

Zusammenfassung Analysis

Bachelorstudium Informatik HSZ-T

Benjamin Bütikofer

27. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionen und Kurven	4
1.1	Grundlagen	4
1.2	Symmetrie	5
1.3	Monotonie	6
1.4	Periodizität	6
1.5	Umkehr/inverse Funktion	6
1.6	Reelle Zahlenfolgen	7
2	Differentialrechnen	8
2.1	Differenzierbarkeit einer Funktion	8
2.2	Ableitungen der elementaren Funktionen	9
2.3	Ableitungsregeln	9
2.4	Kettenregel	10
2.5	Tangente und Normale	10
2.6	Linearisierung einer Funktion	11
2.7	Monotonie einer Kurve	11
2.8	Krümmung einer Kurve	11
2.9	Charakteristische Kurvenpunkte	12
2.10	Kurvendiskussion	13
3	Integralrechnen	14
3.1	Einführung	14
3.2	Unter- und Obersumme	14
3.3	Das unbestimmte Integral	15
3.4	Das bestimmte Integral	15
3.5	Integration durch Substitution	15
3.6	Partielle Integration	16
3.7	Flächeninhalt	16
3.8	Volumen eines Rotationkörpers	17
3.9	Beispiele aus Physik und Technik	18

4	Potenzreihenentwicklung	19
4.1	Unendliche Reihen	19
4.2	Taylor-Reihen	23
5	Komplexe Zahlen und Funktionen	26
5.1	Definition einer komplexen Zahl	26
5.2	Komplexe Rechnung	29
6	Differential- und Integralrechnung für Funktion von mehreren Variablen	32
6.1	Funktion von mehreren Variablen	32
6.2	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	33
6.3	Partielle Differentiation	34

1 Funktionen und Kurven

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition

Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge M zuordnet.

1.1.2 Darstellung

Symbolische Schreibweise

$y = f(x)$ mit $x \in D$ oder

$f : x \rightarrow y = f(x)$ mit $x \in D$

1.1.3 Analytische Schreibweise

Explizite Darstellung: $y = f(x)$

Implizierte Darstellung: $F(x; y) = 0$

1.1.4 Nullstellen

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = 0$ ist.

In einer Nullstelle schneidet oder berührt die Funktionskurve die x-Achse!

1.2 Symmetrie

1.2.1 Gerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst gerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

1.2.2 Ungerade Funktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einem zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich D heisst ungerade, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

1.2.3 Beweis

Um zu Beweisen ob eine Funktion gerade oder ungerade ist, setzt man $-x$ in die Funktion ein.

1.2.4 Horner Schema

Vorgehen:

1. Erstes x muss geraten werden. Gute Kandidaten: $\pm 1, \pm 2$.
2. In Tabelle einsetzen. Jede Reihe steht für ein x , auch wenn $x = 0$ ist.
3. Solange wiederholen bis alle x gefunden sind.

Funktion: $x^3 - 6x^2 - 4x^3 + 24$

	1	-6	-4	24
2		2	-8	-24
	1	-4	-12	

1.3 Monotonie

x_1 und x_2 seien zwei beliebige Werte aus dem Definitionsbereich D einer Funktion $y = f(x)$ mit $x_1 < x_2$. Dann heisst die Funktion:

- monoton wachsend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$

1.4 Periodizität

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst periodisch mit Periode p , wenn mit jedem $x \in D$ auch $x \pm p$ zum Definitionsbereich D der Funktion gehört und es gilt:

$$f(x \pm p) = f(x)$$

1.5 Umkehr/inverse Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst umkehrbar, wenn aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. Sie muss streng monoton sein!

Der Definitions- und Wertebereich wird bei einer Umkehrung getauscht:

$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$$

Bestimmung:

1. nach x auflösen
2. x und y tauschen

1.6 Reelle Zahlenfolgen

1.6.1 Grenzwert/Limes

- Die reelle Zahl g heisst **Grenzwert** (Limes) der Zahlenfolge a_n , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ stets gilt: $|a_n - g| < \epsilon$
- Eine Folge a_n heisst **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert g besitzt.
Symbolische Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

1.6.2 Stetigkeit einer Funktion

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierten Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Graphisch: Die Funktion macht keinen Sprung.

1.6.3 Unstetigkeit

Stellen in denen eine Funktion die Stetigkeitsbedingung $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nicht erfüllt ist, heissen Unstetigkeitsstellen.

Eine Funktion $f(x)$ ist also an der Stelle x_0 unstetig, wenn mindestens einer der folgenden Aussagen zutrifft:

- $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht definiert
- Der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist nicht vorhanden
- Funktions- und Grenzwert sind zwar vorhanden, jedoch voneinander verschieden

2 Differentialrechnen

2.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heisst an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha = m_{S(ekante)/T(angente)}$$

definiert ist. Man bezeichnet ihn als die (erste) Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 oder als **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle x_0 und kennzeichnet ihn durch das Symbol:

$$y'(x_0), f'(x_0) \text{ oder } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Weitere nützliche Schreibweise:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

- Die Differenzierbarkeit einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit endlicher Steigung besitzt.
- Die Ableitungsfunktion $y'(x) = f'(x)$ ordnet jeder Stelle x aus einem Intervall I als Funktionswert den Steigungswert (Grenzwert) zu. Man spricht dann kurz von der Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x .

Eine Betragsfunktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, da sie dort keine eindeutig bestimmte Tangente besitzt. Man muss also zu erst die rechts- und dann die linksseitige Ableitung ausrechnen.

Tangenten: Für die Ableitung und den Steigungswinkel α gilt $y' = \tan \alpha$

2.2 Ableitungen der elementaren Funktionen

Funktion f(x)		Ableitung f'(x)
Konstante Funktion	$c = \text{const}$	0
Potenzfunktion	$x^n \quad (x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$n \cdot x^{n-1} \quad \frac{1}{(x^2)^{\frac{1}{2}}}$
Wurzelfunktion	\sqrt{x} gilt nur für 2. Wurzel	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x \quad \sin 2x$	$\cos x \quad 2\cos(2x)$
	$\cos(x)$	$-\sin x$
	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}, 1 + \tan^2(x)$
	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
Arkusfunktionen	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
	$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	e^{2x}	$2e^{2x}$
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
Hyperbelfunktionen, Arefunktionen: Siehe Seite 17 im Skript.		

2.3 Ableitungsregeln

2.3.1 Faktorregel

$y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$; C = Reelle Konstante, bleibt erhalten.

2.3.2 Summenregel

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \Rightarrow y' = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x)$$

Es darf gliedweise differenziert werden.

2.3.3 Produktregel

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Bei mehreren Termen:

$$y = u \cdot v \cdot w \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

2.3.4 Quotientenregel

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

2.4 Kettenregel

Überlegung: Was muss zuerst berechnet werden, was gehört zusammen?

Beispiel: $f(x) = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$

innerste Funktion z	$z : x \rightarrow z(x) = x^2 - 1$
mittlere Funktion u	$u : z \rightarrow u(z) = \sqrt{z}$
äusserste Funktion F	$F : u \rightarrow F(u) = \arccos(u)$

Somit gilt: $f(x) = F(u) \cdot u(z) \cdot z(x)$.

Daraus schliessen wir das:

$$f'(x) = F'(u) \cdot u'(z) \cdot z'(x)$$

gilt. Jetzt nur noch zurück substituieren und die abgeleitete Funktion ist gefunden.

2.5 Tangente und Normale

Steigung der Tangente	$m_T = f'(x)$
Gleichung der Tangente	$y_T = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
Steigung der Normalen	$m_N = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$
Gleichung der Normalen	$y_N = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$

2.6 Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung des Kurvenpunkts $P = (x_0, y_0)$ kann die nichtlineare Funktion $y = f(x)$ näherungsweise durch die lineare Funktion

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ oder } \Delta y = f'(x_0) \Delta x$$

ersetzt werden.

Vorgehen:

1. Arbeitspunkt P bestimmen: x_0, y_0

2. Tangentensteigung:

a) erste Ableitung

b) $m_T = f'(x_0)$

3. Gleichung der Tangente in P

a) $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m_T \Rightarrow y = 2x - 3\pi$

4. Im Arbeitspunkt P gibt linearisierte Funktion

5. Exakter Wert: Ursprungsfunktion

6. Näherungswert: Linearisierte Funktion

2.7 Monotonie einer Kurve

$$y' = f'(x) > 0 \Rightarrow \text{streng monoton wachsend}$$

$$y' = f'(x) < 0 \Rightarrow \text{streng monoton fallend}$$

2.8 Krümmung einer Kurve

2.8.1 Allgemein

$y'' = f''(x_0) > 0$: Links-Krümmung. $f'(x_0)$ muss streng monoton wachsend sein.

$y'' = f''(x_0) < 0$: Rechts-Krümmung. $f'(x_0)$ muss streng monoton fallend sein.

Formel zur Berechnung der Krümmung einer ebenen Kurve $y = f(x)$:

$$\kappa = \kappa(x) = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(x)}{[1+[f'(x)]^2]^{\frac{3}{2}}}$$

2.9 Charakterische Kurvenpunkte

2.9.1 Extremum

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum bzw. ein relatives Minimum, wenn in einer gewissen Umgebung von x_0 stets $f(x_0) > f(x)$ bzw. $f(x_0) < f(x)$ ist ($x \neq x_0$).

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$$

Für $f''(x_0) > 0$ liegt dabei ein relatives Minimum vor, für $f''(x_0) < 0$ dagegen ein relatives Maximum.

2.9.2 Wendepunkte, Sattelpunkte

Punkte x_0 mit $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ heissen **Wendepunkte** (die Krümmung wechselt ihre Richtung).

Kurven mit waagrechter Tangente werden als Sattelpunkte bezeichnet.

Hinreichende Bedingung für einen **Wendepunkt**:

$$f''(x_0) = 0$$

und

$$f'''(x_0) \neq 0$$

Notwendige Bedingung für einen **Sattelpunkt**:

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$$

2.10 Kurvendiskussion

Ablauf:

- Definitionsbereich/lücken
- Symmetrie (gerade, ungerade Funktion)
- Nullstellen, Schnittpunkt mit der y-Achse
- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden)
- Ableitungen (i. d. R. bis zur 3. Ordnung)
- Relative Extremwerte (Maxima, Minima)
- Wendepunkte, Sattelpunkte
- Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$, Asymptoten im Unendlichen
- Wertebereich der Funktion
- Zeichnung der Funktion in einem geeigneten Massstab

3 Integralrechnen

3.1 Einführung

3.1.1 Definition

Die Integration ist die Umkehrung der Ableitung. Es gilt:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) \, dx$$

3.1.2 Stammfunktion

1. Falls es eine Stammfunktion zu einer stetigen Funktion $f(x)$ gibt, gibt es *unendlich* viele Stammfunktionen
2. Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ von $f(x)$ unterscheiden sich durch eine *additive* Konstante: $F_1(x) - F_2(x) = C$
3. Ist $F_1(x)$ eine *beliebige* Stammfunktion von $f(x)$, so ist auch $F_1(x) + C$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Daher lässt sich die *Menge aller Stammfunktionen* in der Form $F(x) = F_1(x) + C$ darstellen.

3.2 Unter- und Obersumme

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3.3 Das unbestimmte Integral

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

$$\rightarrow F'(x) = f(x)$$

3.4 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral berechnet eine Fläche.

Allgemein:

$$I(b) = \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b$$

Beispiel:

$$A = \int_0^\pi \sin(x) \, dx = [-\cos(x)]_0^\pi$$

3.5 Integration durch Substitution

Beispiel unbestimmtes Integral:

$$\int x \cdot \cos(x^2) \, dx$$

1. Aufstellung der Substitutionsgleichung

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

2. Durchführung der Integralsubstitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) \, dx = \int x \cdot \cos(u) \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \cos(u) \, du$$

3. Integration

$$\frac{1}{2} \int \cos(u) \, du = \frac{1}{2} \cdot \sin(u) + C$$

4. Rücksubstitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \sin(x^2) + C$$

3.6 Partielle Integration

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$
$$\int_a^b u \cdot v' \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx$$

Wenn der Integral-Minuend auf der rechten Seite gleich wie das Integral auf der linken Seite ist, kann es zur rechten Seite addiert werden und *verschwindet* somit.

3.7 Flächeninhalt

3.7.1 Bezgl. x-Achse

$$A = \left| \int_a^b f(x) \, dx \right|$$
$$A = A_1 + A_2 + \dots A_n$$
$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \, dx \right| \dots$$

Vorgehen:

1. Nullstellen berechnen (HornerSchema) und als Grenzen benützen
2. Funktion ins Integral einsetzen und lösen

3.7.2 Zwischen zwei Kurven

$$A = \int_a^b (y_o - y_u) \, dx = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)] \, dx$$

Dabei bedeuten:

$y_o = f_o(x)$: Gleichung der *oberen* Randkurve

$y_u = f_u(x)$: Gleichung der *unteren* Randkurve

Vorgehen:

1. Kurvenschnittpunkte berechnen:

$$f_o(x) = f_u(x)$$

2. Integral mit der/den gegebenen Funktion(en) berechnen.

3.8 Volumen eines Rotationkörpers

3.8.1 Rotation um die x-Achse

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

3.8.2 Rotation um die y-Achse

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Die Grenzen liegen auf der y-Achse!

1. Kurvenschnittpunkte P_1, P_2 berechnen
 - a) Dazu Gleichung nach x auflösen und in zweite Gleichung einsetzen
2. Skizze erstellen und zu berechnende Flächen markieren
3. Volumen berechnen $V_t = V_1 + V_2 + \dots$

3.8.3 Funktion einer Parabel herleiten

Voraussetzung: Spiegelsymmetrische Parabel, die Verschiebung der Parabel auf der x-Achse und ein Punkt P_1 muss bekannt sein.

Ansatz: $y = ax^2 + b = ax^2 + 0.5$

Der Öffnungsparameter a bestimmt man aus dem Parabelpunkt $P_1 = (1; 0.25)$.

$$a \cdot 1^2 + 0.5 = 0.25 \Rightarrow a = -0.25 \Rightarrow y = 0.25x^2 + 0.5 = -0.25(x^2 - 2) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2)$$

Jetzt nur noch in die bekannte Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationkörpers einsetzen.

3.9 Beispiele aus Physik und Technik

Durch das Ableiten der Ortsfunktion $s(t)$ erhalten wir die Momentan-Geschwindigkeit $v(t)$ und durch nochmaliges Ableiten erhält man die Momentan-Beschleunigung $a(t)$:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \dot{s}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \dot{v} = \ddot{s}$$

Umgekehrt gilt, falls $a = a(t)$ bekannt ist, erhalten wir die Geschwindigkeit, bzw. den Ort durch Integration:

$$v(t) = \int a(t) \, dt$$

$$s(t) = \int v(t) \, dt = \iint a(t) \, dt$$

4 Potenzreihenentwicklung

4.1 Unendliche Reihen

4.1.1 Grundbegriffe

Unendliche Zahlenfolge

Def Die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen einer unendlichen Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heisst *unendliche Reihe*. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Konvergenz/Divergenz

Def Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst *konvergent* wenn die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ einen Grenzwert s besitzt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$$

Dieser Grenzwert wird als *Summenwert* der unendlichen Reihe bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = s$$

Besitzt die Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle$ jedoch *keinen* Grenzwert, so ist die unendliche Reihe divergent.

4.1.2 Konvergenzkriterien

Def Für die *Konvergenz* einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

notwendig, nicht aber *hinreichend*. Mit anderen Worten: Damit die unendliche Reihe *konvergiert*, müssen die Reihenglieder diese Bedingung erfüllen.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ heisst aber keineswegs, dass die unendliche Reihe konvergiert. Eine Reihe jedoch, die das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt, kann nicht konvergent sein und ist daher *divergent*.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n+2} &= \left(\frac{n}{n+2} \right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 = \left(\frac{n+2}{n} \right)^{-n} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{-n} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{e^2} \cdot 1^2 = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \text{Divergent!} \end{aligned}$$

Quotientenkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*.

Wurzelkriterium

Def Erfüllen die Glieder einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$$

so ist die Reihe *konvergent*.

Für beide Kriterien gilt: Für $q = 1$ versagt das Kriterium (keine Aussage möglich). Das Quotienten- oder Wurzelkriterium ist hinreichend aber nicht notwendig, d. h. es gibt Reihen, für die der Grenzwert nicht vorhanden ist aber trotzdem konvergieren.

Leibnizskriterium

Def Eine *alternierende* Reihe vom Typ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist konvergent, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $a_1 > a_2 > a_3 \dots$ strikt monoton sinkend
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} = 0$$

Wichtige konvergente Reihen

- Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q} \quad (|q| < 1)$$
- Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
- Alternierende harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$
- $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$

Gut zu wissen:

- $(n+1)! = (n+1)n!$
- $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$

- $n! = n(n-1)(n-2)(\dots) = n(n-1)!$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

4.1.3 Potenzreihen

Def Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe vom Typ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 \dots$$

Die reellen Zahlen a_0, a_1, a_2, \dots heissen *Koeffizienten* der Potenzreihe. Der *Konvergenzbereich* ist der gesamte Bereich in welchem die Reihe konvergiert. Der *Konvergenzradius* ist eine Teilmenge des Konvergenzbereichs.

Zu einer etwas allgemeineren Darstellungsform der Potenzreihen gelangt man durch die Definitionsvorschrift:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0)^1 + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

Formel Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe lässt sich nach den Formeln

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ und } r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnen (Voraussetzung: alle Koeffizienten $a_n \neq 0$ und der Grenzwert ist vorhanden). Die Reihe konvergiert dann für $|x| < r$ und divergiert für $|x| > r$. In den beiden Randpunkten $x_1 = \pm r$ ist das Konvergenzverhalten der Potenzreihe zunächst unbestimmt.

Berechnen des Konvergenzradius und Bestimmung des Verhaltens von $\pm r$

1. Konvergenzradius r bestimmen
2. Konvergenzverhalten in den Randpunkten bestimmen

4.2 Taylor-Reihen

Die Taylorsche Formel sagt aus, dass man eine Funktion f an der Stelle x in der Umgebung eines bekannten Wertes x_0 als ein Polynom in x schreiben kann, bis auf das sogenannte Lagrangsche Restglied. Das Restglied interessiert uns aber nicht wirklich.

Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Die *Mac Laurinsche Reihe* ist eine spezielle Form der Taylorschen Reihe für das Entwicklungszentrum $x_0 = 0$ (Nullpunkt):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

4.2.1 Beispiele der Taylorreihen

Taylorreihe der Sinusfunktion

Wir entwickeln die Sinusfunktion um die Stelle $x_0 = \pi/2$: ...

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x - \pi/2)^{2n}}{(2n)!}$$

Mac Laurin Reihe der Exponentialfunktion

Wir bestimmen die Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$:

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(0)}(x) = \dots = e^0 = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Mac Laurin Reihe der Cosinusfunktion

...

Formel

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Mac Laurin Reihe der Sinusfunktion

Die Mac Laurinsche Reihe der Sinusfunktion erhalten wir am bequemsten durch gliedweise Differentiation der Kosinusreihe:

...

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Näherungspolynome der Kosinusfunktion

Maybe... not!

4.2.2 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hopital

Def Für Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Anmerkungen:

- Die Bernoulli-de L'Hospitalsche Regel setzt voraus, dass die Funktion $f(x)$ und $g(x)$ in der Umgebung von x_0 stetig differenzierbar sind und der Grenzwert der rechten Seite existiert.
- Die BdH Regel gilt sinngemäss auch für Grenzübergänge vom Typ $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$.
- In einigen Fällen muss man mehrere Male Ableiten um zum Ziel zu kommen

Nützliche Umformungen

Funktion $\phi(x)$	Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$	Elementare Umformung
$u(x) \cdot v(x)$	$0 \cdot \infty$ bzw. $\infty \cdot 0$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ bzw. $\frac{v(x)}{\frac{1}{u(x)}}$
$u(x) - v(x)$	$\infty - \infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x) \cdot v(x)}}$
$u(x)^{v(x)}$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{v(x) \cdot \ln u(x)}$

5 Komplexe Zahlen und Funktionen

5.1 Definition einer komplexen Zahl

Unter einer komplexen Zahl z versteht man ein geordnetes Paar (x, y) aus zwei reellen Zahlen x und y . Symbolische Schreibweise:

$$z = x + jy$$

Die komplexe Zahl $z = x + jy$ wird dabei durch den Punkt $P(z) = (z; y)$ der x, y -Ebene eindeutig repräsentiert. Die reellen Bestandteile x und y der komplexen Zahl $z = x + jy$ werden als Realteil und Imaginärteil von z bezeichnet. Symbolische Schreibweise:

$$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$$

Die Menge $\mathbb{C} = \{z | z = x + jy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$ heisst Menge der komplexen Zahlen.

5.1.1 Weitere Grundbegriffe

- Zwei komplexe Zahlen sind genau dann **gleich**, wenn $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ und $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ gilt.
- Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist die Länge des dazugehörigen Zeigers: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Der Übergang von der komplexen Zahl z zur **konjugiert** komplexen Zahl z^* bedeutet einen Vorzeichenwechsel im Imaginärteil. Der dazugehörige Zeiger liegt daher spiegelsymmetrisch zur reellen Achse. $z^* = (x + jy)^* = x + j(-y) = x - jy$

5.1.2 Darstellungsformen

- Normalform:

$$z = x + jy$$

- Trigonometrische Form:

$$z = r \cdot (\cos\phi + j \cdot \sin\phi)$$

- Exponentialform:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j \cdot \sin\phi$$

$$\Rightarrow z = r \cdot (\cos\phi + j \cdot \sin\phi) = r \cdot e^{j\phi}$$

Die trigonometrische Form und die Exponentialform werden auch Polarform genannt.

5.1.3 Umrechnung Polarform \rightarrow Kartesische Form

Eine in der Polarform $z = r(\cos\phi + j \cdot \sin\phi)$ oder $z = r \cdot e^{j\phi}$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichung

$$x = r \cdot \cos\phi, y = r \cdot \sin\phi$$

in die kartesische Form $z = x + jy$ überführen.

5.1.4 Umrechnung Kartesische Form \rightarrow Polarform

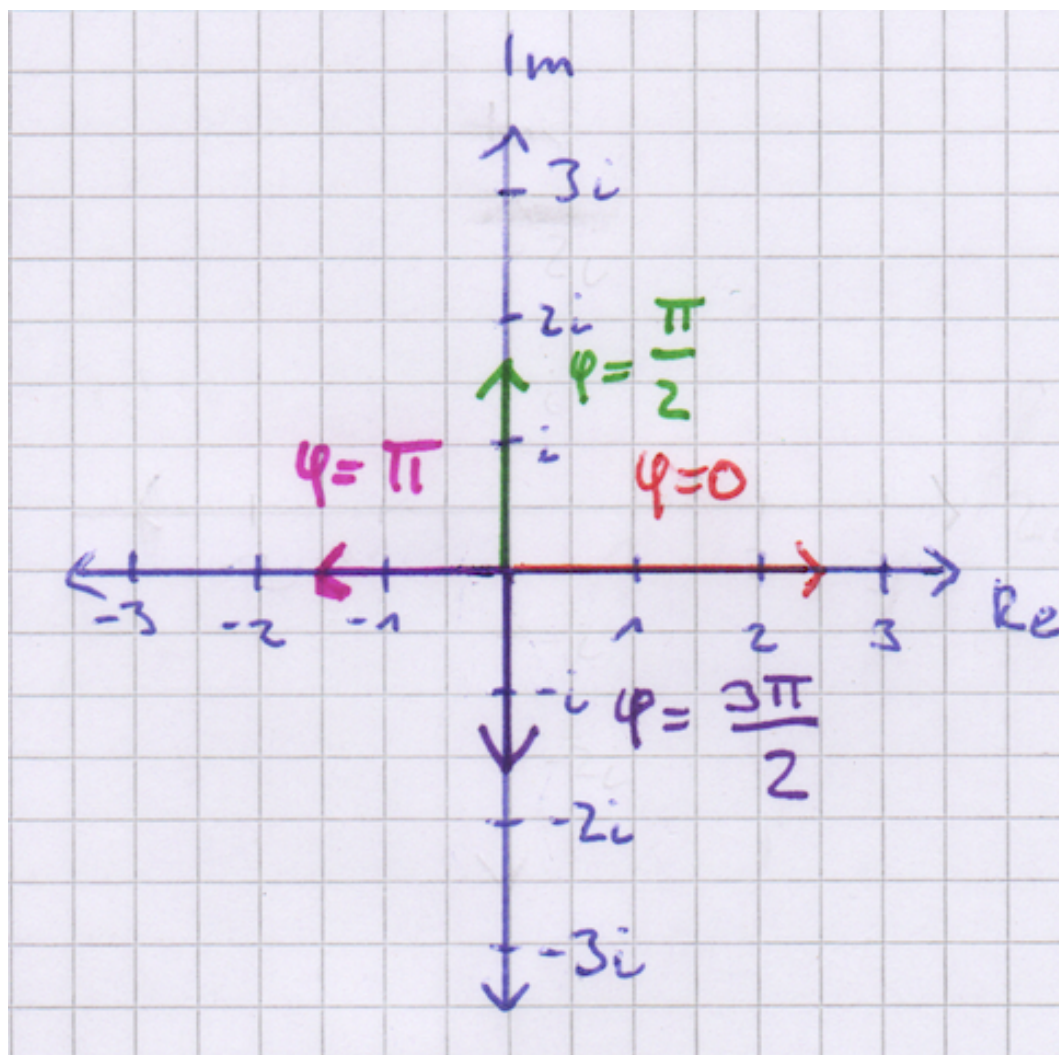
eine in der kartesischen Form $z = x + jy$ vorliegende komplexe Zahl lässt sich mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan\phi = \frac{y}{x}$$

und unter Berücksichtigung des Quadranten, in dem der zugehörige Punkt liegt, in die trigonometrische Form $z = r(\cos\phi + j \cdot \sin\phi)$ bzw. die Exponentialform $z = e^{j\phi}$ überführen.

Quadrant	I	II, III	IV
$\phi =$	$\arctan \frac{y}{x}$	$\arctan \frac{y}{x} + \pi$	$\arctan \frac{y}{x} + 2\pi$

Tabelle 5.1: Tabelle zum Quadranten


Abbildung 5.1: Verhalten von ϕ

5.2 Komplexe Rechnung

5.2.1 Grundrechenarten

Addition und Subtraktion

Def Summe $z_1 + z_2$ und Differenz $z_1 - z_2$ zweier komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + jy_1$ und $z_2 = x_2 + jy_2$ werden nach den folgenden Vorschriften gebildet:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Bemerkungen:

- Realteile und Imaginärteile werden jeweils für sich addiert, bzw. subtrahiert.
- Addition und Subtraktion lassen am einfachsten in der kartesischen Form durchführen.
- Die Addition ist kommutativ.
- Ungleichungen wie $z_1 < z_2$ oder $z_1 > z_2$ machen, im Gegensatz zu den reellen Zahlen, keinen Sinn.

Multiplikation in der kartesischen Form

Def Das Produkt $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2)$ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 wird im Reellen durch »Ausmultiplizieren« der Klammern unter Beachtung der Beziehung $j^2 = -1$ berechnet. Das geht am einfachsten in der trigonometrischen Form.

Beispiel:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\ &= x_1x_2 + x_1jy_2 + jy_1x_2 + j^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Multiplikation in der Polarform

Def Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (Winkel) addiert.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 r_2) [\cos(\phi_1 + \phi_2) + j \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\ &= (r_1 r_2) \cdot e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \end{aligned}$$

Division in der kartesischen Form

Def Der Quotient z_1/z_2 zweier komplexen Zahlen z_1 und z_2 in kartesischer Form lässt sich schrittweise berechnen:

1. Der Bruch z_1/z_2 wird zunächst mit z_2^* , also dem konjugiert komplexen Nenner, erweitert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2) \cdot (x_2 - jy_2)}$$

2. Zähler und Nenner werden dann nach den aus dem Reellen bekannten Regeln ausmultipliziert unter Beachtung der Beziehung $j^2 = -1$. Der Nenner des Bruchs wird dadurch (positiv) reell.
3. Die im Zähler stehende komplexe Zahl wird jetzt gliedweise durch den (reellen) Nenner dividiert.

Man beachte: Wie im Reellen so ist auch im Komplexen die Division durch die Zahl Null nicht erlaubt.

Division in der Polarform

Def Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + j \cdot \sin(\phi_1 - \phi_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \end{aligned}$$

5.2.2 Potenzieren und Radizieren

Def Eine in der Polarform vorliegende komplexe Zahl z wird wie folgt **potenziert**:

- In exponentieller Schreibweise:

$$z^n = [r \cdot e^{j\phi}]^n = r^n \cdot e^{jn\phi}$$

- In trigonometrischer Schreibweise:

$$z^n = [r(\cos\phi + j \cdot \sin\phi)]^n = r^n[\cos(n\phi) + j \cdot \sin(n\phi)]$$

Eine komplexe Zahl wird in die n -te Potenz erhoben, indem man ihren Betrag r in die n -te Potenz erhebt und ihr Argument (Winkel ϕ) mit dem Exponenten n multipliziert. In der Normalform müssen die binomischen Formeln für Potenzen verwendet werden.

Def Die Gleichung $z^n = a = a_0 \cdot e^{ja}$ ($a_0 > 0; n = 1$) besitzt im Komplexen genau n verschiedene Lösungen (Wurzeln)

$$z_k = r(\cos\phi_k + j \cdot \sin\phi_k) = r \cdot e^{j\phi_k}$$

mit

$$r = \sqrt[n]{a_0} \text{ und } \phi_k = \frac{a + k \cdot 2\phi}{n}$$

($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Die dazugehörigen Bildpunkte liegen in der Gaußschen Zahlenebene auf dem Mittelpunktskreis mit dem Radius $R = \sqrt[n]{a_0}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks.

6 Differential- und Integralrechnung für Funktion von mehreren Variablen

6.1 Funktion von mehreren Variablen

Def Unter einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar $(x; y)$ aus einer Menge D genau ein Element z aus einer Menge W zuordnet, Symbolische Schreibweise:

$$z = f(x; y)$$

Analog gelangt man zu Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen:

$$u = f(x; y; z)$$

Es gibt vier verschiedene Darstellungsformen:

1. *Explizit* dargestellt:

$$z = 2x + y + 1 \text{ oder } z = 2 \cdot \sin(x - y)$$

2. *Implizit* dargestellt:

$$x^2 + y^2 + z - 1 = 0$$

3. Dargestellt in einer *Funktionstabelle*.

4. Graphische Darstellung (als Fläche, Höhenlinien, Schnittkurven..).

Die dritte und vierte Form eignen sich nur für Funktionen mit maximal drei Variablen.

6.2 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

6.2.1 Grenzwert

Def Eine Funktion zweier Variablen hat an der Stelle (x, y_0) den Grenzwert g , wenn sich die Funktionswerte $f(x, y)$ beim Grenzübergang $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ unabhängig vom eingeschlagenen Weg dem Wert g beliebig nähern. Symbolische Schreibweise:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = g$$

Bemerkung:

1. Eine Funktion kann auch in einer Definitionslücke (x_0, y_0) einen Grenzwert haben, obwohl sie dort nicht definiert ist.
2. Grenzwert auf einer Bildfläche: Je näher man zur Stelle (x_0, y_0) kommt, desto flacher wird die Ebene auf der man sich bewegt.

6.2.2 Stetigkeit

Def Eine in (x_0, y_0) und einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) definierten Funktion $z = f(x, y)$ heisst an der Stelle (x_0, y_0) *stetig*, wenn der Grenzwert der Funktion an der Stelle *vorhanden* ist und mit dem dortigen Funktionswert *übereinstimmt*.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Anmerkung:

1. Die Stetigkeit an einer bestimmten Stelle setzt voraus, dass die Funktion dort auf *definiert* ist. Ferner muss der Grenzwert an dieser Stelle existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen.
2. Eine Funktion $z = f(x, y)$ heisst dagegen an der Stelle (x_0, y_0) *unstetig*, wenn $f(x_0, y_0)$ *nicht* vorhanden ist oder $f(x_0, y_0)$ vom Grenzwert *verschieden* ist oder dieser *nicht* existiert.
3. Eine Funktion, die an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist, wird als stetige Funktion bezeichnet.

6.3 Partielle Differentiation

6.3.1 Partielle Ableitung 1. Ordnung

Def Ist $z = f(x, y)$ an *jeder* Stelle (x, y) einer gewissen Bereiches *partiell* differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung selbst wieder *Funktionen* von x und y . Wir definieren daher allgemein:

- Partielle Ableitung 1. Ordnung nach x :

$$f_x(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

- Partielle Ableitung 1. Ordnung nach y :

$$f_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

Weitere übliche Symbole für partielle Ableitungen sind:

$$f_x(x; y), z_x(x; y), \frac{\partial f}{\partial x}(x; y), \frac{\partial z}{\partial y}(x; y)$$

Es gelten die üblichen Ableitungsregeln aus dem ersten Semester.

6.3.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Def Es wird genau gleich vorgegangen wie bei der Ableitung erster Ordnung. Die einzelnen Differentiationsschritte sind grundsätzlich in der Reihenfolge, in der die als Indizes angehängten Differentiationsvariablen im Ableitungssymbol auftreten, auszuführen. f_{xy} : Hier wird zunächst nach der Variablen x und anschliessend nach der Variablen y differenziert.

6.3.2.1 Satz von Schwarz

Def Bei einer gemischten partiellen Ableitung k -ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k -ter Ordnung stetige Funktionen sind.

$$f_{xy} = f_{yx}, f_{xxy} = f_{yxx}, \text{ usw...}$$