

123. Definicja i przykład estymatora punktowego, jego własności (nieobciążoność, efektywność, zgodność), błąd estymatora, definicja estymatora przedziałowego, estymacja nieparametryczna funkcji gęstości–metoda jądrowa

123.1 Definicja estymatora (ogólnie):

Estymator jest statystyką służącą do szacowania wartości parametru rozkładu. Celem zastosowania estymatora jest znalezienie parametru rozkładu cechy w populacji.(wikipedia)

123.2 Estymator punkowy:

Taka statystyka $\hat{\theta}(X): \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}^k$ którego wartości $\hat{\theta}(X)$ są bliskie (w jakimś ustalonym sensie) wartości θ (rzeczywisty parametr)

123.3 Przykłady estymatorów punktowych:

Nieobciążonym i zgodnym estymatorem wartości oczekiwanej jest średnia wartość próby.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Gdy wartość oczekiwana rozkładu nie jest znana nieobciążonym i zgodnym estymatorem wariancji jest statystyka opisana wzorem:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Jako estymator odchylenia standardowego przyjmuje się pierwiastek z wartości estymatora wariancji.

123.4 Własności:

-nieobciążoność,

Estymator jest **nieobciążony**, jeśli wartość oczekiwana rozkładu estymatora jest równa wartości szacowanego parametru:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Jeśli różnica pomiędzy wartością oczekiwaną rozkładu estymatora a wartością szacowanego parametru jest zależna funkcyjnie od estymatora:

$$E(\hat{\theta}) - \theta = b(\hat{\theta})$$

to estymator nazywamy **obciążonym**, zaś samą różnicę nazywamy **obciążeniem estymatora**.

- efektywność

Estymator $\hat{\theta}$ jest **asymptotycznie najefektywniejszy**, jeśli przy wzrastającej liczebności próby wariancja estymatora $\hat{\theta}$ dąży do wariancji estymatora najefektywniejszego $\hat{\theta}^*$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D^2(\hat{\theta})}{D^2(\hat{\theta}^*)} = 1$$

gdzie $D^2(\hat{\theta})$ oznacza wariancję estymatora.

- zgodność

Estymator nazywamy zgodnym, jeśli jest stochastycznie (gr. stochastikos 'zdolny do domyslenia się czegoś, bystry' mat. o charakterze losowym; przypadkowy) zbieżny do szacowanego parametru:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\hat{\theta} - \theta| < \epsilon \} = 1$$

Oznacza to, że jeśli rośnie liczebność próby, rośnie też prawdopodobieństwo, że oszacowanie przy pomocy estymatora będzie przyjmować wartości coraz bliższe wartości szacowanego parametru. Inaczej: zwiększając liczebność próby, zmniejszamy ryzyko popełnienia błędu.

123.5 Błąd estymatora – różnica pomiędzy wartością dokładną a estymowaną.

$$d = \hat{\theta} - \theta$$

123.6 Estymator przedziałowy

(definicja prosta) Przedział liczbowy, zwany przedziałem ufności (Neymana), który z określonym prawdopodobieństwem pokryje estymowany parametr.
(definicja trudna))

Definicja Estymatorem przedziałowym parametru $\theta \in \Theta$ na poziomie ufności $1 - \alpha$ nazywamy parę $(\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n), \bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n))$, gdzie $\underline{\theta}, \bar{\theta} : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami mierzalnymi oraz

$$\forall_{\theta \in \Theta} \quad P(\theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]) \geq 1 - \alpha.$$

Przedział losowy $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ nazywamy *przedziałem ufności*. Liczbę $1 - \alpha$ nazywamy także współczynnikiem ufności.

123.7 Estymacja nieparametryczna funkcji gęstości – metoda jądrowa

Zdarza się, iż w niektórych sytuacjach nie wiemy z góry, z jakiego rozkładu pochodzi próbka prosta. Warto wówczas oczywiście naszkicować histogram, ale jeżeli próbka wskazuje na to, że rozkład jest ciągły, to warto także sporządzić tak zwany jądrowy estymator gęstości, który w tym punkcie omawiamy. Jego podstawową zaletą (w stosunku do histogramu) jest to, że jest on na ogół funkcją ciągłą.

Estymatorem jądrowym nienanej funkcji $f(x)$ jest funkcja:

$$f_n(x) = 1/(n \cdot h) \sum K(x - X/h)$$

h = szerokość pasmowa (parametr wygładzania)
 $K(x - X/h)$ - funkcja jądra

Przyjmuje się że $f \sim N(m, \zeta)$ wtedy optymalna wartość $h_e = 1,05 \zeta^{*} n^{-1/5}$

Aby wyznaczyć funkcję gęstości należy do wzoru na $f_n(x)$ podstawić funkcję jądra z określonym $h = 1,05 \zeta^{*} n^{-1/5}$

Funkcję $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy jądrem, gdy:

$$(1) K(x) \geq 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1,$$

$$(3) K(-x) = K(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Przykładami jąder są następujące funkcje:

1. $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - jądro gaussowskie,
2. $K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ - jądro Epanesznikowa,
3. $K(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ - jądro trójkątne.

Reszta można znaleźć tutaj :

http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Rachunek_prawdopodobie%C5%84stwa_i_statystyka/Wyk%C5%82ad_14:_Komputerowe_metody_statystyki