}{dx} = a + b \cdot y' = a + b \cdot f(u)$$

- Daraus können wir $u(x)$ mittel Separation der Variablen bestimmen
- Durch anschliessendes Einsetzen (Rücksubstitution) erhalten wir $y(x) = \frac{u(x)-ax-c}{b}$

Beispiel:

.

7.3.2 Typ 2

- Substitution: $u = \frac{y}{x}$, wobei $u = u(x)$ und $y = y(x)$ Funktionen in x sind!
- Unter Berücksichtigung, dass $y' = f(u)$ ist, erhalten wir:

$$\frac{du}{dx} = \frac{y' \cdot x - y}{x'2} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{x} = \frac{f(u) - u}{x}$$

- Daraus können wir $u(x)$ mittel Separation der Variablen bestimmen
- Durch anschliessendes Einsetzen (Rücksubstitution) erhalten wir $y(x) = u(x) \cdot x$

Beispiel:

.