Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»
(ФГБОУ ВПО ПГУПС)

Е. Н. Бодунов, В. И. Никитченко, А. М. Петухов

ИНТЕНСИВНЫЙ КУРС ФИЗИКИ
Механика,
молекулярная физика

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2015

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»
(ФГБОУ ВПО ПГУПС)

Е. Н. Бодунов, В. И. Никитченко, А. М. Петухов

ИНТЕНСИВНЫЙ КУРС ФИЗИКИ
Механика, молекулярная физика

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2015

УДК 531/534+536
ББК 22.3я73
Б75

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук,
профессор Российского государственного гидрометеорологического университета
А. В. Логинов;
доктор физико-математических наук, профессор Петербургского государственного
университета путей сообщения Императора Александра I
В. М. Уваров

Бодунов, Е. Н.

Интенсивный курс физики: механика, молекулярная физика : учеб. пособие / Е. Н. Бодунов, В. И. Никитченко, А. М. Петухов. – СПб. : ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2015. – 142 с.

ISBN 978-5-7641-0691-5

Учебное пособие содержит последовательно изложенный теоретический материал по механике и молекулярной физике.

Предназначено для студентов технических вузов и студентов, обучающихся по ускоренной форме обучения. Оно будет полезно также преподавателям и выпускникам школ, лицеев, колледжей, слушателям подготовительных отделений вузов, готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения, которым оно поможет в изучении университетского курса физики.

УДК 531/534+536
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-7641-0691-5

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов технических вузов, и прежде всего для студентов ускоренной формы обучения.

Задача физики как науки – изучение наиболее общих законов, природы и объяснение на их основе конкретных явлений и процессов.

Физика развивается исходя из потребностей техники, и именно техника определяет основные направления физических исследований. Для создания современных технических средств необходимо изучать и познавать явления и процессы, лежащие в основе принципа их действия. Важнейшие достижения современной техники в энергетике, электронике, создании материалов с уникальными свойствами – следствие фундаментальных научных открытий.

В настоящее время физика во многом обеспечивает высокий технический уровень современного производства, а также служит базой для создания новых отраслей техники. На основе достижений физики перестраиваются энергетика, связь, транспорт, строительство и промышленное производство. Без преувеличения можно сказать, что физика является важнейшей теоретической основой для подготовки специалистов практически по всем техническим дисциплинам, преподаваемым в вузах.

Физика – сложный для изучения предмет, требующий от студента серьезных усилий и систематического труда. Основным условием для освоения вузовского курса физики студентами младших курсов являются их базовые знания предмета в рамках стандартной программы средней общеобразовательной школы. Сегодня, несмотря на успехи в разных областях физической науки, на изучение ее в общеобразовательных школах учебным планом отводится чрезвычайно мало времени. Кроме того, для обучения используют разные по уровню изложения пособия и учебники. В результате у большинства студентов младших курсов имеются пробелы в знании школьного курса физики, поэтому они сталкиваются с серьезными трудностями при изучении этого предмета в вузе.

Данное учебное пособие благодаря краткости, наглядности и доступности изложения поможет студентам успешно усвоить лекционный материал.

Пособие состоит из двух разделов: «Механика» и «Молекулярная физика». Каждый раздел содержит краткое изложение теории, ответы на все основные вопросы не только вузовской, но и школьной программы, в нем приводятся формулировки и формулы основных законов, в лаконичной форме разъясняется сущность и физический смысл подчиняющихся этим законам явлений и процессов.

Работа с пособием позволит в короткие сроки изучить указанные разделы физики, необходимые в дальнейшем для успешного освоения технических дисциплин, преподаваемых в вузе.

Приведенный список литературы, рекомендуемой студентам, позволит читателю самостоятельно и достаточно глубоко изучать курс общей физики.

Авторы пособия будут благодарны всем, приславшим свои замечания и предложения.

РАЗДЕЛ 1. МЕХАНИКА

1. Кинематика

1.1. Основные понятия и определения

Механика изучает наиболее простую форму движения материи – механическое движение.

Механическим движением называется изменение положения тела или его частей в пространстве относительно других тел с течением времени.

Тело, относительно которого рассматривается данное механическое движение, называется *телом отсчета.*

Во многих задачах механики размеры и форму тела, движение которого рассматривается, можно не учитывать. Тело, размерами и формой которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется *материальной точкой*. В тех случаях, когда размерами нельзя пренебречь, его рассматривают как *абсолютно твердое тело*, т. е. тело, размеры и форма которого остаются неизменными при любых внешних воздействиях.

Простейшими видами движения такого тела являются поступательное и вращательное движение.

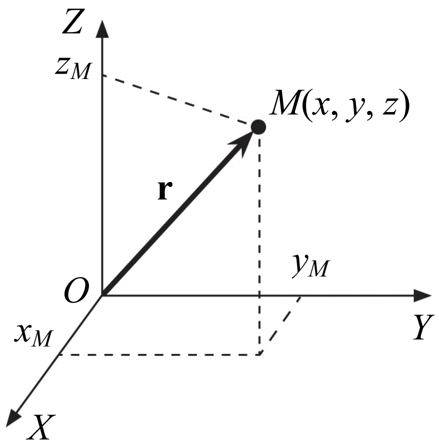

Рис. 1.1

Поступательным движением тела называется движение, при котором все его точки движутся по одинаковым траекториям и любая прямая, соединяющая две произвольные точки тела, остается параллельной самой себе. Поступательное движение тела может быть охарактеризовано движением какой-либо одной его точки.

Вращательным движением тела называется движение, при котором все его точки описывают окружности, находящиеся в параллельных плоскостях, а центры окружностей лежат на одной прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Эта прямая называется *осью вращения*.

Положение материальной точки в пространстве задается с помощью координат. В *прямоугольной системе координат* ее положение определяется тремя *координатами x, y, z* или *радиус-вектором* $\mathbf{r}$, соединяющим начало координат с материальной точкой (рис. 1.1). Его проекции на координатные оси декартовой системы координат равны координатам точки M:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z.$$

Пусть $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты системы координат – единичные векторы (их длина равна единице), направленные по осям X, Y, Z соответственно. Тогда радиус-вектор можно записать в виде суммы трех векторов:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

Длина радиус-вектора (его модуль)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Совокупность тела отсчета, системы координат и прибора для измерения длительности промежутков времени называется *системой отсчета.*

При движении тела его координаты и радиус-вектор непрерывно изменяются. Зависимости этих величин от времени ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ или $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$) называются *кинематическими уравнениями движения*.

Вид механического движения зависит от выбора системы отсчета, в которой это движение рассматривается. В этом заключается *относительность механического движения.*

1.2. Траектория, путь, перемещение

Траекторией называется линия, по которой движется материальная точка. По виду траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движение. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета, в которой рассматривается данное движение.

Путь s – физическая положительная величина, равная длине участка траектории, пройденного движущейся точкой за определенный промежуток времени.

Перемещение $\Delta\mathbf{r}$ – вектор, соединяющий начальное и конечное положение движущейся точки (рис.1.2).

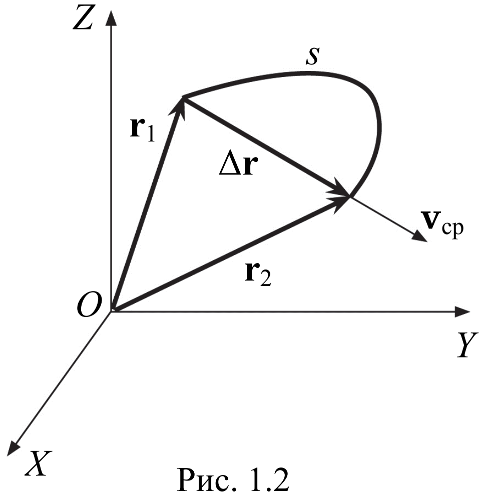

Рис. 1.2

Из рис. 1.2 видно, что

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Из этой формулы следует, что перемещение равно приращению радиус-вектора $\mathbf{r}$ частицы за промежуток времени

$$\Delta t = t_2 - t_1 .$$

Если Δx, Δy и Δz – проекции перемещения на оси координат, то, используя орты системы координат, можно получить выражение

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{e}_x + \Delta y\mathbf{e}_y + \Delta z\mathbf{e}_z .$$

Элементарное перемещение точки d$\mathbf{r}$, т. е. ее перемещение за бесконечно малый промежуток времени dt, записываем в виде

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z ,$$

где dx, dy и dz – элементарные перемещения точки вдоль соответствующих осей координат.

Если материальная точка совершает несколько перемещений, то результирующее перемещение равно их геометрической сумме.

1.3. Скорость, ускорение

Скорость – физическая величина, характеризующая быстроту изменения положения тела в пространстве.

Средняя скорость перемещения $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ – векторная величина, равная отношению вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ к длительности промежутка времени Δt, в течение которого это перемещение совершено:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Вектор средней скорости перемещения $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ совпадает по направлению с вектором перемещения $\Delta\mathbf{r}$ (рис. 1.2).

Средняя путевая скорость $v_{\text{ср}}$ – скалярная положительная величина, равная отношению пути s к длительности промежутка времени Δt, в течение которого этот путь пройден:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\Delta t}.$$

В общем случае средняя путевая скорость не равна модулю средней скорости перемещения. Равенство выполняется только при прямолинейном движении материальной точки без изменения направления движения.

Мгновенная скорость $\mathbf{v}(t)$, или скорость точки в данный момент времени t, – это предел, к которому стремится средняя скорость при неограниченном уменьшении промежутка времени Δt:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Из определения следует, что скорость $\mathbf{v}(t)$ представляет собой первую производную по времени от радиус-вектора:

$$\mathbf{v}(t) = r(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Вектор мгновенной скорости $\mathbf{v}$ в каждой точке траектории (т. е. в каждый момент времени) направлен по касательной к этой траектории в данной точке (рис.1.3).

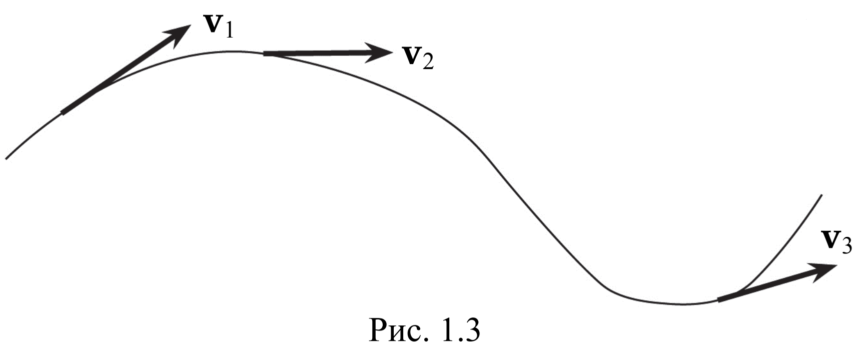

Рис. 1.3

Используя выражение радиус-вектора и определение скорости, получаем

$$v = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z,$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции вектора скорости **v** на координатные оси (орты $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ являются постоянными векторами). Таким образом, проекция скорости на координатную ось равна первой производной соответствующей координаты по времени.

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

По мере уменьшения Δt путь Δs, пройденный телом за этот промежуток времени, все больше приближается к $|\Delta\mathbf{r}|$, поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной от пути по времени.

Для того чтобы определить путь s_{12}, проходимый частицей за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, следует просуммировать все элементарные пути $ds = v(t)dt$:

$$s_{12} = \sum ds.$$

При бесконечно большом числе бесконечно малых слагаемых ds путь s_{12} определяется как интеграл по времени от t_1 до t_2:

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

В международной системе единиц (СИ) путь, пройденный телом, измеряется в метрах (м), время – в секундах (с), а скорость – в метрах в секунду (м/с).

По характеру изменения модуля мгновенной скорости $v(t)$ различают равномерное и неравномерное движение. Движение точки называется *рав-*

номерным, если эта скорость не изменяется с течением времени (v = const). Если скорость зависит от времени $(v = v(t))$, движение точки называется *неравномерным*.

Ускорение **a** – физическая векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости.

Средним ускорением $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$ $(\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ точки к длительности промежутка времени Δt, в течение которого это изменение произошло:

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Вектор среднего ускорения $\mathbf{a}_{\text{ср}}$ совпадает по направлению с вектором изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$ (рис. 1.4). Ускорение измеряется в метрах в секунду в квадрате (м/с^2).

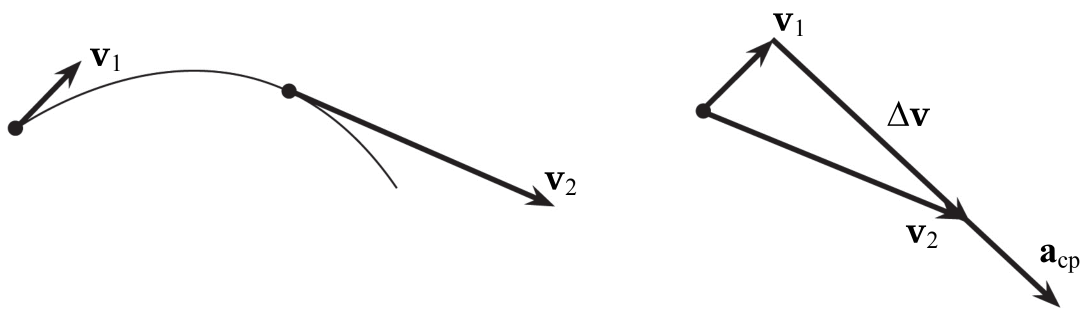

Рис. 1.4

Мгновенным ускорением (ускорением в данный момент времени) называется предел среднего ускорения при стремлении промежутка Δt к нулю (т. е. первая производная от скорости **v** по времени):

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Используя это определение ускорения и выражение мгновенной скорости через ее проекции, получаем

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{e}_z = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z,$$

где $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$, $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ – проекции вектора ускорения на координатные оси. Таким образом, проекция ускорения на координатную ось равна первой производной по времени проекции скорости на эту ось.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При движении материальной точки вектор скорости может изменяться как по модулю, так и по направлению (рис. 1.5). В этом случае

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau .$$

Составляющая ускорения $\mathbf{a}_n$, направленная перпендикулярно вектору $\mathbf{v}$ к центру кривизны траектории в данной точке, называется *нормальным*, или *центростремительным*, ускорением. Составляющая $\mathbf{a}_\tau$, параллельная вектору $\mathbf{v}$, называется *касательным* (*тангенциальным*) *ускорением*.

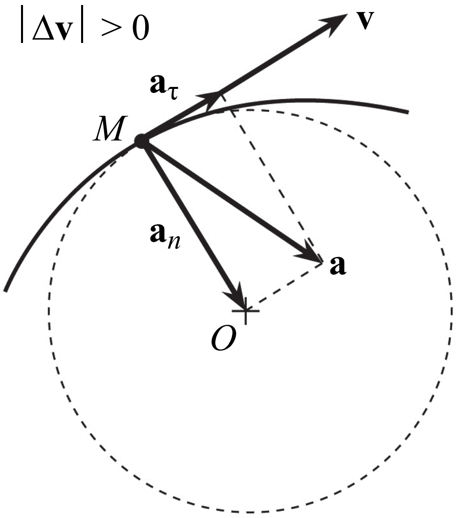

Рис. 1.5

Нормальное ускорение приводит к изменению только направления вектора скорости, а касательное – к изменению только модуля скорости и вычисляется по формуле

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Модуль вектора ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

По форме траектории и характеру изменения модуля скорости различают следующие виды механического движения: равномерное прямолинейное, неравномерное прямолинейное, равномерное криволинейное и неравномерное криволинейное.

1.4. Равномерное прямолинейное движение

Равномерным прямолинейным движением материальной точки называется движение, при котором вектор мгновенной скорости точки остается неизменным как по модулю, так и по направлению: $\mathbf{v}$ = const.

При этом виде движения средняя скорость за любой промежуток времени равна мгновенной скорости: $\mathbf{v}_{\text{ср}} = \mathbf{v}$. Если начальный момент времени t_0 принять равным нулю ($t_0 = 0$), то $\Delta t = t - t_0 = t$, и скорость в любой момент времени равна

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{t},$$

а ее модуль

$$v = \frac{\Delta r}{t}.$$

Так как при равномерном прямолинейном движении перемещение Δr равно пройденному пути s ($\Delta r = s$), имеем

$$v = \frac{s}{t}.$$

Различают два вида графиков скорости:

– график зависимости модуля скорости от времени $v = v(t)$;

– график зависимости проекции вектора скорости на ось координат от времени $v_X = v_X(t)$, $v_Y = v_Y(t)$, $v_Z = v_Z(t)$.

График $v = v(t)$ при равномерном движении представляет собой прямую линию, параллельную оси времени (рис. 1.6). Вид графиков $v_X = v_X(t)$, $v_Y = v_Y(t)$, $v_Z = v_Z(t)$ зависит от взаимного направления вектора скорости $\mathbf{v}$ и положительного направления осей координат. На рис. 1.7 представлены графики $v_X = v_X(t)$:

а) скорость $\mathbf{v}_1$ точки совпадает с положительным направлением оси OX, совмещенной с траекторией прямолинейного движения тела;

б) скорость $\mathbf{v}_2$ точки ориентирована противоположно положительному направлению оси OX.

Путь s, пройденный точкой при равномерном прямолинейном движении, за промежуток времени t, как это следует из формулы скорости, равен $s = vt$.

График пути $s = s(t)$ представляет собой прямую линию, идущую под углом α к оси времени (рис. 1.8). При этом численное значение скорости совпадает с тангенсом угла наклона прямой к оси Ot: $v = \text{tg}\alpha$.

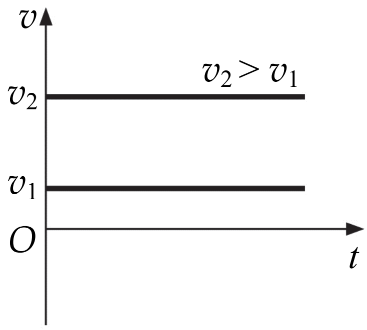

Рис. 1.6

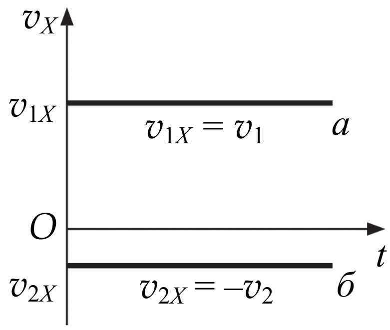

Рис. 1.7

Пройденный за промежуток времени Δt ($\Delta t = t_2 - t_1$) путь s можно определить с помощью графика зависимости $v = v(t)$ (рис. 1.9). Для равномерного прямолинейного движения путь s численно равен площади прямоугольника, ограниченного линией графика, осью времени и перпендикулярами, восставленными в точках t_1 и t_2. Этот вывод справедлив для любой зависимости $v = v(t)$.

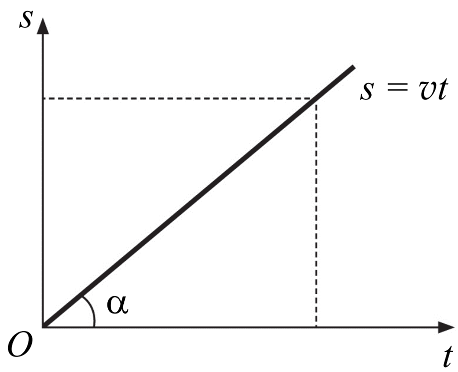

Рис. 1.8

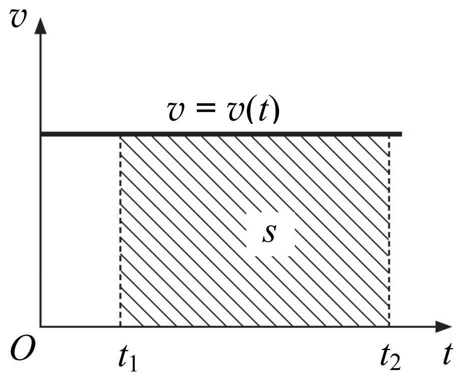

Рис. 1.9

Уравнение координаты точки, движущейся равномерно и прямолинейно, можно получить, выразив из формулы скорости равномерного прямолинейного движения вектор перемещения: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$.

Действительно (рис. 1.10, *а*), если в моменты времени $t_0 = 0$ и t координаты точки, движущейся вдоль оси OX, равны x_0 и x, то проекция вектора перемещения за промежуток времени $\Delta t = t - t_0 = t$ равна

$$\Delta r_X = x - x_0 \text{ или } x - x_0 = v_X t.$$

Тогда уравнение координаты точки в момент времени t можно записать следующим образом:

$$x = x_0 + v_X t,$$

где v_X – проекция вектора скорости **v** на ось OX, совмещенную с траекторией прямолинейного движения материальной точки.

В этом уравнении $v_X = v$, если направление вектора скорости **v** совпадает с направлением оси OX, и $v_X = -v$, если эти направления противоположны.

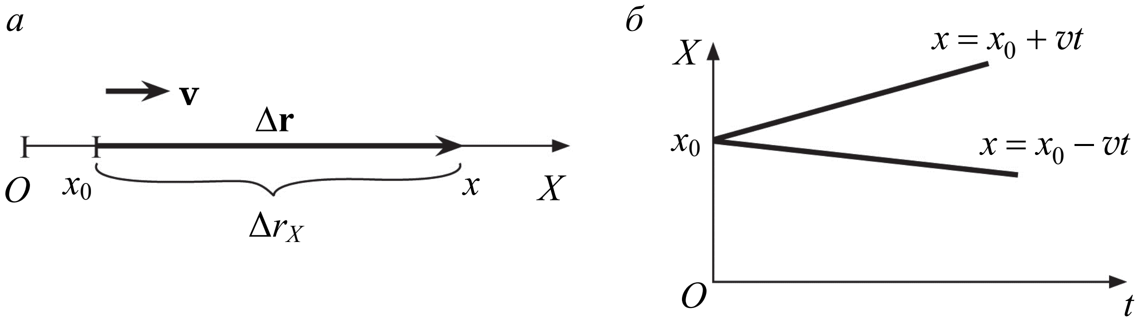

Рис. 1.10

Примеры графиков зависимостей координаты точки от времени при равномерном прямолинейном движении показаны на рис. 1.10, *б*.

1.5. Закон сложения скоростей

Этот закон устанавливает связь между скоростями **v** и **v**′ материальной точки M в двух разных системах отсчета, одна из которых XOY неподвижна, а вторая $X'O'Y'$ движется относительно первой со скоростью **u** таким образом, что оси остаются параллельными (рис. 1.11).

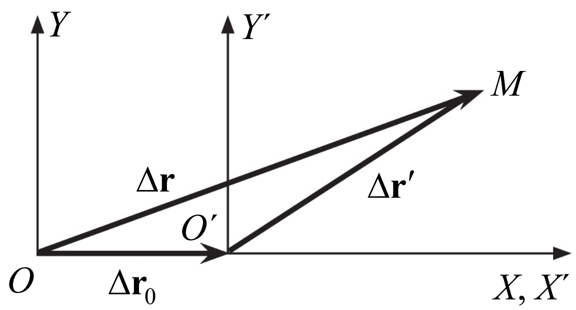

Рис. 1.11

Пусть за промежуток времени Δt точка переместилась на $\Delta\mathbf{r}'$ в системе отсчета $X'O'Y'$, а сама система $X'O'Y'$ переместилась относительно системы XOY на $\Delta\mathbf{r}_0$.

Перемещение $\Delta\mathbf{r}$ точки в системе XOY равно сумме перемещений:

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}' + \Delta\mathbf{r}_0.$$

Разделив это равенство на Δt и устремив Δt к 0, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u},$$

где $\mathbf{v}$ – скорость тела относительно неподвижной системы отсчета XOY; $\mathbf{v}'$ – скорость тела в подвижной системе отсчета $X'O'Y'$; $\mathbf{u}$ – скорость движения подвижной системы отсчета $X'O'Y'$ относительно неподвижной системы отсчета XOY.

Полученное соотношение выражает *закон сложения скоростей*:

скорость тела относительно неподвижной системы отсчета равна сумме векторов скорости тела относительно подвижной системы отсчета и скорости подвижной системы относительно неподвижной.

Закон сложения скоростей для случая прямолинейного движения тела и движения подвижной системы отсчета вдоль оси OX сводится к уравнению вида

$$v_X = v'_X + u_X.$$

1.6. Равнопеременное прямолинейное движение

Равнопеременным прямолинейным движением называется движение, при котором ускорение точки не зависит от времени: $\mathbf{a}$ = const.

Скорость точки в любой момент времени при равнопеременном прямолинейном движении определяется выражением

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t.$$

В проекциях на ось OX, направленную вдоль прямолинейной траектории, это уравнение имеет следующий вид:

$$v_X = v_{0X} + a_X t.$$

Равнопеременное прямолинейное движение называется *равноускоренным*, если направления векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ совпадают (в этом случае $v_{0X} > 0$, $a_X > 0$ или $v_{0X} < 0$, $a_X < 0$). Скорость при равноускоренном движении увеличивается с течением времени по закону

$$v = v_0 + at.$$

Равнопеременное прямолинейное движение называется *равнозамедленным*, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ противоположны по направлению (в этом случае $v_{0X} > 0$, $a_X < 0$ или $v_{0X} < 0$, $a_X > 0$). Скорость при равнозамедленном движении до момента остановки тела уменьшается с течением времени по закону

$$v = v_0 - at.$$

Графики зависимости величины скорости от времени $v = v(t)$ для равноускоренного *а* и равнозамедленного *б* движения приведены на рис. 1.12. Из этих графиков видно что, тангенс угла наклона линии графика к оси времени α численно равен ускорению тела *a*.

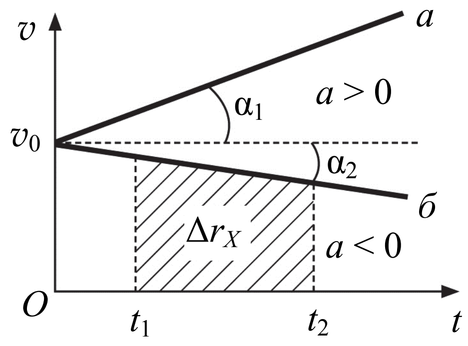

Рис. 1.12

Площадь заштрихованной на рис. 1.12 области численно равна проекции вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ на ось координат OX.

Пройденный телом путь s при равнопеременном движении можно вычислить по одной из формул:

а) при равноускоренном движении

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \; s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}, \; s = \frac{v + v_0}{2} t;$$

б) при равнозамедленном движении до момента остановки тела

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}, \; s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}, \; s = \frac{v + v_0}{2} t.$$

Графики зависимости $s = s(t)$ для равнопеременного движения представлены на рис. 1.13, где *а* – равноускоренное движение (направления векторов **a** и **v** совпадают), *б* – равнозамедленное движение до момента остановки тела t (направления векторов **a** и **v** противоположны).

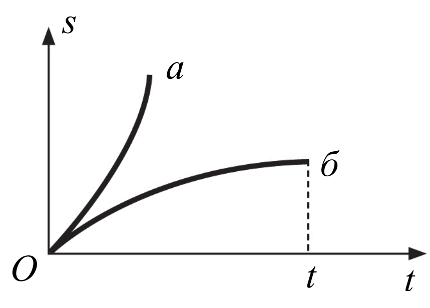

Рис. 1.13

Уравнение координаты x точки, движущейся равнопеременно и прямолинейно, имеет следующий вид:

$$x(t) = x_0 + v_{0X}t + \frac{a_X t^2}{2},$$

где x_0 – координата точки в момент времени $t = 0$, знак ее определяется положением этой точки на оси координат, а знаки v_{0X} и a_X – направлением векторов скорости **v** и ускорения **a** относительно оси OX.

1.7. Свободное падение тел

Свободным падением называется движение, совершаемое телом под действием силы тяжести без учета сопротивления воздуха.

Опыт показывает, что тело, находящееся свободном падении, движется с постоянным ускорением **g**, которое называется *ускорением свободного падения*. Это ускорение направлено вертикально вниз. Оно не зависит от массы падающего тела, но зависит от высоты над уровнем моря и географической широты. При малых высотах h ($h << R_З$, где $R_З$ – радиус Земли) ускорение свободного падения в среднем приблизительно равно 9,8 м/с^2.

При свободном падении тела с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, направленной вертикально вниз (рис. 1.14), движение тела является прямолинейным равноускоренным, и для него справедливы все уравнения движения этого вида.

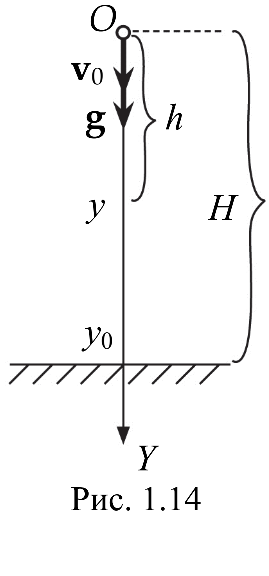

Рис. 1.14

Скорость тела в любой момент времени t равна

$$v = v_0 + gt.$$

При начальной скорости $v_0 = 0$ (тело начинает падение из состояния покоя) скорость тела в произвольный момент времени t равна $v = gt$.

В выбранной системе координат уравнение координаты тела записывают следующим образом:

$$y = v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \text{ или } y = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}.$$

Путь h, пройденный телом в свободном падении к моменту времени t, может быть найден по одной из формул:

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \text{ или } h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}.$$

Если начальная скорость тела равна нулю ($v_0 = 0$), то

$$h = \frac{gt^2}{2}, \text{ или } h = \frac{v^2}{2g}.$$

В момент падения на Землю $y = y_0 = H$. Отсюда следует, что продолжительность свободного падения $t_{пад}$ из состояния покоя

$$t_{пад} = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

1.8. Движение тела, брошенного вертикально вверх

При этом виде движения до наивысшей точки подъема векторы скорости **v** и ускорения **g** противоположны по направлению (рис. 1.15). Следовательно, на этом участке движение тела является равнозамедленным, и для него справедливы все уравнения движения этого вида.

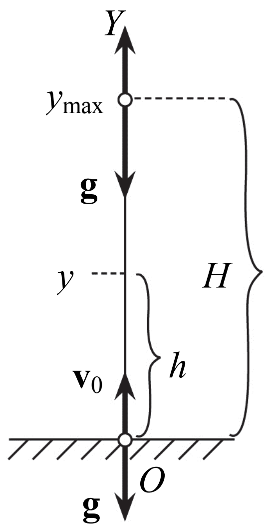

Рис. 1.15

Модуль вектора скорости тела в любой момент времени t равен

$$v = v_0 - gt.$$

Уравнения координаты тела и пути, пройденного им к моменту времени t, имеют следующий вид:

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

или

$$y = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}, \quad h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}.$$

Максимальная высота подъема тела (при достижении которой $v = 0$)

$$H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Длительность промежутка времени, по истечении которого тело достигнет высоты H,

$$t_{под} = \frac{v_0}{g}.$$

После прохождения наивысшей точки подъема тело начинает свободное падение с начальной скоростью $v_0 = 0$.

На участке падения движение тела становится равноускоренным, и для него справедливы все рассмотренные ранее уравнения такого движения. При этом время падения $t_{пад} = t_{под}$, а скорость $v_к$, с которой тело вернется в точку бросания, $v_к = v_0$.

1.9. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Тело, брошенное с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ под углом α к горизонту, участвует в двух движениях одновременно – в равномерном прямолинейном по горизонтали (на рис. 1.16 вдоль оси OX) с начальной скоростью $v_{0X} = v_0\cos\alpha$ и в равнопеременном движении по вертикали (на рис. 1.16 вдоль оси OY) с начальной скоростью

$$v_{0Y} = v_0\sin\alpha.$$

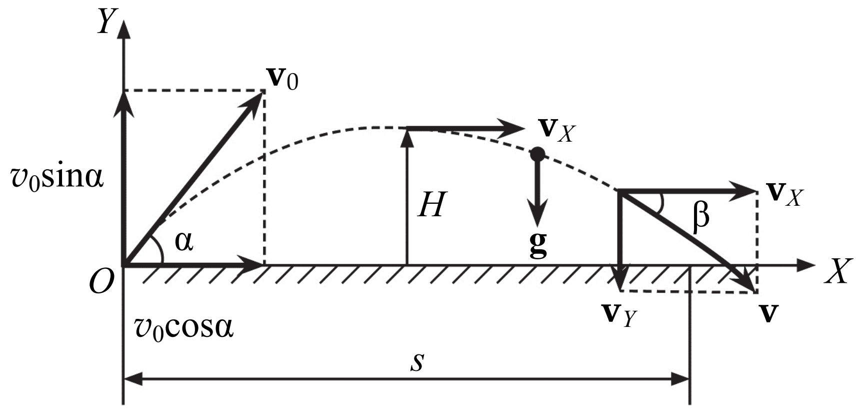

Рис. 1.16

Скорость тела в любой момент времени

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_X + \mathbf{v}_Y,$$

а ее модуль

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2}.$$

Проекции вектора скорости на оси координат и его модуль в произвольной точке траектории будут равны

$$v_X = v_0 \cos\alpha, \;\; v_Y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}.$$

Угол β, под которым вектор скорости **v** направлен к горизонту в момент времени t, определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_Y}{v_X} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}.$$

Уравнения координат тела, брошенного со скоростью $\mathbf{v}_0$ под углом α к горизонту, имеют следующий вид:

$$x(t) = v_{0X} t = v_0 \cos\alpha t,$$
$$y(t) = v_{0Y} t + \frac{g_Y t^2}{2} = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

где g_Y – проекция ускорения свободного падения на ось Y ($g_Y = -g$).

Максимальная высота подъема тела $H = y_{max}$ может быть определена из условия, что в верхней точке траектории скорость горизонтальна и ее проекция на ось OY равна нулю:

$$v_Y = 0 = v_0 \sin\alpha - g t_{\text{под}}.$$

Из этого выражения следует, что время подъема тела до верхней точки траектории

$$t_{\text{под}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Максимальная высота его подъема

$$H = v_0 \sin\alpha t_{\text{под}} - g\frac{t_{\text{под}}^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Дальность полета s можно найти из уравнений движения, используя то условие, что в момент падения $x_{max} = s$, $y = 0$, а время полета $t_{\text{пол}}$ равно удвоенному времени подъема:

$$t_{\text{пол}} = 2t_{\text{под}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставляя эти значения в уравнения координат, получаем

$$s = \left(v_0 \cos\alpha\right) t_{\text{пол}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

При заданной начальной скорости $\mathbf{v}_0$ максимальная дальность полета тела достигается при $\alpha = 45°$.

Если тело брошено на некоторой высоте H с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, направленной горизонтально (рис. 1.17), то модуль вектора скорости в любой момент времени

$$v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2},$$

где $v_X = v_0$, а $v_Y = gt$.

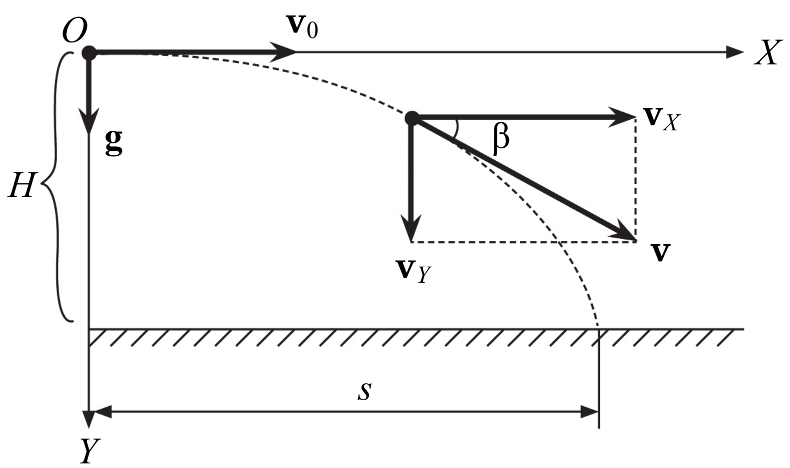

Рис. 1.17

С учетом этого

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}.$$

Угол β, под которым вектор скорости $\mathbf{v}$ направлен к горизонту, определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_Y}{v_X} = \frac{gt}{v_0}.$$

Время полета тела

$$t_{\text{пол}} = t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Дальность его полета по горизонтали

$$s = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

1.10. Равномерное движение по окружности

Движение по окружности является простейшим примером криволинейного движения. Положение материальной точки при этом виде движения (рис. 1.18) задается в любой момент времени t либо длиной дуги s, равной пройденному за промежуток времени t пути, либо углом поворота φ радиус-вектора $\mathbf{r}$, определяющего положение этой точки на траектории относительно центра окружности.

Движение по окружности называется *равномерным*, если за любые равные промежутки времени точка проходит одинаковый путь.

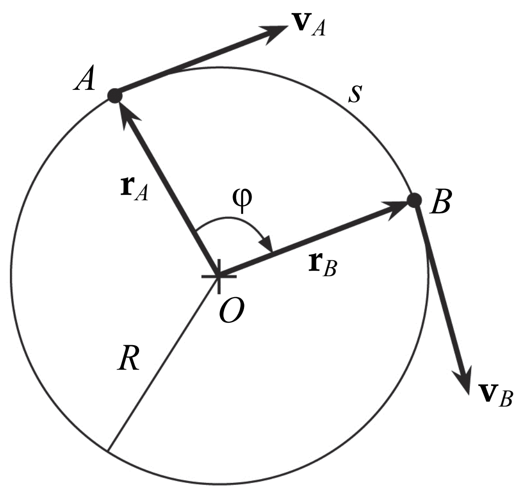

Рис. 1.18

Линейная скорость v материальной точки, движущейся по окружности, равна отношению пройденного пути (длине дуги) s к промежутку времени t, за который этот путь пройден:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Угловой скоростью движения точки по окружности называется отношение угла поворота φ радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки за промежуток времени t к длительности этого промежутка:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Угол поворота φ (угловой путь) измеряют в радианах (рад), а угловую скорость – в радианах в секунду (рад/с). Угол поворота можно измерять также числом оборотов N, совершенных точкой за промежуток времени t.

Связь между этими величинами устанавливается соотношением

$$\varphi = 2\pi N.$$

С учетом этого выражение угловой скорости принимает следующий вид:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi N}{t} = 2\pi\nu,$$

где величина $\nu = \dfrac{N}{t}$ называется *частотой вращения*, равной числу полных оборотов, совершаемых точкой за единицу времени.

Величина, равная промежутку времени, в течение которого точка совершает один полный оборот, называется *периодом вращения* T:

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Период вращения T можно выразить через линейную v и угловую ω скорость следующим образом:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega},$$

где R – радиус окружности, по которой движется материальная точка.

Пройденный материальной точкой к моменту времени t путь s и угол поворота φ определяются соотношениями

$$s = vt, \;\; \varphi = \omega t.$$

При этом путь s и угол поворота φ связаны между собой равенством

$$s = R\varphi,$$

из которого следует связь между линейной и угловой скоростью:

$$v = \omega R.$$

Так как при равномерном движении по окружности вектор линейной скорости $\mathbf{v}$ точки изменяется по направлению, оставаясь постоянным по модулю, точка движется с ускорением $\mathbf{a}_n$, модуль которого определяется следующими выражениями:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \text{ или } a_n = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Вектор ускорения $\mathbf{a}_n$ направлен к центру окружности, и поэтому ускорение точки, равномерно движущейся по окружности, называют *центростремительным, или нормальным.*

1.11. Неравномерное движение по окружности

Мгновенной угловой скоростью движения точки по окружности в момент времени t называется предел отношения угла поворота $\Delta\varphi$ радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ к длительности этого промежутка при неограниченном уменьшении Δt (т. е. первая производная угла поворота по времени):

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Угловая скорость – физическая величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота радиус-вектора.

Угол поворота φ_{12} радиус-вектора материальной точки за промежуток времени от t_1 до t_2 есть сумма элементарных углов поворота $d\varphi$ за время dt и определяется как интеграл по времени от t_1 до t_2 от угловой скорости:

$$\varphi_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t')dt'.$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости и определяется как предел отношения изменения угловой скорости $\Delta\omega$ за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ к длительности этого промежутка при неограниченном уменьшении Δt (т. е. первая производная угловой скорости по времени):

$$\beta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega(t)}{dt}.$$

Угловая скорость β измеряется в радианах в секунду в квадрате (рад/с^2).

2. Динамика

2.1. Сила, масса, импульс

Динамикой называется раздел механики, в котором рассматривается влияние взаимодействий между телами на характер их механического движения. Поэтому при изучении движения тела особого внимания заслуживают также тела, которые взаимодействуют с ним и влияют на характер его движения. Совокупность тел, рассматриваемых в данной задаче, называется *механической системой тел.*

Сила – векторная физическая величина, которая является количественной мерой механического воздействия на тело других тел или силовых полей. Сила **F** полностью задана, если заданы модуль, направление и точка ее приложения O (рис. 2.1).

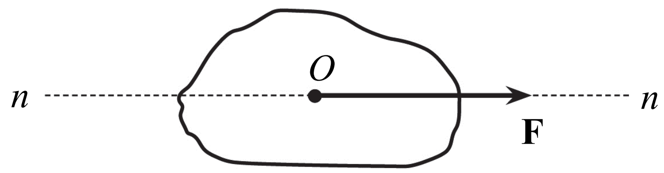

Рис. 2.1

Прямая n–n, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*. Перенос точки приложения силы в твердом теле по линии ее действия не изменяет результата действия этой силы.

Силы, с которыми тела механической системы взаимодействуют между собой, называются *внутренними силами*. Силы, с которыми тела, не входящие в систему, действуют на тела системы, называются *внешними силами.*

Система тел, на каждое из которых не действуют внешние силы, называются *замкнутой* (или *изолированной*) *системой*.

Если на тело действует несколько сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, ..., \mathbf{F}_n$ одновременно, то их действие может быть заменено действием одной силы **F**, которая называется *равнодействующей* и равна их геометрической сумме:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i.$$

Проекции равнодействующей силы на оси прямоугольной системы координат равны алгебраическим суммам соответствующих проекций всех сил:

$$F_X = \sum_{i=1}^{n} F_{iX}, \ F_Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iY}, \ F_Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ}.$$

Сила в системе СИ измеряется в ньютонах (Н).

При отсутствии взаимодействия с другими телами движущееся тело, как показывает опыт, сохраняет скорость, а при возникновении таких взаимодействий эта скорость изменяется, т. е. тело приобретает ускорение.

Свойство тела сохранять скорость в отсутствие взаимодействий и приобретать ускорение при взаимодействии с другими телами называется *инертностью*.

Количественной мерой инертности материальной точки и тела при его поступательном движении является *масса* (или *инертная масса*). Единицей массы в системе СИ служит килограмм (кг). Масса является скалярной положительной величиной.

При поступательном движении системы материальных точек или тела их масса может считаться сосредоточенной в одной точке, которая называется *центром масс*, или *центром инерции.* Радиус-вектор такой точки C равен отношению суммы произведений масс всех частиц системы на их радиус-векторы к массе всей системы:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i,$$

где m_i и $\mathbf{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-й частицы, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – масса всей системы частиц.

Распределение массы в объеме тела характеризуется *плотностью*. Для однородного тела плотность

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где m – масса тела; V – его объем. Плотность измеряется в килограммах на кубический метр (кг/м^3).

Импульсом материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Импульсом системы n материальных точек называется геометрическая сумма импульсов всех точек, входящих в систему:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \ldots + \mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i.$$

Импульсом тела называется произведение массы тела на скорость его центра масс:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c.$$

Импульс измеряется в килограммах на метр в секунду (кг · м/с).

2.2. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона: материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока внешнее воздействие не изменит этого состояния.

Система отсчета, в которой материальная точка в отсутствие внешних воздействий покоится или движется равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной системой отсчета*, а движение точки – *движением по инерции*. Таким образом, первый закон Ньютона устанавливает существование инерциальных систем отсчета.

Второй закон Ньютона: ускорение **a**, приобретаемое материальной точкой в инерциальной системе отсчета, прямо пропорционально действующей на точку силе **F**, обратно пропорционально массе m точки и совпадает по направлению с вектором силы:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \text{ или } \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

В проекциях на оси прямоугольной системы координат второй закон Ньютона выражается соотношениями

$$a_X = \frac{F_X}{m},\ a_Y = \frac{F_Y}{m},\ a_Z = \frac{F_Z}{m}.$$

В другой, более общей, формулировке, второй закон Ньютона связывает между собой силу, действующую на тело, и изменение его импульса:

$$F = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

где $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ – изменение импульса точки или тела за промежуток времени Δt, в течение которого на тело действовала сила.

Произведение силы **F** на длительность промежутка времени Δt ее действия называется *импульсом силы*. С использованием понятия импульса силы $\mathbf{F}\Delta t$ второй закон Ньютона может быть сформулирован следующим образом: импульс силы, действующий на тело в инерциальной системе отсчета, равен изменению импульса тела:

$$\mathbf{F}\Delta t = \Delta\mathbf{p}.$$

Если на материальную точку или тело действуют несколько сил одновременно, то под силой **F** во втором законе Ньютона следует понимать равнодействующую этих сил.

При равномерном движении материальной точки или тела по окружности ускорением **a** во втором законе Ньютона является центростремительное ускорение. Равнодействующая всех сил, обеспечивающих это ускорение, направлена к центру окружности и называется *центростремительной силой.*

Третий закон Ньютона: две материальные точки в инерциальной системе отсчета действуют друг на друга с силой, равной по модулю и противоположной по направлению:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},$$

где $\mathbf{F}_{12}$ – сила, действующая на первую точку со стороны второй; $\mathbf{F}_{21}$ – сила, действующая со стороны второй точки на первую.

2.3. Гравитационные силы

Гравитационные силы являются следствием гравитационных взаимодействий, относящихся к фундаментальным, и подчиняются закону всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения: две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F_{\text{тяг}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Сила тяжести – сила, действующая на тело вследствие его притяжения к Земле. Точка, в которой приложена сила тяжести, называется *центром тяжести тела*.

В системе отсчета, связанной с Землей, движение тела с высоты h над поверхностью Земли, совершаемое им только под действием силы тяжести $\mathbf{F}_{\text{тяг}}$, происходит с *ускорением свободного падения* **g**. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_{\text{тяг}}}{m},$$

где m – масса тела.

Так как векторы $\mathbf{F}_{\text{тяг}}$ и $\mathbf{g}$ совпадают по направлению, модуль ускорения свободного падения

$$g = \frac{F_{\text{тяг}}}{m},$$

а его зависимость от высоты h над поверхностью Земли с учетом закона всемирного тяготения выражается следующим образом:

$$g = G\frac{M_3}{\left(R_3 + h\right)^2},$$

где M_3 и R_3 – масса и радиус Земли.

Вес тела – сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес, удерживающие его от свободного падения. Допустим, что вес тела приложен к опоре или подвесу. По модулю он равен силе реакции опоры или силе натяжения подвеса и зависит от характера движения тела относительно Земли:

а) тело вместе с опорой движется равномерно и прямолинейно по вертикали (рис. 2.2, *а*). На него действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и реакция опоры $\mathbf{N}$. Так как движение является равномерным, его ускорение $\mathbf{a} = 0$, и в соответствии со вторым законом Ньютона

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = 0.$$

В проекциях на ось координат OY, совпадающую с направлением движения, это уравнение записывают следующим образом:

$$N - mg = 0, \text{ или } N = mg.$$

Вес тела $\mathbf{P}$ приложен к опоре и равен по модулю силе реакции опоры $\mathbf{N}$, поэтому

$$P = mg;$$

б) тело вместе с опорой движется по вертикали с ускорением $\mathbf{a}$, направленным вверх (рис. 2.2, *б*). В этом случае второй закон Ньютона в векторном виде и в проекциях на ось координат, совпадающую по направлению с вектором $\mathbf{a}$, записывают следующим образом:

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}, \text{ или } N - mg = ma,$$

откуда

$$N = m\left(g + a\right),$$

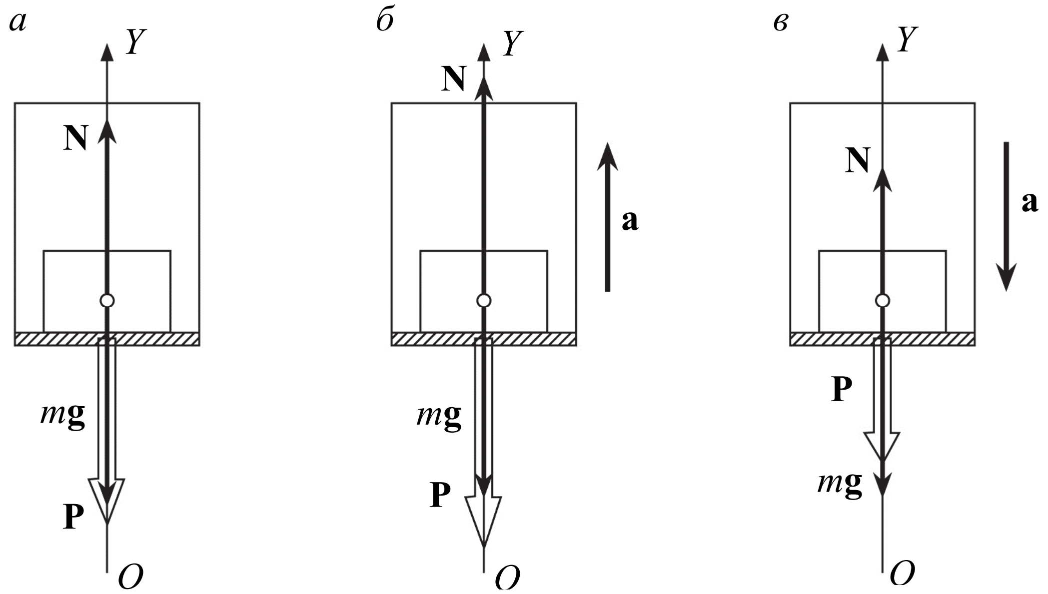

Рис. 2.2

и вес тела равен

$$P = m(g + a);$$

в) тело вместе с опорой движется по вертикали с ускорением **a**, направленным вниз (рис. 2.2, *в*). В этом случае второй закон Ньютона в векторном виде и в проекциях на ось координат, совпадающую по направлению с вектором **a**, выражается в виде

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a},\ \ mg - N = ma,\ \text{или}\ \ N = m(g - a).$$

Следовательно, модуль веса тела

$$P = m(g - a).$$

Таким образом, при движении тела по вертикали вес его:

а) равен силе тяжести ($P = mg$), если тело движется равномерно;

б) больше силы тяжести ($P > mg$), если тело движется с ускорением **a**, направленным вверх, тело при этом испытывает *перегрузку*;

в) меньше силы тяжести ($P < mg$), если тело движется с ускорением **a**, направленным вниз. В этом случае, если $a = g$, то $P = 0$, и имеет место *состояние невесомости*, при котором на тело действует только сила тяжести.

Если телу, находящемуся на высоте h над поверхностью Земли, сообщить начальную скорость **v** в горизонтальном направлении, то оно вследствие того, что Земля имеет сферическую форму, одновременно с продвижением в направлении вектора скорости под действием силы тяжести будет приближаться к поверхности Земли (рис. 2.3).

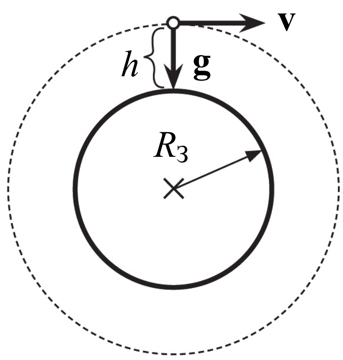

Рис. 2.3

При определенном значении скорости **v** поверхность Земли из-за ее кривизны будет удаляться от тела как раз на столько, на сколько тело будет приближаться к ней благодаря притяжению, в результате это тело будет двигаться на постоянном расстоянии h от указанной поверхности, т. е. по окружности радиусом $R_З + h$, с центростремительным ускорением

$$a_n = \frac{v^2}{R_З + h},$$

которое сообщает телу массой m гравитационная сила

$$F_{тяг} = G\frac{mM_З}{\left(R_З + h\right)^2}.$$

По второму закону Ньютона

$$F_{тяг} = ma_n,$$

или

$$G\frac{mM_З}{\left(R_З + h\right)^2} = m\frac{v^2}{R_З + h},$$

откуда следует, что скорость, которую требуется сообщить телу, чтобы оно двигалось по окружности радиусом $R_З + h$ вокруг Земли, т. е. стало ее спутником, равна

$$v = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З + h}}.$$

Такая скорость называется *первой космической скоростью*.

Первая космическая скорость для спутника, движущегося по орбите на высоте $h << R_З$, равна

$$v = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З}} = \sqrt{gR_З}.$$

С использованием численных значений величин g и $R_З$ значение первой космической скорости получается равным $v \approx 8 \cdot 10^3$ м/с.

2.4. Силы трения

Трением (*внешним трением*) называется взаимодействие между поверхностями соприкасающихся тел, которое препятствует их перемещению относительно друг друга.

Трение, при котором между поверхностями соприкасающихся тел отсутствует жидкая или газовая прослойка, называется *сухим трением*.

Трение, возникающее при отсутствии относительного перемещения соприкасающихся тел, называется *трением покоя*.

Сила $\mathbf{F}_{тр0}$, препятствующая возникновению относительного перемещения тел вдоль соприкасающихся поверхностей, называется *силой трения покоя*.

Сила трения покоя возрастает с ростом внешней силы $\mathbf{F}_{внеш}$, приложенной к одному из тел, от нуля до некоторого максимального значения $F_{тр0}^{max}$, после достижения которого начинается относительное их перемещение.

Максимальная сила трения покоя $F_{тр0}^{max}$ прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{тр0}^{max} = \mu_0 P_д,$$

где $P_д$ – сила нормального давления, действующая со стороны тела на опору (рис. 2.4) и равная силе N реакции опоры; μ_0 – *коэффициент трения покоя*, зависящий от материала соприкасающихся тел, степени обработки их поверхностей и внешних условий.

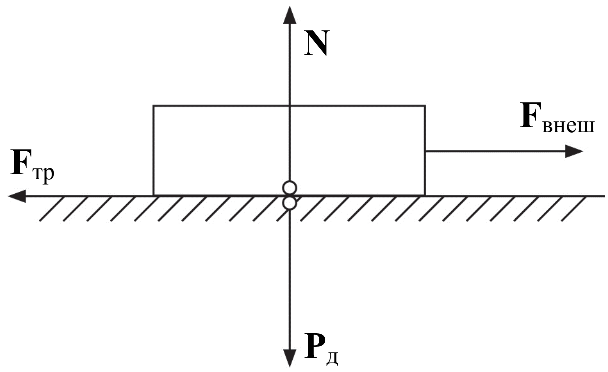

Рис. 2.4

Трение, возникающее при относительном смещении соприкасающихся тел, называется *трением скольжения*, а сила $\mathbf{F}_{тр}$, возникающая при этом и препятствующая их относительному перемещению, – *силой трения скольжения*. Сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления, а так как $P_{д} = N$, имеем

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ – *коэффициент трения скольжения*, зависящий от тех же факторов, что и коэффициент трения покоя, а также от относительной скорости движения соприкасающихся тел. Опыт показывает, что $\mu_0 > \mu$.

2.5. Силы упругости. Закон Гука

Под воздействием внешних сил тела могут изменять форму и размеры. Такие изменения называются *деформациями*. При деформациях частицы тела смещаются относительно положения равновесия. Данному смещению препятствуют силы, с которыми частицы взаимодействуют между собой, т. е. в теле возникают внутренние силы, препятствующие деформации. Эти силы называются *силами упругости*.

Деформации, которые исчезают после того как действие внешних сил прекращается, называются *упругими деформациями*.

Деформации, которые не исчезают или исчезают частично после прекращения действия внешних сил, называются *неупругими*, или *пластическими.*

Количественно деформации оцениваются абсолютными и относительными значениями. Так, линейные одномерные деформации (растяжение и сжатие), характеризуются *вектором удлинения* (*сжатия*) $\Delta\mathbf{l}$ (рис. 2.5), модуль которого $\Delta l = l - l_0$ называется *абсолютным удлинением* (*сжатием*).

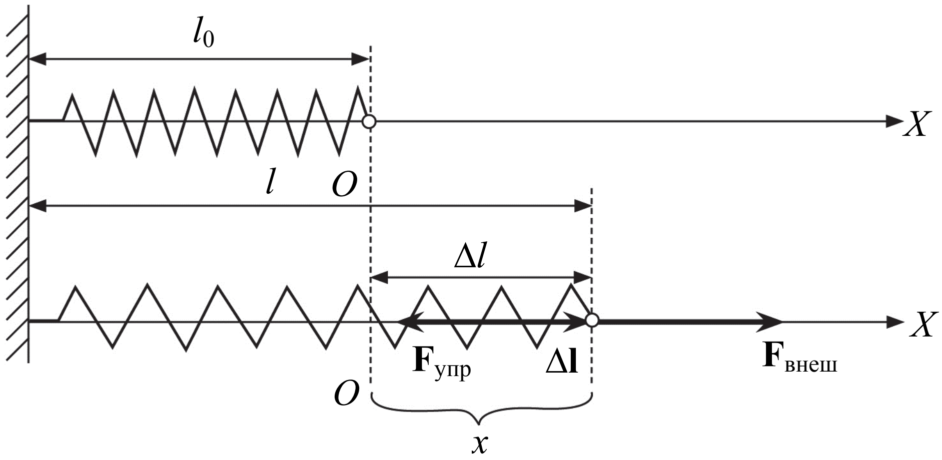

Рис. 2.5

Отношение абсолютного удлинения (сжатия) Δl к первоначальный длине l_0 называется *относительной деформацией*:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Отношение силы упругости $F_{упр}$ к площади поперечного сечения S деформируемого тела, перпендикулярного направлению силы, называется *нормальным напряжением*:

$$\sigma_n = \frac{F_{упр}}{S}.$$

Силы упругости, возникающие при упругих линейных деформациях, подчиняются опытному *закону Гука*, согласно которому сила упругости пропорциональна вектору удлинения и противоположна ему по направлению:

$$\mathbf{F}_{упр} = -k\Delta\mathbf{l},$$

где k – *коэффициент упругости*, значение которого зависит от материала, линейных размеров и формы деформируемого тела.

В проекциях на ось координат, совпадающей с осью деформируемого тела и направлением внешней силы, закон Гука записывается следующим образом:

$$F_{упрX} = -kx.$$

В другой формулировке закон Гука связывает между собой нормальное напряжение σ_n, возникающее при упругом удлинении (сжатии), и относительную деформацию ε:

$$\sigma_n = E\varepsilon,$$

где E – *модуль Юнга*, значение которого зависит от материала деформируемого тела.

Сила упругости, действующая на тело со стороны опоры или подвеса, называется *силой реакции опоры* **N**, или *силой натяжения подвеса* **T**.

На рис. 2.6 приведены примеры приложения сил реакций опоры и сил натяжения подвесов.

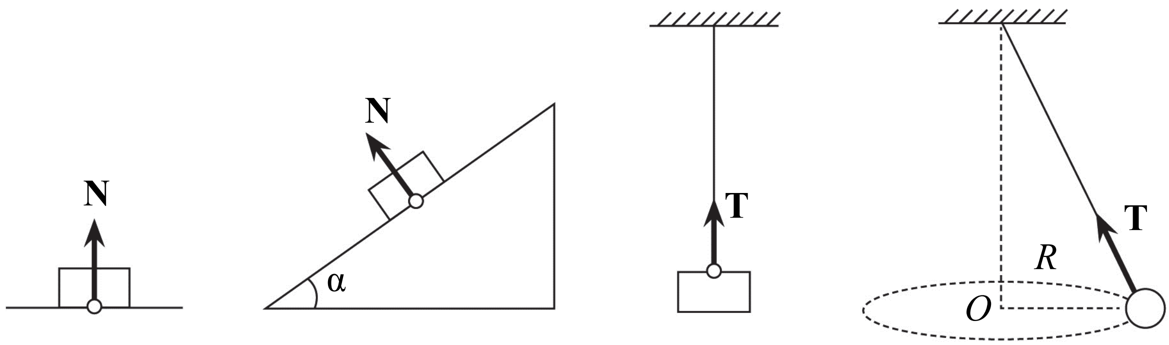

Рис. 2.6

3. Работа, мощность, энергия. Законы сохранения в механике

3.1. Механическая работа, мощность

Механической работой ΔA, совершаемой постоянной силой $\mathbf{F}$ на перемещении $\Delta\mathbf{r}$ материальной точки, называется скалярная физическая величина, равная

$$\Delta A = F\Delta r\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами силы и перемещения (рис. 3.1).

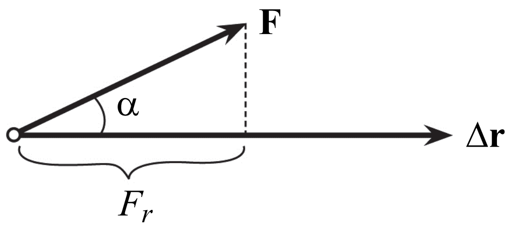

Рис. 3.1

В прямоугольной декартовой системе координат выражение работы можно записать в следующем виде:

$$\Delta A = F_X\Delta x + F_Y\Delta y + F_Z\Delta z,$$

где F_X, F_Y, F_Z – проекции силы $\mathbf{F}$, а Δx, Δy, Δz – проекции вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ на координатные оси *X, Y, Z* соответственно. В математике такая скалярная величина (ΔA), равная $F\Delta r\cos\alpha$, называется *скалярным произведением двух векторов* ($\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{r}$) и записывается в виде

$$\Delta A = (\mathbf{F},\ \Delta\mathbf{r}),\ \text{или}\ \Delta A = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}.$$

Работа силы положительна ($\Delta A > 0$), если угол между направлением вектора силы и направлением вектора перемещения материальной точки находится в пределах $0 \le \alpha < 90°$.

Работа силы равна нулю ($\Delta A = 0$), если материальная точка перемещается в направлении, перпендикулярном к направлению действия силы, т. е. при $\alpha = 90°$.

Работа силы отрицательна ($\Delta A < 0$), если угол между направлением силы и направлением перемещения тупой ($90° < \alpha \le 180°$), так как в этом случае $\cos\alpha < 0$. В частности, если перемещение происходит в сторону, противоположную направлению вектора силы, т. е. $\alpha = 180°$, то $\cos\alpha = -1$, и $\Delta A = -F\Delta r$. Из этого следует, что работа силы трения скольжения является отрицательной.

Механическую работу при перемещении материальной точки под действием силы можно определить с помощью графика зависимости проекции силы на направление перемещения от перемещения $F_r = F_r(\Delta r)$: работа численно равна заштрихованной площади (рис. 3.2) под линией графика. Этот вывод справедлив для любой зависимости

$$F_r = F_r(\Delta r)$$

(рис. 3.3).

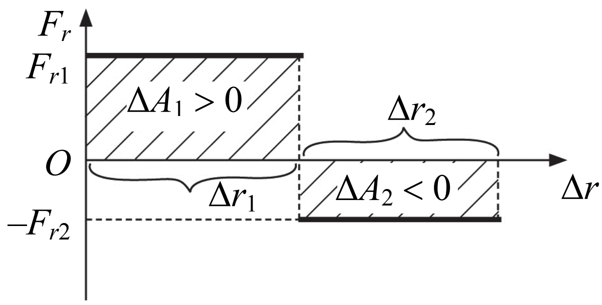

Рис. 3.2

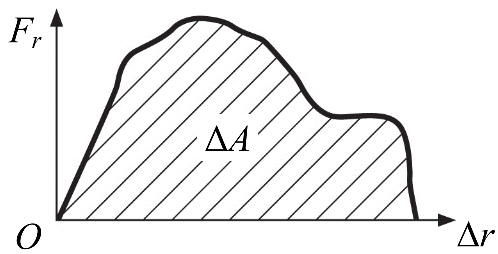

Рис. 3.3

При совпадении направления перемещения с направлением вектора силы работа положительна ($\Delta A_1 > 0$). Если направления векторов силы и перемещения противоположны, то работа отрицательна ($\Delta A_2 < 0$).

Для прямолинейного движения без изменения направления скорости модуль вектора перемещения Δr материальной точки равен пройденному пути *s*, и поэтому работу можно вычислить по формуле

$$\Delta A = Fs\cos\alpha.$$

В случае если на материальную точку действует несколько сил:

$$\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2,\ \mathbf{F}_3,\ ...,\ \mathbf{F}_n,$$

то полная работа этих сил на перемещении $\Delta\mathbf{r}$ равна алгебраической сумме работы, совершаемой каждой силой на этом перемещении:

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta r \cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i.$$

Элементарной работой силы **F** на элементарном (бесконечно малом) перемещении $d\mathbf{r}$ называется величина

$$\delta A = \mathbf{F}d\mathbf{r} = Fdr\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами **F** и $d\mathbf{r}$, $dr = ds = |d\mathbf{r}|$ – элементарный путь.

Суммируя элементарную работу, совершенную на всех элементарных участках пути от начальной точки 1 до конечной точки 2, найдем работу A_{12} силы $\mathbf{F}$ по перемещению частицы на всем пути. В математике такая сумма элементарной (бесконечно малой) работы записывается в виде интеграла:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

В системе единиц СИ работа измеряется в джоулях (Дж): 1Дж = 1Н · 1м.

По характеру совершения работы различают потенциальные и непотенциальные силы. Силы, работа которых не зависит от вида траектории, по которой перемещается тело, а определяется только начальным и конечным его положением, называются *потенциальными*. В механике к таким силам относят силы тяготения и силы упругости. Силы, работа которых зависит от вида траектории, называются *непотенциальными.* К таким силам относятся силы трения.

Быстрота совершения работы характеризуется *мощностью.*

Средней мощностью $N_{\text{ср}}$ называется физическая скалярная величина, равная отношению работы ΔA к длительности промежутка времени Δt, в течение которого совершается эта работа:

$$N_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Так как $\Delta A = F \Delta r \cos\alpha$, средняя мощность

$$N_{\text{ср}} = \frac{F \Delta r \cos\alpha}{\Delta t}.$$

В этом выражении $\frac{\Delta r}{\Delta t} = v_{\text{ср}}$, где $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость перемещения. Следовательно,

$$N_{\text{ср}} = F v_{\text{ср}} \cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$.

Мощностью (*мгновенной мощностью*) N называется скалярная физическая величина, равная пределу, к которому стремится средняя мощность $N_{\text{ср}}$ при бесконечном уменьшении промежутка времени Δt:

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F \Delta r \cos\alpha}{\Delta t}.$$

Используя определение скорости, это соотношение можно переписать следующим образом:

$$N = F\cos\alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = F v \cos\alpha,$$

где v – мгновенная скорость; α – угол между векторами силы и скорости.

Воспользовавшись определением скалярного произведения векторов, мгновенную мощность можно записать в виде

$$N = \mathbf{F}\mathbf{v}.$$

Если на материальную точку действует несколько постоянных сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., $\mathbf{F}_n$, то

$$N = \sum_{i=1}^{n} F_i v \cos\alpha_i,$$

где α_i – угол между векторами силы $\mathbf{F}_i$ и скорости $\mathbf{v}$.

В системе единиц СИ мощность измеряется в ваттах (Вт): 1Вт = 1Дж/1с.

Эффективность работы, совершаемой различными механизмами, характеризуется *коэффициентом полезного действия* (*КПД*), который определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{N_\text{п}}{N_\text{з}} \cdot 100\%, \ \eta = \frac{A_\text{п}}{A_\text{з}} \cdot 100\%,$$

где $N_\text{п}$, $A_\text{п}$ – полезная мощность и работа механизма; $N_\text{з}$, $A_\text{з}$ – затраченная механизмом мощность и работа.

3.2. Механическая, кинетическая и потенциальная энергия

Механической энергией $W_\text{мех}$ называется скалярная физическая величина, которая характеризует движение и взаимодействие тел и зависит от их скоростей и взаимного расположения. Количественно механическая энергия определяется максимальной работой, которая может быть совершена вследствие изменения скоростей тел и их взаимодействия, обусловленного взаимным их расположением или частей одного и того же тела относительно друг друга.

Механическая энергия является суммой кинетической и потенциальной энергии.

Кинетической энергией $W_к$ *материальной точки* или тела называется часть механической энергии, которая зависит от скоростей их движения в данной инерциальной системе отсчета. Кинетическая энергия $W_к$ материальной точки (или поступательно движущегося тела) с массой m равна

$$W_к = \frac{mv^2}{2}, \text{ или } W_к = \frac{p^2}{2m},$$

где v – скорость материальной точки или центра масс тела; $p = mv$ – импульс материальной точки.

Кинетическая энергия $W_к$ *механической системы*, состоящей из n материальных точек или тел, равна сумме их кинетической энергии:

$$W_к = \sum_{i=1}^{n} W_{iк} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}, \text{ или } W_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i}.$$

Мерой изменения кинетической энергии может служить работа всех сил, приложенных к данной точке или телу.

Количественно эта работа определяется *теоремой о кинетической энергии*: изменение $\Delta W_к$ кинетической энергии тела при его переходе из одного механического состояния в другое равно работе всех сил, действующих на данную точку или тело:

$$A = \Delta W_к = W_{к2} - W_{к1},$$

где $W_{к1}$, $W_{к2}$ – кинетическая энергия в начальном и конечном состоянии соответственно.

Действительно, в простейшем случае поступательного движения тела, когда векторы силы и перемещения направлены вдоль одной прямой в одну и ту же сторону, проекции силы $\mathbf{F}$, перемещения $\Delta\mathbf{r}$, ускорения $\mathbf{a}$ и скорости $\mathbf{v}$ на ось OX будут одного знака и равны модулям самих векторов. Работа в этом случае равна $A = F\Delta r$. По второму закону Ньютона $F = ma$.

При постоянной силе F модули перемещения Δr и скорости v тела связаны соотношением

$$\Delta r = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a},$$

где v_1 и v_2 – модули векторов скоростей материальной точки или тела в начале и конце рассматриваемого перемещения Δr.

Подставив выражение для Δr в формулу работы, получим

$$A = F\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = ma\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{к2} - W_{к1}.$$

Выражение в правой части последнего равенства представляет собой изменение кинетической энергии. Таким образом, работа всех сил, действующих на тело, является мерой изменения ее кинетической энергии.

Действие сил, работа которых на данном участке траектории положительна, приводит к увеличению кинетической энергии тела ($W_{к2} > W_{к1}$).

Действие сил, работа которых на данном участке траектории отрицательна, приводит к уменьшению кинетической энергии тела ($W_{к2} < W_{к1}$).

Потенциальной энергией $W_п$ называется часть механической энергии, зависящая от взаимного расположения тел механической системы и их положения во внешнем поле потенциальных сил.

Практическое значение имеет не сама потенциальная энергия $W_п$, а ее изменение $\Delta W_п$. Вследствие этого начало отсчета $W_п$ (т. е. положение системы тел, при котором $W_п = 0$) выбирается произвольно. Положение системы тел или тела, при котором $W_п = 0$, называется *нулевым уровнем*.

Мерой изменения потенциальной энергии при переходе системы тел или тела из одного механического состояния в другое служит работа потенциальных сил, с которыми тела системы взаимодействуют между собой. Работа A потенциальных сил равна изменению потенциальной энергии $\Delta W_п$ системы тел при ее переходе из одного механического состояния в другое, взятому с противоположным знаком:

$$A = -(W_{п2} - W_{п1}) = -\Delta W_п,$$

где $W_{п1}$ и $W_{п2}$ – потенциальная энергия в состояниях 1 и 2.

Сравним работу A потенциальной силы при перемещении тела на $\Delta\mathbf{r}$, равную

$$A = F_X\Delta x + F_Y\Delta y + F_Z\Delta z,$$

при изменении потенциальной энергии при этом перемещении

$$\Delta W_п = \frac{\partial W_п}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial W_п}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial W_п}{\partial z}\Delta z,$$

где $\frac{\partial W_п}{\partial x}$, $\frac{\partial W_п}{\partial y}$ и $\frac{\partial W_п}{\partial z}$ – частные производные потенциальной энергии $W_п(x, y, z)$ как функции координат по соответствующим осям координат.

Учитывая равенство $A = -\Delta W_п$, находим, что коэффициенты при независимых перемещениях тела вдоль координатных осей (при Δx, Δy и Δz) должны быть равны, но с обратным знаком, т. е.

$$F_X = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial x},\ F_Y = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial y},\ F_Z = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial z}.$$

Используя единичные векторы (орты) $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, направленные по осям X, Y, Z соответственно, эти формулы переписываем в виде

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial W_\text{п}}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial W_\text{п}}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial W_\text{п}}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

В математике подобную связь между вектором и некоторой функцией записывают с помощью знака градиента (grad или ∇). В данном случае

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W_\text{п},\ \text{или}\ \mathbf{F} = -\nabla W_\text{п},$$

т. е. сила равна градиенту потенциала со знаком «минус».

Используя приведенные формулы, можно получить выражение для $W_\text{п}$ при разных потенциальных взаимодействиях. Для этого необходимо вычислить работу A, совершаемую соответствующими потенциальными силами при переходе тела из одного состояния в другое, и приравнять ее к изменению потенциальной энергии $\Delta W_\text{п}$, взятому с противоположным знаком.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тела массой *m* с Землей. Работа, совершаемая силой тяжести $m\mathbf{g}$ при перемещении тела из точки *1*, находящейся на высоте h_1 от начала отсчета высоты, в точку *2*, находящуюся на высоте h_2, как видно из рис. 3.4, равна

$$A_{12} = mg\Delta r = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2.$$

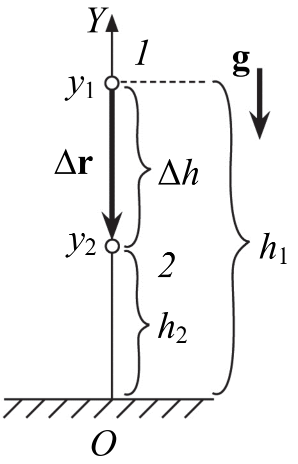

Рис. 3.4

Приравнивая полученное выражение к изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком, получаем

$$mgh_1 - mgh_2 = -(W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1}) = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2}.$$

Так как начальное и конечное положение тела выбраны произвольно, это равенство справедливо для любых положений. Отсюда следует, что:

$$W_\text{п} = mgh,$$

где h – высота, на которой тело находится над нулевым уровнем энергии $W_\text{п} = 0$.

Потенциальная энергия упругих взаимодействий. Работа, совершаемая силами упругости при перемещении тела из положения *1* в положение *2*, равна

$$A_{12} = F_{\text{упр}} \Delta r,$$

где $F_{\text{упр}}$ – среднее значение силы упругости на перемещении $\Delta \mathbf{r}$; Δr – модуль вектора перемещения.

Пусть тело массой m перемещается по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы упругости из положения x_1 в положение x_2 (рис. 3.5). Из рисунка видно, что направления силы упругости $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ и перемещения $\Delta \mathbf{r}$ совпадают.

Сила упругости при движении тела изменяется от точки к точке. Если в начальной точке сила равна $F_{\text{упр1}} = kx_1$, то в конечной точке она становится равной $F_{\text{упр2}} = kx_2$.

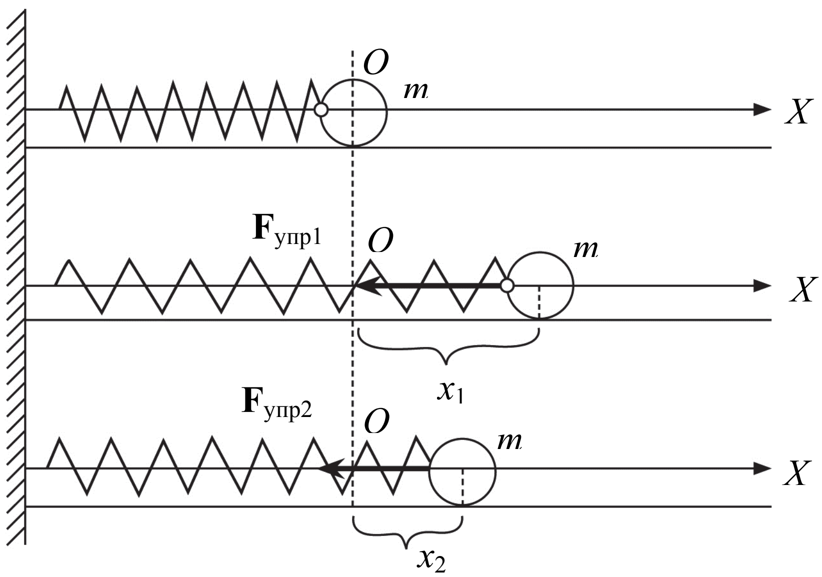

Рис. 3.5

Для вычисления работы используем график зависимости силы упругости от смещения x из положения равновесия (рис. 3.6).

Работа силы упругости при перемещении тела из положения x_1 в положение x_2 численно равна площади заштрихованной фигуры, которая представляет собой трапецию:

$$A = \frac{1}{2}\left(kx_1 + kx_2\right)\left(x_1 - x_2\right) = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}.$$

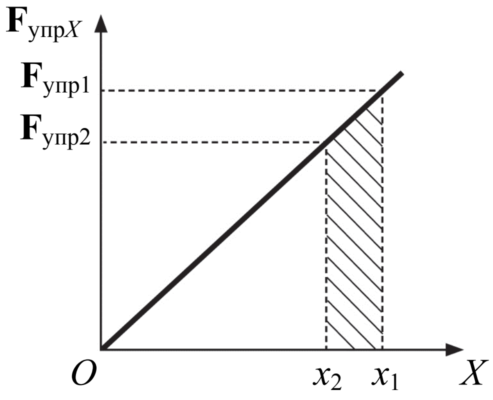

Рис. 3.6

Так как $A = -\Delta W_{\text{п}}$, имеем

$$A = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right) = -\Delta W_{\text{п}},$$

где $W_{\text{п}} = \dfrac{kx^2}{2}$ – величина, являющаяся потенциальной энергией упругой деформации.

Таким образом, работа силы упругости подобно работе силы тяжести равна убыли потенциальной энергии и определяется только координатами начального и конечного положения тела. Это означает, что сила упругости является потенциальной силой.

3.3. Закон сохранения механической энергии

В общем случае на тела механической системы могут действовать как потенциальные, так и непотенциальные силы, и полная работа, совершаемая при переходе системы из одного состояния в другое, будет равна

$$A = A_{\text{п}} + A_{\text{нп}}.$$

В соответствии с теоремой о кинетической энергии эта работа равна

$$A = \Delta W_{\text{к}} = W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1}.$$

Работа же потенциальных сил определяется убылью потенциальной энергии:

$$A_{\text{п}} = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2}.$$

Таким образом,

$$A = -\Delta W_{\text{п}} + A_{\text{нп}},$$

или

$$\Delta W_{к} = -\Delta W_{\text{п}} + A_{\text{нп}}.$$

С учетом того, что $\Delta W_{\text{к}} = W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1}$, получаем

$$W_{\text{к}2} - W_{\text{к}1} = W_{\text{п}1} - W_{\text{п}2} + A_{\text{нп}}.$$

Полученное выражение можно записать в виде

$$(W_{\text{к}2} + W_{\text{п}2}) - (W_{\text{к}1} + W_{\text{п}1}) = A_{\text{нп}}.$$

Выражения в скобках представляют собой механическую энергию системы тел в начальном W_1 и конечном W_2 состоянии. Таким образом,

$$W_2 - W_1 = A_{\text{нп}},$$

т. е. изменение механической энергии системы тел определяется работой непотенциальных сил.

Если в системе тел действуют только потенциальные силы, то $A_{\text{нп}} = 0$, и в этом случае $W_2 = W_1$. Это равенство выражает *закон сохранения механической энергии*: полная механическая энергия системы тел, в которой действуют потенциальные силы, остается постоянной.

3.4. Закон сохранения импульса

В соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса системы тел $d\mathbf{p}$ в единицу времени равно сумме всех сил $\mathbf{F}_i$, действующих на эту систему:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

В общем случае на систему могут действовать как внутренние силы, так и внешние. Внутренние силы, с которыми тела системы взаимодействуют между собой, в соответствии с третьим законом Ньютона равны по модулю, противоположны по направлению, и их геометрическая сумма равна нулю.

Таким образом, изменения импульса системы определяются внешними силами:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_{\text{внеш}\,i}.$$

Если система тел является замкнутой, т. е. внешние силы отсутствуют или их действие компенсировано, то изменение импульса $d\mathbf{p} = 0$. Это означает, что импульс системы не изменяется. В этом и состоит *закон сохранения импульса*: в инерциальной системе отсчета суммарный импульс замкнутой системы тел с течением времени не изменяется.

Закон сохранения импульса может быть применен также для незамкнутых систем, если проекции всех внешних сил на какую-либо координатную ось равны нулю. В этом случае проекция импульса незамкнутой системы тел на эту ось остается без изменений.

Законы сохранения энергии и импульса позволяют изучать процессы столкновения тел, если характер действующих при столкновении сил неизвестен. В механике обычно рассматривают два предельных вида таких взаимодействий тел: *абсолютно упругое* и *абсолютно неупругое* взаимодействие (абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары тел).

Абсолютно упругий удар – столкновение тел, при котором механическая энергия тел сохраняется. Значения и направления скоростей после взаимодействия их определяются законом сохранения механической энергии и законом сохранения импульса, из которых следует, что для двух взаимодействующих тел

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2,$$

или

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2,$$

$$W_{\text{к}1} + W_{\text{к}2} = W'_{\text{к}1} + W'_{\text{к}2},$$

или

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2},$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – скорости тел массой m_1 и m_2 до их взаимодействия, а $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$ – скорости тех же тел после взаимодействия.

Абсолютно неупругий удар – столкновение тел, в результате которого тела движутся вместе как единое целое с одинаковой скоростью.

В отличие от упругого взаимодействия при абсолютно неупругом выполняется только закон сохранения импульса. Закон сохранения полной механической энергии не выполняется, так как часть ее переходит во внутреннюю энергию системы. С учетом этого закон сохранения импульса для двух тел записывают следующим образом:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}.$$

Отсюда следует, что совместная скорость движения тел после соударения будет равна

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2},$$

где $m_1\mathbf{v}_1$ и $m_2\mathbf{v}_2$ – импульсы тел до взаимодействия; $(m_1 + m_2)\mathbf{v}$ – импульс тела, образовавшегося в результате взаимодействия.

Изменение полной механической энергии системы ΔW в результате неупругого удара имеет вид

$$\Delta W = W'_\text{к} - (W_{\text{к}1} + W_{\text{к}2}),$$

или

$$\Delta W_\text{к} = \frac{p_{12}^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{p_2^2}{2m_2},$$

где $W_{\text{к}1} = \frac{p_1^2}{2m_1}$ и $W_{\text{к}2} = \frac{p_2^2}{2m_2}$ – кинетическая энергия тел до столкновения; $W'_\text{к} = \frac{p_{12}^2}{2(m_1 + m_2)}$ – кинетическая энергия тела, образовавшегося в результате столкновения.

При неупругом ударе полная механическая энергия системы уменьшается. Этот результат не противоречит закону сохранения и превращения энергии. Дело в том, что при абсолютно неупругом ударе происходит деформация соударяющихся тел. Эта деформация сохраняется и после соударения, поэтому она называется *остаточной деформацией*.

4. Механика твердого тела

4.1. Сложение и разложение сил

Если на материальную точку (или тело) одновременно действует несколько сил, то их действие может быть заменено действием одной силы, которая называется *равнодействующей*. Равнодействующую, т. е. ее модуль и направление, находят по правилам сложения векторов.

Сложение сил, приложенных к материальной точке. Равнодействующую $\mathbf{F}$ двух сил ($\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$), приложенных к материальной точке, можно найти по правилу параллелограмма, построенного на данных силах как на сторонах (рис. 4.1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Модуль равнодействующей

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\alpha},$$

где α – угол между силами.

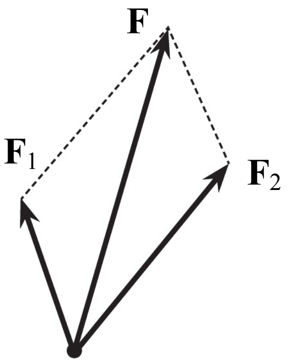

Рис. 4.1

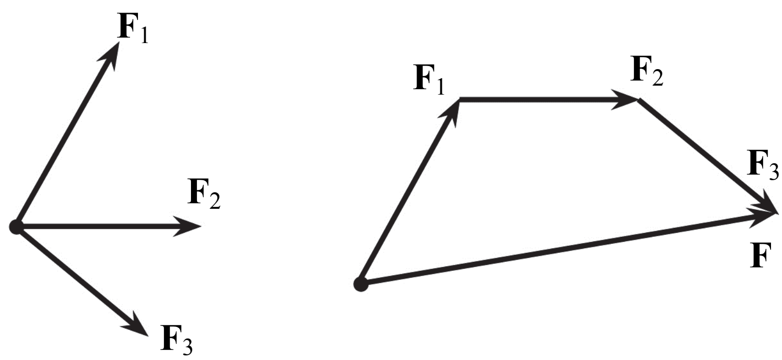

Рис. 4.2

Если к материальной точке приложено несколько сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$,…), то равнодействующую этих сил можно определить последовательным применением правила параллелограмма. При использовании данного правила заданные силы последовательно откладываются, как показано на рис. 4.2. Модуль и направление равнодействующей в этом случае равен модулю и направлению вектора $\mathbf{F}$, замыкающего многоугольник:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3.$$

Сложение сил, приложенных к абсолютно твердому телу. Равнодействующая $\mathbf{F}$ сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_3$, приложенных к абсолютно твердому телу таким образом, что их линии действия пересекаются (рис. 4.3), находят последовательным попарным суммированием сил по правилу переноса точки приложения силы к абсолютно твердому телу вдоль линии действия этой силы.

Пользуясь правилом перенесения сил для абсолютно твердого тела, сначала складывают силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и получают одну равнодействующую $\mathbf{F}_{12}$, для чего их перемещают вдоль линий их действия до точки пересечения и далее складывают по правилу параллелограмма сил, затем таким же образом полученную равнодействующую $\mathbf{F}_{12}$ складывают с третьей силой $\mathbf{F}_3$ и находят одну общую равнодействующую $\mathbf{F}$.

Если силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приложены к абсолютно твердому телу таким образом, что оказываются параллельными (рис. 4.4), то равнодействующая этих сил $\mathbf{F}$ направлена в ту же сторону, равна их сумме ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$) и приложена в точке O, которая делит прямую, соединяющую точки O_1 и O_2 приложения составляющих сил, в отношении, обратном отношению величин этих сил:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Равнодействующая равна

$$F = F_1 + F_2.$$

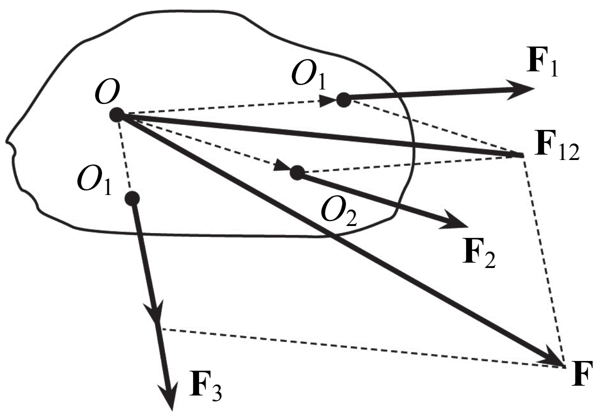

Рис. 4.3

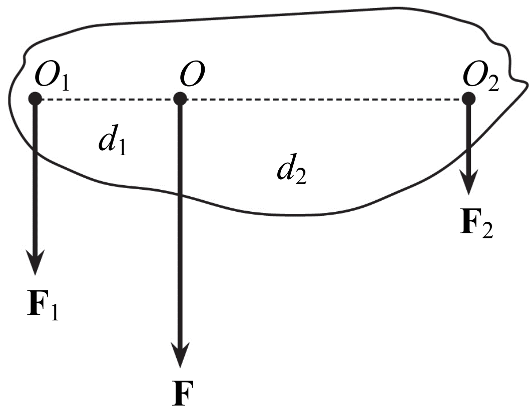

Рис. 4.4

Если силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, приложенные к абсолютно твердому телу, антипараллельны (рис. 4.5), то равнодействующая этих сил $\mathbf{F}$ параллельна им, направлена в сторону большей силы $\mathbf{F}_2$, а ее модуль $F_{12} = F_2 - F_1$. Равнодействующая приложена в точке O, находящейся на продолжении прямой, соединяющей точки приложения складываемых сил, расстояния которой до этих точек обратно пропорциональны данным силам:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

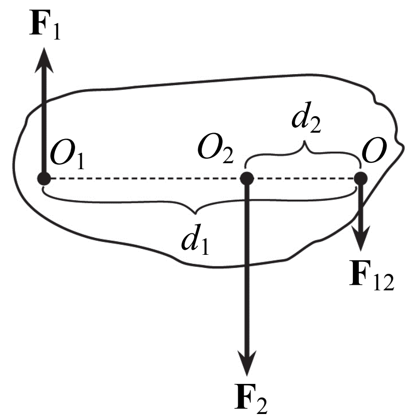

Рис. 4.5

Система двух равных по модулю антипараллельных сил называется *парой сил.* Действие пары сил характеризуется *моментом пары сил*:

$$M = Fd,$$

где F – модуль одной из сил; d – кратчайшее расстояние между линиями действия сил, которое называется *плечом пары.*

Разложение силы на составляющие. Разложение силы $\mathbf{F}$ на составляющие $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ производится по тем же правилам, что и сложение. Однозначное решение такой задачи для силы $\mathbf{F}$, являющейся суммой двух сил ($\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$), возможно, если кроме этой силы заданы линии действия обеих составляющих или одна из составляющих и линия действия другой составляющей.

Если известны сила $\mathbf{F}$ и одна из ее составляющих $\mathbf{F}_1$ (рис. 4.6, *а*), то, совместив начала векторов в точке O и проведя через их концы прямую, находят вторую составляющую $\mathbf{F}_2$ как вектор, направленный от конца составляющей $\mathbf{F}_1$ к концу вектора $\mathbf{F}$ (рис. 4.6, *б*).

Если известны сила $\mathbf{F}$ и линии действия *1 – 1* и *2 – 2* ее составляющих (рис. 4.7, *а*), то, проведя через начало и конец вектора $\mathbf{F}$ прямые $1' - 1'$ и $2' - 2'$, параллельные прямым *1 – 1* и *2 – 2*, путем построения треугольника находят составляющие $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 4.7, *б*).

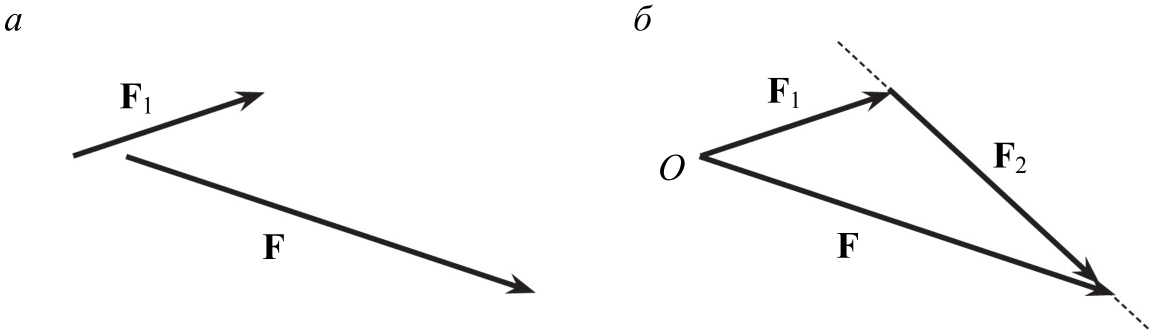

Рис. 4.6

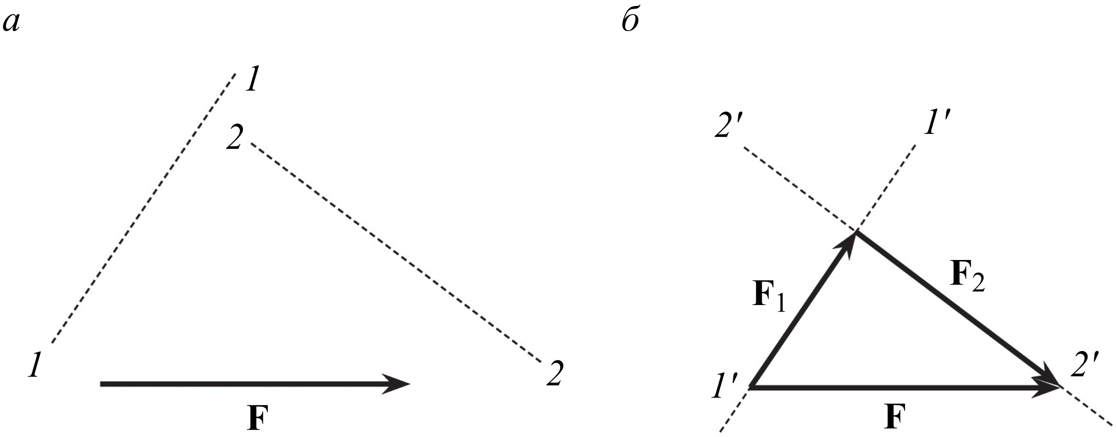

Рис. 4.7

4.2. Момент импульса частицы. Момент силы

Анализ поведения механических систем показывает, что кроме энергии и импульса существует еще одна механическая величина, которая может сохраняться. Эта величина называется *моментом импульса*.

Пусть $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, характеризующий положение рассматриваемой частицы (точка A на рис. 4.8) относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета, а $\mathbf{p}$ – импульс этой частицы в той же системе.

Моментом импульса частицы относительно точки O называется вектор $\mathbf{L}$, равный векторному произведению векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}].$$

Здесь прямоугольные скобки – знак векторного произведения.

По определению векторного произведения вектор $\mathbf{L}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ (т. е. заштрихованной на рис. 4.8 плоскости), его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при вращении его от **r** к **p** (в сторону меньшего угла между ними), а модуль вектора **L** равен

$$L = r \cdot p \sin\alpha = lp,$$

где α – угол между векторами **r** и **p**; $l = r\sin\alpha$ – плечо вектора **p** относительно точки O (длина перпендикуляра, опущенного из точки O на направление импульса).

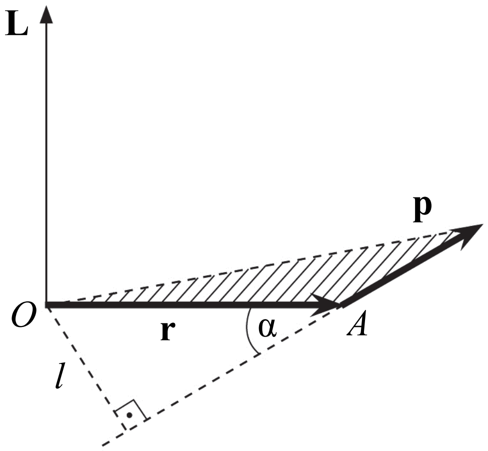

Рис. 4.8

Выясним, от чего зависит изменение вектора **L** в данной системе отсчета. Для этого продифференцируем выражение для **L** по времени. Воспользовавшись свойством производной от произведения двух функций, получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right].$$

Поскольку точка O неподвижна, вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ равен скорости **v** частицы в рассматриваемой системе отсчета, т. е. совпадает по направлению с вектором **p**, поэтому первое слагаемое равно нулю. Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},$$

где **F** – равнодействующая всех сил, приложенных к частице. Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}].$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения, называют *моментом силы* **F** *относительно точки O* (рис. 4.9). Обозначив ее буквой **M**, запишем

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}].$$

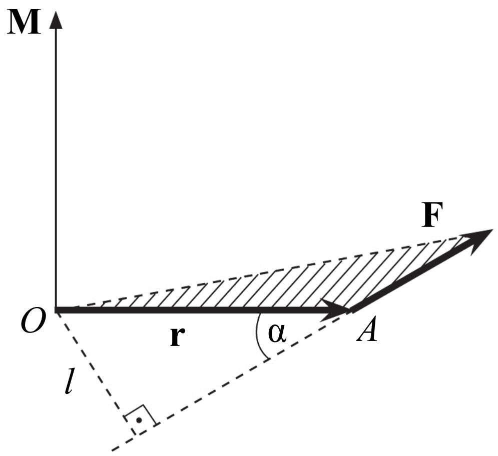

Рис. 4.9

Модуль момента силы **M** равен

$$M = rF\sin\alpha = lF,$$

где α – угол между векторами **r** и **F**, а $l = r\sin\alpha$ – плечо вектора **F** относительно точки *O*.

По определению векторного произведения вектор **M** перпендикулярен векторам **r** и **F** (т. е. заштрихованной на рис. 4.9 плоскости) и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при вращении его от **r** к **F**.

Итак, производная по времени от момента импульса **L** частицы относительно некоторой точки *O* выбранной системы отсчета равна моменту **M** равнодействующей силы **F** относительно той же точки *O*:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Это уравнение называется *уравнением моментов*. Из него, в частности, следует, что если **M** = 0, то **L** = const. Иными словами, если относительно некоторой точки *O* в выбранной системе отсчета момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю в течение некоторого промежутка времени, то относительно данной точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого промежутка.

Уравнение моментов позволяет:

а) найти момент силы **M** относительно точки O в любой момент времени, если известна зависимость от времени момента импульса $\mathbf{L}(t)$ частицы относительно той же точки.

   Решение этого вопроса сводится к нахождению производной по времени от момента импульса $\dfrac{d\mathbf{L}}{dt}$;

б) определить приращение момента импульса частицы относительно точки O за любой промежуток времени, если известна зависимость от времени момента силы $\mathbf{M}(t)$, действующего на эту частицу.

Из уравнения моментов имеем

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt.$$

Проинтегрировав это выражение по времени, найдем приращение вектора **L** за конечный промежуток времени $t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int\limits_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{L}_2} d\mathbf{L} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt.$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения, называют *импульсом момента силы*. Таким образом, приращение момента импульса частицы за любой промежуток времени равно импульсу момента силы за тот же промежуток времени.

4.3. Момент импульса и момент силы относительно оси

Пусть относительно некоторой точки O на произвольной неподвижной оси Z (в интересующей нас системе отсчета) момент импульса частицы равен **L**, а момент силы, действующий на частицу, – **M**.

Моментом импульса относительно оси Z называют проекцию на эту ось вектора **L**, определенного относительно произвольной точки O, лежащей на данной оси (рис. 4.10).

Аналогично вводится понятие *момента силы относительно оси*. Обозначают эти величины соответственно L_Z и M_Z.

Записав уравнение моментов в проекции на ось Z, получим

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z,$$

т. е. производная по времени от момента импульса частицы относительно оси Z равна моменту силы относительно этой оси. В частности, если $M_Z = 0$,

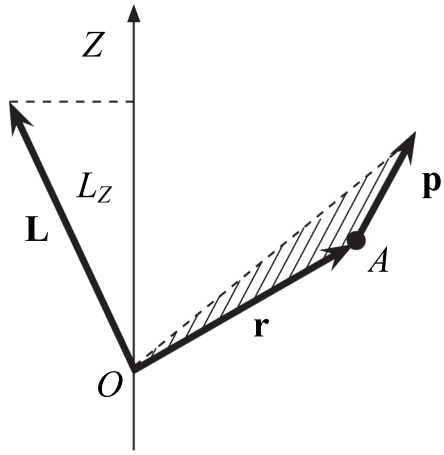

Рис. 4.10

то L_Z = const. Это означает, что если момент силы относительно некоторой неподвижной оси Z равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой оси остается постоянным. При этом сам вектор **L** может и меняться.

4.4. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим произвольную систему частиц. Введем понятие момента импульса данной системы как векторную сумму моментов импульсов ее отдельных частиц:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i,$$

где $\mathbf{L}_i$ – момент импульса i-й частицы, причем все векторы определены относительно одной и той же точки O заданной системы отсчета. Заметим, что момент импульса системы – величина аддитивная: момент импульса системы равен сумме моментов импульсов ее отдельных частей независимо от того, взаимодействуют ли они между собой.

Продифференцировав **L** по времени и воспользовавшись свойством производной от суммы функций, получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{L}_i}{dt}.$$

В предыдущем пункте было показано, что производная $\dfrac{d\mathbf{L}_i}{dt}$ равна моменту всех сил, действующих на частицу. В соответствии с уравнением моментов можно записать

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внутр.}i} + \mathbf{M}_{\text{внеш.}i},$$

где $\mathbf{M}_{\text{внутр.}i}$ – момент внутренних сил; $\mathbf{M}_{\text{внеш.}i}$ – момент внешних сил, действующих на i-ю частицу. Это приводит к соотношению

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{внутр.}i} + \sum \mathbf{M}_{\text{внеш.}i}.$$

В данном выражении первая сумма представляет собой суммарный момент внутренних сил относительно точки O, вторая – суммарный момент внешних сил относительно той же точки.

Суммарный момент внутренних сил относительно любой точки равен нулю. Действительно, *внутренними* называются силы взаимодействия между частицами данной системы. По третьему закону Ньютона эти силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой, т. е. имеют одинаковое плечо. Поэтому моменты сил, действующих между двумя любыми частицами системы, равны по модулю и противоположны по направлению, т. е. уравновешивают друг друга, и, значит, суммарный момент внутренних сил всегда равен нулю.

В результате получаем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внеш.}},$$

где $\mathbf{M}_{\text{внеш.}}$ – суммарный момент внешних сил.

Таким образом, производная момента импульса системы по времени равна суммарному моменту внешних сил. Предполагается, конечно, что оба момента (**L** и **M**) определены относительно одной и той же точки O выбранной системы отсчета. Из полученного уравнения следует, что приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени t составляет

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_{\text{внеш.}} dt,$$

где $\mathbf{M}_{\text{внеш.}}$ – функция от времени суммарного момента внешних сил, т. е. приращение момента импульса системы равно импульсу суммарного момента внешних сил за соответствующий промежуток времени.

Следовательно, момент импульса системы может изменяться под действием суммарного момента только внешних сил. Отсюда непосредственно вытекает *закон сохранения момента импульса*: в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным.

Действительно, если $\frac{d\mathbf{L}}{dt}=0$, то $\mathbf{L}=\text{const}$. При этом моменты импульса отдельных частей или частиц замкнутой системы могут изменяться со временем.

Особый интерес представляют случаи, когда момент импульса сохраняется для незамкнутых систем. Если суммарный момент внешних сил относительно точки O выбранной системы отсчета $\mathbf{M}_{\text{внеш.}} = 0$, то момент импульса системы относительно этой точки сохраняется. Вообще говоря, в незамкнутых системах такой точки может и не быть.

Возможна ситуация, в которой в незамкнутых системах сохраняется не сам момент импульса $\mathbf{L}$, а его проекция L_Z на некоторую неподвижную ось Z. Записывая закон изменения момента импульса в проекции на эту ось, получаем

$$\frac{dL_Z}{dt}=M_{\text{внеш.}Z}.$$

Отсюда следует, что если относительно некоторой неподвижной оси Z сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется. При этом сам вектор $\mathbf{L}$ относительно произвольной точки O на этой оси может изменяться.

Для наглядности рассмотрим два примера.

П р и м е р 1. Частица движется по прямолинейной траектории (рис. 4.11). Модуль момента импульса относительно точки O

$$L=mvl$$

может изменяться только в результате изменения скорости.

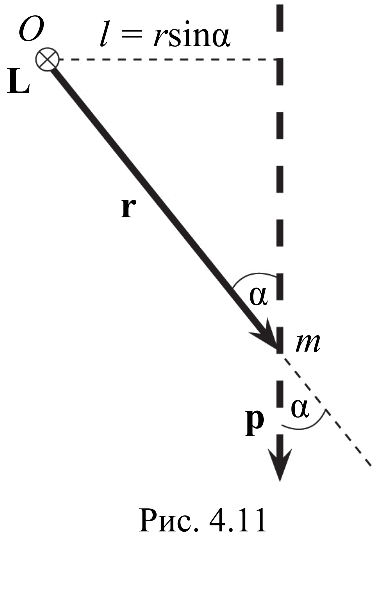

Рис. 4.11

П р и м е р 2. Частица движется по окружности радиусом r. Модуль момента импульса относительно центра окружности равен

$$L = mvr$$

и может изменяться только в результате изменения модуля скорости. Направление вектора **L** остается постоянным, несмотря на непрерывное изменение направления вектора **p** (рис. 4.12).

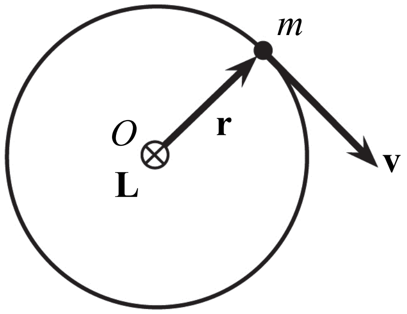

Рис. 4.12

В основе закона сохранения момента импульса лежит изотропия пространства, т. е. одинаковость свойств пространства по всем направлениям. Поворот замкнутой системы частиц без изменения их взаимного расположения и относительных скоростей не изменяет механических свойств системы. Движение частиц относительно друг друга после поворота будет таким же, каким оно было бы, если бы поворот не был осуществлен.

4.5. Момент инерции

Найдем выражение момента импульса твердого тела **L** относительно оси вращения Z. Спроектировав **L** на эту ось, получим

$$\mathrm{L}_Z = \sum \mathrm{L}_{Zi},$$

где L_{Zi} – момент импульса i-й частицы твердого тела относительно оси Z.

Момент импульса i-й частицы относительно точки O, лежащей на оси вращения, по определению равен

$$\mathbf{L}_i = m_i\left[\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i\right],$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение частицы массой m_i относительно точки O; $\mathbf{v}_i$ – скорость этой частицы (рис. 4.13).

Из рис. 4.13 видно, что

$$L_{Zi} = L_i \cos\varphi_i.$$

Поскольку векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{v}_i$ взаимно перпендикулярны (это легко доказать, пользуясь соображением, что частица описывает окружность в плоскости, перпендикулярной оси Z), имеем

$$L_i = m_i r_i v_i.$$

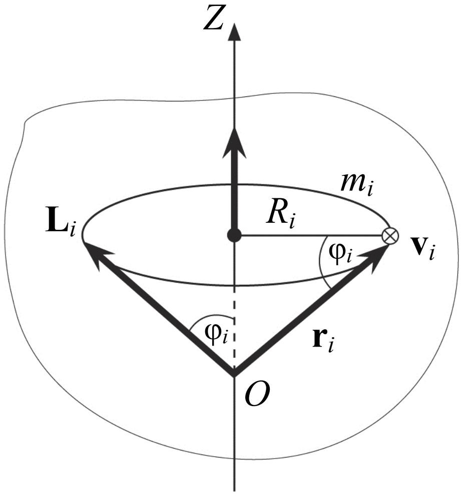

Рис. 4.13

Тогда

$$L_{Zi} = m_i r_i v_i \cos\varphi_i = m_i R_i v_i = m_i \omega_Z R_i^2,$$

где R_i – радиус окружности, которую описывает частица; ω_Z – угловая скорость, с которой твердое тело вращается вокруг оси Z (а значит, и частица).

С учетом этих выражений получаем

$$L_Z = \sum L_{Zi} = \sum m_i \omega_Z R_i^2 = \omega_Z \sum m_i R_i^2 = \left(\sum m_i R_i^2\right)\omega_Z.$$

Заметим, что полученное выражение момента импульса твердого тела не зависит от положения на оси вращения точки O, относительно которой определяется момент импульса тела $\mathbf{L}$.

Обозначим величину, стоящую в скобках, буквой I, тогда

$$L_Z = I\omega_Z.$$

Скалярная величина

$$I = \sum m_i R_i^2,$$

равная сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний до некоторой оси, называется *моментом инерции тела относительно оси*. Таким образом, момент инерции тела зависит от распределения масс относительно оси. Из определения также следует, что момент инерции – величина аддитивная, т. е. момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции частей тела относительно той же оси.

Выражение для I является приближенным, причем тем более точным, чем меньше элементарные массы m_i. Следовательно, задача нахождения момента инерции в общем случае сводится к интегрированию:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV,$$

где $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ – плотность тела; dm – элементарная масса.

Под dV следует понимать физически бесконечно малый объем, т. е. такой, который, с одной стороны, достаточно мал для того, чтобы макроскопические свойства вещества можно было считать в его пределах одинаковыми, а с другой, достаточно велик для того, чтобы не могла проявиться дискретность (прерывистость) вещества. Интеграл следует брать по всему объему тела.

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел относительно оси Z_c, проходящей через центр масс тела, приведены в таблице.

Твердое тело	Ось Z_c	Момент инерции I_c
Тонкий стержень длиной l	Перпендикулярна стержню и проходит через его центр	$\frac{1}{12}ml^2$
Сплошной цилиндр радиусом R (диск)	Совпадает с осью цилиндра (диска)	$\frac{1}{2}mR^2$
Тонкий диск радиусом R	Совпадает с диаметром диска	$\frac{1}{4}mR^2$
Шар радиусом R	Проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Зная момент инерции I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела, можно определить момент инерции I относительно любой параллельной ей оси, отстоящей от нее на расстояние a:

$$I = I_c + ma^2,$$

где m – масса тела. Это равенство выражает собой теорему Штейнера.

4.6. Основное уравнение динамики вращательного движения

Для момента импульса системы частиц относительно некоторой оси Z справедлива формула

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z,$$

где M_Z – суммарный момент внешних сил относительно оси вращения.

С учетом того, что $L_Z = I\omega_Z$, запишем

$$\frac{d(I\omega_Z)}{dt} = M_Z.$$

Принимая во внимание, что I – величина постоянная, а $\frac{d\omega_Z}{dt} = \beta_Z$ – угловое ускорение, приходим к выражению

$$I\beta_Z = M_Z.$$

Это уравнение называется *основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела* относительно неподвижной оси. Оно аналогично уравнению второго закона Ньютона

$$ma_Z = \sum F_Z.$$

Роль массы в этом уравнении играет момент инерции, роль линейного ускорения – угловое ускорение, роль результирующей силы – суммарный момент внешних сил.

Решение этого уравнения – основная задача динамики вращения твердого тела. Зная момент инерции I тела относительно оси вращения и зависимость от времени его угла поворота $\varphi(t)$, можно найти суммарный момент M_Z всех внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения. И наоборот, зная момент инерции I тела относительно оси вращения, действующий на тело суммарный момент M_Z всех внешних сил относительно оси и начальные условия (угловую скорость ω_{0Z} и угол поворота тела φ_0 в начальный момент времени), можно найти зависимость угла поворота от времени $\varphi(t)$.

В частном случае, когда сила $\mathbf{F}$, приложенная к телу, перпендикулярна оси вращения Z, момент этой силы относительно оси равен

$$M_Z = \pm Fd,$$

где F – модуль силы; d – ее плечо относительно оси вращения, которое представляет собой кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы (рис. 4.14).

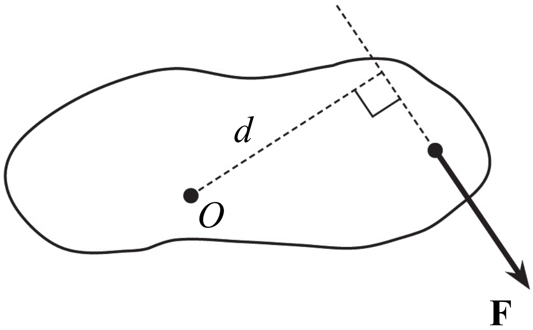

Рис. 4.14

Если на тело, имеющее ось вращения, действует одновременно несколько сил, перпендикулярных оси, то суммарный момент этих сил относительно нее равен алгебраической сумме моментов этих сил относительно данной оси:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i,$$

где M_i – моменты сил относительно данной оси. При этом моменты сил, вращающие тело против часовой стрелки, принято считать положительными, а по часовой – отрицательными.

4.7. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Когда тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω, элементарная масса m_i, отстоящая от оси вращения на расстояние R_i, обладает скоростью

$$v_i = \omega R_i.$$

Следовательно, ее кинетическая энергия равна

$$W_{\text{к}i} = \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Так как кинетическая энергия – величина аддитивная, для всего тела

$$W_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{N} W_{\text{к}i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \right) \frac{\omega^2}{2}.$$

Или, учитывая определение момента инерции,

$$W_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – его угловая скорость.

Эта формула аналогична выражению кинетической энергии материальной точки и поступательно движущегося тела. Роль массы играет момент инерции, а роль линейной скорости – угловая скорость.

Пусть тело массой m совершает плоское движение, т. е. такое, при котором все его точки движутся в параллельных плоскостях. Любое плоское движение можно представить как совокупность поступательного движения и вращения, причем это деление на поступательное и вращательное движение можно осуществить множеством способов. Наиболее удобным оказывается деление плоского движения на поступательное, происходящее со скоростью центра инерции v_c, и вращение вокруг оси, проходящей через этот центр. В таком случае кинетическая энергия тела равна

$$W_{\text{к}} = W_{\text{к.пост.}} + W_{\text{к.вращ.}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2},$$

где первое слагаемое – кинетическая энергия поступательного движения тела, а второе – кинетическая энергия его вращательного движения.

5. Механика жидкостей и газов

5.1. Давление. Закон Паскаля. Гидростатическое давление

Гидроаэродинамикой называется раздел физики, который изучает законы равновесия и движения жидкостей и газов, а также их механические взаимодействия с твердыми телами.

Раздел гидроаэродинамики, изучающий условия и закономерности равновесия жидкостей и газов, испытывающих воздействие внешних сил, а также условия равновесия твердых тел, находящихся в жидкостях и газах, называется *гидроаэростатикой*.

Взаимодействия между слоями жидкости и газа, а также жидкостей и газов с твердыми телами осуществляются не в отдельных точках, а по поверхности их соприкосновения. Возникающие при этом силы упругости действуют перпендикулярно к рассматриваемым поверхностям, и их действие принято характеризовать давлением.

Давлением называется скалярная физическая величина, равная отношению нормальной составляющей силы F_n, равномерно распределенной по поверхности, к площади этой поверхности S:

$$p = \frac{F_n}{S},$$

где $F_n = F\cos\alpha$, а α – угол между направлением силы и перпендикуляром к поверхности, на которую действует эта сила. Давление в системе СИ измеряется в паскалях (Па).

Так как сила, действующая на поверхность тела, находящегося в покоящейся жидкости или газе, всегда направлена перпендикулярно к этой поверхности и не зависит от ее ориентации, для жидкости можно записать

$$p = \frac{F}{S}.$$

Если на твердое тело действует внешняя сила, то давление, создаваемое этой силой, передается в направлении действия силы. В отличие от твердых тел частицы и отдельные слои жидкости и газа могут свободно перемещаться относительно друг друга по всем направлениям. Это обстоятельство приводит к *закону Паскаля*: внешнее давление, производимое силами на жидкость или газ, заключенные в замкнутый сосуд, передается без изменения по всем направлениям в каждую точку жидкости или газа.

Давление, оказываемое жидкостью или газом на глубине h под свободной поверхностью вследствие действия сил тяжести, называется *гид-*

ростатическим давлением. Оно зависит от плотности жидкости ρ и глубины h:

$$p = \rho g h.$$

Если на свободную поверхность жидкости действует внешнее давление p_0 (например, атмосферное давление или давление прилегающего к поверхности жидкости поршня), то давление p на произвольной глубине h будет равно

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Давление, оказываемое атмосферным воздухом, называется *атмосферным давлением.* Это давление обусловлено силой тяжести, действующей на молекулы, входящие в состав воздуха. Атмосферное давление, равное $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па (или $p_0 = 760$ мм рт. ст.), называется *нормальным атмосферным давлением.* Атмосферное давление уменьшается с увеличением высоты над поверхностью Земли.

5.2. Сообщающиеся сосуды

Поведение жидкости в сообщающихся сосудах определяется гидростатическим давлением, оказываемым на дно сосудов, и внешним давлением, действующим на свободные поверхности жидкости в этих сосудах.

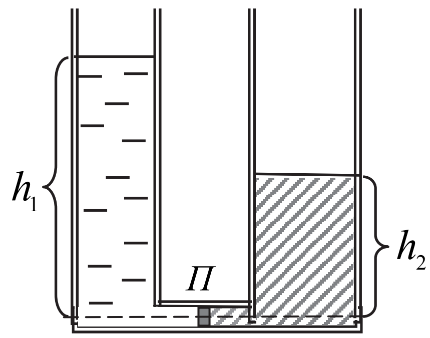

Рис. 5.1

Если в сообщающихся сосудах находятся две разнородные жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2, разделенные свободно перемещающимся поршнем *П* (рис. 5.1), препятствующим их перемешиванию, то поршень будет находиться в равновесии при условии равенства давлений, оказываемых на него со стороны жидкости и внешних сил:

$$p_{01} + \rho_1 g h_1 = p_{02} + \rho_2 g h_2,$$

где p_{01} и p_{02} – внешнее давление, оказываемое на свободные поверхности жидкостей; h_1 и h_2 – высота столбов жидкости в сообщающихся сосудах. Если сосуды открыты, то внешнее давление p_{01} и p_{02} равно друг другу и атмосферному давлению p_0. Следовательно,

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2.$$

Это равенство выражает закон сообщающихся сосудов:

а) высота столбов разнородных жидкостей в открытых сообщающихся сосудах обратно пропорциональна плотностям этих жидкостей:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1};$$

б) свободные поверхности столбов однородной жидкости в сообщающихся сосудах ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) устанавливаются на одном и том же уровне: $h_1 = h_2$.

5.3. Гидравлический пресс

Гидравлический пресс представляет собой устройство, состоящее из двух сообщающихся сосудов, заполненных однородной жидкостью и закрытых поршнями с разной площадью (S_1 и S_2) поверхностей (рис. 5.2).

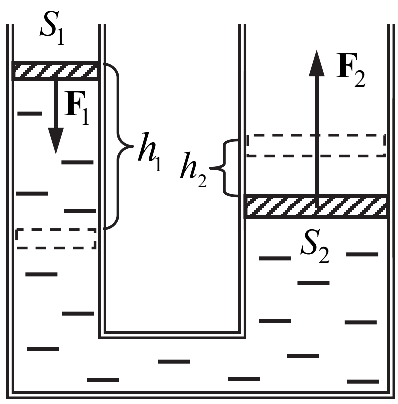

Рис. 5.2

Если на малый поршень действует сила $\mathbf{F}_1$, то она создает давление $p = \dfrac{F_1}{S_1}$, которое в соответствии с законом Паскаля передается во все точки жидкости. Вследствие этого на большой поршень со стороны жидкости действует сила $\mathbf{F}_2$, равная

$$F_2 = pS_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1},$$

где S_2 – площадь большого поршня. Отсюда видно, что

$$F_2 > F_1$$

в $\frac{S_2}{S_1}$ раз, т. е. гидравлический пресс дает выигрыш в силе во столько раз, во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

При перемещении малый поршень опускается вниз, проходя путь, равный h_1, а большой поршень при этом поднимается вверх на высоту h_2.

Вследствие несжимаемости жидкости ее объем, вытесненный из первого сосуда, равен объему жидкости, поступившей во второй сосуд:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2.$$

Следовательно,

$$h_2 = h_1 \frac{S_1}{S_2}.$$

Так как $S_1 < S_2$, имеем $h_2 < h_1$. Это означает, что пресс дает проигрыш в расстоянии.

Работа, совершаемая силой F_1, составляет $A_1 = F_1 h_1$, а работа, совершаемая силой F_2, равна $A_2 = F_2 h_2$, т. е. $A_1 = A_2$. В реальных гидравлических прессах $A_2 < A_1$, так как часть энергии расходуется на работу против сил трения между жидкостью и стенками сосудов.

Эффективность работы пресса характеризуется *коэффициентом полезного действия*

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100\,\% = \frac{F_2 h_2}{F_1 h_1}.$$

5.4. Закон Архимеда для жидкостей и газов. Условия плавания тел

На поверхность твердого тела, погруженного в жидкость (или газ), действуют силы давления. Так как давление увеличивается с глубиной его погружения, сила давления, действующая на нижнюю поверхность тела и направленная вверх, оказывается больше, чем сила, действующая на верхнюю его поверхность и направленная вниз. Поэтому результирующая сил давления должна быть направлена вверх, т. е. на тело, погруженное полностью или частично в жидкость (в газ), должна действовать *выталкивающая сила*, которая определяется *законом Архимеда*: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная силе тяжести жидкости или газа, вытесненных телом, приложенная в центре тяжести вытесненного объема жидкости или газа и направленная вертикально вверх.

Пусть тело, погруженное в жидкость, имеет форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.3) высотой h, верхняя и нижняя грани которого имеют площадь S.

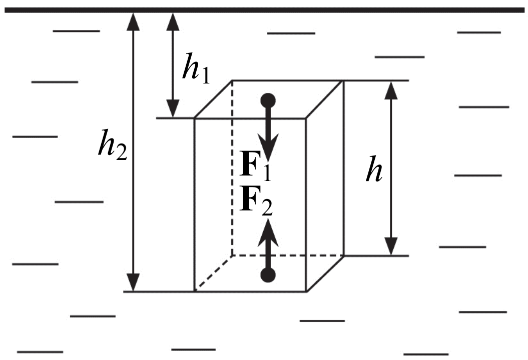

Рис. 5.3

Силы, с которыми жидкость действует на противоположные боковые грани, уравновешиваются.

На верхнюю грань действует направленная вниз сила $\mathbf{F}_1$, равная $F_1 = p_1 S$ (p_1 – давление жидкости на глубине h_1, на которой находится эта грань).

На нижнюю грань действует направленная вверх сила $\mathbf{F}_2$, равная $F_2 = p_2 S$ (p_2 – давление жидкости на глубине h_2).

Если плотность жидкости равна $\rho_ж$, то

$$p_1 = \rho_ж g h_1, \; p_2 = \rho_ж g h_2,$$

и, следовательно, силы, действующие на верхнюю и нижнюю грани, равны соответственно

$$F_1 = \rho_ж g h_1 S, \ F_2 = \rho_ж g h_2 S.$$

Результирующая сила $\mathbf{F}_А = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, а ее значение $F_А = F_2 - F_1$, так как $F_2 > F_1$ вследствие того, что $h_2 > h_1$. Таким образом, приходим к выводу: на параллелепипед со стороны жидкости действует направленная вертикально вверх выталкивающая сила

$$F_А = F_2 - F_1 = \rho_ж g h_2 S - \rho_ж g h_1 S = \rho_ж g (h_2 - h_1) S = \rho_ж g h S,$$

где h – высота параллелепипеда.

Так как $hS = V$ представляет собой объем параллелепипеда, выталкивающая сила

$$F_А = \rho_ж g V.$$

Если тело погружено в жидкость не полностью, то в формуле силы Архимеда V – объем погруженной части тела. Если учесть, что $\rho_ж V = m_ж$, где $m_ж$ – масса вытесненной жидкости, то формулу силы Архимеда можно записать в следующем виде:

$$F_А = m_ж g,$$

т. е. архимедова сила равна по силе тяжести, действующей на вытесненную жидкость.

Линия действия выталкивающей силы проходит через центр масс вытесненного объема жидкости и не зависит от того, где расположен центр масс погруженного тела.

На тело, погруженное полностью в жидкость, действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и выталкивающая сила $\mathbf{F}_А$. Если $F_А = mg$, то тело находится в состоянии безразличного равновесия – плавает внутри жидкости, если $F_А < mg$, то тело тонет, если $F_А > mg$, то оно всплывает.

Так как $F_А = \rho_ж g V$, а $mg = \rho_т g V$, условие плавания однородного сплошного тела в жидкости можно записать в виде

$$\rho_ж \geq \rho_т,$$

где $\rho_ж$ и $\rho_т$ – плотность жидкости и тела соответственно.

Приведенные рассуждения справедливы также и в том случае, если тело погружено в газ.

6. Основы специальной теории относительности

6.1. Постулаты специальной теории относительности

Специальная теория относительности изучает движение тел со скоростями, близкими к скорости света в вакууме. В основе этой теории лежат два постулата:

а) *первый постулат – принцип относительности*: все физические явления (механические, электромагнитные и т. д.) в инерциальных системах отсчета при одних и тех же условиях протекают одинаково;

б) *второй постулат – принцип постоянства скорости света в вакууме*: во всех инерциальных системах отсчета скорость света в вакууме имеет одно и то же значение и не зависит от скорости движения источника света.

Первый постулат является обобщением механического принципа относительности на все физические явления, включая электромагнитные. В соответствии с этим все законы электродинамики и оптики справедливы во всех без исключения инерциальных системах отсчета;

Второй постулат находится в явном противоречии с законом сложения скоростей классической механики. Однако большое число опытов, в которых были сделаны попытки найти зависимость скорости света c от характера движения источника света, показали, что эта скорость не зависит от скорости движения источника света в инерциальной системе отсчета и остается постоянной при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

6.2. Преобразования Лоренца

При переходе от одной инерциальной системы к другой преобразования координат тела в классической механике, описывающей движение тел со скоростями $v \ll c$, осуществляются с помощью преобразований Галилея. В простейшем случае, когда система отсчета K' движется относительно неподвижной системы K вдоль оси OX со скоростью $v_x = v$, преобразования Галилея связывают между собой координаты x', y', z' и x, y, z тела в обеих системах следующим образом:

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z'.$$

В специальной теории относительности эта же связь устанавливается с помощью преобразований Лоренца, которые имеют следующий вид:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ y=y',\ z=z',\ t=\frac{t'+\left(v/c^2\right)x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\frac{t-\left(v/c^2\right)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

В этих преобразованиях x, y, z, t – координаты и время в неподвижной системе отсчета K; x', y', z', t' – координаты и время в системе отсчета K', движущейся со скоростью v относительно неподвижной системы вдоль оси OX.

В случае $v/c \ll 1$, т. е. при скоростях $v \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

6.3. Относительность длин

Из преобразований Лоренца следует, что длина тела зависит от скорости его движения. Пусть, например, стержень, находящийся в системе отсчета K', движется вместе с этой системой относительно системы K. Длина стержня в системе K', относительно которой стержень покоится,

$$l_0=x_2'-x_1',$$

где x_2' и x_1' – координаты концов стержня. Эта длина называется *собственной длиной*.

Длина стержня в системе отсчета K

$$l=x_2-x_1,$$

где x_2 и x_1 – координаты точек концов стержня в один и тот же момент времени по часам в системе K.

Из преобразований Лоренца следует, что

$$x_2-x_1=\left(x_2'-x_1'\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

т. е.

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Таким образом, линейные размеры тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшаются в продольном направлении в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз. Это уменьшение называется *лоренцевым сокращением длины*. Оно наблюдается при скоростях v, близких к скорости света c.

6.4. Относительность длительности промежутков времени

Длительность промежутков времени, т. е. время, прошедшее между двумя последовательными событиями, зависит от системы отсчета, в которой эти события происходят.

Из преобразований Лоренца следует, что промежутки времени τ_0 и τ между двумя событиями, измеренные по часам в неподвижной $K'(\tau_0)$ и движущейся $K(\tau)$ системах отсчета, связаны между собой соотношением

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Время τ_0, измеренное в системе отсчета, в которой тело находится в состоянии покоя, называется *собственным временем*.

Из этого соотношения следует, что часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее неподвижных часов и показывают промежуток времени, меньший по сравнению с собственным временем. Этот эффект называется *релятивистским замедлением времени* и становится заметным при скоростях v, близких к скорости света c. Эффект замедления времени подтверждается многочисленными экспериментами с элементарными частицами.

6.5. Связь между массой и энергией. Релятивистский импульс

Связь между массой тела m и его полной энергией W устанавливается *законом взаимосвязи массы и энергии*:

$$W = mc^2,$$

где c – скорость света в вакууме.

Полная энергия W_0, которой тело обладает в состоянии покоя, называется *собственной энергией* тела, или *энергией покоя.* Эта энергия является внутренней энергией тела.

Полная энергия W тела, движущегося со скоростью v, имеет вид

$$W = W_0 + W_к,$$

где $W_к$ – кинетическая энергия тела

$$W_к = W - W_0 = (m - m_0)c^2 = mc^2\left(1 - \frac{m_0}{m}\right),$$

где m_0 – масса покоя; m – релятивистская масса, т. е. масса тела, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Импульс тела $\mathbf{p}$ в специальной теории относительности, так же как и в классической механике, определяется соотношением

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

7. Механические колебания

7.1. Основные понятия и определения

Колебательным движением, или *колебаниями*, называется движение или процесс, обладающий той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебательное движение является важнейшим видом механического движения. Оно широко распространено в природе и технике. Колебания разнообразны по физической природе: механические колебания тела, подвешенного на пружине, качания маятников, колебания струн, вибрации фундаментов зданий, колебания вагонов на рессорах, электромагнитные колебания в колебательном контуре. Тем не менее разнообразные по природе колебания могут иметь общие закономерности и описываться однотипными математическими уравнениями.

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

Периодом колебания T называется наименьший промежуток времени, по истечении которого значения всех величин, характеризующих колебательное движение, повторяются. За это время совершается одно полное колебание.

Частотой периодических колебаний ν называется число полных колебаний за единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Циклической, или *круговой*, *частотой периодических колебаний* ω называется число полных колебаний, которые совершаются за 2π единиц времени:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Свободными, или *собственными*, называются колебания, совершаемые системой, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия. Например, свободными являются колебания тела, подвешенного на пружине и выведенного однократно из положения равновесия, колебания маятника, однажды отклоненного на некоторый угол α. При свободных колебаниях в системе всегда действуют силы, стремящиеся возвратить ее в положение равновесия. Незатухающие свободные колебания в системе возможны лишь в отсутствие трения и других сил сопротивления. Очевидно, что это идеализированный случай. Реальные свободные колебания являются затухающими.

7.2. Гармонические колебания

Простейшим частным случаем периодических колебаний являются *гармонические*, т. е. такие, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам:

1) колебания в природе и технике часто имеют характер, близкий к гармоническому;
2) периодические колебания иной формы (с иной зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Примером таких колебаний может служить изменение проекции радиус-вектора **A**, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_0 (рис. 7.1). При этом координата x конца радиус-вектора изменяется по гармоническому закону:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A, ω_0, φ_0 – постоянные величины. Координату x в данный момент времени называют *смещением*.

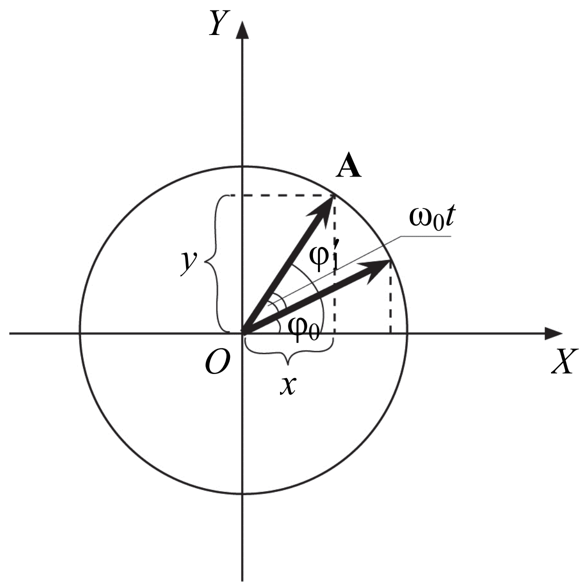

Рис. 7.1

Максимальное значение A колеблющейся величины называется *амплитудой*. Выражение $\omega_0 t + \varphi_0$ называется *фазой* колебания и определяет значение величины x в данный момент времени. Величина φ_0 определяет значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется *начальной фазой*. Смысл фазы в том, что она отражает состояние колебательного процесса. Зная фазу φ, можно по уравнению $x = A\cos\varphi$ найти значение колеблющейся величины, а также характер ее изменения. Например, если фаза $\varphi = \pi / 3$, то это означает, что $x = A/2$, и в данный момент величина x убывает. Таким образом, значения колеблющейся величины и скорости ее изменения вполне определяют состояние колебательного процесса.

7.3. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

Последовательно продифференцировав уравнение гармонических колебаний по времени, получим выражения скорости v и ускорения a материальной точки вдоль оси X:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi),$$

где $v_0 = A\omega_0$ и $a_0 = A\omega_0^2$.

Из приведенных выражений видно, что скорость частицы v также изменяется по гармоническому закону, причем амплитуда скорости равна $A\omega_0$. Сравнивая выражение скорости с выражением смещения x, находим, что скорость опережает координату x в данный момент времени по фазе на $\pi / 2$ (рис. 7.2).

Выражение для a также позволяет сделать вывод, что ускорение изменяется по гармоническому закону с амплитудой $A\omega_0^2$. Отсюда же следует, что ускорение и смещение находятся в противофазе. Это означает, что когда смещение достигает наибольшего положительного значения, ускорение достигает наибольшего отрицательного значения, и наоборот (рис. 7.2).

Из сказанного следует, что если материальная точка совершает гармонические колебания, то справедливо уравнение

$$a = -\omega_0^2 x.$$

Математически можно показать, что эта связь ускорения и смещения является необходимым и достаточным условием того, чтобы тело совершало гармонические колебания около положения равновесия. Следовательно, если при анализе поставленной задачи будет найдено, что $a = -Cx$, где C – положительная константа, то тело будет совершать гармонические колебания около положения равновесия с циклической частотой $\omega = \sqrt{C}$.

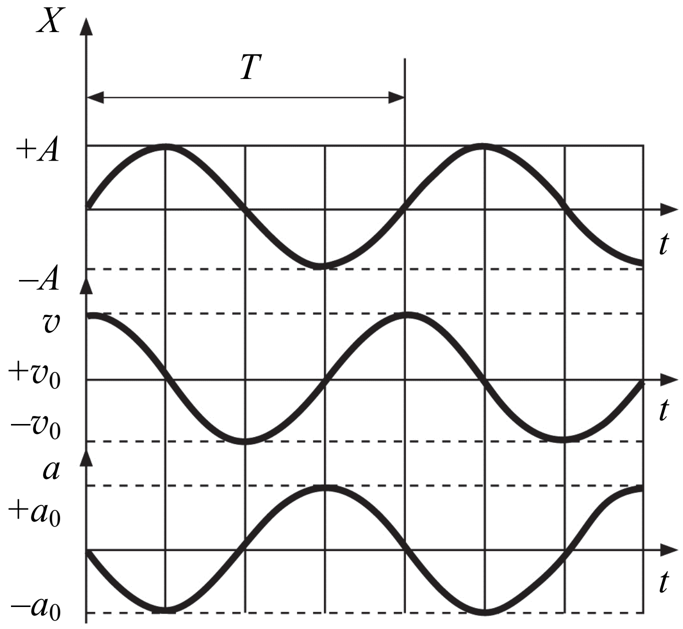

Рис. 7.2

По второму закону Ньютона

$$ma_X = \mathrm{F}_{\text{рез.}X},$$

где $\mathrm{F}_{\text{рез.}X}$ – проекция результирующей всех сил, действующих на тело, на ось X, вдоль которой совершаются колебания. В результате получаем

$$F_{\text{рез.}X} = -m\omega_0^2 x.$$

Из этого уравнения следует, что равнодействующая всех сил, действующих на тело, совершающее гармонические колебания, прямо пропорциональна смещению и направлена в сторону, противоположную ему. Силы, пропорциональные смещению и направленные в противоположную сторону, т. е. удовлетворяющие условию $F_X = -kx$, но имеющие иную природу, чем упругие, называются *квазиупругими*. Гармонические колебания совершаются под действием упругих и квазиупругих сил.

7.4. Гармонические колебания груза на пружине

Рассмотрим в качестве примера систему, состоящую из шарика массой m, подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с m. В положении равновесия сила тяжести уравновешивается упругой силой (рис. 7.3)

$$mg = k\Delta l_0,$$

где Δl_0 – удлинение пружины.

Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой x, причем ось X направим по вертикали вниз, а точку O (начало отсчета) совместим с положением его равновесия.

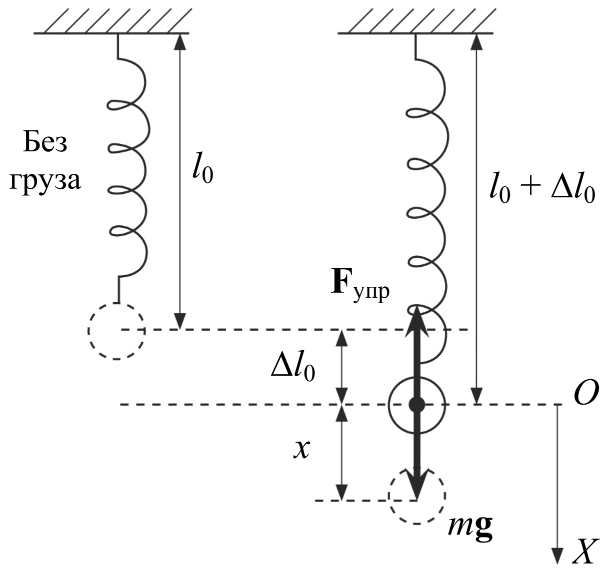

Рис. 7.3

Если сместить шарик в положение, характеризуемое координатой x, то удлинение пружины станет равным $\Delta l_0 + x$, и проекция результирующей силы на ось X примет значение

$$F = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

Учитывая условие $mg = k\Delta l_0$, получаем

$$F = -kx,$$

т. е. результирующая силы тяжести и упругой силы имеет характер квазиупругой силы.

С учетом этого уравнение второго закона Ньютона для шарика примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\frac{d^2x}{dt^2}$ означает вторую производную смещения по времени; $\omega_0^2 = k/m$ – собственная частота колебаний.

Таким образом, в отсутствие сил трения движение под действием квазиупругой силы описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

7.5. Превращения энергии при гармонических колебаниях

Если колебания тела происходят по закону

$$x = a\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

то кинетическая энергия этого тела

$$W_к = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2},$$

а потенциальная энергия

$$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2},$$

при этом за нулевой уровень отсчета принимается положение равновесия $x = 0$.

Сложив кинетическую и потенциальную энергию с учетом соотношения $m\omega_0^2 = k$, получим формулу полной энергии гармонического колебания

$$W = W_к + W_п = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{x\max}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

Из нее следует, что полная энергия гармонического колебания является величиной постоянной.

Действительно, поскольку квазиупругая сила является консервативной, то в отсутствие сил трения полная механическая энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия E состоит только из потенциальной, а при прохождении системы через положение равновесия она состоит только из кинетической энергии.

Из приведенных формул следует, что

$$A = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2W}{m}},$$

т. е. амплитуда гармонических колебаний определяется энергией, сообщенной системе.

Используя тригонометрическую форму записи формул, можно показать, что $W_п$ и $W_к$ изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, в два раза превышающей частоту гармонического колебания.

7.6. Физический и математический маятники

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс.

На рис. 7.4 изображено произвольное тело массой m, колеблющееся вокруг оси O (ось O перпендикулярна плоскости чертежа), C – центр масс, l – плечо силы тяжести.

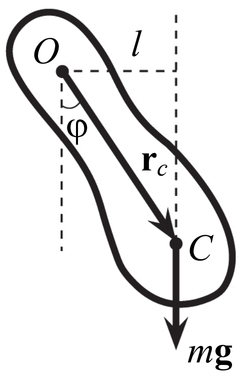

Рис. 7.4

Пусть ось вращения (качания) маятника является осью Z декартовой системы координат с началом в точке O. Свяжем положительное направление этой оси с положительным направлением отсчета угла поворота φ правилом правого винта. (Примем направление отсчета угла φ против часовой стрелки за положительное.) Тогда ось *Z* будет направлена «к наблюдателю».

Если силами трения в подвесе маятника можно пренебречь, то момент относительно оси *Z* создает только его сила тяжести $m\mathbf{g}$. Под действием этой силы при отклонении маятника на угол φ в положительном направлении возникает вращательный момент этой силы относительно точки *O*

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{r}_c,\, m\mathbf{g}\right],$$

направленный в противоположную оси *Z* сторону. Тогда проекция вектора **M** на эту ось

$$M_Z = -M = -r_c mg \sin\varphi = -mgl.$$

Вместе с тем согласно основному уравнению динамики вращения твердого тела

$$I\frac{d\omega_Z}{dt} = -mgr_c \sin\varphi.$$

Так как $\omega_Z = d\varphi / dt$, это уравнение можно переписать в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr_c \sin\varphi,$$

где *I* – момент инерции маятника относительно оси качания *Z*.

При малых колебаниях маятника (угол φ мал) $\sin\varphi \approx \varphi$, и уравнение принимает вид дифференциального уравнения гармонических колебаний,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgr_c}{I}\varphi = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\omega_0 = \sqrt{mgr_c / I}$ – собственная частота колебаний физического маятника, зависящая, как видно из приведенной формулы, от массы, момента инерции тела и расстояния между осью вращения и центром масс. Так как $\omega_0 = 2\pi/T$, период колебаний физического маятника *T* определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_c}}.$$

Математическим маятником называется материальная точка (частица), подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити (длиной l) и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Математический маятник представляет собой предельный случай физического маятника, вся масса m которого сосредоточена в его центре масс, так что $r_c = l$, $I = ml^2$. Период колебаний математического маятника зависит только от его длины и ускорения свободного падения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Возвращающей силой в этом случае является проекция силы тяжести на направление движения $(mg\sin\varphi)$. Для постоянства коэффициента k, а следовательно, и частоты колебаний ω_0, необходимо постоянство длины нити l. Между тем составляющая силы тяжести $mg\cos\varphi$, действующая вдоль нити, может вызывать ее удлинение, которое будет минимальным в крайних положениях и максимальным при прохождении тела через положение равновесия. Поэтому для того чтобы колебания маятника были гармоническими, кроме малости углов отклонения необходимо иметь еще и условие нерастяжимости нити.

7.7. Затухающие колебания

Во всех реальных случаях помимо квазиупругой силы на тело действует сила сопротивления, которая обычно считается пропорциональной скорости:

$$\mathbf{F}_{\text{сопр.}} = -r\mathbf{v},$$

где r – коэффициент сопротивления.

Уравнение второго закона Ньютона при наличии силы сопротивления имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}x,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где ω_0 – частота собственных колебаний; $\beta = r/(2m)$ – коэффициент затухания.

Решение этого дифференциального уравнения при не слишком сильном затухании имеет вид

$$x = A_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Отсюда видно, что амплитуда колебаний не является постоянной величиной, а уменьшается со временем по экспоненциальному закону:

$$A(t) = A_0 \exp(-\beta t),$$

где A_0 – начальная амплитуда колебаний. Следовательно, колебания при наличии силы сопротивления не являются гармоническими. Такие колебания называют *затухающими*.

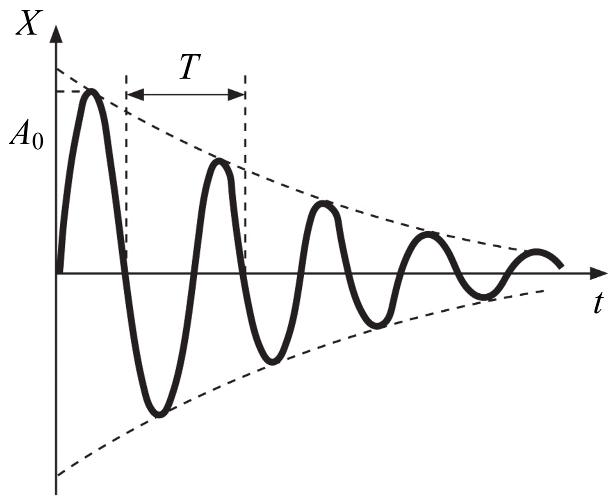

Рис. 7.5

Постоянная величина ω называется *круговой частотой затухающих колебаний.* Величина ω_0 является круговой частотой колебаний в отсутствие сопротивления среды ($\beta = 0$) и называется *собственной частотой колебаний.*

Вследствие работы силы сопротивления механическая энергия в процессе колебаний непрерывно уменьшается, переходя во внутреннюю энергию. Соответственно амплитуда колебаний уменьшается, и колебания постепенно затухают (рис. 7.5). Однако смещение x принимает нулевые значения через равные промежутки времени

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Поэтому время T, определяемое этой формулой, и частота $\omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ рассматриваются как условные период и частота затухающих колебаний.

Быстроту убывания амплитуды характеризуют величиной, называемой *логарифмическим декрементом затухания*

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – значения амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

Воспользовавшись уравнением для $A(t)$, получим

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = \frac{1}{e^{-\beta T}} = e^{\beta T},$$

откуда следует

$$\lambda = \beta T.$$

7.8. Вынужденные колебания

Для поддержания колебаний в системе необходимо, чтобы на нее действовала сила, работа которой компенсировала бы уменьшение механической энергии. Эта сила должна быть переменной, так как постоянная сила может только изменить положение равновесия, но не способствовать поддержанию колебаний в системе.

Колебания, возникающие в системе под действием внешней переменной силы, называются *вынужденными*. Переменная сила, поддерживающая в системе незатухающие колебания, называется *вынуждающей.*

Рассмотрим простейший частный случай вынужденных колебаний в среде, заключающийся в том, что на систему действует сила, которая изменяется со временем по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t,$$

где F_0 – амплитуда силы; ω – круговая частота изменения силы со временем.

Помимо вынуждающей силы на тело действуют квазиупругая сила и сила сопротивления. Тогда колебания описываются дифференциальным уравнением (второй закон Ньютона)

$$ma = -kx - rv + F_0 \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

где $f_0 = F_0 / m$.

С течением времени собственные колебания в системе затухнут, следовательно, вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы.

Решение уравнения установившихся вынужденных колебаний имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний; φ_0 – сдвиг фаз; он представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания от обусловившей его вынуждающей силы

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$tg\varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Амплитуда A зависит от соотношения между частотой ω вынуждающей силы и собственной частотой ω_0 колебательной системы (рис. 7.6): амплитуда A вынужденных колебаний увеличивается при приближении частоты ω вынуждающей силы к собственной частоте ω_0 колебательной системы. Это явление называется *резонансом*, а частота $\omega_{рез}$, при которой амплитуда достигает максимального значения A_{max}, называется *резонансной частотой*.

Кривые зависимости значения амплитуды A от частоты ω (рис. 7.6) называются *резонансными кривыми*. Форма этих кривых и значение A_{max} зависят от характера сил сопротивления среды, в которой совершаются колебания. Резонансная амплитуда тем больше (кривые *1* и *2*), чем меньше сопротивление среды ($\beta_2 < \beta_1$). Резонансная кривая *3* относится к случаю, когда сопротивление в среде отсутствует ($\beta_3 = 0$). Если на колеблющуюся систему действует постоянная сила, то колебания не совершаются, и отклонение системы от положения равновесия $A_0 = f_0/\omega_0^2$ называется *статической амплитудой*.

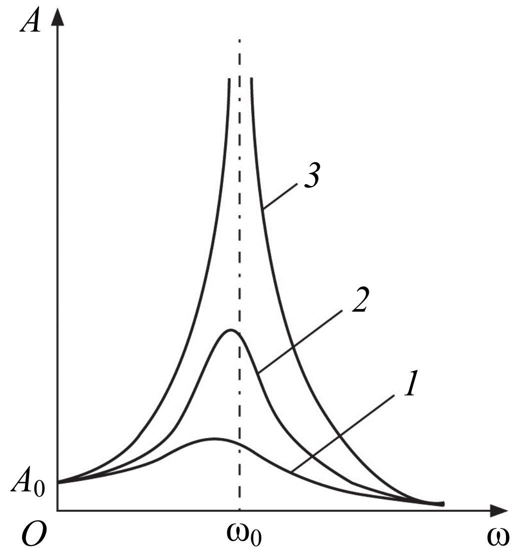

Рис. 7.6

Явление резонанса используется в разных областях техники – в акустике, в электротехнике и т. д. При эксплуатации различных конструкций, находящихся под воздействием периодических внешних нагрузок, явление резонанса может приводить к их выводу из строя.

7.9. Сложение однонаправленных колебаний

Сложением колебаний называется нахождение закона результирующих колебаний системы, участвующей одновременно в нескольких колебательных движениях.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Пусть уравнения складываемых колебаний имеют вид

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Для нахождения закона результирующего колебания воспользуемся *методом векторных диаграмм*, согласно которому гармоническое колебание можно изобразить графически с помощью вращающегося вектора **A** (рис. 7.7).

Из точки O, взятой на оси X, отложим вектор длиной A, образующий с осью угол φ. Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω, то проекция конца этого вектора будет перемещаться по оси X от

$+A$ до $-A$, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

$$x = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось совершает гармоническое колебание. Таким образом, гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебаний, а направление образует с осью X угол, равный начальной фазе колебания.

Представим оба рассматриваемых колебания с помощью векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. По правилам сложения векторов найдем результирующий вектор $\mathbf{A}$.

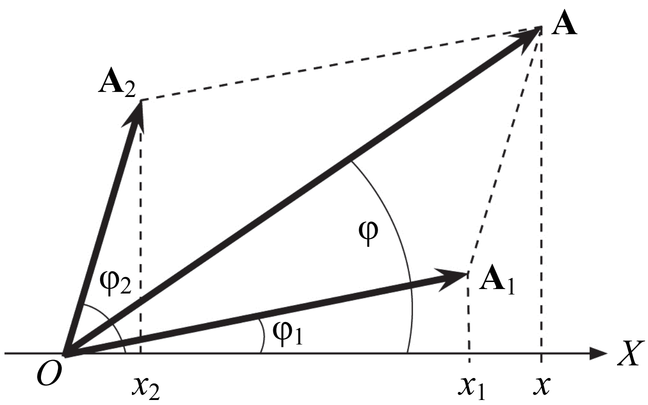

Рис. 7.7

Из рисунка видно, что $x = x_1 + x_2$. Если равномерно вращать систему векторов и находить их проекции на ось, то эти проекции будут совершать гармонические колебания в соответствии с заданными уравнениями. Взаимное расположение векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ остается неизменным, поэтому колебательное движение проекции результирующего вектора $\mathbf{A}$ также гармоническое. Из сказанного следует, что суммарное движение является гармоническим колебанием с заданной частотой ω.

По теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left[\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

или

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Начальную фазу φ результирующего колебания определим по тангенсу угла φ с помощью рис. 7.7:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Два последних уравнения дают возможность найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания и составить его уравнение. Для определения результирующего колебания можно использовать также аналитическое сложение, т. е. произвести соответствующие тригонометрические преобразования.

Проанализируем выражение амплитуды A суммарного колебания.

Если разность фаз равна четному числу π, т. е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

то складываемые колебания совпадают по фазе и усиливают друг друга. При этом

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

или

$$A = A_1 + A_2.$$

Если разность фаз равна нечетному числу π (складываемые колебания находятся в противофазе), т. е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2n+1)\pi, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

то колебания ослабляют друг друга, и результирующая амплитуда имеет вид

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2,$$

т. е. равна разности амплитуд складываемых колебаний:

$$A = |A_1 - A_2|.$$

Если $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n+1)\pi$, а амплитуды равны $(A_1 = A_2)$, то суммарная амплитуда $A = 0$, т. е. колебания взаимно гасят друг друга.

Заметим, что если частоты колебаний неодинаковы, то векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ будут вращаться с разной скоростью. При этом результирующий вектор $\mathbf{A}$ пульсирует по величине и вращается с переменной скоростью. Следовательно, результирующим движением в этом случае является не гармоническое колебание, а некоторый сложный колебательный процесс.

7.10. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть частица участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты ω, совершающихся во взаимно перпендикулярных направлениях. Ориентируем по направлениям этих колебаний координатные оси X и Y, взяв за начало координат положения равновесия частицы. Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний имеют вид

$$x = A_1 \cos \omega t,$$
$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

где φ – разность фаз обоих колебаний. Таким образом, траектория частицы представлена в так называемой параметрической форме.

Для того чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, т. е. зависимость $y(x)$, из этих уравнений следует исключить параметр t. Из первого уравнения системы исключается

$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1},$$

откуда

$$\sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}.$$

Теперь преобразуем во втором уравнении косинус по формуле косинуса суммы. В результате получим

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi = \frac{x}{A_1} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi,$$

$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \varphi = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varphi + \frac{x^2}{A_1^2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \varphi$$

и приведем полученное выражение к выражению вида

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varphi + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2 \varphi,$$

или

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

В общем случае разность начальных фаз колебаний $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Окончательно уравнение траектории принимает вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Из курса аналитической геометрии известно, что это уравнение – уравнение эллипса, оси которого ориентированы произвольно относительно осей *X* и *Y*. Ориентация эллипса и величина его полуосей находятся в довольно сложной зависимости от амплитуд и разности фаз.

Исследуем форму траектории в частных случаях:

а) разность фаз равна нулю. В этом случае уравнение траектории имеет вид

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0,$$

откуда получаем уравнение прямой

$$y = \frac{A_2}{A_1}x.$$

Следовательно, колеблющаяся частица перемещается по прямой *1*, причем расстояние от нее до начала координат (рис. 7.8)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

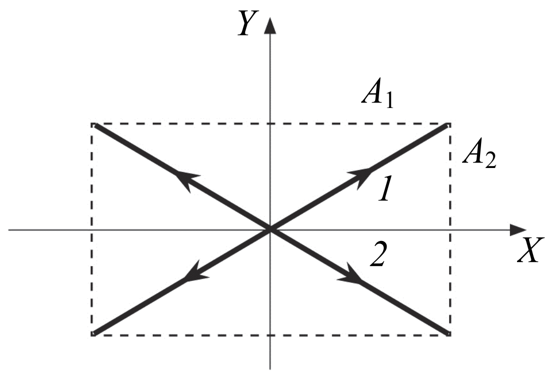

Рис. 7.8

Подставляя в эту формулу выражения для *x* и *y* и учитывая, что $\varphi = 0$, получаем закон, по которому *r* меняется со временем:

$$r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos\omega t,$$

т. е. результирующее колебание является гармоническим вдоль прямой с частотой ω и амплитудой, равной $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$;

б) разность фаз равна $\pm\pi$. Тогда уравнение траектории имеет вид

$$\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0,$$

откуда получаем, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой *2* (рис. 7.8)

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x;$$

в) при разности фаз $\pm\pi/2$ уравнение траектории переходит в уравнение

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$$

т. е. в уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. При равенстве амплитуд A_1 и A_2 эллипс вырождается в окружность. Случаи $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = -\pi/2$ различаются направлением движения по эллипсу или окружности (рис. 7.9). Если $\varphi = \pi/2$, то уравнения колебаний можно записать следующим образом:

$$x = A_1 \cos\omega t,$$
$$y = -A_2 \sin\omega t.$$

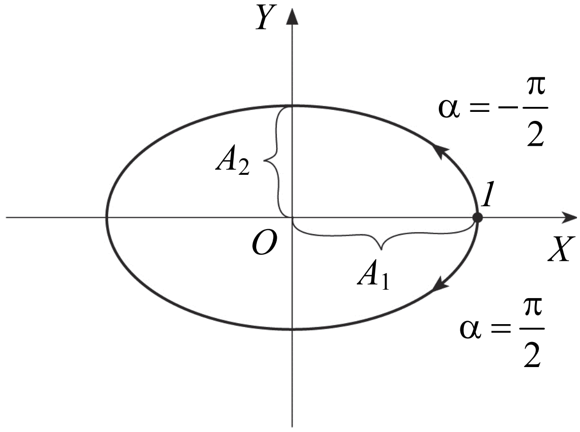

Рис. 7.9

Пусть в момент $t = 0$ частица находится в точке *1*. В последующие моменты времени координата x уменьшается, а координата y становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке. При $\varphi = -\pi/2$ движение совершается против часовой стрелки.

Таким образом, равномерное движение по окружности радиусом R с угловой скоростью ω может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

$$x = R\cos\omega t,$$

$$y = \pm R\sin\omega t.$$

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. Форма этих фигур зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз колебаний.

8. Механические волны

8.1. Распространение колебаний в упругой среде

Волновым движением, или *упругой волной*, называется распространение колебаний в упругой среде.

Упругой средой называется среда, между частицами которой существуют взаимодействия, препятствующие какой-либо деформации среды или смещению ее частиц. Волны, распространяющиеся в такой среде, называются *упругими волнами.*

Фронтом волны называется геометрическое место точек, до которых в данный момент времени распространилась волна. В *плоской волне* фронт волны представляет собой плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны. В *сферической волне* фронт волны – сфера.

В зависимости от направления колебаний частиц среды относительно направления распространения волны различают продольные и поперечные волны.

В *продольных* волнах частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. Если частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны, то такие волны называются *поперечными*. Продольные волны распространяются в твердых, жидких и газообразных средах, поперечные – в твердых телах.

Скоростью распространения волны называется скорость движения фронта волны. Скорость упругих волн зависит от свойств среды, в которых они распространяются, и внешних условий. Вектор скорости волны **v** перпендикулярен фронту волны и направлен в сторону ее распространения.

8.2. Длина волны. Связь длины волны со скоростью ее распространения

Пусть плоская волна распространяется вдоль оси X. В данной волне все точки среды, имеющие одинаковую координату x, колеблются в одинаковой фазе. На рис. 8.1 изображена кривая, которая отражает смещение ξ из положения равновесия точек с разными x в некоторый момент времени. (Не следует воспринимать этот рисунок как зримое изображение волны.)

Длина волны λ – расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду T колебаний частиц среды:

$$\lambda = vT.$$

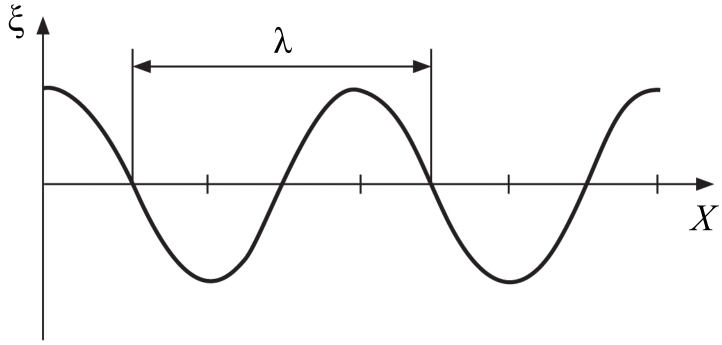

Рис. 8.1

Так как $T = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, длина волны

$$\lambda = \frac{v}{\nu},$$

где ν – частота колебаний; ω – циклическая частота.

Колебания частиц среды, находящихся на расстоянии x от источника колебаний, происходят с запаздыванием по времени на Δt $\left(\Delta t = \dfrac{x}{v}\right)$ и по фазе колебаний на $\Delta\varphi$. За время $\Delta t = T$ фаза колебаний в источнике изменяется на $\Delta\varphi = 2\pi$, поэтому

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}.$$

Запаздывание колебаний точек среды, удаленных на расстояние x от источника по фазе, равно

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi x}{vT} = \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Если $x = \lambda$, то $\Delta\varphi = 2\pi$, и поэтому длиной волны λ называют также расстояние между двумя ближайшими ее точками, колеблющимися в одинаковой фазе, т. е. с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$.

8.3. Звук

Механические волны с частотой колебаний от 16 до 20 000 Гц, воздействуя на органы слуха человека, вызывают ощущение *звука*.

Источником звука являются колеблющиеся тела. Вокруг колеблющегося тела образуются сгущения и разрежения окружающей среды, которые, распространяясь в ней, образуют звуковую волну. Звук распространяется только в упругой среде. Скорость звука зависит от упругих свойств среды, ее плотности и температуры. Так, например, скорость распространения звука в воздухе при нормальных условиях равна 330 м/с.

Восприятие звука зависит от того, какие частоты входят в состав звука. Звуки, имеющие непрерывный набор частот в некотором интервале, воспринимаются как *шумы*.

Звуки, обладающие дискретным набором частот, называются *музыкальными*, или *тональными*.

Музыкальные звуки субъективно различаются по *высоте*, *тембру* и *громкости*.

Каждая синусоидальная звуковая волна называется *тоном*. *Высота тона* зависит от частоты колебаний: чем больше частота, тем выше тон волны. *Основной тон* музыкального звука определяется наименьшей частотой, входящей в набор частот данного звука. Тоны, соответствующие кратным частотам основного тона, называются *обертонами*.

Тональные звуки с одним и тем же основным тоном различаются *тембром*. Тембр звука создается набором обертонов: их частотами и амплитудами, характером нарастания и спада амплитуд во время звучания.

Субъективная характеристика звука (*громкость*) определяется амплитудой колебаний частиц в звуковой волне. Наибольшей чувствительностью органы слуха обладают к звукам с частотой в диапазоне от 700 до 6000 Гц.

Наименьшая интенсивность звука, воспринимаемая органом слуха, называется *порогом слышимости*. *Стандартный порог слышимости* при частоте, равной 1 кГц, принимается равным 10^{-12} Вт/м^2.

Наибольшая интенсивность звуковой волны, при которой звук еще не вызывает болевых ощущений, называется *порогом осязаемости* (порогом болевого ощущения). Эта величина зависит от частоты звука и, например, при частоте 6000 Гц составляет 0,1 Вт/м^2.

Звуковые волны с частотами от $2 \cdot 10^4$ до 10^{13} Гц называются *ультразвуком*. Ультразвуки с частотами выше 10^9 Гц называются *гиперзвуком.* Ультразвуки применяются в таких областях техники, как ультразвуковая дефектоскопия, гидролокация, а также в различных технологических процессах. Ультразвуковые колебания получают с помощью специальных излучателей. Так, например, пьезоэлектрический излучатель генерирует ультразвуки с частотой до 50 МГц. Его действие основано на явлении, заключающемся в том, что некоторые кристаллы изменяют свои размеры в переменном электрическом поле и совершают при этом вынужденные механические колебания в ультразвуковом диапазоне частот.

8.4. Уравнение плоской волны

Уравнением волны называется выражение, которое позволяет определить смещение колеблющейся частицы упругой среды от положения равновесия как функцию ее координат и времени:

$$\xi = \xi(x, y, z, t).$$

Найдем вид функции $\xi(x, y, z, t)$ в случае плоской волны, предполагая, что колебания частиц среды носят гармонический характер (в этом случае волна называется *гармонической*). Пусть координатная ось X совпадает с направлением распространения волны. Тогда волновые поверхности будут перпендикулярны оси X, и, поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение ξ будет зависеть только от x и t, т. е.

$$\xi = \xi(x, t).$$

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеют вид

$$\xi(0, t) = A\cos\omega t,$$

т. е. начальную фазу примем равной нулю. Заметим, что начальная фаза определяется выбором начала отсчета x и t. При рассмотрении одной волны начало отсчета времени и координат можно выбрать так, чтобы начальная фаза была равна нулю.

Найдем вид колебания точек в плоскости, соответствующей произвольному значению x. Для того чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до плоскости x, фронту волны требуется время $\tau = x / v$, где v – скорость движения фронта волны.

Следовательно, колебания частиц, лежащих в плоскости, соответствующей координате x, будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$, т. е. будут иметь вид

$$\xi(x, t) = A\cos\omega(t - \tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Если волна распространяется в направлении, противоположном оси X, то уравнение волны примет вид

$$\xi(x, t) = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно x и t вид. Для этого введем величину $k = 2\pi / \lambda$, называемую *волновым числом*.

Волновое число можно представить также в виде

$$k = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{v},$$

где ω – круговая частота колебаний.

С учетом этого соотношения перепишем уравнение волны в виде

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx).$$

Это уравнение называется *уравнением плоской гармонической волны*, распространяющейся в направлении X.

В общем случае, когда направление распространения волны не совпадает с осями координат, уравнение плоской гармонической волны имеет вид

$$\xi(\mathbf{r},t) = A\cos(\omega t - \mathbf{kr}),$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, определяющий равновесное положение колеблющейся частицы в момент времени t; $\mathbf{k}$ – волновой вектор, направленный по нормали к волновой поверхности в сторону распространения волны и равный по модулю $k = 2\pi/\lambda$.

Выразим скалярное произведение $\mathbf{kr}$ через проекции векторов на координатные оси:

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

Тогда уравнение плоской гармонической волны можно представить в виде

$$\xi(x,y,z,t) = A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z).$$

8.5. Фазовая скорость

Фазовой скоростью $v_ф$ называют скорость перемещения фазы колебаний частиц среды при волновом процессе. Для плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси X, фаза колебаний частиц имеет вид

$$\omega t - kx = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

откуда видно, что фаза есть функция времени t и координаты положения равновесия x частицы.

Зафиксируем значение фазы:

$$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)=\text{const}.$$

Так как $\omega=\text{const}$,

$$t-\frac{x}{v}=\text{const}.$$

Полученное выражение определяет связь между временем t и координатой x, соответствующей фиксированному значению фазы. Продифференцировав это выражение, получим

$$dt-\frac{dx}{v}=0,$$

откуда

$$v_{\text{ф}}=v=\frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, скорость распространения волны v и есть скорость перемещения фазы $v_{\text{ф}}$.

8.6. Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением некоторого дифференциального уравнения в частных производных (*волнового уравнения*). Получим вид волнового уравнения исходя из его решения для плоской гармонической волны:

$$\xi(x,y,z,t)=A\cos(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z).$$

Сопоставим вторые частные производные по координатам и времени от функции, описывающей эту волну. Продифференцировав эту функцию дважды по каждой из переменных, получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-k_x^2A\cos(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z)=-k_x^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=-k_y^2A\cos(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z)=-k_y^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -k_z^2 \xi.$$

Сложим выражения, содержащие вторые производные по координатам:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi.$$

Полученное уравнение можно записать в виде

$$\Delta \xi = -k^2 \xi,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ – модуль волнового вектора **k**, или волновое число.

Продифференцируем функцию ξ дважды по времени:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = -\omega^2 \xi,$$

откуда

$$\xi = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение $\Delta \xi = -k^2 \xi,$ получаем

$$\Delta \xi = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

или с учетом формулы $k = \omega / v$,

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Это уравнение называется *волновым уравнением*. Оно получено путем дифференцирования уравнения плоской гармонической волны. Однако его решением является и ряд других функций. Всякая функция, удовлетворяющая волновому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, представляет собой фазовую скорость этой волны. Таким образом, волновое уравнение в наиболее общем виде описывает *волновой процесс*. Оно справедливо для однородных изотропных сред, затухание в которых мало и при условии $\xi << \lambda$.

Отметим, что для плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси X, волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

8.7. Энергия упругой волны

Распространение механических колебаний, представляющее собой последовательную передачу движения от одного участка среды к другому, означает передачу энергии. Эту энергию доставляет источник волны после приведения в движение непосредственно прилегающего к нему слоя среды. От этого слоя энергия передается следующему. Таким образом, распространение волны создает в среде *поток энергии*, расходящейся от источника. Представление о потоке энергии, переносимой волнами, впервые ввел русский физик Н. А. Умов.

Потоком энергии $d\Phi$ *через элементарную площадку* dS называется отношение энергии dW, проходящей через эту поверхность за промежуток времени dt, к величине этого промежутка:

$$d\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

Поток энергии – величина скалярная, размерность которой совпадает с размерностью мощности. Для характеристики переноса энергии в разных точках пространства вводится *вектор плотности потока* **j**, называемый также *вектором Умова*. Этот вектор направлен в сторону распространения волны и по абсолютной величине равен отношению потока $d\Phi$ сквозь площадку dS поверхности к площадке $dS_\perp$, являющейся проекцией dS на плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны:

$$j = \frac{d\Phi}{dS_\perp} = \frac{dW}{dS_\perp dt} = \frac{dW}{dS \cos\varphi dt},$$

где φ – угол между направлением нормали к площадке dS и направлением **j** (рис. 8.2).

За время dt через $dS_\perp$ переносится энергия dW, которая заключена в объеме цилиндра dV с основанием $dS_\perp$ и стороной vdt:

$$dW = wdV = wdS_\perp v dt,$$

где $w = dW/dV$ – плотность энергии. Таким образом, модуль плотности потока энергии **j** равен

$$j = \frac{dW}{dS_\perp dt} = \frac{wdS_\perp v dt}{dS_\perp dt} = wv.$$

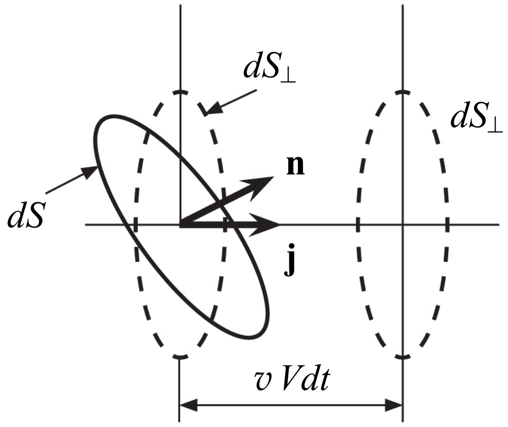

Рис. 8.2

Введем вектор **v**, модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением ее распространения (и переноса энергии). Тогда

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}.$$

Если в некоторой среде плотностью ρ в направлении оси X распространяется плоская гармоническая волна

$$\xi = A\cos(\omega t - kx + \alpha),$$

то можно показать, что плотность потока энергии изменяется по закону

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha),$$

т. е. в каждый момент времени в разных точках пространства она различна.

В одной и той же точке среды плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Так как среднее значение квадрата синуса равно 1/2, среднее значение плотности энергии за период

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2.$$

Таким образом, плотность энергии и ее среднее значение пропорциональны плотности среды ρ, квадрату частоты ω и квадрату амплитуды A.

В случае монохроматической волны вектор **j**, как и плотность энергии, изменяется со временем по закону квадрата синуса. Поэтому среднее по времени значение вектора Умова можно записать как

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{2}\rho\ A^2\omega^2\mathbf{v}.$$

Это выражение справедливо для любого вида волн – плоской, цилиндрической, сферической, затухающей и др.

Модуль среднего по времени значения плотности потока энергии, переносимой волной, называют *интенсивностью волны*:

$$J = \left|\langle \mathbf{j} \rangle\right|.$$

Для монохроматической волны

$$J = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v.$$

Таким образом, интенсивностью волны называется величина, равная энергии, которую волна переносит в среднем за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волн.

РАЗДЕЛ 2
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

9. Основы молекулярно-кинетической теории

9.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

Молекулярно-кинетическая теория – учение, которое объясняет строение и свойства веществ движением частиц, из которых состоят вещества, и взаимодействием этих частиц между собой. Это учение базируется на следующих основных положениях:

а) все вещества состоят из частиц – атомов, молекул и др.;

б) частицы, из которых состоит вещество, находятся в непрерывном хаотическом движении, называемом *тепловым*;

в) частицы вещества взаимодействуют между собой с помощью сил притяжения и отталкивания одновременно.

Эти положения полностью подтверждаются теоретически и экспериментально.

Атом представляет собой наименьшую частицу химического элемента, сохраняющую его химические свойства. Атом состоит из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов. Электрический заряд атомного ядра равен сумме зарядов электронов данного атома, т. е. атом является электрически нейтральным.

Молекула представляет собой наименьшую устойчивую частицу данного вещества, которая сохраняет химические свойства этого вещества. Молекула может состоять из одного или нескольких атомов как одинаковых, так и разных химических элементов.

Количеством вещества называется физическая величина, определяемая числом структурных элементов, из которых состоит вещество (атомов, молекул и т. д.). Единицей количества вещества служит моль.

Моль – количество вещества, содержащее в себе столько характерных для данного вещества частиц (атомов, молекул и т. д.), сколько атомов содержится в 0,012 кг углерода ^{12}C.

В одном моле любого вещества содержится одинаковое число частиц (атомов, молекул и т. д.), равное $6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Это число называется *числом Авогадро* (N_A).

Масса одного моля называется *молярной массой* (μ). Если масса частицы (атома, молекулы и т. д.) равна m_0, то

$$\mu = m_0 N_A.$$

Число молей ν, содержащихся в массе *m* вещества, равно

$$\nu = \frac{m}{\mu}, \text{ или } \nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число частиц в данной массе вещества.

Объем одного моля V_μ называется *молярным объемом*. При известной плотности ρ вещества

$$V_\mu = \frac{\mu}{\rho}.$$

9.2. Опытное обоснование основных положений молекулярно-кинетической теории

Основные положения молекулярно-кинетической теории подтверждаются большим числом физических явлений, таких, как броуновское движение, диффузия, упругие деформации и др.

Броуновское движение представляет собой непрерывное хаотическое движение взвешенных частиц вещества, находящихся в жидкости или газе. Хаотическое движение таких частиц объясняется тем, что движущиеся молекулы среды сталкиваются с данными частицами и передают им свой импульс. В результате этого частицы непрерывно меняют направление движения и движутся по сложной траектории, представляющей собой ломаную линию.

Диффузия – процесс взаимного проникновения частиц одного вещества в пространство между частицами другого, в результате чего происходит выравнивание плотностей (или концентрации) веществ при смешивании их друг с другом. Это явление обусловлено беспорядочным движением частиц. Диффузия наблюдается в газах, жидкостях и твердых телах.

Диффузией можно объяснить состояние стратосферы, которая является смесью разных газов – кислорода, водорода, азота, водяных паров др. Под действием силы тяжести, которая различна для каждого газа, молекулы газов расположились бы в виде слоев. Однако вследствие диффузии газы перемешиваются, и их смесь оказывается однородной.

Процесс диффузии ускоряется с ростом температуры, так как с ее увеличением увеличивается скорость хаотического движения молекул.

Третье положение молекулярно-кинетической теории подтверждается наличием *сил упругости*, которые являются следствием одновременного действия сил взаимного притяжения и отталкивания между молекулами вещества. Эти силы обусловлены электрическим взаимодействием электронов и атомных ядер молекул, т. е. имеют электрическую природу.

На коротких расстояниях между центрами молекул (около 10^{-10} м) преобладают силы отталкивания F_1, а при больших расстояниях – силы притяжения F_2, которые быстро убывают с увеличением расстояния r между молекулами.

На рис. 9.1 представлены зависимости этих сил, а также их равнодействующей F от расстояния между центрами молекул.

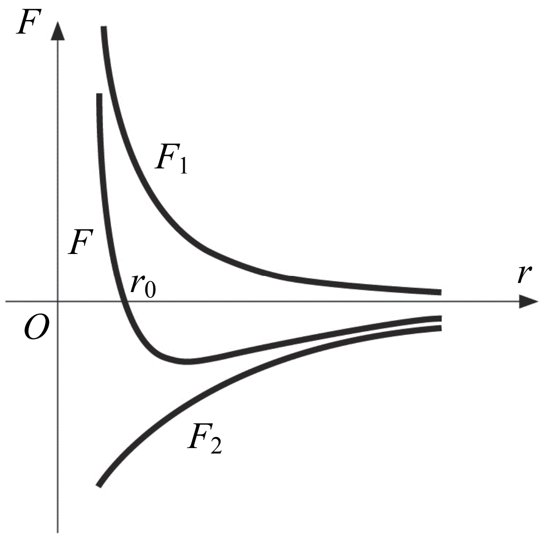

Рис. 9.1

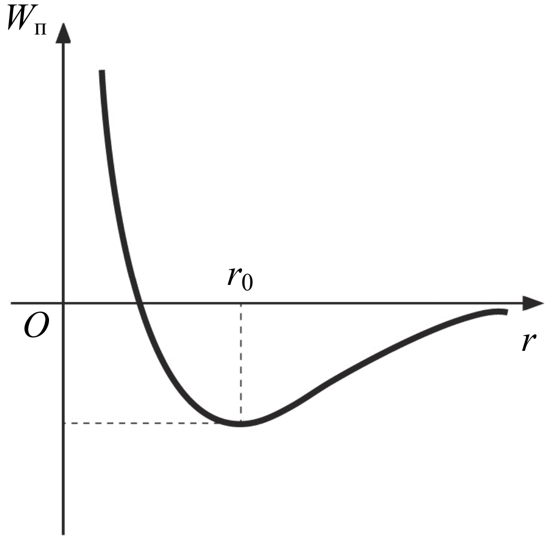

Рис. 9.2

При $r = r_0$ силы притяжения уравновешиваются силами отталкивания, и молекула находится в состоянии устойчивого равновесия. Этому состоянию молекул соответствуют наименьшее значение потенциальной энергии $W_п$ молекул (рис. 9.2). При изменении положения устойчивого равновесия (сближение или отдаление молекул) появляются силы, препятствующие его нарушению.

10. Идеальные газы

10.1. Идеальный газ. Скорости молекул идеального газа

Идеальным называется газ, при рассмотрении которого не учитывается взаимодействие между его молекулами. При соударении друг с другом и со стенками сосуда молекулы такого газа принимаются за абсолютно упругие шарики предельно малых размеров.

Хаотичность движения молекул и их взаимодействие приводят к тому, что их скорости непрерывно меняются как по модулю, так и по направлению. Кроме того, число молекул в газах, изучаемых молекулярной физикой, как правило, чрезвычайно велико, и описать их движение с помощью законов механики невозможно. В этом случае применяется *статистический метод*, с помощью которого можно определить средние значения физических величин, описывающих движение молекул газа, и в частности средние значения скоростей молекул газа при данной температуре T:

среднюю арифметическую скорость $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$, модуль которой

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_N}{N},$$

где N – число молекул газа;

среднюю квадратичную скорость $u_{\text{ср}}$, модуль которой

$$u_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}} = \sqrt{\overline{v^2}},$$

где $\overline{v^2}$ – средний квадрат скорости молекул.

10.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов устанавливает связь между давлением p газа, его объемом V и кинетической энергией $W_{\text{к}}$ хаотического поступательного движения его молекул:

$$pV = \frac{2}{3} W_{\text{к}}.$$

В этом выражении $W_к = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_0 v_i^2}{2}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения N молекул однородного газа; m_0 – масса одной молекулы, а v_i – ее скорость.

Так как

$$W_к = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_0 v_i^2}{2} = \frac{Nm_0}{2}\left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N}\right),$$

имеем

$$W_к = \frac{Nm_0}{2} u_{ср}^2 = \frac{m u_{ср}^2}{2},$$

где $\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N} = u_{ср}^2$; $m = m_0 N$ – масса газа; $u_{ср}$ – средняя квадратичная скорость его молекул.

Таким образом, основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов может быть записано следующим образом:

$$pV = \frac{1}{3} m u_{ср}^2.$$

С помощью этого уравнения давление p газа может быть выражено соотношением

$$p = \frac{1}{3}\frac{m}{V} u_{ср}^2 = \frac{1}{3}\rho u_{ср}^2 = \frac{1}{3} n m_0 u_{ср}^2,$$

где ρ – плотность газа; n – концентрация его молекул.

Записанное для одного моля газа основное уравнение принимает следующий вид:

$$pV_\mu = \frac{1}{3} N_A m_0 u_{ср}^2 = \frac{2}{3} N_A \frac{m_0 u_{ср}^2}{2} = \frac{2}{3} N_A W_{к.ср},$$

где $W_{к.ср} = \frac{m_0 u_{ср}^2}{2}$ представляет собой среднюю кинетическую энергию хаотического движения молекул газа; N_A – число Авогадро.

10.3. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона)

Физические величины, которые характеризуют систему в термодинамике, называются *термодинамическими параметрами*. К основным термодинамическим параметрам относятся давление p, объем V, абсолютная температура T.

Совокупность значений термодинамических параметров определяет *термодинамическое состояние системы*.

Уравнение, связывающее основные параметры состояния, называется *уравнением состояния*.

Состояние идеального газа описывается *уравнением Менделеева–Клапейрона*:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где m – масса газа; μ – молярная масса; $R = 8{,}3\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная.

Для одного моля газа уравнение состояния принимает вид

$$pV_{\mu} = RT,$$

где V_{μ} – молярный объем.

Учитывая, что число молей

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_{\text{A}}},$$

уравнение состояния можно записать следующим образом:

$$p = \frac{N}{V} \frac{R}{N_{\text{A}}} T,$$

где $\frac{N}{V} = n$ – концентрация молекул; $\frac{R}{N_{\text{A}}} = k$ – постоянная Больцмана $\left(k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right)$.

С учетом величин n и k уравнение Менделеева–Клапейрона принимает вид

$$p = nkT.$$

10.4. Температура как мера средней кинетической энергии молекул идеального газа

Температура T – термодинамический параметр, характеризующий направление теплообмена между телами. В состоянии термодинамического равновесия устанавливается одинаковая для всех частей системы температура. С позиции молекулярно-кинетической теории, температура является мерой средней кинетической энергии теплового хаотического движения молекул газа.

Действительно, сравнение основного уравнения молекулярно-кинетической теории и уравнения состояния идеального газа, записанных для одного моля,

$$pV_\mu = \frac{2}{3} N_A W_{к.ср}, \;\; pV_\mu = RT$$

показывает, что $\frac{2}{3} N_A W_{к.ср} = RT$.

Отсюда следует, что

$$W_{к.ср} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT.$$

Таким образом, *средняя кинетическая энергия* $W_{к.ср}$ теплового хаотического движения молекул газа пропорциональна термодинамической температуре T.

Для измерения температуры используются тела, физические характеристики которых изменяются при изменении температуры. Такие тела называются *термометрическими телами*. С помощью термометрического тела устанавливается *температурная шкала*. В международной практической стоградусной шкале температура t измеряется в градусах Цельсия (°С), в абсолютной термодинамической шкале температура T измеряется в кельвинах (К). Эти температуры связаны соотношением

$$T = 273 + t.$$

Температура $T = 0$ К называется *абсолютным нулем температуры*.

Путем сопоставления формул средней кинетической энергии молекул

$$W_{к.ср} = \frac{3}{2} kT \text{ и } W_{к.ср} = \frac{m_0 u_{ср}^2}{2}$$

можно получить выражение средней квадратичной скорости молекул:

$$u_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Так как $k = \dfrac{R}{N_\text{А}}$ и $m_0 = \dfrac{\mu}{N_\text{А}}$, имеем

$$u_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

10.5. Изопроцессы в идеальных газах

При изменении термодинамических параметров газ переходит из одного состояния в другое. Такой переход называется *термодинамическим процессом.*

Термодинамические процессы, протекающие в системе с неизменной массой при постоянном значении одного из параметров p, V или T, называются *изопроцессами.*

Изотермическим процессом называется процесс, протекающий при неизменной температуре (T = const). Это процесс подчиняется *закону Бойля–Мариотта*:

$$pV = \text{const}.$$

На термодинамической диаграмме в координатах p, V изотермический процесс изображается кривой, которая называется *изотермой* (рис. 10.1). На рис. 10.2 и 10.3 представлены графики изотермического процесса в координатах p, T и V, T.

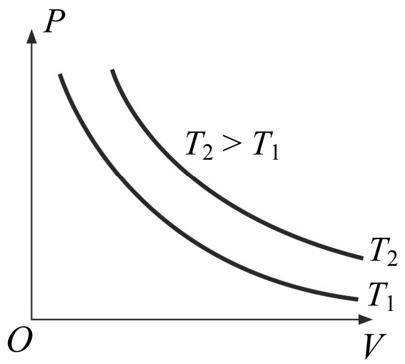

Рис. 10.1

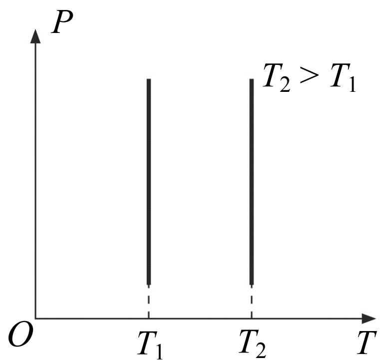

Рис. 10.2

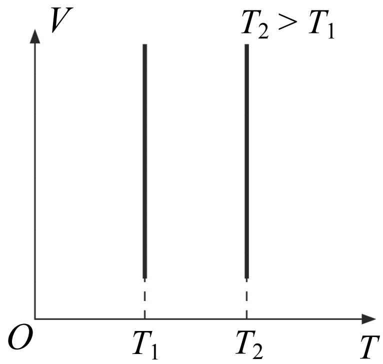

Рис. 10.3

При переходе газа из состояния 1 в состояние 2 его параметры связаны между собой равенством

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Изохорным процессом называется процесс, протекающий при неизменном объеме V, занимаемом газом (V = const). Этот процесс подчиняется *закону Шарля*:

$$p = p_0(1+\alpha_p t),$$

где p_0 – давление газа при t = 0 °C; α_p – температурный коэффициент давления газа, который характеризует относительное увеличения этого давления при нагревании его на один градус. Опытным путем установлено, что

$$\alpha_p = \frac{1}{273}\ \text{град}^{-1}.$$

С учетом того, что $T = 273 + t$, закон Шарля можно записать как

$$p = p_0\left(1+\frac{1}{273}t\right) = p_0\frac{1}{273}T.$$

Отсюда следует, что

$$p = \alpha_p p_0 T,\ \text{или}\ \frac{p}{T} = \alpha_p p_0.$$

Так как α_p = const и для данной массы газа p_0 = const, закон Шарля принимает следующий вид:

$$\frac{p}{T} = \text{const}.$$

Выражение закона Шарля можно получить также с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона, в котором m, μ, R и V являются постоянными величинами.

При переходе газа из состояния 1 в состояние 2 в изохорном процессе его параметры связаны между собой равенством

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Графически на диаграммах в координатах p, t или p, T изохорный процесс изображается отрезком прямой, называемой *изохорой* (рис. 10.4, 10.5).

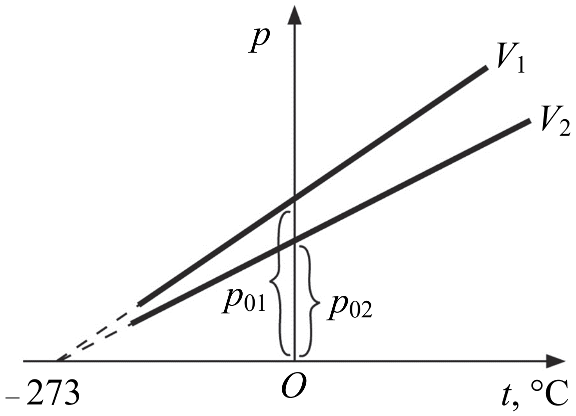

Рис. 10.4

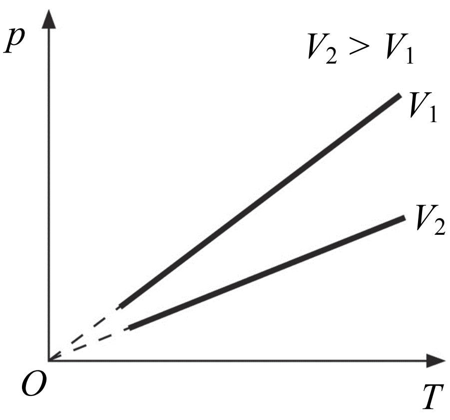

Рис. 10.5

Если на диаграмме p, t изохору продолжить в область низких температур, то ее продолжение пересечет ось t в точке, соответствующей температуре, равной –273 °С, или абсолютному нулю температур $T_0 = 0$ K.

В области низких температур изохоры изображены пунктиром, так как при низких температурах газы перестают быть идеальными, и для них законы идеальных газов становятся неприменимы.

На рис. 10.6 и 10.7 изображены графики изохорного процесса в координатах p, V и V, T.

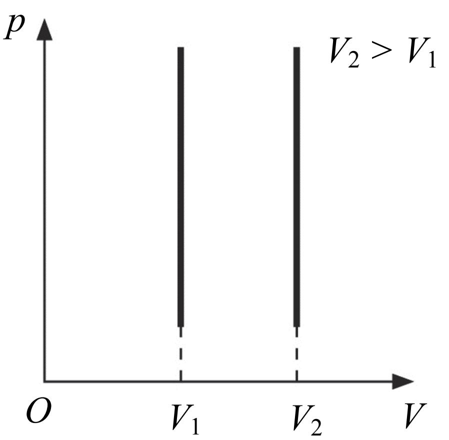

Рис. 10.6

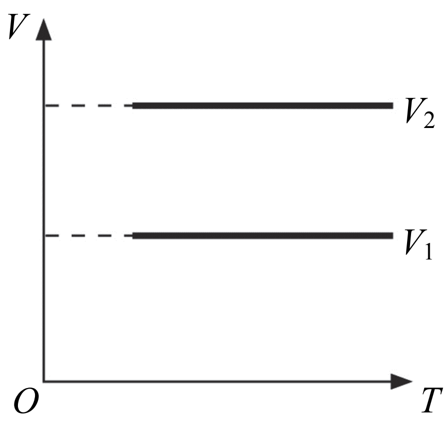

Рис. 10.7

Изобарным процессом называется процесс, протекающий при постоянном давлении газа (p = const). Этот процесс подчиняется закону *Гей-Люссака*

$$V = V_0(1 + \alpha_V t),$$

где V_0 – объем, занимаемый газом при 0 °С; α_V – температурный коэффициент объемного расширения ($\alpha_V = 1/273$ град$^{-1}$).

С учетом того, что $T = 273 + t$ закон Гей-Люссака может быть записан в виде

$$V = \alpha_V V_0 T, \text{ или } \frac{V}{T} = \alpha_V V_0.$$

Так как α_V и V_0 являются постоянными величинами,

$$\frac{V}{T} = \text{const.}$$

Выражение закона Гей-Люссака можно получить также с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона, в котором m, μ, R и p являются постоянными.

При переходе газа из состояния 1 в состояние 2 в изобарном процессе его параметры связаны между собой равенством

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Графически на диаграммах в координатах V, t и V, T изобарный процесс изображается отрезками прямых, которые называются *изобарами* (рис. 10.8, 10.9).

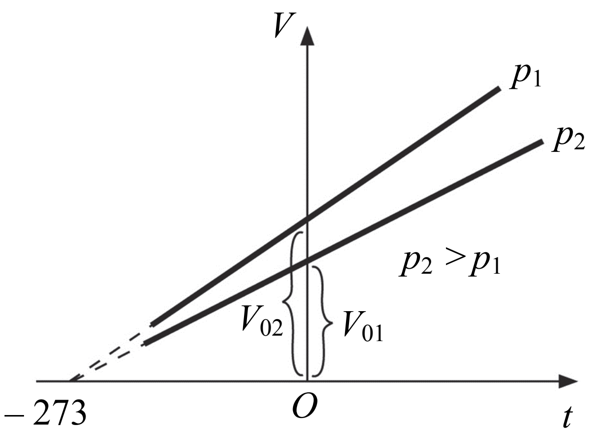

Рис. 10.8

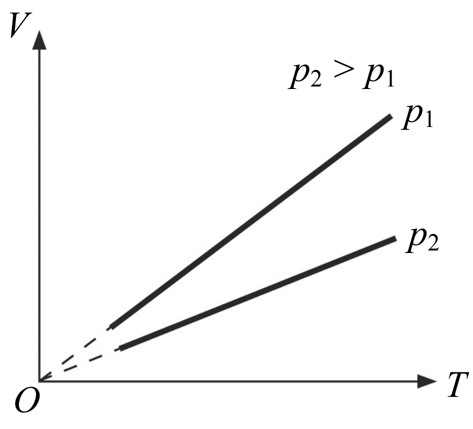

Рис. 10.9

В области низких температур законы идеальных газов становятся неприменимы, и изобары изображаются пунктиром.

На рис. 10.10 и 10.11 представлены графики изобарного процесса в координатах V, p и p, T.

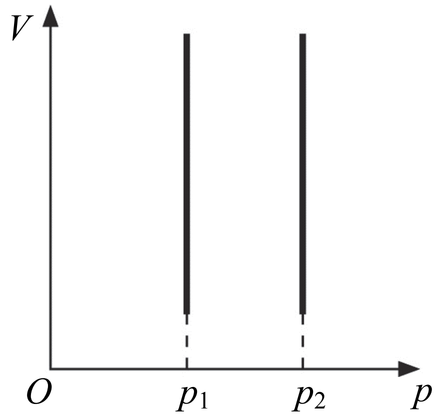

Рис. 10.10

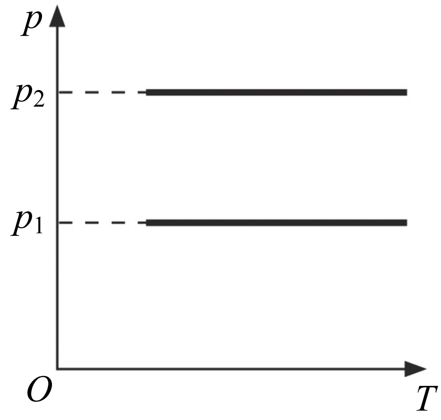

Рис. 10.11

10.6. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям

Молекулы газа совершают хаотическое движение. В результате столкновений скорость молекул меняется как по величине, так и по направлению. Однако средняя квадратичная скорость молекул $u_{\text{ср}} = \sqrt{3kT / m_0}$, находящихся в состоянии равновесия, остается постоянной. Это объясняется тем, что в газе устанавливается стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям. Это распределение описывается функцией распределения молекул по скоростям $F(v)$. Выражение для нее было выведено Дж. Максвеллом. Физический смысл функции $F(v)$ состоит в следующем.

Пусть $dN(v)$ – число молекул, имеющих скорость в интервале от v до $v+dv$, N – общее число молекул газа. Функция $F(v)$ определяет относительное число молекул $dN(v)/ N$:

$$\frac{dN(v)}{N} = F(v)dv$$

и имеет вид

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Функция распределения $F(v)$ для трех разных температур ($T_1 < T_2 < T_3$) представлена на рис. 10.12.

Скорость $v_{\text{в}}$, при которой функция $F(v)$ максимальна, называется *наиболее вероятной скоростью*:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

С повышением температуры наиболее вероятная скорость возрастает, поэтому максимум функции распределения молекул по скоростям сдвигается в сторону больших скоростей (на рис. 10.12 $T_1 < T_2 < T_3$, и поэтому $v_{\text{в}1} < v_{\text{в}2} < v_{\text{в}3}$).

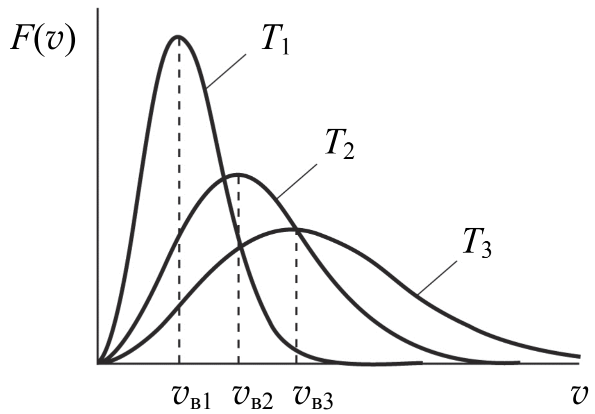

Рис. 10.12

Средняя скорость молекулы $v_{\text{ср}}$ (средняя арифметическая скорость) определяется как

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v\,dN(v) = \int_0^\infty v f(v)\,dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

С помощью функции распределения можно вычислить и среднюю квадратичную скорость $u_{\text{ср}}$:

$$u_{\text{ср}}^2 = \int_0^\infty v^2 F(v)\,dv = \frac{3kT}{m_0} = \frac{3RT}{\mu}.$$

Перечисленные скорости молекул газа связаны неравенствами

$$v_{\text{в}} < v_{\text{ср}} < u_{\text{ср}}.$$

10.7. Барометрическая формула и функция распределения Больцмана

Рассмотрим газ, состоящий из молекул с одинаковой массой, находящийся в однородном потенциальном поле сил при постоянной температуре $F = F(z)$, направленных вертикально вниз (в противоположном оси Z направлении). Как известно, тела (молекулы), находящиеся в потенциальном поле сил, обладают потенциальной энергией $W_п = W_п(z)$, при этом $F(z)$ и $W_п(z)$ связаны соотношением

$$F(z) = -\frac{dW_п(z)}{dz}.$$

Выделим в газе элементарный объем

$$dV = Sdz,$$

где S – площадь основания выделенного объема; dz – его высота. Пусть $dp = p(z+dz) - p(z)$ – разность давлений на высоте $z + dz$ и z (рис. 10.13). Тогда на выделенный объем действует результирующая сила давления Sdp, направленная вверх.

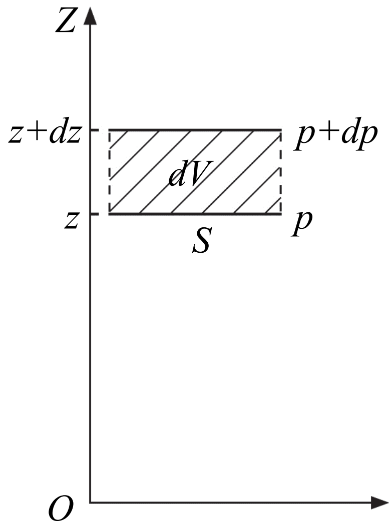

Рис. 10.13

Одновременно на каждую молекулу выделенного объема действует потенциальная сила $F(z)$. Число молекул в выделенном объеме равно ndV, где n – концентрация молекул. Таким образом, суммарная потенциальная сила, действующая на все молекулы выделенного объема и направленная вниз, равна

$$ndVF(z) = -nSdz\frac{dW_п}{dz}.$$

В покоящемся газе две указанные силы уравновешивают друг друга, т. е.

$$Sdp = -nSdz\frac{dW_п}{dz}.$$

Учтем, что в этом уравнении давление и температура газа связаны соотношением

$$p = nkT.$$

Так как T не зависит от координаты z,

$$dp = kTdn.$$

Тогда получим

$$kTdn = -ndW_{\text{п}}, \text{ или } \frac{dn}{n} = -\frac{dW_{\text{п}}}{kT}.$$

Интегрирование последнего соотношения в предположении, что при $z = 0$ потенциальная энергия $W_{\text{п}}(0) = 0$, а концентрация газа $n(0) = n_0$, дает

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{W_{\text{п}}(z)}{kT}\right).$$

Это выражение называется *распределением Больцмана* во внешнем потенциальном поле. Из него следует, что при постоянной температуре концентрация газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Из распределения Больцмана для молекул в поле силы тяжести $W_{\text{п}}(z) = m_0gz$ следует *барометрическая формула* – зависимость концентрации газа от высоты z над поверхностью Земли:

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0gz}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gz}{RT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

Величина $H = RT/(\mu g) \approx 8000$ м в этой формуле называется *высотой стандартной атмосферы.* На такой высоте концентрация молекул воздуха уменьшается в $e = 2{,}7$ раза.

11. Основы термодинамики

Термодинамика – наука о наиболее общих свойствах макроскопических физических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и о процессах перехода между этими состояниями.

Термодинамика строится на основе фундаментальных принципов (начал), которые являются обобщением многочисленных наблюдений и выполняются независимо от конкретной природы образующих систему тел. Поэтому закономерности и соотношения между физическими величинами, которые изучает термодинамика, имеют универсальный характер.

Совокупность тел, рассматриваемых в термодинамике, называется *термодинамической системой*.

11.1. Внутренняя энергия

Внутренней энергией U системы называется энергия, зависящая только от термодинамического состояния системы. Она определяется характером движения и взаимодействия частиц, входящих в систему, и включает в себя:

а) кинетическую энергию теплового движения всех частиц системы;
б) потенциальную энергию взаимодействия частиц системы;
в) энергию электронов в атомах и внутриядерную энергию этих атомов.

В рассматриваемых термодинамических системах изменением энергии электронов и внутриядерной энергии можно пренебречь и оценивать внутреннюю энергию системы как сумму кинетической энергии теплового движения частиц и потенциальной энергии их взаимодействия.

Внутренняя энергия является функцией термодинамического состояния системы, т. е. зависит от ее термодинамических параметров и не зависит от того, каким образом система пришла к этому состоянию. При переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ не зависит от характера этого перехода. В случае кругового процесса, при котором система возвращается в исходное состояние, $\Delta U = 0$.

Внутренняя энергия идеального газа включает в себя только кинетическую энергию теплового движения его молекул, так как взаимодействие между молекулами такого газа пренебрежимо мало:

$$U = \sum_{i=1}^{N} W_{\text{к}i}^2.$$

С учетом того, что средняя кинетическая энергия теплового движения молекул одноатомного однородного газа

$$W_{\text{к.ср}} = \frac{3}{2}kT,$$

$$U = NW_{\text{к.ср}} = N \cdot \frac{3}{2}kT.$$

Так как число молекул $N = \frac{m}{\mu} N_{\text{A}}$, внутренняя энергия идеального одноатомного газа равна

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT,$$

а ее изменение

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Очевидно, что внутренняя энергия идеального газа является функцией абсолютной температуры T, и ее изменение определяется только изменением температуры ΔT.

Используя уравнение состояния идеального газа $pV = \frac{m}{\mu}RT$, изменение внутренней энергии можно представить в виде

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

Приведенные формулы справедливы для одноатомного идеального газа. Для многоатомного идеального газа внутренняя энергия зависит еще от одного параметра – числа степеней свободы.

11.2. Число степеней свободы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы

Число степеней свободы молекулы – число независимых величин, полностью определяющих ее положение в пространстве.

Молекулу одноатомного газа (гелий, ксенон и др.) можно рассматривать как материальную точку, ее положение в пространстве характеризуется тремя декартовыми координатами, которым соответствуют три степени свободы поступательного движения, которым соответствует кинетическая энергия этого движения.

Молекула двухатомного газа (водород, кислород, азот) в первом приближении рассматривается как совокупность двух жестко связанных материальных точек. Эта молекула кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения – вокруг двух осей, перпендикулярных оси молекулы, в них запасается кинетическая энергия вращения. Вращение вокруг третьей оси, проходящей через два атома молекулы, не меняет расположения последней в пространстве, при таком вращении энергия вращения не запасается, так как момент инерции молекулы относительно этой оси равен нулю. Таким образом, двухатомная молекула обладает пятью степенями свободы.

Трехатомная (углекислый газ, вода) и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательные и три вращательные.

Естественно, жесткой связи между атомами в молекуле не существует. Поэтому необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения, при котором изменяется расстояние между атомами. Отметим, что двухатомная молекула имеет одну колебательную степень свободы.

В классической статистической физике справедлив *закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул*: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится кинетическая энергия, в среднем равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы – в среднем равная kT.

Колебательная степень свободы имеет вдвое большую энергию, так как на нее приходится не только кинетическая энергия, но и потенциальная, а средние значения этих энергий одинаковы.

Таким образом, средняя энергия молекулы

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{i}{2} kT,$$

где i – суммарное число степеней свободы молекулы $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$.

Так как в идеальном газе потенциальная энергия взаимодействия молекул равна нулю, его внутренняя энергия равна сумме энергий молекул, т. е.

$$U = \frac{i}{2} NkT.$$

Для 1 моля газа $N = N_{\text{A}}$, и его внутренняя энергия

$$U_{\mu} = \frac{i}{2} N_{\text{A}} kT = \frac{i}{2} RT.$$

Если в газе содержится $\nu = N/N_A$ молей, то

$$U = \frac{i}{2}\nu RT.$$

Используя уравнение состояния идеального газа, изменение внутренней энергии можно представить в виде

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

11.3. Работа в термодинамике

Работа в термодинамике – это форма изменения внутренней энергии системы, связанного с изменением объема данной системы и расположения ее частей относительно друг друга.

Различают работу A, которая совершается системой над внешними телами, и работу A', которая совершается внешними телами над системой. Эта работа равны по модулю и противоположна по знаку:

$$A = -A'.$$

Работа A газа, совершаемая в изобарном процессе,

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V,$$

где p – давление газа; $\Delta V = V_2 - V_1$ – изменение его объема.

При расширении газа совершается положительная работа против внешних сил ($\Delta V > 0$). При сжатии газа совершается отрицательная работа ($\Delta V < 0$).

Работу расширения газа можно выразить и другой формулой, применив уравнение Менделеева–Клапейрона для двух состояний газа – до изобарного расширения $\left(pV_1 = \dfrac{m}{\mu}RT_1\right)$ и после него $\left(pV_2 = \dfrac{m}{\mu}RT_2\right)$:

$$A = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

С помощью последней формулы можно установить физический смысл *универсальной газовой постоянной* R: универсальная газовая постоянная R

численно равна работе, которую совершает в изобарном процессе 1 моль идеального газа при повышении его температуры на 1 К.

При изохорном процессе (V = const, $\Delta V = 0$) объем газа остается постоянным, и работа газом не совершается: $A = 0$.

Работе газа A можно дать простое геометрическое истолкование: на графике зависимости давления p от объема V при изобарическом процессе работа, которую совершает газ при изменении объема от V_1 до V_2, численно равна площади прямоугольника с основанием $V_2 - V_1$ и высотой p = const (рис. 11.1). В частности, график зависимости $p = f(V)$ для изохорного процесса (рис. 11.2) подтверждает, что работа газа равна нулю.

Работа расширения при любом процессе измеряется площадью на pV-диаграмме, ограниченной кривой процесса $p = f(V)$, осью абсцисс и вертикальными прямыми $V = V_1$ и $V = V_2$ (рис. 11.1–11.3), т. е. интегралом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Из этой формулы следуют приведенные выше выражения работы газа, совершаемой в изобарном процессе (рис. 11.1). В изохорном (рис. 11.2) $A = 0$, поскольку $dV = 0$. В изотермическом процессе (рис. 11.3), используя уравнение Менделеева–Клайперона, получаем

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

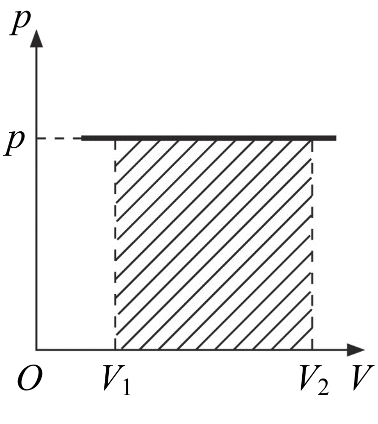

Рис. 11.1

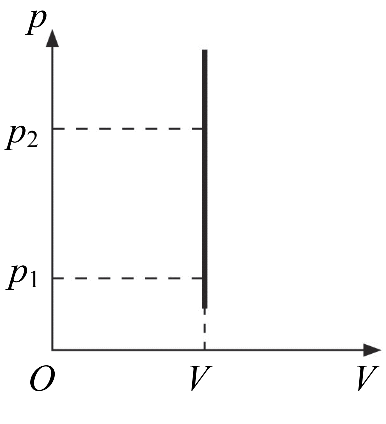

Рис. 11.2

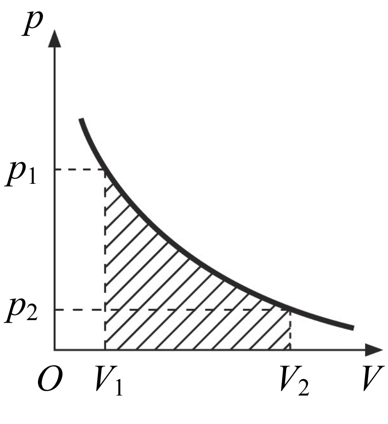

Рис. 11.3

При круговом процессе (цикле) (рис. 11.4) на участке *1a2* газ расширяется и совершает положительную работу A_{1a2}, численно равную площади под указанной кривой. На участке *2б1* газ сжимается и производит отрицательную работу $A_{2б1}$, численно равную площади под кривой *2б1*. Суммарная работа газа за цикл численно равна разности этих двух площадей ($A = A_{1а2} - A_{2б1}$), т. е. площади, охватываемой замкнутой кривой *1а2б1*. Эта работа записывается в виде кругового интеграла

$$A = \oint pdV.$$

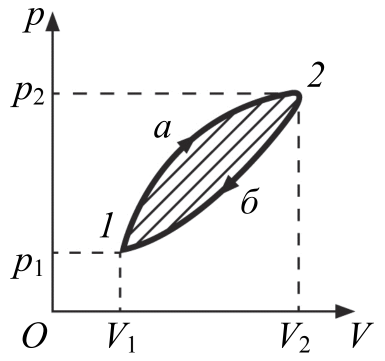

Рис. 11.4

Если бы газ переходил из состояния *1* в состояние *2* по пути *1б2*, а возвращался в исходное состояние по пути *2а1*, то работа газа, совершенная за цикл, оказалась бы отрицательной. Таким образом, работа за цикл численно равна площади, охватываемой кривой цикла на диаграмме pV. Работа положительна, если состояние газа изменяется в цикле по часовой стрелке, и отрицательна, если изменение происходит против часовой стрелки.

11.4. Количество теплоты. Теплоемкость вещества

Теплообменом называется процесс передачи энергии от одного тела другому без совершения работы. Различают следующие виды теплообмена: *теплопроводность, конвекция, лучистый теплообмен*.

Количеством теплоты Q называется энергия, переданная телу в результате теплообмена. При теплообмене часть внутренней энергии одного тела переходит во внутреннюю энергию другого.

Теплоемкостью тела называется величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы изменить его температуру на один градус:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

Удельной теплоемкостью c называется количество теплоты, которое необходимо сообщить единице массы вещества для того, чтобы изменить его температуру на один градус:

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{C}{m}.$$

Молярной теплоемкостью называется количество теплоты, которое необходимо сообщить одному молю вещества для того, чтобы изменить его температуру на один градус.

Молярная и удельная теплоемкость связаны между собой соотношением

$$C_\mu = c\mu.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания вещества массой m (или числом молей ν) на ΔT градусов, можно определить по формуле

$$Q = cm\Delta T = C_\mu \nu \Delta T.$$

Если система тел изолирована, то в соответствии с законом сохранения энергии энергия такой системы не изменяется, т. е. U = const. Если в такой системе происходят процессы, при которых работа не совершается, то изменение внутренней энергии любого тела системы равно количеству теплоты, отданной или полученной этим телом:

$$\Delta U_i = Q_i.$$

Суммируя подобные выражения для всех тел системы, получаем

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i = 0.$$

Уравнение $\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0$ называется *уравнением теплового баланса*.

Если в изолированной системе тел не происходит никаких превращений энергии кроме теплообмена, то количество теплоты, отданное телами, внутренняя энергия которых уменьшается, равно количеству теплоты, полученному телами, внутренняя энергия которых увеличивается.

11.5. Первый закон термодинамики

Закон сохранения энергии, распространяемый как на механические, так и на тепловые явления, называется *первым законом (началом) термодинамики*: изменение внутренней энергии системы равно сумме работы, совершаемой над системой внешними силами, и количества теплоты, полученного системой:

$$\Delta U = A' + Q.$$

Так как работа внешних сил A' и работа, совершаемая системой над другими телами A, равны и противоположны по знаку $(A' = -A)$, имеем

$$Q = \Delta U + A,$$

т. е. количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение этой системой работы над внешними телами.

Необходимо подчеркнуть, что совершенная работа A и переданное количество теплоты Q в отличие от ΔU зависят не только от начального и конечного состояний системы, но и от процесса, с помощью которого происходило изменение состояния.

В этой связи следует отметить, что теплоемкость вещества также зависит от процесса, в котором происходит передача теплоты. Различают *теплоемкость при постоянном объеме* C_V и *постоянном давлении* C_p, если в процессе нагревания вещества его объем или давление постоянны.

Согласно первому началу термодинамики для 1 моля идеального газа получаем

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2}R,$$

так как в изохорном процессе работа газа $A = 0$, и поэтому $Q = \Delta U$.

В изобарном процессе

$$C_p = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV_\mu}{dT} = C_V + R,$$

поскольку в этом процессе согласно уравнению Менделеева–Клайперона

$$pV_\mu = RT,$$

и, следовательно, для 1 моля идеального газа,

$$pdV_\mu = RdT.$$

Уравнение, связывающее C_p, C_V и R, называется *уравнением Майера*.

Отметим, что для любых веществ $C_p > C_V$, так как в процессе при постоянном давлении часть подводимой теплоты дополнительно расходуется на совершение работы по расширению тела (газа).

11.6. Применение первого закона термодинамики к изопроцессам в идеальных газах

При *изохорном* процессе (V = const) газ работу не совершает, и все количество теплоты Q расходуется только на увеличение внутренней энергии газа:

$$Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

При *изобарном* процессе (p = const) количество теплоты, подводимое к газу, $Q > 0$, расходуется как на увеличение внутренней энергии ($\Delta U > 0$), так и на работу расширения $(A > 0)$, которую совершает газ против внешнего давления:

$$Q = \Delta U + A.$$

Поскольку $A = p\Delta V = \nu R\Delta T$, а изменение внутренней энергии газа $\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T$, имеем

$$Q = \frac{i}{2}\nu R\Delta T + \nu R\Delta T = \frac{i+2}{2}\nu R\Delta T = \nu C_p\Delta T.$$

При *изотермическом* процессе (T = const) температура остается постоянной $(\Delta T = 0)$, внутренняя энергия газа при этом не меняется $(\Delta U = 0)$, поэтому вся подводимая теплота идет на работу, совершаемую газом:

$$Q = A.$$

11.7. Адиабатический процесс

Адиабатическим процессом называется процесс, протекающий в системе тел без теплообмена с окружающей средой.

На диаграмме в координатах p, V (рис. 11.5) адиабатический процесс изображается кривой, которая называется *адиабатой*. На этой диаграмме приведена также изотерма, которая соответствует температуре начального состояния газа. Из сравнения адиабаты и изотермы следует, что при адиабатическом сжатии газа его давление возрастает быстрее, чем при изотермическом. Это связано с тем, что увеличение давления происходит вследствие уменьшения объема газа и возрастания температуры.

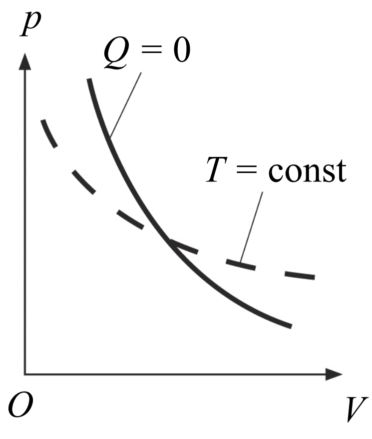

Рис. 11.5

Так как адиабатический процесс протекает без теплообмена (Q = 0), первый закон термодинамики для него записывается следующим образом:

$$\Delta U + A = 0.$$

Отсюда следует, что

$$A = -\Delta U,$$

т. е. в адиабатическом процессе газ совершает работу за счет убыли внутренней энергии системы.

Если газ расширяется адиабатически ($A > 0$, $\Delta U < 0$), то происходит его охлаждение ($\Delta T < 0$), если газ адиабатически сжимается ($A < 0$, $\Delta U > 0$), то он нагревается ($\Delta T > 0$).

Практически адиабатический процесс осуществляется при достаточно быстром расширении или сжатии газа таким образом, что теплообмен между ним и внешней средой не успевает произойти.

11.8. Принцип действия теплового двигателя

Тепловой двигатель представляет собой устройство, в котором рабочее тело (газ) совершает работу в ходе циклического процесса благодаря теплоте, полученной извне. Для того чтобы работа за цикл была положительной, давление, а следовательно, и температура газа при расширении должны быть выше, чем при сжатии. Для этого в тепловом двигателе имеется нагреватель – тело, от которого при расширении газу сообщается теплота Q_1, и холодильник – тело, которому в процессе сжатия газ отдает теплоту Q_2. Схема теплового двигателя показана на рис. 11.6.

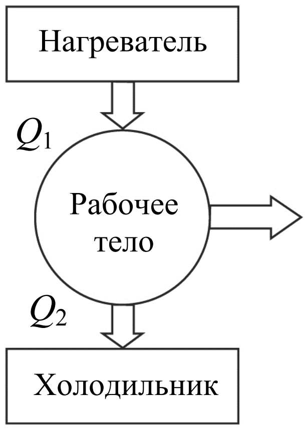

Рис. 11.6

Так как изменение внутренней энергии при возвращении рабочего тела в первоначальное состояние равно нулю, первое начало термодинамики для цикла имеет вид

$$A = Q_1 - Q_2 .$$

Коэффициентом полезного действия (КПД) *теплового двигателя* называется величина, равная отношению совершаемой за цикл работы A к количеству теплоты Q_1, переданному рабочему телу:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

С учетом того, что $A = Q_1 - Q_2$, КПД равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Из определения КПД следует, что он не может быть больше единицы.

Из всех возможных циклов максимальный коэффициент полезного действия имеет *цикл Карно* (рис. 11.7).

Французский ученый С. Карно рассмотрел идеализированный цикл тепловой машины, рабочим телом которой является идеальный газ, находящийся между нагревателем с температурой T_1 и холодильником с температурой T_2. Этот цикл составлен из определенной последовательности обратимых процессов (см. рис. 11.7): изотермического расширения *1→2*, адиабатического расширения *2→3*, изотермического сжатия *3→4* и адиабатического сжатия *4→1*.

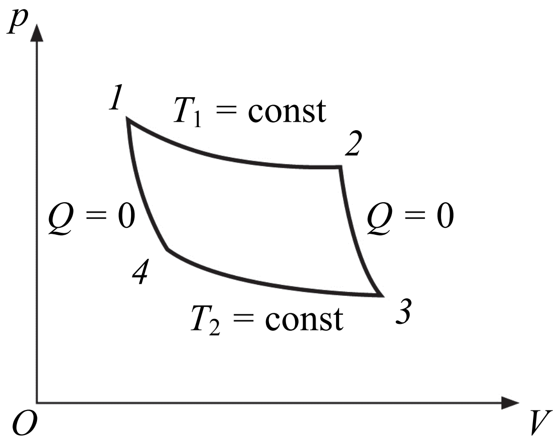

Рис. 11.7

Тепловой двигатель, работающий по циклу Карно, называется *идеальным*, и его КПД определяется только температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2:

$$\eta_К = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Коэффициент полезного действия любого теплового двигателя, работающего с нагревателем температурой T_1 и холодильником температурой T_2, всегда меньше КПД идеального теплового двигателя, работающего при тех же температуре нагревателя и холодильника ($\eta < \eta_К$).

11.9. Энтропия и второе начало термодинамики

Кроме внутренней энергии существуют и другие функции состояния. Важнейшая из них – энтропия S, введенная Р. Клаузиусом в 1865 г. Ее изменение ΔS определяется уравнением

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T},$$

где ΔQ – теплота, полученная телом; T – температура теплоотдающего тела.

При переходе идеального газа из состояния, характеризуемого объемом V_1, температурой T_1 и давлением P_1, в состояние с термодинамическими параметрами V_2, T_2 и P_2 для ΔS, используя первое начало термодинамики и уравнение Менделеева–Клапейрона, нетрудно получить

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \right).$$

В термодинамике доказывается, что в обратимых процессах (могут происходить как в прямом, так и обратном направлении, причем при возвращении системы в исходное состояние в ней и окружающей среде не происходит никаких изменений) $\Delta S = 0$, в необратимых – $\Delta S > 0$.

На этих свойствах энтропии основано *второе начало термодинамики* (или *закон возрастания энтропии*): в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия системы не убывает (в необратимых она возрастает, в обратимых – постоянна).

Первое начало термодинамики – это закон сохранения энергии, из которого следует, какие процессы возможны (например, возможны и прямые, и обратные процессы, но при условии выполнения закона сохранения энергии). Второе начало указывает направление протекания термодинамических процессов: из возможных процессов выбираются те, которые реально осуществимы.

В статистической физике энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы. *Термодинамическая вероятность* W – это число способов (микросостояний), с помощью которых может быть реализовано данное состояние макроскопической системы (по определению $W \geq 1$). Согласно Больцману

$$S = k \ln W,$$

где k – постоянная Больцмана.

Второе начало термодинамики теперь можно сформулировать так: процессы в замкнутой системе идут от менее вероятных к более вероятным до тех пор, пока вероятность системы W не станет максимальной.

12. Взаимные превращения газов, жидкостей и твердых тел

12.1. Парообразование и конденсация. Кипение

Парообразованием называется процесс перехода вещества из жидкого состояния в газообразное.

Паром данной жидкости называется совокупность молекул, вылетевших из жидкости при парообразовании.

Испарением называется парообразование, происходящее при любой температуре со свободной поверхности жидкости.

Обратный процесс превращения пара в жидкость называется *конденсацией*.

Для превращения жидкости в пар ей необходимо сообщить определенное количество теплоты, которое идет на преодоление сил, удерживающих молекулы в жидкости.

Удельной теплотой парообразования r называется количество теплоты Q, необходимое для превращения в пар единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения:

$$r = \frac{Q}{m}.$$

Для того чтобы превратить в пар жидкость массой m, необходимо сообщить ей количество теплоты, равное

$$Q = rm.$$

Из закона сохранения энергии следует, что при обратном процессе (конденсация пара) в жидкость выделяется такое же количество теплоты.

Кипением называется процесс интенсивного парообразования не только со свободной поверхности, но и по всему объему жидкости внутри образующихся при этом пузырьков пара.

Температурой (точкой) кипения называется температура жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно или превышает внешнее давление. В процессе кипения температура жидкости остается постоянной, если не изменяется внешнее давление. При уменьшении внешнего давления температура кипения уменьшается, а при увеличении его – увеличивается.

12.2. Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность воздуха

Насыщенным (насыщающим) называется пар, находящийся в динамическом равновесии с жидкостью, при котором число молекул жидкости, вылетающих из нее в единицу времени, равно числу молекул пара, попадающих в единицу времени в жидкость.

Если динамическое равновесие системы пар–жидкость отсутствует (например, при отсутствии жидкости), то пар является *ненасыщенным.*

Масса водяных паров, содержащихся в 1 м^3 воздуха при данной температуре и данном давлении, называется *абсолютной влажностью воздуха*, т. е. абсолютная влажность представляет собой плотность водяных паров при данных условиях:

$$f = \rho_{\text{п}}.$$

С практической целью абсолютную влажность оценивают по *парциальному давлению* водяных паров, т. е. давлению, которое производил бы водяной пар, если бы все остальные газы отсутствовали, и выражают в миллиметрах ртутного столба:

$$f = p_{\text{п}}.$$

Относительная влажность воздуха r есть отношение абсолютной влажности к парциальному давлению насыщенного пара $p_{\text{н.п}}$ при той же температуре, выраженное в процентах:

$$r = \frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{н.п}}} \cdot 100\ \%.$$

При понижении температуры давление насыщенных паров уменьшается. Температура, при которой ненасыщенные пары с абсолютной влажностью $p_{\text{п}}$ становятся насыщенными ($p_{\text{п}} = p_{\text{н.п}}$), называется *точкой росы*. В точке росы начинается конденсация пара, появляется туман, выпадает роса или образуется иней.

12.3. Тепловое расширение твердых тел

Тепловым расширением называется увеличение линейных размеров и объемов тел, происходящее при повышении их температуры. *Линейное тепловое расширение* характерно для твердых тел. *Объемное тепловое расширение* происходит как в твердых телах, так и в жидкостях. Количественно линейное и объемное тепловое расширение характеризуется коэффициентами расширения.

Коэффициентом линейного теплового расширения α называется величина, численно равная относительному удлинению тела $\Delta l / l_0$ при нагревании его на 1 °C:

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0 t} = \frac{\Delta l}{l_0 t},$$

где l_0 – длина тела при температуре 0 °C; l – длина тела при температуре t, °C; $\Delta l = l - l_0$ – удлинение тела при нагревании его на t градусов.

Длина l тела при температуре t определяется формулой

$$l = l_0 (1 + \alpha t).$$

Для большинства твердых тел $\alpha \approx (10^{-5} \div 10^{-6})$ град$^{-1}$, и можно считать, что α практически не зависит от температуры.

Коэффициентом объемного теплового расширения β называется величина, численно равная относительному увеличению объема $\Delta V / V_0$ тела при нагревании его на 1 °C:

$$\beta = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{\Delta V}{V_0 t},$$

где V_0 – объем тела при температуре 0 °C; V – объем тела при температуре t,°C; $\Delta V = V - V_0$ – увеличение объема тела при его нагревании на t градусов.

Объем тела V при температуре t определяется формулой

$$V = V_0 (1 + \beta t).$$

Коэффициенты линейного и объемного расширения связаны соотношением

$$\beta \approx 3\alpha.$$

Коэффициенты объемного расширения для жидкостей несколько выше, чем для твердых тел, – от нескольких тысячных до нескольких десятитысячных единицы.

12.4. Плавление и кристаллизация

Плавлением твердых тел называется их переход из твердого состояния в жидкое. Благодаря энергии, которая подводится к твердому телу при плавлении, происходит разрушение его кристаллической решетки. В процессе плавления твердого тела оно существует одновременно и в твердом, и в жидком состоянии.

Плавление происходит при определенной температуре, называемой *температурой (точкой) плавления.* Температура тела не изменяется при плавлении и остается все время постоянной, так как все количество теплоты, которое подводится к твердому телу, расходуется на разрушение кристаллической решетки и работу против внешних сил.

Удельной теплотой плавления λ называется количество теплоты Q, необходимое для перехода единицы массы твердого тела, нагретого до температуры плавления, в жидкое состояние:

$$\lambda = \frac{Q}{m}.$$

Кристаллизацией называется переход вещества из жидкого в твердое кристаллическое состояние. Для любой химически чистой жидкости (расплава) этот процесс идет при постоянной *температуре кристаллизации*, которая совпадает с температурой плавления. Кристаллизация единицы массы жидкости сопровождается выделением некоторого количества теплоты – *удельной теплоты кристаллизации*, – равной удельной теплоте плавления.

При плавлении (кристаллизации) вещества массой m поглощается (выделяется) количество теплоты, равное

$$Q = \lambda m.$$

12.5. Теплота сгорания топлива

Энергия, выделяющаяся при полном сгорании топлива, называется его *теплотой сгорания.* Теплота сгорания топлива (или количество теплоты, выделяющееся при его сгорании) зависит от вида топлива и его массы.

Удельной теплотой сгорания топлива q называется количество теплоты Q, которое выделяется при полном сгорании единицы массы топлива:

$$q = \frac{Q}{m}.$$

При полном сгорании топлива массой m выделяется количество теплоты, равное

$$Q = qm.$$

12.6. Поверхностное натяжение

Опыт показывает, что на поверхности жидкости наблюдается *поверхностное натяжение*, которое проявляется в стремлении уменьшить площадь поверхности. Это явление обусловлено тем, что на поверхности жидкости вблизи границы, разделяющей жидкость и ее пар, молекулы испытывают межмолекулярное взаимодействие, отличное от взаимодействия молекул, находящиеся внутри объема жидкости (рис. 12.1).

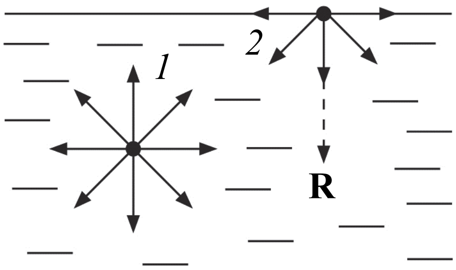

Рис. 12.1

Так как молекула *1*, окруженная со всех сторон другими молекулами той же жидкости, испытывает одинаковые силы притяжения ко всем своим соседям, равнодействующая этих сил равна нулю. Молекула *2*, находящаяся на поверхности жидкости, испытывает меньшее притяжение вверх со стороны молекул пара и большее притяжение вниз со стороны молекул жидкости. В результате на молекулы, расположенные в поверхностном слое, действует направленная вниз равнодействующая сил **R**.

Для перемещения молекул из глубины объема жидкости в ее поверхностный слой необходимо совершить работу по преодолению силы **R**. Эта работа расходуется на увеличение поверхностной энергии.

Поверхностной энергией называется избыточная потенциальная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое по сравнению с их потенциальной энергией внутри остального объема жидкости.

Всякая система стремится достигнуть состояния с минимальной потенциальной энергией, поэтому поверхность жидкости стремится сжаться так, чтобы на ней оставалось как можно меньше молекул.

Поверхностное натяжение можно наблюдать на простом опыте.

Пусть пленка жидкости (например, из мыльной воды) натянута на рамку *abcd*, одна сторона которой *cd* подвижна (рис. 12.2). Для удержания в покое подвижной стороны рамки *cd* должна действовать сила **F**, направленная в сторону, противоположную силе поверхностного натяжения $\mathbf{F}_п$, стремящейся уменьшить площадь поверхности пленки. Равновесие наблюдается при условии, что

$$F = 2\sigma l,$$

где σ – *коэффициент поверхностного натяжения*; σl – сила, с которой одна сторона жидкой пленки тянет подвижную сторону *cd*; $2\sigma l$ – полная сила, с которой обе стороны пленки действуют на сторону *cd*.

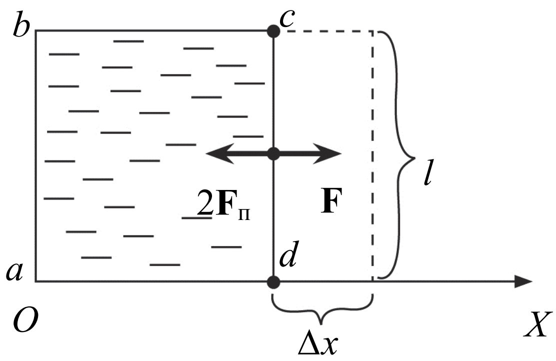

Рис. 12.2

Так как $F = 2F_п$, имеем $F_п = \sigma l$. Таким образом, сила поверхностного натяжения направлена перпендикулярно периметру рамки по касательной к поверхности жидкости и прямо пропорциональна длине стороны рамки.

Полученное выражение позволяет определить понятие коэффициента поверхностного натяжения как величины, численно равной силе, действующей на единицу длины периметра смачивания и направленной перпендикулярно к этому периметру:

$$\sigma = \frac{F_п}{l}.$$

В системе СИ коэффициент поверхностного натяжения измеряется в ньютонах на метр (Н/м).

При увеличении площади свободной поверхности жидкости внешними силами на Δx должна быть совершена работа

$$A = 2\sigma l \Delta x = \sigma \Delta S,$$

где $\Delta S = 2l\Delta x$ – изменение площади свободной поверхности жидкости. Отсюда

$$\sigma = \frac{A}{\Delta S},$$

т. е. коэффициент поверхностного натяжения численно равен работе, которую необходимо совершить, чтобы увеличить площадь поверхности жидкости на единицу.

Эта работа идет на увеличение энергии $\Delta W_п$ свободной поверхности жидкости

$$\Delta W_п = \sigma \Delta S.$$

Из последнего равенства вытекает еще одно определение коэффициента поверхностного натяжения: коэффициент поверхностного натяжения σ численно равен потенциальной энергии единицы поверхности пленки жидкости:

$$\sigma = \frac{\Delta W_{\text{п}}}{\Delta S}.$$

Для данной жидкости коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры (с повышением температуры он уменьшается), а также от степени загрязненности поверхности жидкости.

Силы поверхностного натяжения вызывают искривление поверхности жидкости в капиллярной трубке, что ведет к появлению избыточного давления Δp в жидкости по сравнению с давлением под плоской поверхностью. В случае сферической поверхности это давление связано с радиусом ее кривизны r формулой Лапласа

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}.$$

Формулу Лапласа можно применять как к вогнутой (рис. 12.4, *а*), так и к выпуклой (рис. 12.4, *б*) поверхности. В случае вогнутой поверхности следует считать $r < 0$ и соответственно $\Delta p < 0$, для выпуклой, наоборот, $r > 0$ и $\Delta p > 0$.

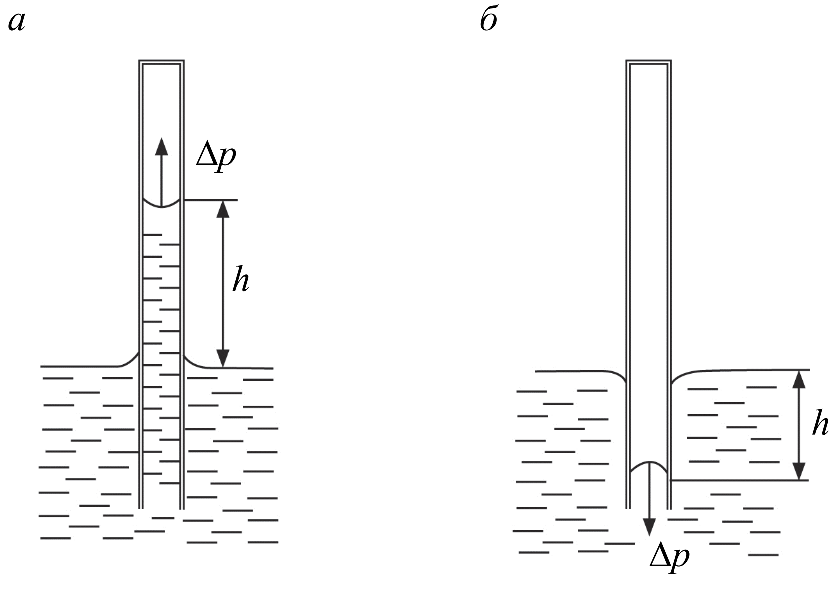

Рис. 12.4

При выпуклом мениске Δp увеличивает давление, которое существует под плоской поверхностью жидкости, что приводит к опусканию жидкости в капилляре относительно ее уровня в широком сосуде (рис. 12.4, *б*). При вогнутом мениске давление под плоской поверхностью уменьшается на величину Δp, что приводит к подъему жидкости в капилляре относительно ее уровня в широком сосуде (рис. 12.4, *а*).

Разность уровней h жидкости в капилляре и широком сосуде определяют из условия равновесия

$$\Delta p = p_{\text{ст}},$$

где $p_{\text{ст}} = \rho g h$ – гидростатическое давление столба жидкости высотой h плотностью ρ; g – ускорение свободного падения.

Подставив в это равенство значения Δp и $p_{\text{ст}}$, получим

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

Измерение капиллярного поднятия (опускания) жидкости является одним из простых способов определения σ.

Список литературы

1. *Детлаф, А. А.* Курс физики: учеб. пос. для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высшая школа, 2005. – 720 с.
2. *Зисман, Г. А.* Курс общей физики: учеб. пос.: в 3 т. / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. Т. 1: Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны. – СПб.: Лань, 2012. – 352 с.
3. *Савельев, И. В*. Курс общей физики: учеб. пос. для втузов: в 3 т. / И. В. Савельев. Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – СПб.: Лань, 2012. – 351 с.
4. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М.: Изд-во Физматлит/МФТИ», 2005. Т. 1: Механика. – 559 с. Т. 2: Термодинамика и молекулярная физика. – 544 с.
5. *Трофимова, Т. И.* Курс физики: учеб. пос. для вузов / Т. И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 2006. – 558 с.
6. Физика. Молекулярная физика: учеб. пос. для учащихся факультета довузовской подготовки / Ю. А. Кытин, В. И. Никитченко, А. М. Петухов, Р. А. Романова. – СПб.: Петербургский университет путей сообщения, 2007. – 47 с.
7. Физика. Механика: учеб. пос. для учащихся факультета довузовской подготовки / Ю. А. Кытин, В. И. Никитченко, А. М. Петухов, Р. А. Романова. – СПб.: Петербургский университет путей сообщения, 2007. – 53 с.
8. Физика: учеб. пос. для абитуриентов / Е. Н. Бодунов, Ю. А. Кытин, В. И. Никитченко, А. М. Петухов, Р. А. Романова. – СПб.: Петербургский университет путей сообщения, 2010. – 420 с.
9. *Фиргант, Е. В.* Руководство к решению задач по курсу общей физики: учеб. пос. / Е. В. Фиргант. – СПб.: Лань, 2009. – 352 с.
10. *Чертов, А. Г.* Задачник по физике: учеб. пос. для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Физматлит, 2009. – 640 с.

Содержание

Предисловие ... 3

РАЗДЕЛ 1. МЕХАНИКА ... 5

1. Кинематика ... 5
1.1. Основные понятия и определения ... 5
1.2. Траектория, путь, перемещение ... 6
1.3. Скорость, ускорение ... 7
1.4. Равномерное прямолинейное движение ... 12
1.5. Закон сложения скоростей ... 14
1.6. Равнопеременное прямолинейное движение ... 15
1.7. Свободное падение тел ... 17
1.8. Движение тела, брошенного вертикально вверх ... 18
1.9. Движение тела, брошенного под углом к горизонту ... 19
1.10. Равномерное движение по окружности ... 22
1.11. Неравномерное движение по окружности ... 24

2. Динамика ... 25
2.1. Сила, масса, импульс ... 25
2.2. Законы Ньютона ... 27
2.3. Гравитационные силы ... 28
2.4. Силы трения ... 32
2.5. Силы упругости. Закон Гука ... 33

3. Работа, мощность, энергия. Законы сохранения в механике ... 36
3.1. Механическая работа, мощность ... 36
3.2. Механическая, кинетическая и потенциальная энергия ... 39
3.3. Закон сохранения механической энергии ... 44
3.4. Закон сохранения импульса ... 45

4. Механика твердого тела ... 48
4.1. Сложение и разложение сил ... 48
4.2. Момент импульса частицы. Момент силы ... 51
4.3. Момент импульса и момент силы относительно оси ... 54
4.4. Закон сохранения момента импульса ... 55
4.5. Момент инерции ... 58
4.6. Основное уравнение динамики вращательного движения ... 61
4.7. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела ... 62

5. Механика жидкостей и газов ... 64
5.1. Давление. Закон Паскаля. Гидростатическое давление ... 64
5.2. Сообщающиеся сосуды ... 65
5.3. Гидравлический пресс ... 66
5.4. Закон Архимеда для жидкостей и газов. Условия плавания тел ... 68

6. Основы специальной теории относительности ... 70
6.1. Постулаты специальной теории относительности ... 70
6.2. Преобразования Лоренца ... 70

6.3. Относительность длин ... 71
6.4. Относительность длительности промежутков времени ... 72
6.5. Связь между массой и энергией. Релятивистский импульс ... 72

7. Механические колебания ... 74
7.1. Основные понятия и определения ... 74
7.2. Гармонические колебания ... 75
7.3. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях ... 76
7.4. Гармонические колебания груза на пружине ... 78
7.5. Превращение энергии при гармонических колебаниях ... 79
7.6. Физический и математический маятники ... 80
7.7. Затухающие колебания ... 82
7.8. Вынужденные колебания ... 84
7.9. Сложение однонаправленных колебаний ... 86
7.10. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний ... 88

8. Механические волны ... 93
8.1. Распространение колебаний в упругой среде ... 93
8.2. Длина волны. Связь длины волны со скоростью ее распространения ... 93
8.3. Звук ... 94
8.4. Уравнение плоской волны ... 96
8.5. Фазовая скорость ... 97
8.6. Волновое уравнение ... 98
8.7. Энергия упругой волны ... 100

РАЗДЕЛ 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА ... 103

9. Основы молекулярно-кинетической теории ... 103
9.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории ... 103
9.2. Опытное обоснование основных положений молекулярно-кинетической теории ... 104

10. Идеальные газы ... 106
10.1. Идеальный газ. Скорости молекул идеального газа ... 106
10.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов ... 106
10.3. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона) ... 108
10.4. Температура как мера средней кинетической энергии молекул идеального газа ... 109
10.5. Изопроцессы в идеальных газах ... 110
10.6. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям ... 114
10.7. Барометрическая формула и функция распределения Больцмана ... 115

11. Основы термодинамики ... 118
11.1. Внутренняя энергия ... 118
11.2. Число степеней свободы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы ... 119
11.3. Работа в термодинамике ... 121
11.4. Количество теплоты. Теплоемкость вещества ... 123
11.5. Первый закон термодинамики ... 124

11.6. Применение первого закона термодинамики к изопроцессам в идеальных газах 125
11.7. Адиабатический процесс 126
11.8. Принцип действия теплового двигателя 127
11.9. Энтропия и второе начало термодинамики 128

12. Взаимные превращения газов, жидкостей и твердых тел 130
12.1. Парообразование и конденсация. Кипение 130
12.2. Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность воздуха 130
12.3. Тепловое расширение твердых тел 131
12.4. Плавление и кристаллизация 132
12.5. Теплота сгорания топлива 133
12.6. Поверхностное натяжение 133

Литература 138

Учебное издание

Бодунов Евгений Николаевич
Никитченко Валерий Иванович
Петухов Александр Михайлович

ИНТЕНСИВНЫЙ КУРС ФИЗИКИ
Механика, молекулярная физика

Учебное пособие

Редактор и корректор *А. А. Гранаткина*
Компьютерная верстка *А. А. Стукановой*

План 2011 г., № 81

Подписано в печать с оригинал-макета 25.12.2013.
Формат 60×84 1/16. Бумага для множ. апп. Печать ризография.
Усл. печ. л. 8,875. Тираж 300 экз.
Заказ 1194.

ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.
Типография ФГБОУ ВПО ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.