

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.03.

### Изучение центрального соударения двух тел. Проверка второго закона Ньютона

#### Цель работы

1. Исследование упругого и неупругого центрального соударения тел на примере тележек, движущихся с малым трением.
2. Исследование зависимости ускорения тележки от приложенной силы и массы тележки.

#### Теоретические основы лабораторной работы

##### Часть 1

Рассмотрим абсолютно упругое центральное соударение двух тел массами  $m_1$  и  $m_2$ . При таком соударении в замкнутой системе двух тел выполняются законы сохранения импульса и энергии. Пусть до соударения движется только первое тело, тогда уравнения законов имеют вид

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{10} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \\ \frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\vec{v}_{10}$  – скорость первого тела до удара,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – соответственно, скорости первого и второго тел после удара. Считая скорость  $\vec{v}_{10}$  известной, найдем скорости обоих тел после удара. Пусть

условия соударения таковы, что после удара оба тела продолжают двигаться параллельно той прямой, по которой двигалось первое тело до удара.

Введем координатную ось  $OX$ , сонаправленную с вектором  $\vec{v}_{10}$  (см. рис. 1.). Для проекций скоростей  $v_{1x}$ ,  $v_{2x}$  из уравнений (1) получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} m_1 v_{10} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \\ \frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} \end{cases}. \quad (2)$$

Умножим все слагаемые второго уравнения на два, и перенесем налево в обоих уравнениях слагаемые, характеризующие импульс и энергию первого тела:

$$\begin{cases} m_1 (v_{10} - v_{1x}) = m_2 v_{2x} \\ m_1 (v_{10}^2 - v_{1x}^2) = m_2 v_{2x}^2 \end{cases} \quad (3)$$

После удара скорость первого тела должна измениться. Поэтому содержимое скобок в левых частях уравнений (3) отлично от нуля, и для упрощения системы можно поделить левые и правые части нижнего уравнения на соответствующие части верхнего уравнения. Результат деления сделаем вторым уравнением системы:

$$\begin{cases} m_1 (v_{10} - v_{1x}) = m_2 v_{2x} \\ v_{10} + v_{1x} = v_{2x} \end{cases}. \quad (4)$$

Отсюда нетрудно найти окончательные выражения для скоростей:

$$\begin{cases} v_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2} \\ v_{2x} = \frac{2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \end{cases} . \quad (5)$$

Из первого уравнения (5) следует, что в зависимости от соотношения масс первое тело после соударения может:

- а) продолжить движение вперед ( $m_1 > m_2$ ,  $v_{1x} > 0$ );
- б) остановится ( $m_1 = m_2$ ,  $v_{1x} = 0$ );
- в) поменять направление движения на противоположное ( $m_1 < m_2$ ,  $v_{1x} < 0$ ).

При абсолютно неупругом соударении рассмотренных выше тел, оба тела после удара движутся как одно целое с суммарной массой. В этом случае законы сохранения импульса и энергии принимают вид

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_{10} = (m_1 + m_2)\vec{v} \\ \frac{m_1v_{10}^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + W_{\text{пот}} \end{cases} . \quad (6)$$

Здесь  $\vec{v}$  – скорость тел после соударения,  $W_{\text{пот}}$  – потери механической энергии при соударении.

В первом уравнении (6) равенство векторов означает равенство их модулей, и для модуля скорости тел после соударения из этого уравнения находим

$$v = \frac{m_1v_{10}}{m_1 + m_2} . \quad (7)$$

Подставив во второе уравнение системы (6) вместо скорости  $v$  правую часть уравнения (7), получим следующее выражение для потерь механической энергии при соударении

$$W_{\text{пот}} = \frac{m_1m_2v_{10}^2}{2(m_1 + m_2)} . \quad (8)$$

Относительные потери механической энергии при неупругом соударении вычисляются по формуле

$$\frac{W_{\text{пот}}}{\frac{m_1v_{10}^2}{2}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} . \quad (9)$$

В качестве соударяющихся тел в лабораторной работе выступают две тележки, скользящие с малым трением по горизонтальному рельсу.

## Часть 2

Рассмотрим систему, состоящую из тележки  $M$  и гирьки  $m$ , соединенных невесомой нерастяжимой нитью (см. рис. 2.). Тележка с небольшим трением скользит по горизонтальному рельсу. Масса блока, через который перекинута нить, пренебрежимо мала.

Уравнения второго закона Ньютона для тележки и гирьки, соответственно, имеют вид

$$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}}; \quad (10)$$

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{T}_2 . \quad (11)$$

Здесь  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  – ускорения тележки и гирьки;  $\vec{N}$  – сила реакции опоры,  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$  – силы натяжения нити,  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – сила трения. Из-за нерастяжимости нити модули обоих ускорений равны друг другу,

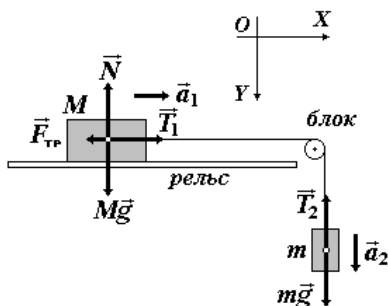


Рис. 2

обозначим их одной буквой:  $a_1 = a_2 = a$ . Из-за невесомости нити и блока можно также принять, что силы натяжения с обеих сторон блока равны друг другу:  $T_1 = T_2 = T$ .

Для проекций векторов на координатные оси из уравнения (10) получаем

$$\begin{cases} OY : N = Mg \\ OX : Ma = T - F_{\text{тр}} \end{cases}; \quad (12)$$

из уравнения (11):

$$OY : ma = mg - T. \quad (13)$$

Из второго уравнения системы (12) следует, что сила натяжения нити и ускорение тележки связаны соотношением

$$T = Ma + F_{\text{тр}}. \quad (14)$$

Если сила трения не изменяется во время эксперимента, то из соотношения (14) зависимость  $T(a)$  является линейной. Угловым коэффициентом этой зависимости равен массе  $M$  тележки, а значение силы натяжения при нулевом ускорении равно силе трения  $F_{\text{тр}}$ .

### Описание установки

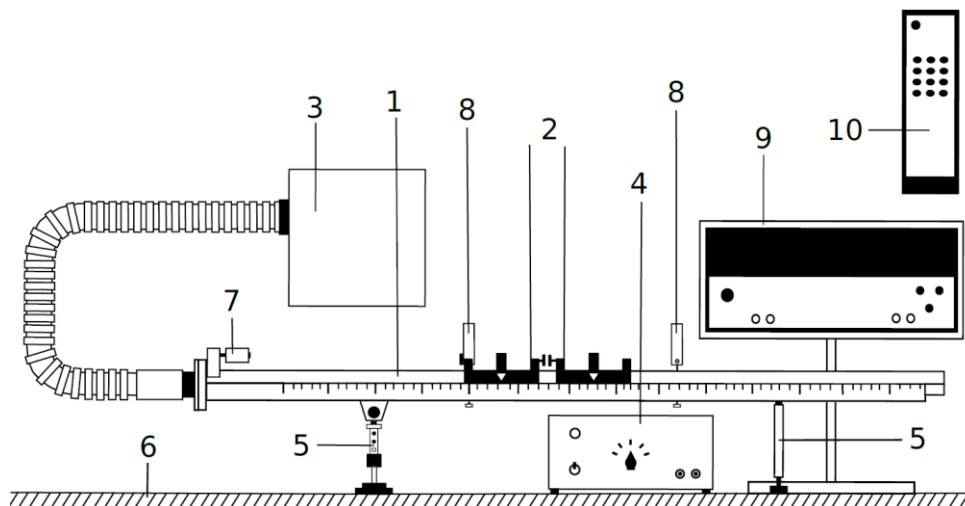


Рис. 3 Общий вид экспериментальной установки

Общий вид экспериментальной установки для первой части работы изображен на рис. 3. В состав установки входят:

1. Рельс с сантиметровой шкалой на лицевой стороне
2. Сталкивающиеся тележки
3. Воздушный насос
4. Источник питания насоса ВС 4-12
5. Опоры рельса
6. Опорная плоскость (поверхность стола)
7. Фиксирующий электромагнит
8. Оптические ворота
9. Цифровой измерительный прибор ПКЦ-3
10. Пульт дистанционного управления прибором ПКЦ-3

На левом конце рельса дополнительно к электромагниту крепиться пружинное кольцо, которое используется для придания начальной скорости тележкам в первой части работы.

При выполнении второй части работы на правом конце рельса устанавливается шкив, через который перебрасывается нить, связывающая тележку с гирькой.

Вместе с пультом управления измерительного прибора на каждую лабораторную установку выдаются: две тележки с флажками для оптических ворот; утяжелитель для тележки; пара сменных втулок с рогатками и резиновыми кольцами для исследования упругого удара; пара сменных втулок с половинками липучки для исследования неупругого удара; подвеска с нитью; шайбы-навески; пружинное кольцо. Для определения массы тележек и гирь используются лабораторные электронные весы.

### Характеристики средств измерения

Наименование средства измерения	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	Погрешность
Линейка на рельсе	1,30 м	1 см/дел	—	0,5 см
ПКЦ-3 в режиме измерения скорости	9,99 м/с	0,01 м/с.	—	0,01 м/с
Лабораторные весы	250 г	0,01 г	—	0,01 г

### Указания по технике безопасности

1. Не разрешается включать установку в отсутствие преподавателя или лаборанта.
2. Нельзя оставлять без наблюдения лабораторную установку во включенном состоянии.
3. Воспрещается держать насос включённым дольше 2-3 минут.
4. Все электрические провода и кабели должны свободно лежать на столе и не должны быть натянуты.
5. В случае искрения, появления дыма немедленно обесточить установку и сообщить преподавателю или лаборанту.
6. После окончания работы все электроприборы должны быть выключены из сети.

### Порядок выполнения работы

#### Задание 1. Измерение скоростей тележек до и после соударения

1. Включить насос (тумблер «сеть» на источнике). Установить направляющий рельс горизонтально. Для этого поместить тележку на рельс около точки с координатой 0,6 м (приблизительно в середине рельса) и, вращая винт правой опоры, добиться неподвижности тележки. Выключить насос.
2. Установить на левом конце рельса пусковое пружинное кольцо под втулку электромагнита.
3. Установить левые оптические ворота на  $x = 0,300$  м, правые – на  $x' = 0,700$  м.
4. Одна из тележек (будем обозначать её Т.1) снабжена стальной втулкой для фиксации тележки электромагнитом. В нижний канал свободной стойки этой тележки необходимо аккуратно вставить втулку с рогаткой. Такую же втулку вставить в нижний канал стойки другой тележки (будем обозначать её Т.2). Расположить тележки на рельсе, так чтобы рогатки были обращены друг к другу. Повернуть втулки с рогатками, так чтобы последние не задевали за рельс, и при соприкосновении натянутые на рогатки резиновые кольца были перпендикулярны друг другу. Снять вторую тележку с рельса.
5. Включить тумблер цифрового прибора (на правой боковой панели). Нажать последовательно кнопки на пульте управления: «режим работы: 0», «индикация: скорость  $v_1, v_2$ ».
6. Включить воздушный насос. Установить тележку Т.1 в стартовую позицию (см. п.6.), тележку Т.2 – в точку  $x = 0,550$  м (при выровненной скамье эта тележка должна оставаться до соударения на месте). Запустить движение первой тележки и запомнить показания

измерительного прибора для скорости  $v_{10}$  первой тележки до соударения и скоростей  $v_1$  и  $v_2$  тележек после соударения. Выключить насос.

Значения проекций скоростей занести в таблицу 1.1. В качестве положительного направления выбрать направление  $\vec{v}_{10}$ . Повторив измерения скоростей еще четыре раза, заполнить до конца таблицу 1.1.

7. Взвесить обе тележки на лабораторных весах и их массы  $m_1$  и  $m_2$  занести в таблицу 1.1

Таблица 1.1

№ опыта	$m_1$ , Г	$m_2$ , Г	$v_{10x}$ , м/с	$v_{1x}$ , м/с	$v_{2x}$ , м/с
1					
2					
3					
4					
5					

8. Надеть утяжелитель на центральную стойку второй тележки (не забыть обратно закрепить флажок). Провести пять раз измерения скоростей до и после соударения также, как в пп.6. Измерить массы тележек. Данные о сталкивающихся телах и скоростях занести в таблицу 1.2, аналогичную таблице 1.1. Обратите внимание, что после удара первая тележка движется противоположно первоначальному направлению, т.е. проекция её скорости **отрицательна** и в таблице эта скорость должна быть указана со знаком «-».
9. Снять со второй тележки утяжелитель. Втулки с рогатками заменить втулками с половинками липучки. **ВТУЛКИ С РОГАТКАМИ ВЕРНУТЬ В ФУТЛЯР ДЛЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТЕЙ.**
10. Провести пять раз измерения для скоростей  $v_{10}$  и  $v$  при абсолютно неупругом соударении тележек, аналогичные измерениям п.6., а также измерения масс тележек. Заполнить таблицу 2.1.

Таблица 2.1

№ опыта	$m_1$ , Г	$m_2$ , Г	$v_{10}$ , м/с	$v$ , м/с
1				
2				
3				
4				
5				

11. Провести по пять раз измерения скоростей  $v_{10}$  и  $v$  для неупругого соударения с утяжелителем на второй тележке. Измерить массы тележек. Результаты занести, в таблицы 2.2, подобную таблице 2.1.
12. Вынуть из тележек втулки с липучками, **СНЯТЬ ПУСКОВОЕ ПРУЖИННОЕ КОЛЬЦО** и положить их в футляр для принадлежностей. Электромагнит необходимо оставить укрепленным на рельсе.

## Задание 2. Измерение скорости тележки при ее разгоне под действием постоянной силы.

1. Установить первые оптические ворота на  $x_1 = 0,150$  м, вторые – на  $x_2 = 0,800$  м и **записать эти значения координат.**
2. Взвесить первую тележку и ее массу записать в заголовок таблицы 3.1. На свободную стойку первой тележки накинуть петлю нити с подвеской. Установить тележку в крайнем

положении на левом конце рельса. Перекинуть нить через блок, так чтобы подвеска свободно свисала над полом.

3. Придерживая тележку, включить воздушный насос и нажатием кнопки «механика: сброс» подать питание на электромагнит, фиксирующий тележку. Запустить тележку, нажав кнопку «механика: пуск». В момент пуска тележки подвеска не должна раскачиваться. Тележка начнет двигаться, последовательно пройдет левые и правые оптические ворота, и на дисплее прибора отразятся значения скоростей  $v_1$  и  $v_2$ . Выключить воздушный насос. Значения скоростей занести в таблицу 3.1.
4. Повторить измерения скоростей  $v_1, v_2$  также как в п.3, последовательно увеличивая массу гирьки с помощью дополнительных шайб (см. второй столбец таблицы 3.1).
5. Последовательно снимая по одной шайбе с подвески, измерить и занести в таблицу 3.1 значения массы гирьки.

Таблица 3.1. Разгоняемое тело – тележка 1.  $M_1 = \dots$

№ опыта	Состав гирьки	$m$ , г	$v_1$ , м/с	$v_2$ , м/с
1	подвеска			
2	подвеска + одна шайба			
3	подвеска + две шайбы			
4	подвеска + три шайбы			
5	подвеска + четыре шайбы			
6	подвеска + пять шайб			
7	подвеска + шесть шайб			

6. Установить на тележку утяжелитель. Провести измерения пп. 3,4,5 с теми же вариантами гирьки. Результаты занести в таблицу 3.2., подобную таблице 3.1. Взвесить тележку с утяжелителем, полученное значение массы записать в заголовок таблицы 3.2.
7. Вернуть в футляр утяжелитель, шайбы и подвеску с нитью

## Обработка результатов измерений.

### Задание 1. Исследование потерь импульса и механической энергии при упругом и неупругом соударении двух тележек

1. По данным таблицы 1.1 рассчитать и занести в таблицу 4.1 импульсы тел:

$$p_{10x} = m_1 v_{10x}, \quad p_{1x} = m_1 v_{1x}, \quad p_{2x} = m_2 v_{2x}. \quad (15)$$

Таблица 4.1

№ опыта	$p_{10x}$ , мН·с	$p_{1x}$ , мН·с	$p_{2x}$ , мН·с	$\delta_p$	$\delta_W$
1					
2					
3					
4					
5					

2. Вычислить для каждой строки 4.1 относительные изменения импульса и кинетической энергии системы при соударении по формулам

$$\delta_p = \Delta p_x / p_{10x} = \frac{(p_{1x} + p_{2x})}{p_{10x}} - 1, \quad (16)$$

$$\delta_W = \Delta W_K / W_{K0} = \frac{m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2}{m_1 v_{10x}^2} - 1 \quad . \quad (17)$$

Занести результаты в таблицу. Рассчитать средние значения  $\bar{\delta}_p$ ,  $\bar{\delta}_W$  относительных изменений импульса и энергии по двум последним колонкам таблицы 4.1:

$$\bar{\delta}_p = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_{pi}}{N}; \quad \bar{\delta}_W = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_{Wi}}{N} \quad . \quad (18)$$

Здесь  $i$  – номер опыта,  $N$  общее число опытов. По разбросу отдельных значений  $\delta_p$ ,  $\delta_W$  найти погрешности их средних значений (см. раздел «Прямые многократные измерения» в пособии «Обработка экспериментальных данных»):

$$\Delta \bar{\delta}_p = t_{\alpha_{\text{дов}}, N} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\delta_{pi} - \bar{\delta}_p)^2}{N(N-1)}}; \quad \Delta \bar{\delta}_W = t_{\alpha_{\text{дов}}, N} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\delta_{Wi} - \bar{\delta}_W)^2}{N(N-1)}} \quad , \quad (19)$$

где  $t_{\alpha_{\text{дов}}, N}$  – коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности  $\alpha_{\text{дов}} = 0,95$  и количества измерений  $N$ . Записать доверительные интервалы для  $\delta_p$  и  $\delta_W$ .

- По данным таблицы 1.2 вычислить импульсы (15) и относительные изменения импульса и энергии (16), (17). Результаты представить в таблице 4.2 подобной таблице 4.1. По двум последним колонкам таблицы 4.2 найти средние значения  $\bar{\delta}_p$ ,  $\bar{\delta}_W$ , соответствующие погрешности  $\Delta \bar{\delta}_p$ ,  $\Delta \bar{\delta}_W$ .
- По данным из таблицы 2.1 заполнить следующую таблицу.

Таблица 5.1

№ опыта	$p_{10}$ , мН·с	$p$ , мН·с	$\delta_p$	$\delta_W^{(\text{э})}$	$\delta_W^{(\text{т})}$
1					
2					
3					
4					
5					

Здесь

$$p_{10} = m_1 v_{10} - \text{импульс системы до соударения}; \quad (20)$$

$$p = (m_1 + m_2) v - \text{импульс системы после соударения}; \quad (21)$$

$$\delta_p = \Delta p / p_{10} = \frac{p_1}{p_{10}} - 1 - \text{относительное изменение импульса}; \quad (22)$$

$\delta_W^{(\text{э})}$  – экспериментальное значение относительного изменения механической энергии, вычисляемое по формуле

$$\delta_W^{(\text{э})} = \Delta W_K / W_{K0} = \frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{m_1 v_{10}^2} - 1 \quad , \quad (23)$$

$\delta_W^{(\text{т})}$  – теоретическое значение относительного изменения механической энергии, вычисляемое по формуле

$$\delta_W^{(T)} = -\frac{W_{\text{пот}}}{\frac{m_1 v_{10}^2}{2}} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} . \quad (24)$$

Вычислить средние значения  $\bar{\delta}_p$ ,  $\bar{\delta}_W^{(a)}$ , их погрешности и записать доверительные интервалы для  $\delta_p$  и  $\delta_W^{(a)}$ .

5. Выполнить вычисления пункта 5 для данных из таблицы 2.2, заполнив таблицу 5.2, подобную таблице 5.1.

## Задание 2. Исследование зависимости ускорения тележки от приложенной силы и массы тележки. Проверка второго закона Ньютона

1. Используя значения координат оптических ворот ( $x_1 = 0,150$  м,  $x_2 = 0,800$  м) и данные из таблицы 3.1, вычислить и записать в таблицу 6.1 ускорение  $a$  тележки и силу  $T$  натяжения нити:

$$a = \frac{(v_2)^2 - (v_1)^2}{2(x_2 - x_1)}, \quad T = m(g - a). \quad (25)$$

Ускорение свободного падения взять  $g = 9,82$  м/с<sup>2</sup> (на широте С-Петербурга). Формула для ускорения (25) следует из формул равноускоренного движения  $v = v_0 + at$  и  $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ . Формула для силы натяжения получается из уравнения (13).

Таблица 6.1

№ опыта	$m$ , г	$a$ , м/с <sup>2</sup>	$T$ , мН
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

2. Пользуясь таблицей 6.1, нанести на график точки экспериментальной зависимости  $T$  от  $a$ .
3. Найти массу  $M_1$  тележки (как коэффициент наклона экспериментальной зависимости  $T(a)$ ) и ее погрешность  $\Delta M_1$  методом наименьших квадратов (МНК). Основы данного метода приведены в пособии «Обработка экспериментальных данных».
4. Найти методом наименьших квадратов (МНК) величину силы трения  $F_{\text{тр}}$ , как свободное слагаемое экспериментальной зависимости  $T(a)$ .
5. Построить с помощью найденных по МНК параметров  $M_1$  и  $F_{\text{тр}}$  на той же координатной сетке, что в п.2, график зависимости (14).
6. Выполнить действия пунктов 1–5 для данных из таблицы 3.2, заполнив таблицу 6.2, подобную таблице 6.1, построив на той же координатной сетке, что в п.2, график зависимости  $T$  от  $a$  при разгоне утяжелённой тележки.



## Результаты лабораторной работы

1. Доверительные интервалы для относительных изменений импульса и энергии при упругом соударении двух легких тележек и соударении легкой тележки с утяжеленной.
2. Доверительные интервалы для относительных изменений импульса и энергии при неупругом соударении двух легких тележек и соударении легкой тележки с утяжеленной.
3. Теоретические значения относительного изменения энергии  $\delta_w^{(r)}$  при неупругом соударении двух легких тележек и соударении легкой тележки с утяжеленной. Вывод: попадает или нет теоретическое значение в указанные в п.2 экспериментальные доверительные интервалы
4. На одной координатной сетке графики зависимости силы натяжения от ускорения для легкой и утяжеленной тележки.
5. Доверительные интервалы для масс легкой и утяжеленной тележек, найденные из экспериментальной зависимости силы натяжения от ускорения тележки. Вывод о согласии табличных значений масс тележек с этими доверительными интервалами.

## Контрольные вопросы

1. При каком условии импульс системы тел сохраняется с течением времени?
2. При каком условии механическая энергия системы тел сохраняется с течением времени?
3. При каком условии кинетическая энергия системы тел сохраняется с течением времени?
4. Каковы теоретические значения изменения импульса системы при упругом и неупругом центральном соударении двух тел?
5. Как влияет наличие сил трения на измеряемое в задании 1 изменение импульса тележек?
6. Каковы теоретические значения изменения кинетической энергии системы при упругом и неупругом центральном соударении двух тел?
7. Как влияет наличие сил трения на измеряемое в задании 1 изменение кинетической энергии тележек?
8. От чего зависит, изменится или нет направление движения первой тележки в результате соударения при выполнении задания 1?
9. Каким соотношением связаны сила натяжения нити и ускорение тележки при выполнении задания 2, если силой трения для тележки можно пренебречь?
10. Может ли график зависимости силы натяжения нити от ускорения тележки при выполнении задания 2 идти ниже начала координат?
11. Как зависит величина силы сопротивления воздуха от скорости движения тележки в задании 2? Как эта зависимость могла бы повлиять на вид графика  $T(a)$ ?

## Список литературы

1. Курепин В.В., Баранов И.В. Обработка экспериментальных данных: Учеб.-метод. пособие - СПб.: НИУИТМО; ИХиБТ, 2012.
2. Боярский К.К., Смирнов А.В., Прищепенко О.Б. Механика. Ч.1: Кинематика, динамика: Учеб.-метод. пособие - СПб.: Университет ИТМО, 2019. // <https://books.ifmo.ru/book/2223>