

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО”
Факультет ПИиКТ



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ОТЧЁТ

По лабораторной работе: 2

«Оценка погрешности на основании проведения косвенных измерений»

По предмету: Метрология, стандартизация и сертификация

Студент:

Андрейченко Леонид Вадимович

Группа Р34301

Преподаватель:

Рассадина Анна Александровна

Санкт-Петербург

2023

Протокол измерений

Обработка результатов косвенные измерения

№ опыта	l_1 мм	l_2 мм	l_3 мм	Масса г
1	80	35	9	192.3
2	80	35	9	192.32
3	81	34	9	192.32
4	80	35	9	192.32
5	80	35	9	192.3
6	81	35	9	192.32
7	80	35	9	192.32

$\Delta = 0.1$ мм $\Delta = 0.02$ г

Васильев

Андрейченко А.

Цель работы

Провести прямые измерения длины, ширины и толщины выданного эталона при помощи штангенциркуля, а также массы при помощи весов, и согласно полученным результатам провести оценку погрешности вычисления плотности материала выданного эталона.

Обработка результатов измерений

Для удобства проведения дальнейших вычислений перепишем таблицу с измерениями:

№ опыта	l_1 , мм	l_2 , мм	l_3 , мм	m , г
1	80	35	9	192,3
2	80	35	9	192,32
3	81	34	9	192,32
4	80	35	9	192,32
5	80	35	9	192,3
6	81	35	9	192,32
7	80	35	9	192,32

Поскольку результаты наблюдений не образуют соответствующих выборок, а значение результирующей функции образуют выборку, так как мы высчитываем плотность материала эталона, для обработки результата мы будем использовать выборочный метод.

Учёт систематических погрешностей

Записанная на измерительных приборах (штангенциркуле и весах) точность измерений составляет соответственно:

$$\Delta_{\text{ш}} = 0,1 \text{ мм}$$

$$\Delta_{\text{в}} = 0,02 \text{ г}$$

Приборная систематическая погрешность вычисляется по формуле:

$$\theta = \frac{\Delta}{2}$$

Тогда для используемого штангенциркуля систематическая погрешность составляет:

$$\theta_{\text{ш}} = \frac{0,1}{2} = 0,05 \text{ мм}$$

Для используемых весов систематическая погрешность составляет:

$$\theta_{\text{ш}} = \frac{0,02}{2} = 0,01 \text{ г}$$

Определение среднего для прямых измерений

Вычисление среднего арифметического значения исправленных результатов измерений происходит по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Поскольку во всех результатах измерений содержится постоянная систематическая погрешность, обусловленная использованием одного и того же измерительного прибора, для вычисления среднего значения мы её исключим, и таким образом исправленные результаты измерений в данном случае будут равны неисправленным.

Вычислим среднее арифметическое значение с помощью указанной выше формулы для l_1 , l_2 , l_3 и m :

$$\bar{l}_1 = \frac{1}{7} (80 + 80 + 81 + 80 + 80 + 81 + 80) = \frac{562}{7} = 80,28 \text{ мм}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{1}{7} (35 + 35 + 34 + 35 + 35 + 35 + 35) = \frac{244}{7} = 34,85 \text{ мм}$$

$$\bar{l}_3 = \frac{1}{7} (9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9) = 9 \text{ мм}$$

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{1}{7} (192,3 + 192,32 + 192,32 + 192,32 + 192,3 + 192,32 \\ &\quad + 192,32) = \frac{1346,2}{7} = 192,31 \text{ г} \end{aligned}$$

Вычисление полной абсолютной погрешности прямых измерений

Среднее квадратическое отклонение S группы, которая содержит n результатов измерений, вычисляется по формуле:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение для наших измерений:

$$\begin{aligned} S_{l_1} &= \sqrt{\frac{1}{7-1} (5 \cdot (80 - 80,28)^2 + 2 \cdot (81 - 80,28)^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6} (5 \cdot 0,08 + 2 \cdot 0,52)} = \sqrt{0,24} = 0,49 \text{ мм} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{l_2} &= \sqrt{\frac{1}{7-1} (6 \cdot (35 - 34,85)^2 + (34 - 34,85)^2)} = \sqrt{\frac{1}{6} (6 \cdot 0,02 + 0,72)} \\ &= \sqrt{0,13} = 0,36 \text{ мм} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_m &= \sqrt{\frac{1}{7-1} (5 \cdot (192,32 - 192,31)^2 + 2 \cdot (192,3 - 192,31)^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6} (5 \cdot 0,0001 + 2 \cdot 0,0001)} = \sqrt{0,00011} = 0,01 \text{ г} \end{aligned}$$

$$S_{l_3} = \sqrt{\frac{1}{7-1} (7 \cdot (9 - 9)^2)} = 0 \text{ мм}$$

Далее вычислим среднеквадратическое отклонение среднего по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Для наших прямых измерений:

$$S_{\bar{l}_1} = \frac{0,49}{\sqrt{7}} = \frac{0,49}{2,65} = 0,18 \text{ мм}$$

$$S_{\bar{l}_2} = \frac{0,36}{\sqrt{7}} = \frac{0,36}{2,65} = 0,13 \text{ мм}$$

$$S_{\bar{l}_3} = \frac{0}{\sqrt{7}} = \frac{0}{2,65} = 0 \text{ мм}$$

$$S_{\overline{m}} = \frac{0.01}{\sqrt{7}} = \frac{0.01}{2.65} = 0.01 \text{ мм}$$

Затем определим доверительные границы случайной погрешности оценки измеряемых прямых величин по формуле:

$$\varepsilon = t * S_{\overline{x}}$$

Выберем коэффициент Стьюдента по таблице, где доверительная вероятность $P=95\%$. По таблице $t \approx 2,37$. Тогда доверительные границы случайности для наших вычислений:

$$\varepsilon_{\overline{l_1}} = 2,37 \cdot 0,18 = 0,42 \text{ мм}$$

$$\varepsilon_{\overline{l_2}} = 2,37 \cdot 0,13 = 0,3 \text{ мм}$$

$$\varepsilon_{\overline{l_3}} = 2,37 \cdot 0 = 0 \text{ мм}$$

$$\varepsilon_{\overline{m}} = 2,37 \cdot 0,01 = 0,02 \text{ г}$$

Теперь вычислим полную абсолютную погрешность прямых измерений по формуле:

$$\Delta \overline{x} = \sqrt{(\varepsilon)^2 + (\theta)^2}$$

Для наших измерений:

$$\Delta \overline{l_1} = \sqrt{(0,42)^2 + (0,05)^2} = 0,42$$

$$\Delta \overline{l_2} = \sqrt{(0,3)^2 + (0,05)^2} = 0,3$$

$$\Delta \overline{l_3} = \sqrt{(0)^2 + (0,05)^2} = 0,05$$

$$\Delta \overline{m} = \sqrt{(0,02)^2 + (0,01)^2} = 0,02$$

Вычисление среднего значения плотности

Среднее значение плотности вычисляется по формуле:

$$\overline{\rho'} = \frac{\overline{m}}{\overline{l_1} * \overline{l_2} * \overline{l_3}}$$

Для наших данных:

$$\overline{p'} = \frac{192,31}{80,28 \cdot 34,85 \cdot 9} = 0,007 \frac{\text{г}}{\text{мм}^3}$$

В системе СИ необходимо использовать размерность кг/м³, так что умножим результат на 10⁶ для получения корректной размерности:

$$\overline{p'} = 7637,46 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Нахождение случайной ошибки косвенных измерений

Для нахождения случайной ошибки косвенных измерений воспользуемся формулой:

$$\Delta\rho = \bar{\rho} * \sqrt{\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} * \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_1} * \Delta l_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_2} * \Delta l_2\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_3} * \Delta l_3\right)^2}$$

Необходимо вычислить натуральный логарифм для нашей функции:

$$\ln \rho = \ln m - \ln l_1 - \ln l_2 - \ln l_3$$

Тогда:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_1} = \frac{1}{l_1}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_2} = \frac{1}{l_2}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial l_3} = \frac{1}{l_3}$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} = \frac{1}{m}$$

Отсюда формула нахождения случайной ошибки косвенных измерений приобретает следующий вид:

$$\Delta\rho = \bar{\rho} * \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_2}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_3}{l_3}\right)^2}$$

Подставим соответствующие значения и умножим на 10⁶ для получения значения в кг/м³:

$$\Delta\rho = 0,007 \cdot \sqrt{\left(\frac{0,02}{192,31}\right)^2 + \left(\frac{0,42}{80,28}\right)^2 + \left(\frac{0}{9}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{34,85}\right)^2} \cdot 10^6 = 70,51 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Вычисление систематической ошибки

Для нахождения случайной ошибки косвенных измерений воспользуемся формулой:

$$\rho' = \bar{\rho} * \left(\left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial m} * \theta m \right| + \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial l_1} * \theta l_1 \right| + \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial l_2} * \theta l_2 \right| + \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial l_3} * \theta l_3 \right| \right)$$

Для наших вычислений:

$$\rho' = \bar{\rho} * \left(\left| \frac{\theta_{\text{в}}}{m} \right| + \left| \frac{\theta_{\text{ш}}}{l_1} \right| + \left| \frac{\theta_{\text{ш}}}{l_2} \right| + \left| \frac{\theta_{\text{ш}}}{l_3} \right| \right)$$

Подставляем значения и также умножаем на 10^6 для получения значения в кг/м³:

$$\rho' = 0,007 \cdot \left(\left| \frac{0,01}{192,31} \right| + \left| \frac{0,05}{80,28} \right| + \left| \frac{0,05}{34,85} \right| + \left| \frac{0,05}{9} \right| \right) \cdot 10^6 = 53,65 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Запись окончательного результата

Для записи окончательного результата нам потребуется учесть полную абсолютную погрешность прямого измерения согласно формуле:

$$\Delta \bar{\rho} = \sqrt{(\Delta \rho)^2 + (\rho')^2}$$

Тогда для наших значений:

$$\Delta \bar{\rho} = \sqrt{(70,51)^2 + (53,65)^2} = \sqrt{7846,76} = 88,8 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Также вычислим относительную погрешность по формуле:

$$\delta \rho = \frac{\Delta \bar{\rho}}{\rho'} * 100\%$$

Для вычисленных в процессе лабораторной работы значений:

$$\delta \rho = \frac{88,8}{7637,46} \cdot 100\% = 1,16\%$$

После всех проведённых вычислений мы можем записать окончательный результат косвенного измерения:

$$\rho = (7637 \pm 90) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Вывод

Для обработки результатов мы использовали выборочный метод, так как такая величина как плотность является физической константой для измеряемого тела, что значит, что каждая из измеряемых величин не образуют выборку, а выборку образует лишь целевая функция плотности.

При обработке результатов косвенных измерений необходимо учитывать случайную и систематическую погрешность. Систематическая составляющая погрешности определялась через погрешность измерительного прибора. Случайная составляющая погрешности определялась вероятностными методами. В результате вычислений относительная погрешность составила 1,16%, что говорит о том, что результаты измерений являются высокоточными.