[*Учебный Центр Общей Физики ФТФ ИТМО*](https://studyphysics.ifmo.ru)

**Лабораторная работа 1.01**

**Исследование распределения случайной величины**

**Цель работы**

1. Провести многократные измерения определенного интервала вре-мени.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

**Введение**

Случайной называется величина, изменяющаяся от опыта к опыту нерегулярно и на первый взгляд беспорядочно. Так, при бросании игральной кости (кубик с нумерованными гранями) мо-жет выпасть любое число от 1 до 6. Радиоактивное ядро может распасться в любую наперед избранную секунду, время жизни ядра до распада — случайная величина. При массовом изго-товлении любой продукции все изделия оказываются не вполне идентичными по параметрам. Таким образом, те или иные пара-метры для совокупности таких изделий также являются случай-ными величинами.

Результат каждого отдельного измерения случайной величи-ны непредсказуем. Но при многократном повторении измерений

* неизменных условиях совокупность их результатов описывает-ся статистическими закономерностями. Если бросать игральную

1

[*https://studyphysics.ifmo.ru*](https://studyphysics.ifmo.ru)

кость сотни раз, каждое определенное число (например, два) вы-падает примерно в 1/6 части общего числа попыток; для радио-активного вещества, содержащего очень большое число одинако-вых ядер, можно надежно предсказать число распадов за любой (но не слишком малый) наперед заданный промежуток времени. Удается подметить закономерности и в распределении по тому или иному параметру изделий, изготовляемых в массовом произ-водстве по определенной технологии.

Наряду со случайными встречаются величины неслучайные. Таковы прежде всего фундаментальные физические постоянные: скорость света в вакууме, заряд и масса электрона и т.п. К неслучайным величинам относятся и свойства конкретного об-разца в конкретных условиях, например, его плотность или теп-лоемкость. Но когда в реальном эксперименте измеряется даже неслучайная величина, из-за совместного действия многочислен-ных неконтролируемых причин результат отдельного измерения подвергается искажениям и становится величиной случайной. По-этому изучение статистических закономерностей служит одной из основ теории и практики физического и инженерного экспери-мента. Часто принимается, что результаты многократных измере-ний описываются функцией Гаусса (см. ниже) — так называемым законом нормального распределения.

* этой работе необходимо получить выборку (выборочную совокупность) для дискретной случайной величины и исследовать закон распределения этой случайной величины. В качестве ис-следуемой случайной величины выбран результат измерения за-данного промежутка времени. При помощи обычных часов с се-кундной стрелкой или стрелочного секундомера задают некото-рый промежуток времени и многократно измеряют его доста-точно точным цифровым секундомером.

Закономерности в распределении значений созданной таким образом случайной величины можно надежно выявить при со-блюдении двух условий:

1. число измерений достаточно велико;
2. чувствительность хронометра достаточна для регистрации из-

2

[*Учебный Центр Общей Физики ФТФ ИТМО*](https://studyphysics.ifmo.ru)

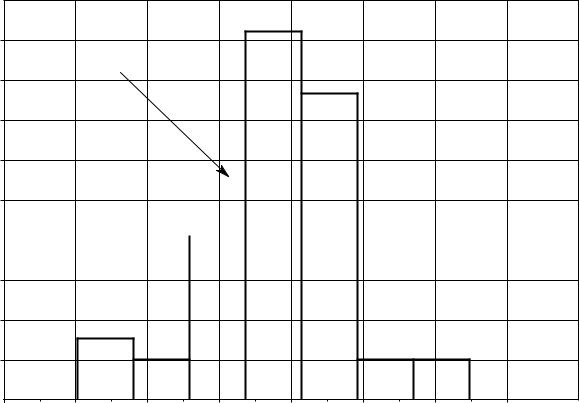
менений от опыта к опытy.

Обычно при задании человеком промежутка времени по се-кундомеру разброс не превышает нескольких десятых секунды, следовательно, на табло цифрового хронометра должны высвечи-ваться сотые и тысячные секунды. Регистрация следующих раз-рядов бесполезна и лишь усложняет обработку данных.

Закономерности распределения значений изучаемой случайной величины становятся наглядными, если построить гистограмму - ступенчатую диаграмму, показывающую, как часто при измерени-ях появляются значения, попадающие в тот или иной из равных интервалов , лежащих между наименьшим и наибольшим из измеренных значений величины . Гистограмму строят в

следующих координатах (см. рис. 1): ось абсцисс — измеряемая величина , ось ординат — значения .

0.9



0.8 ()

0.7

0.6

0.5

0.4 

0.3

0.2

0.1

1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5

РИС. 1. Гистограмма и функция Гаусса

Здесь - полное количество измерений, - количество

результатов, попавших в интервал [ ; + ]. Частное есть

доля результатов, попавших в указанный интервал, и характери-зует вероятность попадания в него результата отдельного изме-рения. Отношение этой величины к ширине интервала харак-теризует некоторую «плотность вероятности». При очень большом

3

[*https://studyphysics.ifmo.ru*](https://studyphysics.ifmo.ru)

числе измерений ( → ∞ ) весь диапазон значений в принципе можно разбить на «бесконечно малые» интервалы и подсчитать число результатов в каждом из них. Тогда вместо ступен-чатой гистограммы получится плавная кривая соответствующая новой функции :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | 1 | | | | (1) |  |
| ( ) = lim |  |  | = |  |  |  | . |  |
|  |  |  |  |  |
| →∞ | | | |  | | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

→0

Функцию ( ) называют плотностью вероятности или законом распределения исследуемой величины. Нормальное распределение описывается функцией Гаусса:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | | |  | )2 | | (2) |  |
| ( ) = | √ |  | exp ( − | − 2 | ) . |  |
|  |  |
|  | 2 | | | 2 | |  |  |

Как следует из формулы (2), вид нормального распределения определяется значениями двух параметров: математическим ожи-данием и среднеквадратичным (стандартным) отклонением . Нормальное распределение симметрично относительно вертикали

* абсциссой . Параметр характеризует «ширину» распре-деления: как несложно убедиться, точки перегиба графика нор-мального распределения (в них вторая производная функции ( ) обращается в ноль) отстоят от линии симметрии графика именно на .

Чтобы сравнить исследуемое вами распределение с нормаль-ным, проще всего, найти по данным измерений параметры и (приближенно, так как число измерений ограничено), вычислить для них функцию ( ) по формуле (2) и построить ее в тех же координатах, что и гистограмму (см. рис. 1).

Строго говоря, параметры и могут быть определены только на основе результатов бесконечно большого числа изме-рений (генеральной совокупности). Однако, в соответствии с тео-рией вероятности из выборочной совокупности, содержащей значений случайной величины ( 1, 2, 3, . . . ), можно найти при-ближенные значений этих параметров: выборочное среднее как

4

[*Учебный Центр Общей Физики ФТФ ИТМО*](https://studyphysics.ifmo.ru)

среднеарифметическое всех результатов измерений:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| = | 1 | |  | (1+ 2+...+ )= | 1 |  | , | (3) |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | ∑ | |  |
|  |  | | |  | =1 | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

и выборочное среднеквадратичное отклонение

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |  |  |  |  |
| = | |  | ∑ ( − )2. | | (4) |  |
|  |  |  |
|  |  |  | 1 |  |  |  |
|  | =1 |  |  |  |
|  | − |  |  |  |  |  |

В пределе величины и стремятся к и , соответ-

ственно.

Из формулы (2) сразу видно, что плотность нормального рас-пределения имеет максимум при = и симметрична отно-сительно этого значения: следует ожидать, что примерно так же будет выглядеть гистограмма. Можно сравнить максимальную «высоту» гистограммы и ( ):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| max = | √1 |  | . | (5) |
| 2 | | | |  |

Последнее соотношение получается, если в (2) положить = . Для количественной проверки того, насколько хорошо по-лученные результаты описываются нормальным распределением, воспользуемся соотношением для вероятности попадания резуль-

тата измерения в интервал [ 1, 2]:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2 |  | (6) |  |
| (1< <2)=∫ () ≈ |  |
|  | 12 |  |  |

1

Смысл соотношения (6) заключается в том, что вероятность ( 1 < < 2) попадания результата каждого измерения в интер-вал [ 1; 2], с одной стороны, может быть вычислена как интеграл функции распределения в этих пределах, а с другой — найде-на, как относительное число измерений 12, результаты которых

5

[*https://studyphysics.ifmo.ru*](https://studyphysics.ifmo.ru)

попали в этот интервал.

* случае наиболее употребительных на практике интервалов (так называемых стандартных) эта вероятность при условии ре-ализации нормального распределения случайной величины имеет следующие значения:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ∈[ − , + ], |  | 0,683 | |  |  |  |  |  |
| u | |  |  |  | (7) | |  |
| ∈[ −2 , +2 ], | u | |  |  |  |  |
|  | 2 |  | 0,954 |  |  |  |  |  |
| ∈[ −3 , +3 ], | 3 |  | 0,997 |  |  |  |  |  |
| u | |  |  |  |  |  |  |
| Из экспериментальной выборки объема можно найти при- | | | | | | | |  |
| ближенные значения вероятностей (7), как отношения | | | |  | , | ~~2~~ | , |  |
|  |  |  |  |  | |  | |  |

3 где , 2 , 3 — количества результатов измере-

ний, попавших в интервалы

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | [ | − | ,+], | | | |  |  |
|  |  |  |  | |  | (8) |  |
|  | [− 2 | | | , +2], | | |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | [ | − | 3,+3], | | | |  |  |
| соответственно. |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

**Лабораторная установка**

* работе используются устройство или прибор, в котором происходит периодический процесс с частотой порядка несколь-ких десятых долей герца (часы с секундной стрелкой, стрелочный секундомер, математический или физический маятник) и цифро-вой секундомер, с ценой деления не более 0,01 *с*. Первый прибор задает интервал времени, который многократно измеряется циф-ровым секундомером.

**Измерения и обработка результатов**

1. Выберите устанавливаемый по часам или секундомеру проме-жуток времени: рекомендуется целое число секунд от 5 до 10. Многократно устанавливая этот промежуток времени, проведите не менее 50 измерений. Результат каждого измерения (показания цифрового хронометра) заносите во второй столбец Табл. 1.

6

[*Учебный Центр Общей Физики ФТФ ИТМО*](https://studyphysics.ifmo.ru)

**Таблица 1:** Результаты прямых измерений

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | , *с* | − , *с* | (−)2 | , *с2* |
|  |  |  |  |  |

1

2

. . .

. . .

. . .

50

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| = ...*с* |  |  | = ...*с* | |  |  |
| ∑ ( − ) = ...*с* | |  |  |
|  | =1 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *-1* |  |
|  |  |  | = ... | |  |
|  |  |  |  | *с* | |  |

1. Постройте гистограмму, выполнив для этого следующие опе-рации:

– отыщите в Табл. 1 наименьший и наибольший из результатов измерений;

– промежуток [ ; ] разбейте на равных интервалов , соблюдая следующие условия; должно быть целым, близким к √ (напомним, - полное число измерений). Измеренные зна-чения и должны попадать внутрь «крайних» интервалов; граничные значения, разделяющие соседние интервалы, должны быть по возможности «круглыми» числами — это облегчит по-строение гистограммы. Границы выбранных интервалов заносите в первый столбец Табл. 2 (см. Приложение).

– подсчитайте число результатов измерений , из Табл. 1, по-павших в каждый из интервалов , заполнив таким образом

7

[*https://studyphysics.ifmo.ru*](https://studyphysics.ifmo.ru)

второй столбец Табл. 2;

– вычислите опытное значение плотности вероятности (третий столбец Табл. 2);

– постройте на миллиметровой бумаге гистограмму.

3. По данным Табл. 1 с помощью формул (3) и (4) вычислите

выборочное значение среднего и выборочное среднеквадра-

тичное отклонение ;

4. Запишите результаты в «подвал» Табл. 1.

Вычисление ∑ ( − ) хороший способ контроля правильно-

=1

сти нахождения .

1. По формуле (5) вычислите максимальное значение плотно-сти распределения , соответствующее = , занесите его в «подвал» Табл. 1.
2. Найдите значения , соответствующие серединам выбранных ранее интервалов, занесите их в четвертый столбец Табл. 2. Для

этих значений, используя параметры и в качестве и

, вычислите по формуле (2) значения плотности распределения ( ), занесите их в пятый столбец Табл. 2. Нанесите все рас-четные точки на график, на котором изображена гистограмма, и проводите через них плавную кривую.

7. Проверьте, насколько точно выполняется в ваших опытах со-

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| отношение между вероятностями (7) и долями |  | , | ~~2~~ | , | ~~3~~ | . |  |
|  |
|  |  | |  | |  | |  |

Для этого вычислите границы интервалов (8) для найденных ва-

ми значений и , занесите их во второй и третий столбцы

Табл. 3 (см. Приложение).

8. По данным Табл. 1 подсчитайте и занесите в Табл. 3 количе-ство измерений, попадающих в каждый из этих интервалов, и отношение этого количества к общему числу измерений.

Сравните их с соответствующими нормальному распределению значениями вероятности (7).

9. Рассчитайте среднеквадратичное отклонение среднего значения

8

[*Учебный Центр Общей Физики ФТФ ИТМО*](https://studyphysics.ifmo.ru)

по формуле:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 |  |  |  |  |  |
| = | | |  | ∑ ( − )2 | | (9) |  |
|  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | ( | | 1) |  |  |  |
|  |  | =1 |  |  |  |
|  |  |  | − |  |  |  |  |  |

10.Найдите табличное значение коэффициента Стьюдента , для доверительной вероятности = 0,95. Запишите доверительный интервал для измеряемого в работе промежутка времени.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| = | · , | (10) |  |
| , |  |

где , — коэффициент Стьюдента, зависящий от числа изме-рений и доверительной вероятности :

|  |  |
| --- | --- |
| = ( ∈[ − , + ]). | (11) |

**Контрольные вопрсы**

1. Являются ли, по вашему мнению, случайными следующие фи-зические величины:

– плотность алмаза при 20∘

– напряжение сети

– сопротивление резистора, взятого наугад из партии с одним и тем же номинальным сопротивлением

– число молекул в 1см3 при нормальных условиях?

Приведите другие примеры случайных и неслучайных физических величин.

1. Изучая распределение ЭДС партии электрических батареек, студент использовал цифровой вольтметр. После нескольких из-мерений получились такие результаты (в вольтах): 1,50; 1,49; 1,50; 1,50; 1,49. Имеет ли смысл продолжать измерения? Что бы вы изменили в методике этого эксперимента?
2. При обработке результатов измерений емкости партии кон-денсаторов получено: = 1,1 мкФ, = 0,1 мкФ. Если взять коробку со 100 конденсаторами из этой партии, то сколько среди

9

[*https://studyphysics.ifmo.ru*](https://studyphysics.ifmo.ru)

них можно ожидать конденсаторов с емкостью меньше 1 мкФ?

больше 1,3 мкФ?

**Литература**

1. Методическое пособие «Обработка экспериментальных дан-ных» / Курепин В.В., Баранов И.В., под ред. В.А. Самоле-това, 2012.
2. Элементарные оценки ошибок измерений / Зайдель А.Н., Изд. 3-е испр. и доп. Л., "Наука Ленинградское отделение, 1968.
3. Практическая физика / Сквайрс Дж., М.: Мир, 1971.

10

[*Учебный Центр Общей Физики ФТФ ИТМО*](https://studyphysics.ifmo.ru)

**Приложение**

**Таблица 2:** Данные для построения гистограммы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Границы |  |  | , *c*-1 | , *c* | , *c-1* |  |
| интервалов, *c* |  |  | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

11

[*https://studyphysics.ifmo.ru*](https://studyphysics.ifmo.ru)

**Таблица 3:** Стандартные доверительные интервалы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Интервал, *c* | | |  | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |
| от | до | |  |  |
|  |  |  |  |

±

± 2

± 3

12