Logik

Propositionslogik

- Formalisme til at beskrive sprogklasser
- BNF
- Indfør $\models$ og $\vdash$

Naturlig deduktion

- Introduktion og eleminering af operatorer
- Bevis sekvent
- Sundhed og komplethed
- Hvorfor både $\models$ og $\vdash$

Udtrykskraft for prop. logik

- Kan udtrykke rekursive sprog
- Bevis: kan ikke have 4 egenskaber
    1. Sundhed
    2. Komplethed
    3. Beviselighed er afgørbart
    4. (Φ, $\models$) kan beskrive ikke-rekursive sprog

1. ordens prædikatlogik

- Udvid BNF - termer, prædikater, kvantorer
- Indfør modeller

1 Prop. Logik

- Formalisme til at beskrive sprogklasser
- BNF: φ ::= p | $\varphi \land \varphi$ | $\varphi \lor \varphi$ | $\varphi \to \varphi$ | $\neg\varphi$
- Indfør $\vDash$ (logisk konsekvens)
    - $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vDash \psi$ (hvis det holder, så er ψ true når alle φ_i er true)
    - Lav sandhedstabel: p ∨ q
    - p,q $\vDash$ p ∨ q (vis på sandhedstabellen)
- Indfør $\vdash$ (beviselighed)
    - $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$ (hvis det holder, så kan ψ udledes fra $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$)
    - En formel kan bevises vha. et bevissystem (natural deduction)

2 Natural Deduction

- Der er regler for introduktion og eliminering af hver logisk operator
    - Vis $\land$i
    - Bevis sekventen $\neg p \lor \neg q \vdash \neg(p \land q)$
- Er alt der kan bevises sandt (sundhed) ($\vdash \subseteq \vDash$)
- Kan alt der er sandt bevises (komplethed) ($\vDash \subseteq \vdash$)
- Prop. logik er både sund og komplet ($\vDash = \vdash$)
    - Ofte er én af de to metoder lettere at bruge
        - $\vdash$ er god til mange propositioner (fordi sandhedstabeller bliver for store)
        - $\vDash$ er god til at vise at noget *ikke* kan bevises

3 Prop. Udtrykskraft

- Prop. logik kan udtrykke rekursive sprog
- Forklar theorem, opskriv punkter
    1. (Φ, $\vDash$, $\vdash$) er sund
    2. (Φ, $\vDash$, $\vdash$) er komplet
    3. Bevislighed er afgørbar
    4. (Φ, $\vDash$) kan beskrive et ikke-rekursivt sprog

    - (Φ, $\vDash$) beskriver et ikke-rekursivt sprog $\Rightarrow$ $\vDash$ er ikke-rekursiv
    - $\vDash = \vdash$ $\Rightarrow$ $\vdash$ er ikke-rekursiv
    - (3) $\Rightarrow$ $\vdash$ er rekursiv
    - $\perp$
- Prop. logik opfylder (1), (2) og (3) → Prop. logik opfylder *ikke* (4)
- 1. ordens prædikatlogik kan udtrykke ikke-rekursive sprog opfylder (4), men ikke (3)

4 1. Ordens Prædikatlogik

- Indfør prædikater og kvantorer
  - Udvid BNF: $P(t_1,\dots,t_n)$ | $\forall x\varphi$ | $\exists x\varphi$ (P erstatter p fra før)
    $t ::= x \mid c \mid f(t_1,\dots,t_n)$
  - Natural deduction udvides med regler for kvantorer
  - Eksempel ($\forall x(C(x) \rightarrow age(x) < 18)$)
- Sandhedstabeller ikke tilstrækkelige (grundet kvantorer)
  - Benyt modeller

1	$\neg p \lor \neg q$	præmis
2	$p \land q$	antag
3	p	$\land$e, 2
4	q	$\land$e, 2
5	$\neg p$	antag
6	$\perp$	$\neg$i, 3, 6
7	$\neg q$	antag
8	$\perp$	$\neg$i, 4, 8
9	$\perp$	$\lor$e, 1, 5-6, 7-8
10	$\neg(p \land q)$	PBC, 2-9