线性回归——音乐年代预测

目录

一. 概述：音乐年代预测与回归问题

1. 音乐年代预测问题

- 根据一首音乐的音频特征，推测这首音乐的发行年份。
  - 问题的输入：音乐的特征
  - 问题的输出：发行年份（是一个实数）
- 音乐年代预测问题是一个比较典型的***回归问题***。

2. 回归问题（regression）

- 和分类问题一样，回归问题也是以数据的特征为输入，以数据的标签为输出。
- 回归与分类的区别
  - 分类模型的输出是离散的、孤立的类别，比如鸢尾花的种类。
  - 回归模型的输出是连续的**数值**，比如这里的年份可以近似看作是连续的。
  - 分类问题是提供定性的输出，回归问题是提供定量的输出。
- 生活中的回归问题
  - 房屋价格预测
    - 输入一个房屋的地理位置、面积等特征
    - 输出这个房屋的价格
  - 气温预测
    - 输入某个时刻
    - 输出该时刻的气温

接下来，实验正式开始。

- 我们需要首先安装 `PrettyTable` 模组，它可以帮我们打印好看的表格（如果已安装可忽略）。
- 接着我们导入本课程代码所需要的 `python` 库（不能在后文的代码中自行import）。

In [1]:

```
# 安装PrettyTable模组
#! pip install PrettyTable
```

In [2]:

```
# 导入Python库
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import sklearn
from sklearn import linear_model
from sklearn import preprocessing
from sklearn import metrics
from sklearn.utils import shuffle
from io import StringIO
import sys
import hdf5_getters  # 和数据集一起放在根目录
import prettytable as pt
sns.set_style('whitegrid')
%matplotlib inline

print('导入成功！')
```

导入成功！

二. 数据集的加载与展示

1. 百万歌曲数据集

- 本课程采用的数据集来自于“百万歌曲数据集（Million Song Dataset, MSD）”。
  - 百万歌曲数据集包括了1,000,000首当代流行音乐的音频特征和元数据。
    - 音频特征是对歌曲的音频的数据描述，包括响度、音色、音调等。
    - 歌曲的*元数据*指歌曲名称、演唱者、词曲作者、发行公司、发行年份等信息，它们不能在歌曲的音频中直接体现。
- 每首歌用一个 `.h5` 文件储存其特征，所有的文件在一个目录树中分布。
  - `.h5` 文件使用 HDF5 格式储存数据，是一种层次化的数据储存格式。
  - 本数据集提供了 `hdf5_getters.py` 模组来读取这种格式的文件（已作为附件提供，也可在数据集官网中下载）。
  - 更多关于 HDF5 格式的知识可以参考维基百科：[https://en.wikipedia.org/wiki/Hierarchical_Data_Format (https://en.wikipedia.org/wiki/Hierarchical_Data_Format)](https://en.wikipedia.org/wiki/Hierarchical_Data_Format)
- 更多关于百万歌曲数据集的介绍、示例、下载等，可以参考官网：[http://millionsongdataset.com/ (http://millionsongdataset.com/)](http://millionsongdataset.com/)
  - 原始论文*The Million Song Dataset* [http://ismir2011.ismir.net/papers/OS6-1.pdf (http://ismir2011.ismir.net/papers/OS6-1.pdf)](http://ismir2011.ismir.net/papers/OS6-1.pdf)
- 下面，我们展示其中一首歌的特征。
  - 我们读取一个数据文件，用数据集提供的 `hdf5_getters` 模组来获取其中包含的特征。
  - 我们首先看一下一个数据文件中包含多少种特征，然后用表格的形式展示出来。

In [3]:

```
# 2.1 百万歌曲数据集
# 2.1.1 一首歌包括多少种特征
getter_list = list(filter(lambda x: x[:3] == 'get', hdf5_getters.__dict__.keys()))  # 特征的数量就是getter的种类
number_of_features = len(getter_list)
print(u'一首歌曲的特征数：', number_of_features)

#2.1.2 展示某文件的特征
print('文件TRAAABD128F429CF47.h5中的所有特征：')
file_path = 'TRAAABD128F429CF47.h5' # 数据集中的一个数据文件
file = hdf5_getters.open_h5_file_read(file_path)  # 读取文件

table = pt.PrettyTable()
table.field_names = ["序号", "特征名", "特征类型", "值/数组形状"]
for cnt, key in zip(range(1, number_of_features+1), getter_list):
    func = hdf5_getters.__dict__[key]
    if isinstance(func(file), np.ndarray):  # 如果是数组
        table.add_row([cnt, key[4:], str(type(func(file)))[14:-2], func(file).shape]) # 序号，特征名，特征类型，数组形状
    else:  # 不是数组
        table.add_row([cnt, key[4:], str(type(func(file)))[14:-2], func(file)]) # 序号，特征名，特征类型，特征值
print(table)
file.close()
```

一首歌曲的特征数： 55
文件TRAAABD128F429CF47.h5中的所有特征：

序号	特征名	特征类型	值/数组形状
1	num_songs	int64	1
2	artist_familiarity	float64	0.6306300375898077
3	artist_hotttnesss	float64	0.4174996449709784
4	artist_id	bytes_	b'ARMJAGH1187FB546F3'
5	artist_mbid	bytes_	b'1c78ab62-db33-4433-8d0b-7c8dcf1849c2'
6	artist_playmeid	int32	22066
7	artist_7digitalid	int32	1998
8	artist_latitude	float64	35.14968
9	artist_longitude	float64	-90.04892
10	artist_location	bytes_	b'Memphis, TN'
11	artist_name	bytes_	b'The Box Tops'
12	release	bytes_	b'Dimensions'
13	release_7digitalid	int32	300822
14	song_id	bytes_	b'SOCIWDW12A8C13D406'
15	song_hotttnesss	float64	nan
16	title	bytes_	b'Soul Deep'
17	track_7digitalid	int32	3400270
18	similar_artists	ndarray	(100,)
19	artist_terms	ndarray	(38,)
20	artist_terms_freq	ndarray	(38,)
21	artist_terms_weight	ndarray	(38,)
22	analysis_sample_rate	int32	22050
23	audio_md5	bytes_	b'bb9771eeef3d5b204a3c55e690f52a91'
24	danceability	float64	0.0
25	duration	float64	148.03546
26	end_of_fade_in	float64	0.148
27	energy	float64	0.0

28	key	int32	6
29	key_confidence	float64	0.169
30	loudness	float64	-9.843
31	mode	int32	0
32	mode_confidence	float64	0.43
33	start_of_fade_out	float64	137.915
34	tempo	float64	121.274
35	time_signature	int32	4
36	time_signature_confidence	float64	0.384
37	track_id	bytes_	b'TRAAABD128F429CF47'
38	segments_start	ndarray	(550,)
39	segments_confidence	ndarray	(550,)
40	segments_pitches	ndarray	(550, 12)
41	segments_timbre	ndarray	(550, 12)
42	segments_loudness_max	ndarray	(550,)
43	segments_loudness_max_time	ndarray	(550,)
44	segments_loudness_start	ndarray	(550,)
45	sections_start	ndarray	(9,)
46	sections_confidence	ndarray	(9,)
47	beats_start	ndarray	(296,)
48	beats_confidence	ndarray	(296,)
49	bars_start	ndarray	(73,)
50	bars_confidence	ndarray	(73,)
51	tatums_start	ndarray	(591,)
52	tatums_confidence	ndarray	(591,)
53	artist_mbtags	ndarray	(1,)
54	artist_mbtags_count	ndarray	(1,)
55	year	int32	1969

- 从上面的结果可以看出：
  - 每个样本都有55种特征。
  - 从数据类型看，有的特征值是一个实数或字符串，有的特征值是一个array。
  - 有的样本的部分特征值缺失了。（比如这里的song_hotttness，即歌曲热度，是nan，意为无效数据。）

2. 数据集的加载

- 在本实验中，我们要使用到百万歌曲数据集中的音频特征和发行年份。我们使用的是*YearPredictionMSD Data Set*。
  - 它是百万歌曲数据集的一个子集，包含了其中的音频特征和年份，由加州大学尔湾分校（UCI）的研究人员创建。
  - 这个数据集没有重复的样本，也没有缺失的数据。
  - 每一个样本都包含90个音频特征。这些特征包括12个平均值和78个协方差。为了时间和空间的效率，我们仅保留前12个音频特征，即12个平均值。
  - 来源：[https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/yearpredictionmsd (https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/yearpredictionmsd)](https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/yearpredictionmsd)

In [4]:

```python
# 数据集的加载
#################################### Question 1 ##########################################
# 要求:
#   - 加载数据集year_prediction.csv，保存为变量data，类型：DataFrame
#   - 将数据集的特征部分另存为变量X，类型：DataFrame
#   - 将数据集的标签部分另存为变量Y，类型：Series
################################ Start of Your code #######################################
data=pd.read_csv("year_prediction.csv")
TimbreAvg=['TimbreAvg'+str(i) for i in range(1,13)]
X=pd.DataFrame(data[TimbreAvg])
Y=pd.Series(data['label'])
################################# End of Your Code ########################################

assert X.shape[0] == Y.size  # 检验X和Y的样本数是否一致
print('读取成功！')

# 查看数据集的行数和列数
print('数据集中的样本数：', X.shape[0])
print('每个样本的特征数：', X.shape[1])

# 查看数据集的前5个样本
data.head(5)
```

```
读取成功!
数据集中的样本数： 515345
每个样本的特征数： 12
```

Out[4]:

	label	TimbreAvg1	TimbreAvg2	TimbreAvg3	TimbreAvg4	TimbreAvg5	TimbreAvg6	Timb
0	2001	49.94357	21.47114	73.07750	8.74861	-17.40628	-13.09905	-25
1	2001	48.73215	18.42930	70.32679	12.94636	-10.32437	-24.83777	8
2	2001	50.95714	31.85602	55.81851	13.41693	-6.57898	-18.54940	-3
3	2001	48.24750	-1.89837	36.29772	2.58776	0.97170	-26.21683	5
4	2001	50.97020	42.20998	67.09964	8.46791	-15.85279	-16.81409	-12

- 可见，数据集中有515345个样本，每个样本除了预测目标year以外，有12个特征。
- 这些特征包括12个平均值（TimbreAvg1~12）。
  - 每一个样本包含每首歌都被分为12个片段（segment），每个片段用一个12维的向量来表示它的音色（timbre）。对每个12维的向量求平均值，那么一首歌可以得到12个平均值。

3. 数据集的展示

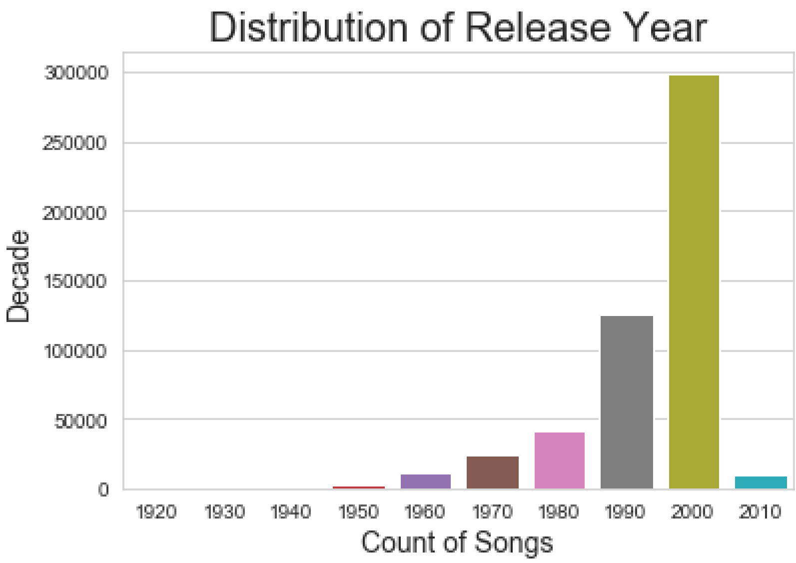
- 我们首先来以10年为一个单位，展示数据集中歌曲年代的分布。

In [5]:

```
# 每个十年的歌曲数
##################################### Question 2 ############################################
# 要求:
#   - 首先根据歌曲年份计算年代，并将歌曲年代作为一个额外的特征decade加入变量data中。
#     - 例如一首歌的发行年份是1986，那么它的decade列的数据应为1980
#   - 绘制一幅统计图，展示每个十年的歌曲数。
# 提示:
#   - 计数和绘图可使用seaborn.countplot()
################################# Start of Your code ########################################
decades=Y.array
for i in range(len(decades)):
    while(decades[i]%10!=0):
        decades[i]-=1
data['decade']=decades
sns.countplot(x=decades)
################################## End of Your Code #########################################

plt.title('Distribution of Release Year',fontsize=20)
plt.xlabel('Count of Songs',fontsize=14)
plt.ylabel('Decade',fontsize=14)
```

Out[5]:

Text(0, 0.5, 'Decade')



- 我们的任务，就是使用这些样本进行训练。
- 我们想要建立起一个回归模型，即对于一个未知的样本：
  - 输入：由12个特征值组成的向量
  - 输出：音乐的发行年代year

三. 特征筛选与预处理

1. 特征筛选

- 根据第二部分的结果，我们可以发现，在百万歌曲数据集中：
    1. 不是所有特征都是数字，能方便地进行数学计算；
    2. 不是所有特征都与我们的目标（预测年代）密切相关；
- 因此，需要对这些特征进行***特征筛选***，即：保留部分特征作为后续分析的输入。
- 我们采用的数据集YearPredictionMSD Data Set，已对百万歌曲数据集进行了数据筛选。
    - 只保留了和音色timbre有关的特征，然后进行计算，得到平均值和协方差。

2. 特征的数值分布展示

- 我们观察一下样本中各维度的数值分布情况。
    - 首先看一下各维度的统计数据：平均值、标准差、最小值、25%、50%、75%、最大值

In [6]:

```
X.describe()
```

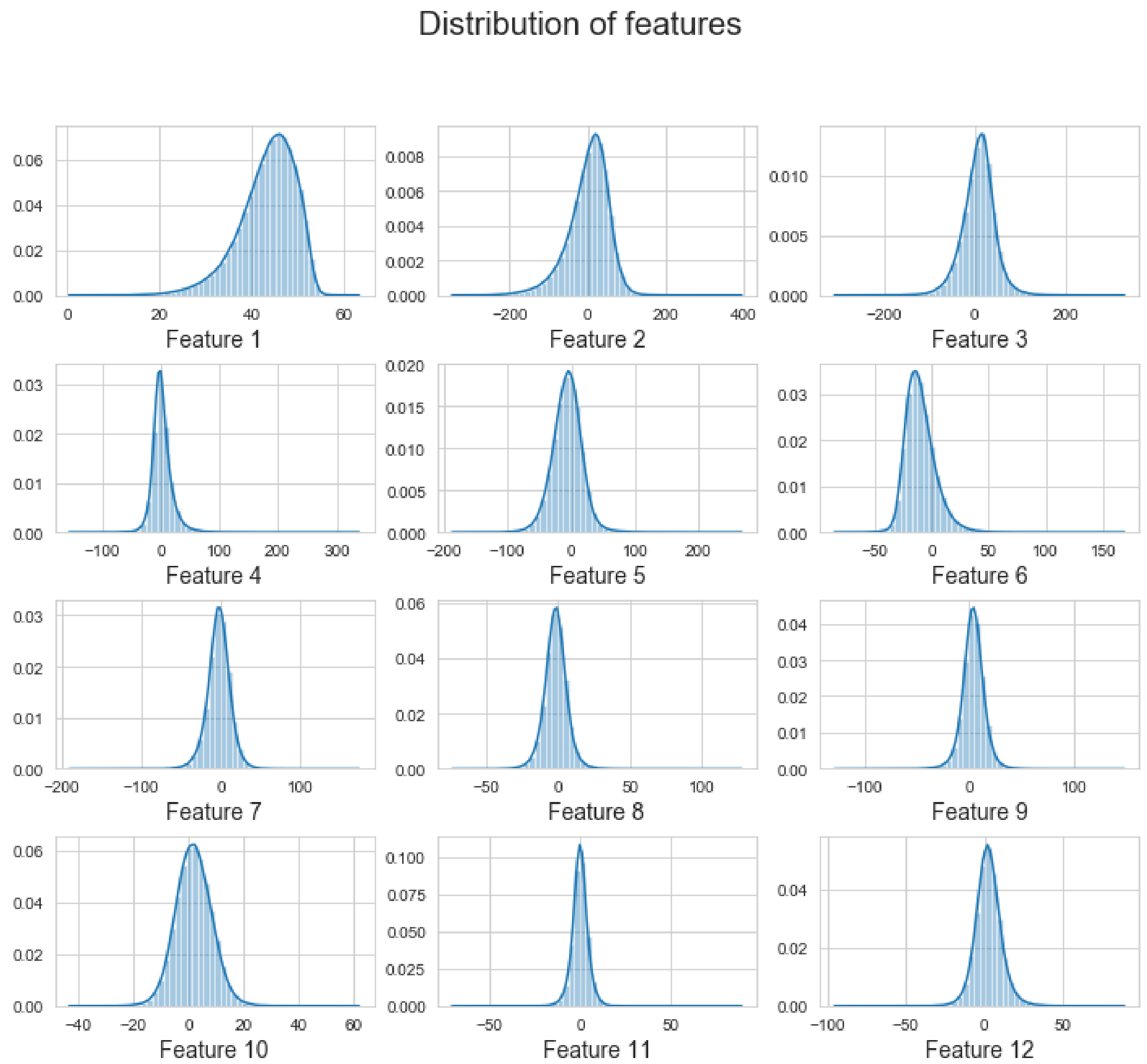
Out[6]:

	TimbreAvg1	TimbreAvg2	TimbreAvg3	TimbreAvg4	TimbreAvg5	Timbre
count	515345.000000	515345.000000	515345.000000	515345.000000	515345.000000	515345.0
mean	43.387126	1.289554	8.658347	1.164124	-6.553601	-9.5
std	6.067558	51.580351	35.268585	16.322790	22.860785	12.8
min	1.749000	-337.092500	-301.005060	-154.183580	-181.953370	-81.7
25%	39.954690	-26.059520	-11.462710	-8.487500	-20.666450	-18.4
50%	44.258500	8.417850	10.476320	-0.652840	-6.007770	-11.1
75%	47.833890	36.124010	29.764820	8.787540	7.741870	-2.3
max	61.970140	384.065730	322.851430	335.771820	262.068870	166.2

- 为了直观地展现特征的数值分布，下面绘制每个维度的分布直方图
    - 每一幅图的横坐标代表值的大小，纵坐标代表频数/分度值。

In [7]:

```python
fig = plt.figure(figsize=(12,10))   # 新建一个12*10的画布
fig.suptitle("Distribution of features", fontsize=20)
plt.subplots_adjust(hspace=0.4)
# 画12个子图
for i in range(12):
    ax = plt.subplot(4,3,i+1)
    sns.distplot(X.iloc[:,i])  # 调用seaborn中的直方图
    plt.xlabel(f'Feature {i+1}', fontsize=14)
```



- 可见：各个维度的数值范围差异是很大的，为此我们需要进行***特征缩放***。

3. 特征缩放

- 特征缩放：将各项特征的值缩放到相同或相近的大小范围。
- 为什么要进行特征缩放?
  - 模型在训练时会主要受数值大的特征影响
  - 如果不进行特征缩放，回归分析的训练时间会变长
  - 我们接下来使用的模型对数据的规模特别敏感，不缩放就很难训练
- 特征缩放的方法:
  1. ***标准化（Standardization）***：一般指使数据的均值为0，方差为1
     - 有时也指将数据的数值范围压缩到一个固定的范围，比如$[0, 1]$
  2. ***归一化（Normalization）***：使数据的特征向量缩放到单位长度
- 在本次实验中，我们选用 `scikit-learn` 中内建的特征缩放方法来处理数据
  - 可以参考 [https://scikit-learn.org/stable/modules/preprocessing.html (https://scikit-learn.org/stable/modules/preprocessing.html)](https://scikit-learn.org/stable/modules/preprocessing.html) 中6.3.1-3中的介绍

In [8]:

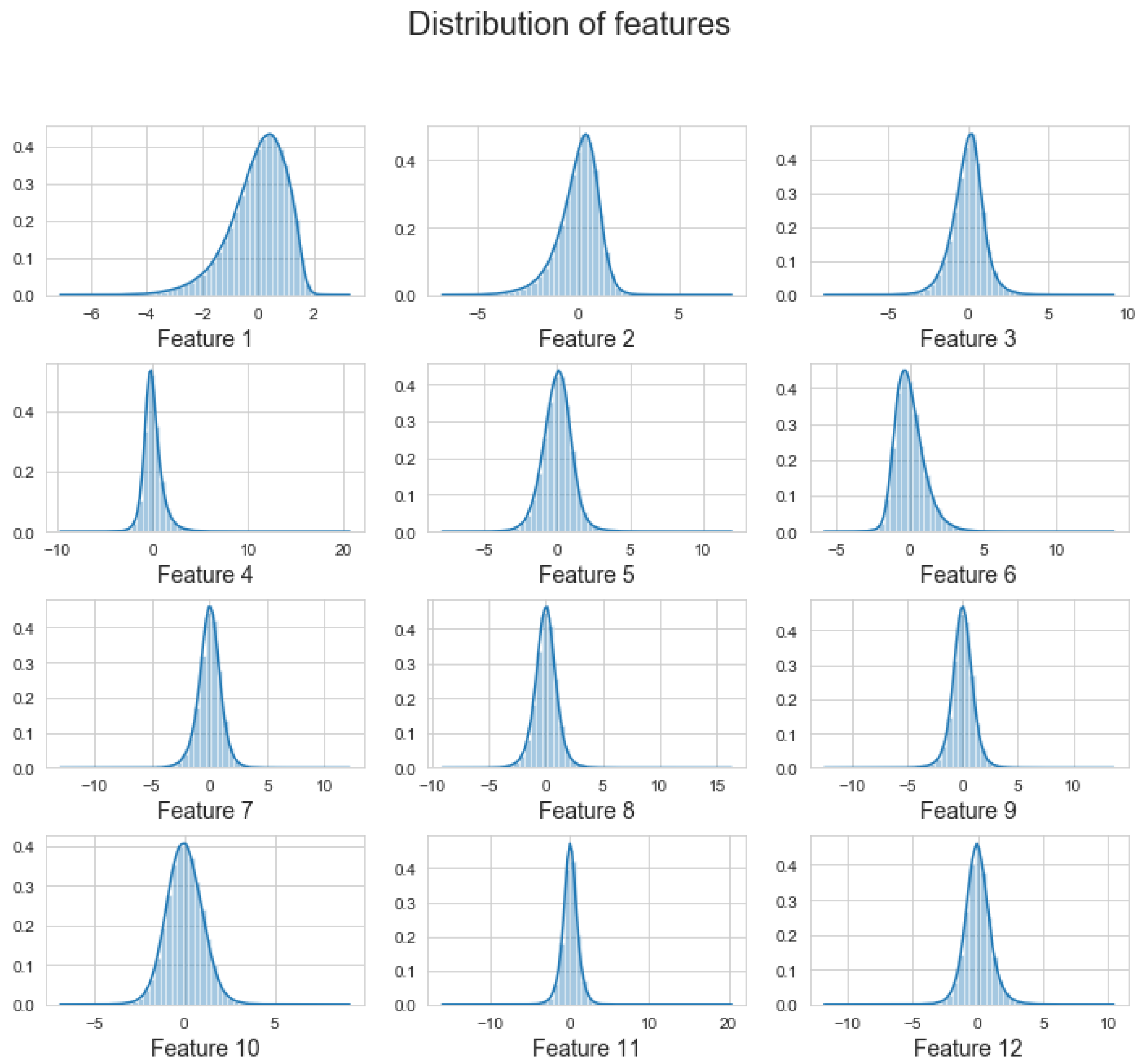
```
# 3.3 特征缩放
# 使用sklearn.preprocessing模组中的方法，对数据进行标准化
##################################### Question 2 ############################################
# 要求:
#   - 对X中的数据进行标准化，将缩放后的数据存为X_scaled，类型：DataFrame
#     - 使用sklearn.preprocessing中的特征缩放方法
# 提示:
#   - 参考上文提到的网址，选一个合适的Scaler
################################# Start of Your Code ######################################
X_scaled=pd.DataFrame(preprocessing.scale(X[TimbreAvg]))
################################## End of Your Code #######################################
# 展示各特征的统计量
X_scaled.describe()
```

Out[8]:

	0	1	2	3	4	
count	5.153450e+05	5.153450e+05	5.153450e+05	5.153450e+05	5.153450e+05	5.153450e
mean	-1.843818e-16	-1.101853e-17	6.831164e-17	2.202472e-16	1.260065e-16	-2.301772e
std	1.000001e+00	1.000001e+00	1.000001e+00	1.000001e+00	1.000001e+00	1.000001e
min	-6.862425e+00	-6.560296e+00	-8.780157e+00	-9.517237e+00	-7.672525e+00	-5.620919e
25%	-5.657035e-01	-5.302232e-01	-5.705099e-01	-5.912981e-01	-6.173394e-01	-6.936690e
50%	1.436122e-01	1.381980e-01	5.154657e-02	-1.113147e-01	2.387631e-02	-1.296040e
75%	7.328761e-01	6.753442e-01	5.984502e-01	4.670417e-01	6.253278e-01	5.547643e
max	3.062687e+00	7.420976e+00	8.908591e+00	2.049944e+01	1.175037e+01	1.366950e

In [9]:

```
fig = plt.figure(figsize=(12,10))  # 新建一个12*10的画布
fig.suptitle("Distribution of features", fontsize=20)
plt.subplots_adjust(hspace=0.4)
# 画12个子图
for i in range(12):
    ax = plt.subplot(4,3,i+1)
    sns.distplot(X_scaled.iloc[:,i])  # 调用seaborn中的直方图
    plt.xlabel(f'Feature {i+1}', fontsize=14)
```



4. 特征展示

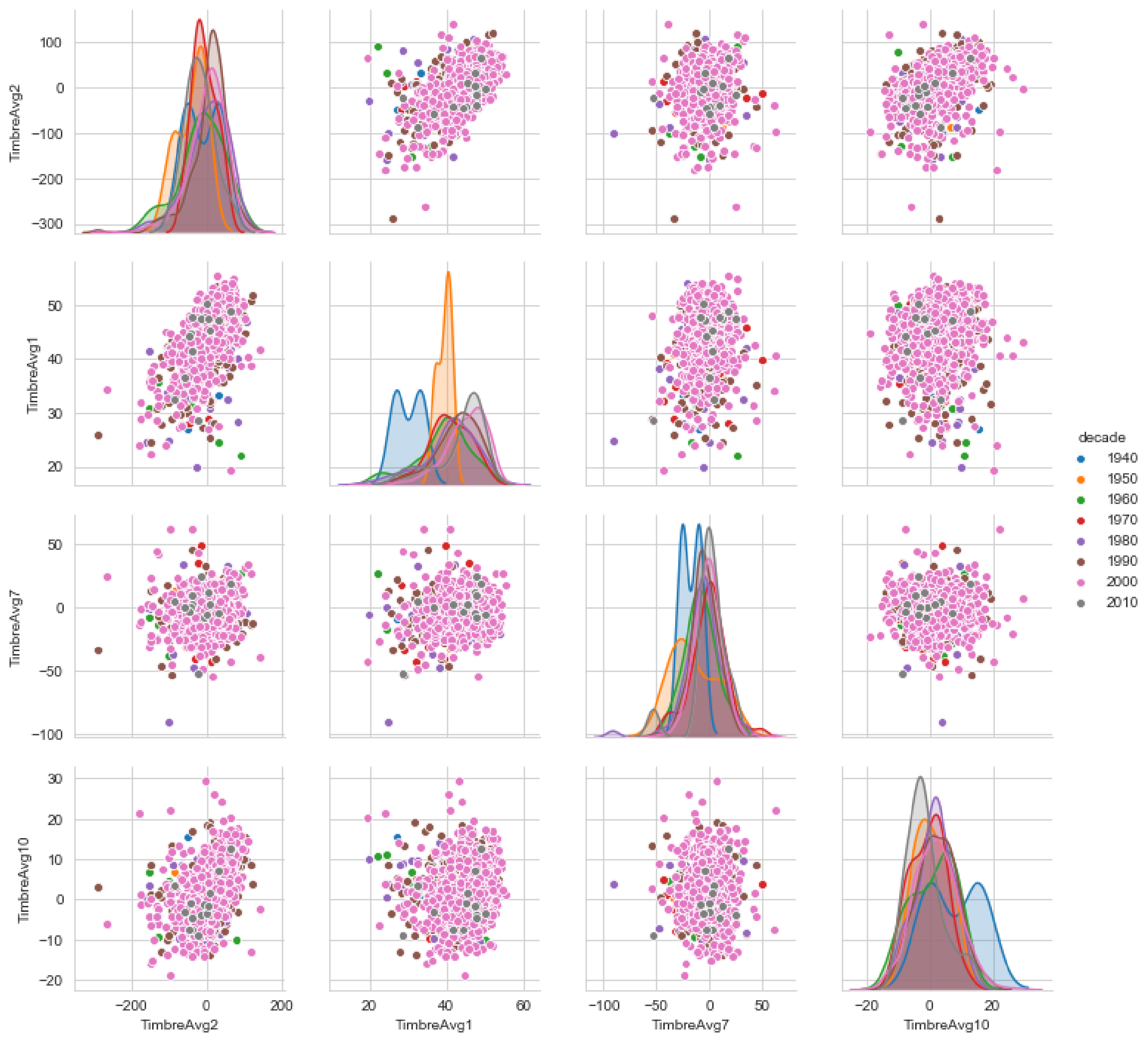
- 下面我们尝试直观展示一下不同年代音乐之间的特征差异
    - 随机抽取四个特征，做散点图

In [10]:

```
# 3.4 特征展示
X_sample=X.sample(n=4, axis=1)
X_sample['decade']=data['decade']
X_sample=X_sample.sample(1000)
sns.pairplot(data=X_sample, hue='decade', vars=X_sample.columns[:-1])
```

Out[10]:

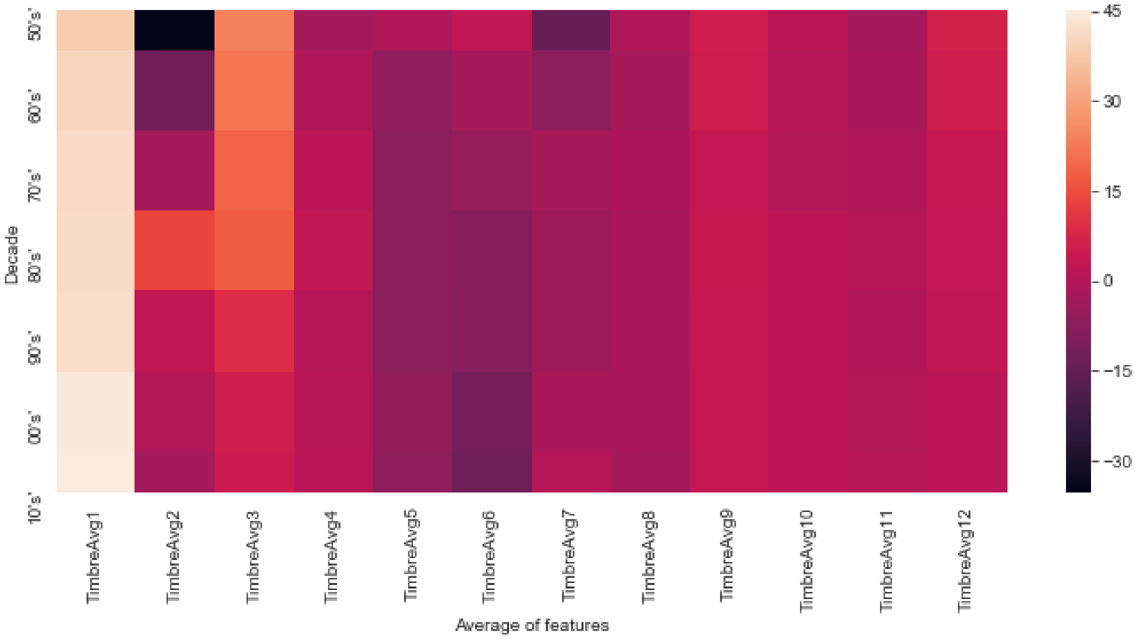
<seaborn.axisgrid.PairGrid at 0x276780a9688>



- 用热力图（heatmap）展现不同年代音乐的特征向量。
  - 我们剔除样本过少的20~40年代音乐，然后从每个年代的音乐中取相同数量，对它们的特征向量求平均值。
  - 颜色越浅代表这一年代音乐的某一平均特征的值越大。

In [11]:

```
data_t = data[data.decade>1940]  # 剔除40年代及以前
min_samples = data_t.decade.value_counts().min()
decades = data_t.decade.unique()
data_sampled = pd.DataFrame(columns=data_t.columns)

for decade in decades:
    data_sampled = data_sampled.append(data_t[data_t.decade==decade].sample(min_samples))
data_sampled.decade = data_sampled.decade.astype(int)

labels = ["{:02d}'s'".format(l%100) for l in sorted(data_sampled.decade.unique())]
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12,5))
sns.heatmap(data_sampled.groupby(['decade']).mean(), yticklabels=labels)
plt.ylabel("Decade")
plt.xlabel("Average of features")
plt.show()
```



5. 数据集划分

- 回归问题是一类***监督学习***的问题
  - 监督学习需要有训练数据集
- 我们把数据集划分为***训练数据集***和***测试数据集***
  - 模型仅使用训练集中的数据进行训练
  - 训练完成后，然后在测试集中进行测试
- 一般来说，需要指定训练集和测试集的比例。
  - 本课程采用的数据集推荐的划分是：前463,715个样本为训练集，后51,630个样本为测试集

In [12]:

```
# 3.5 数据集划分
#################################### Question 3 ###########################################
# 要求:
#   - 对数据进行数据集划分，要满足前463,715个样本为训练集，后51,630个样本为测试集
#   - 将训练集特征、测试集特征分别存为x_train, x_test，类型：DataFrame
#   - 将训练集目标、测试集目标分别存为y_train, y_test，类型：Series
################################ Start of Your Code #######################################
x_train=X[0:463715]
x_test=X[463715:]
y_train=Y[0:463715]
y_test=Y[463715:]
################################# End of Your Code ########################################

print(x_train.shape)
print(y_train.shape)
print(x_test.shape)
print(y_test.shape)
```

```
(463715, 12)
(463715,)
(51630, 12)
(51630,)
```

四. 线性回归

1. 线性回归

- **回归方程（regression equation）**，又叫**假设（hypothesis）**或**预测函数。**
  - 回归方程就是通过学习建立起来的，输入的特征向量与输出的关系式。
  - 有了回归方程，将一个未知样本的特征$\vec{x}$输入进去，就可得到他的输出值y的预测值。
  - 当回归方程是一个线性函数时，称为***线性回归***。

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n = \theta^T x$$

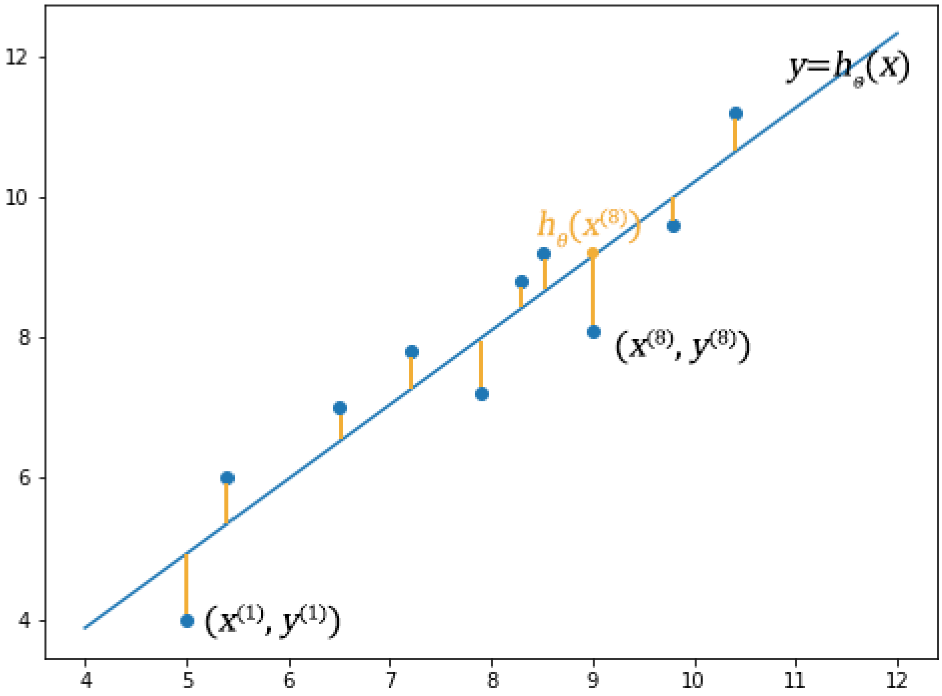
2. 代价函数

- 如何评估模型的好坏
  - ***代价函数***：评估真实值与预测值之间的差异
  - 在线性回归中，我们常用平方损失（squared loss）来描述误差

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2, \quad m \text{ 为样本数}$$

  - 用矩阵的记号写出来

$$J(\theta) = \frac{1}{2m} (X\theta - y)^T (X\theta - y)$$



- 回归模型的训练过程就是为了得到最好的模型，也就是**让代价函数最小**
  - 解析求解（`Sklearn` 里的 `LinearRegression`）
    - 可以通过**最小二乘法**得到回归公式中θ的解析解
    - 只需要将上面的回归公式对θ求导，令其为0，即可解得θ的解析解。这个解是：

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

    - 上面的这个解叫做**正规方程（normal equation）**
  - 解析求解对于大规模的数据有什么问题
    - 当样本特征数大的时候，计算$(X^T X)^{-1}$十分困难
  - 我们还可以使用梯度下降的方法得到所需的θ

3. 梯度下降

- ***梯度下降***
  - 沿着$J(\theta)$的负梯度方向走，我们就能接近其最小值，或者极小值，从而接近更高的预测精度。
  - 重复计算下面的公式，直到收敛：

$$\theta_j = \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) \quad \alpha \text{ 为学习率}$$

  - 计算$J(\theta)$的梯度，得：

$$\theta_j = \theta_j + \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y^{(i)} - h_\theta(x^{(i)}))x_j^{(i)}$$

- ***收敛***:
  - 这个沿着负梯度向下的过程一直迭代重复，直到$J(\theta)$的值基本不变了，就称为收敛。
  - 这时候我们就知道达到了极小值。
- ***随机梯度下降（Stochastic Gradient Descent）*** （`Sklearn` 里的 `SGDRegressor` ）
  - 根据上面的公式，每调整一次θ，都需要把整个训练数据集都过一遍，效率太低了。
  - 随机梯度下降就是每次迭代时只任选一个样本进行更新，不再对所有样本都计算一遍并求和。

$$\text{重复直到收敛（Repeat until convergence）：}$$
$$\text{for } i = 1 \text{ to } m:$$
$$\theta_j = \theta_j + \alpha(y^{(i)} - h_\theta(x^{(i)}))x_j^{(i)}$$

  - 可能会出现抖动，不一定能获得全局最优
- ***学习率（步长）***
  - 梯度下降公式中，梯度前面的系数α就是学习率，又叫步长。
  - 学习率标识了沿梯度方向行进的速率，是一个重要的超参数。
  - 如果学习率太大，很可能“迈过”最小值。如果太小，则会收敛得很慢。

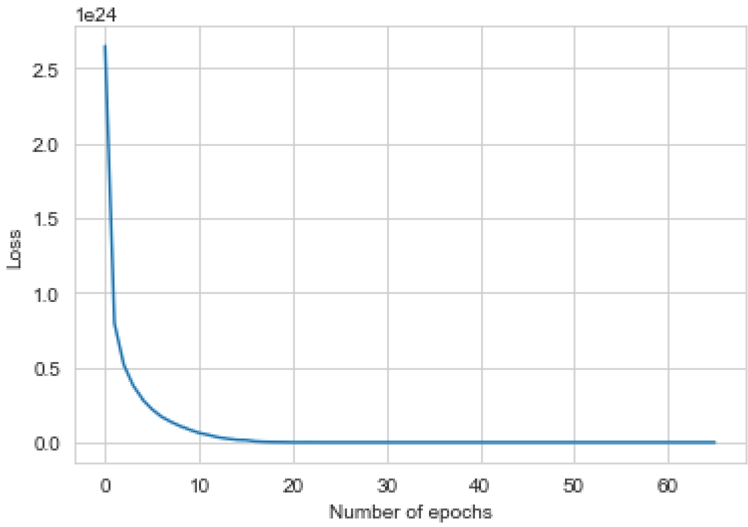
In [13]:

```python
# 4 线性回归预测歌曲的年份

# 用于保存代价函数的历史记录
old_stdout = sys.stdout
sys.stdout = mystdout = StringIO()

# 模型训练
####################################### Question 4 #################################################
# 要求：
#    - 为lin_reg确定合适的参数，并拟合x_train, y_train进行训练
#    - 使用sklearn.linear_model.SGDRegressor()
#    - 参数verbose应设为1，以遍绘制代价函数的下降
################################### Start of Your Code #############################################
clt=linear_model.SGDRegressor(max_iter=10000, tol=1e-3,verbose=1)
lin_reg=clt.fit(x_train, y_train)
#################################### End of Your Code ##############################################

# 得到代价函数的历史记录
sys.stdout = old_stdout
loss_history = mystdout.getvalue()
loss_list = []
for line in loss_history.split('\n'):
    if len(line.split("loss: ")) == 1:
        continue
    loss_list.append(float(line.split("loss: ")[-1]))

print('迭代次数:', len(loss_list))

# 代价函数下降的可视化
plt.figure()
plt.plot(np.arange(len(loss_list)), loss_list)
plt.xlabel("Number of epochs")
plt.ylabel("Loss")
```

迭代次数: 66

Out[13]:

Text(0, 0.5, 'Loss')



- 得到训练好的线性回归模型之后，下面评估其预测结果
  - 分别在训练集、测试集上评估模型预测值的准确率和均方误差
    - 计算准确率时，不能以完全相等作为相等，应该给定一个范围。
    - 本题中，当预测值与真实值的偏差小于等于5时，认为预测准确。
      - 譬如，若真实年份为2000年，预测年份为1995~2005之间都算作预测准确。
    - ***均方误差（Mean square error, MSE）***也可以作为评价标准
  - 然后从训练集、测试集上分别抽取一些样本，直观对比的它们真实值和预测值

In [14]:

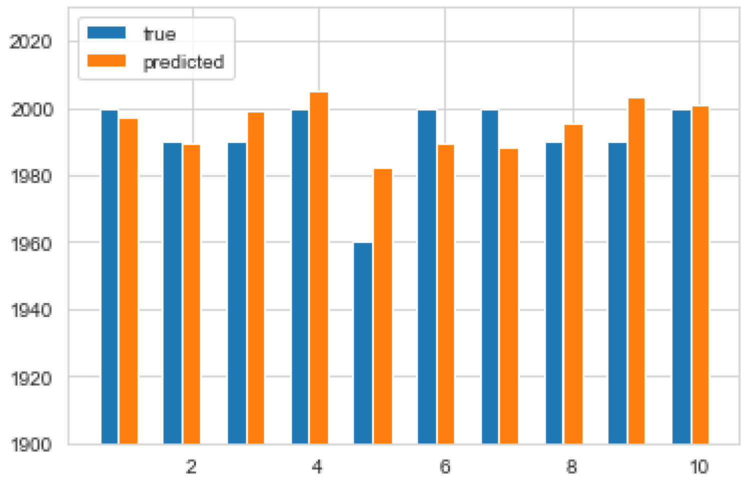
```
#################################### Question 5 ############################################
# 要求：完成函数evaluate_model()，使其具备下面的功能。
#   - 功能：得到一个模型在一个数据集上的准确率和均方差
#     - 注：本题中，对某一样本，当预测值与实际值相差不大于5时，认为预测准确。
#   - 参数:
#     - model：要评估的模型
#     - X: 数据集的特征
#     - y：数据集的标签
#   - 返回值:
#     - 返回值1：准确率
#     - 返回值2：均方误差
# 提示:
#   - 准确率的计算可以借助sklearn.metrics.accuracy_score()方法
#   - 均方差的计算可以借助sklearn.metrics.mean_squared_error()方法
#   - 上面提到的两种方法只是一种可能的实现，并不是一定要用到
################################ Start of Your Code ########################################
def evaluate_model(model,X,y):
    y_pred=model.predict(X)
    yp=y_pred.round()
    yt=y.values
    accuracy=np.mean(abs(yp-yt)<5)
    mean_squeare_error=sklearn.metrics.mean_squared_error(yp,yt)
    return accuracy,mean_squeare_error



################################## End of Your Code ########################################

# 训练集准确率和均方差
accuracy_rate_lr_train, mse_lr_train = evaluate_model(lin_reg, x_train, y_train)
print('模型训练准确率为:', accuracy_rate_lr_train)
print('模型训练均方误差为:', mse_lr_train)

# 测试集准确率和均方差
accuracy_rate_lr_test, mse_lr_test = evaluate_model(lin_reg, x_test, y_test)
print('模型测试准确率为:', accuracy_rate_lr_test)
print('模型测试均方误差为:', mse_lr_test)
```

```
模型训练准确率为: 0.31914214549885167
模型训练均方误差为: 142.2355347573402
模型测试准确率为: 0.3200464846019756
模型测试均方误差为: 140.64925430950998
```

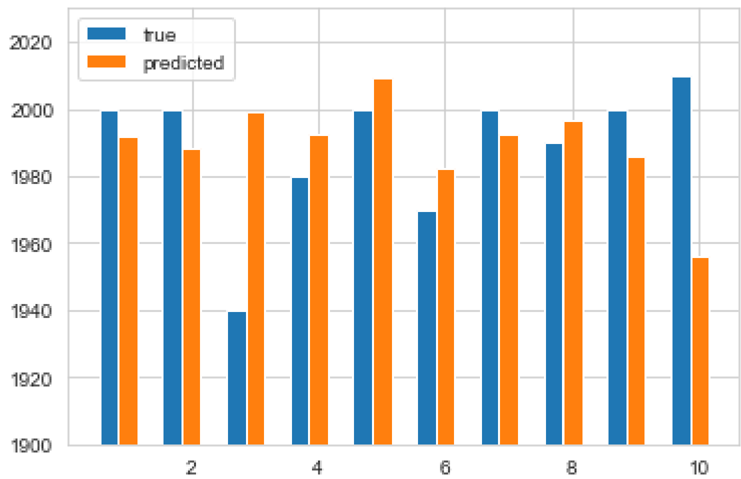
In [15]:

```
def barplot(true, pred, yi=None, ym=None):
    """
    用于绘制柱状图以对比真实值和预测值的函数
    yi: 纵坐标的下限
    ym: 纵坐标的上限
    """
    width=0.3;
    x = np.array([x for x in range(1,len(true)+1)]); # 第一个数据序列x轴
    x1 = x - width; # 为使其并列，使得第一个x轴序列全部减去条宽度
    plt.bar(x1,true,width=width, label='true');
    plt.bar(x,pred,width=width, label='predicted');
    plt.legend(loc='upper left'); # 设置标签显示在左上角
    if yi and ym:
        plt.ylim(yi,ym);
    plt.show();


# 针对训练数据集，对比预测值和实际值
samples_x_train, samples_y_train = shuffle(x_train, y_train, n_samples=10, random_state=0)  # 从训练集中随机选取10个样本
predicted_train = lin_reg.predict(samples_x_train)
print('训练集样本的原始标签:\n', samples_y_train.values)
print('训练集样本的预测结果:\n', predicted_train)
barplot(samples_y_train, predicted_train, 1900, 2030)
print('--------------------------------------------')

# 针对测试数据集，展示预测效果
samples_x_test, samples_y_test = shuffle(x_test, y_test, n_samples=10, random_state=0)
predicted_test = lin_reg.predict(samples_x_test)
print('测试集样本的原始标签:', samples_y_test.values)
print('测试集样本的预测结果:', predicted_test)
barplot(samples_y_test, predicted_test, 1900, 2030)
```

```
训练集样本的原始标签:
 [2000 1990 1990 2000 1960 2000 2000 1990 1990 2000]
训练集样本的预测结果:
 [1997.29531384 1989.60405111 1998.90959059 2005.1732602  1982.31593097
 1989.28555605 1988.36741486 1995.50348708 2003.42181821 2001.0929509 ]
```




```
--------------------------------------------
测试集样本的原始标签: [2000 2000 1940 1980 2000 1970 2000 1990 2000 2010]
测试集样本的预测结果: [1992.11289458 1988.41188452 1998.86346474 1992.45354456 200
9.30456643
 1982.41598706 1992.75821555 1996.48032255 1986.17313856 1956.00634536]
```



对比模型对于训练数据集和测试数据集的预测结果

- 可以看到，模型对测试集的预测效果往往不如训练集的效果。
- 如果训练集训练出来的模型也能很好地预测测试集的数据，那么这个模型的**泛化**能力就好。

五. 多项式回归

1. 多项式回归介绍

- **多项式回归**
  - 不再使用单纯的线性函数去拟合数据，而是使用一个多项式函数。
  - 例如，一个二次多项式：
$$P_2(x) = \theta^T[1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2]$$
  - 会拓展数据集特征空间的维度
- 当线性回归效果不好时，即***欠拟合***时，需要尝试多项式回归
  - 欠拟合：当模型在训练集中表现不好时，自然更不会在测试数据中表现得好。这种情况就是欠拟合。

2. 交互项

- 多项式回归中可以增加***交互项***
- 什么是交互项
  - 例如，在二次多项式$P(x) = \theta^T[1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2]$中，$x_1x_2$就是交叉项
- 以本课问题为例，如果某一音乐家在某一年代倾向于创作较长的音乐，另一时间段倾向于创作较短的音乐。这种情况下，可以增加创作者这一特征和音乐时长这一特征的交互项，帮助模型拟合
  - 我们这里并没有这么做，因为选取的特征并不符合这一特征

In [16]:

```
# 5 使用多项式回归训练模型

# 多项式数据准备
###################################### Question 6 ################################################
# 要求：
#   - 将X中的数据转化成三次多项式的数据
#   - 再将转化好的数据进行标准化、数据划分，得到poly_x_train, poly_x_test，类型：DataFrame
#       - 数据划分的比例仍应该按照Question 3的要求
# 提示：
#   - 使用sklearn.preprocessing.PolynomialFeatures()进行转化
#   - 如果计算机的性能很差，可以只使用二次多项式（一般来说都是可以的）
################################## Start of Your Code ############################################
poly=sklearn.preprocessing.PolynomialFeatures(3)
Xp=poly.fit_transform(X)
Xp=pd.DataFrame(preprocessing.scale(Xp))
poly_x_train=Xp[0:463715]
poly_x_test=Xp[463715:]
################################## End of Your Code ##############################################
print(poly_x_train.shape)
print(poly_x_test.shape)
```

```
(463715, 455)
(51630, 455)
```

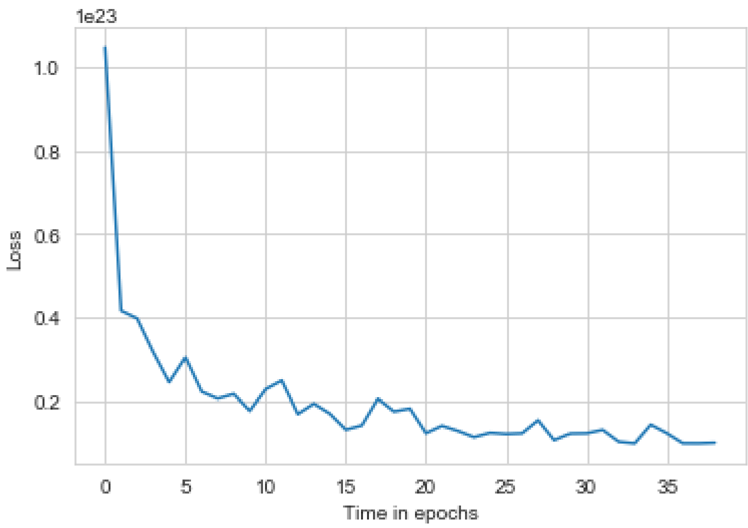
In [17]:

```
# 用于保存代价函数的历史记录
old_stdout = sys.stdout
sys.stdout = mystdout = StringIO()

# 模型训练
####################################### Question 7 #################################################
# 要求:
#    - 为pol_reg确定合适的参数，并拟合poly_x_train, y_train进行训练
#    - 使用sklearn.linear_model.SGDRegressor()
#    - 参数verbose应设为1，以遍绘制代价函数的下降
################################### Start of Your Code #############################################
pol_reg=linear_model.SGDRegressor(max_iter=1000, tol=1e-3, verbose=1)
pol_reg.fit(poly_x_train,y_train)
#################################### End of Your Code ##############################################

# 得到代价函数的历史记录
sys.stdout = old_stdout
loss_history = mystdout.getvalue()
loss_list = []
for line in loss_history.split('\n'):
    if(len(line.split("loss: ")) == 1):
        continue
    loss_list.append(float(line.split("loss: ")[-1]))

print(len(loss_list))

# 代价函数下降的可视化
plt.figure()
plt.plot(np.arange(len(loss_list)), loss_list)
plt.xlabel("Time in epochs")
plt.ylabel("Loss")
```

39

Out[17]:

Text(0, 0.5, 'Loss')

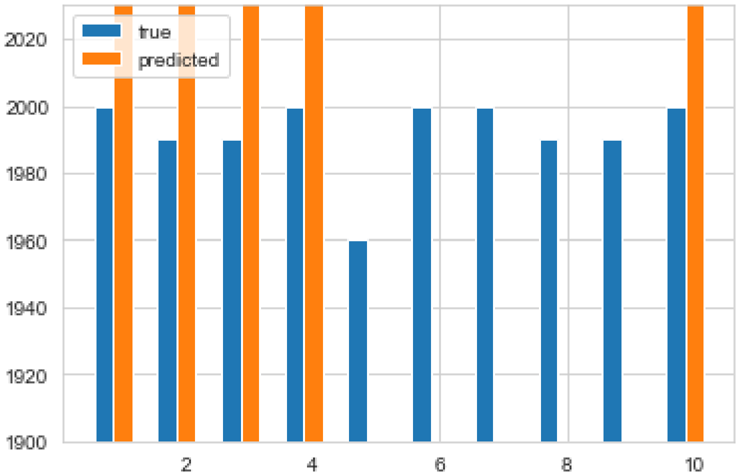


In [18]:

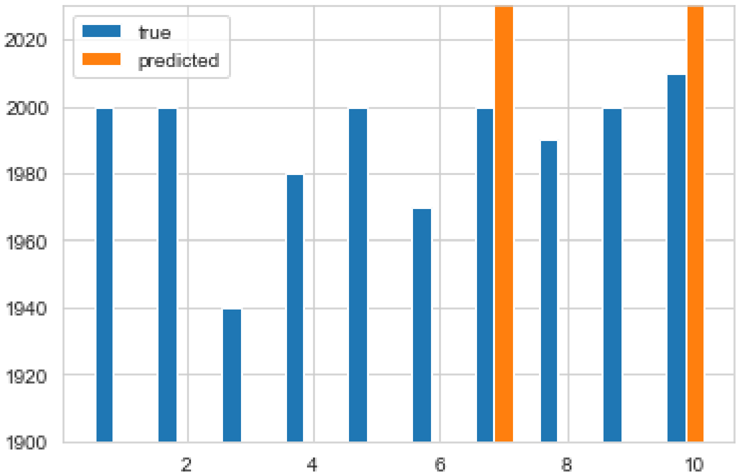
```
# 训练集准确率和均方差
accuracy_rate_pr_train, mse_pr_train = evaluate_model(pol_reg, poly_x_train, y_train)
print('模型训练准确率为:', accuracy_rate_pr_train)
print('模型训练均方误差为:', mse_pr_train)

# 测试集准确率和均方差
accuracy_rate_pr_test, mse_pr_test = evaluate_model(pol_reg, poly_x_test, y_test)
print('模型测试准确率为:', accuracy_rate_pr_test)
print('模型测试均方误差为:', mse_pr_test)

print('-------------------------------------------')

# 针对训练数据集，展示预测效果
samples_poly_x_train, samples_y_train = shuffle(poly_x_train, y_train, n_samples=10, random_stat
e=0)
poly_predicted_train = pol_reg.predict(samples_poly_x_train)
print('训练集样本的原始标签:', samples_y_train.values)
print('训练集样本的预测结果:', poly_predicted_train)
barplot(samples_y_train, poly_predicted_train, 1900, 2030)
print('-------------------------------------------')

# 针对测试数据集，展示预测效果
samples_poly_x_test, samples_y_test = shuffle(poly_x_test, y_test, n_samples=10, random_state=0)
poly_predicted_test = pol_reg.predict(samples_poly_x_test)
print('测试集样本的原始标签:', samples_y_test.values)
print('测试集样本的预测结果:', poly_predicted_test)
barplot(samples_y_test, poly_predicted_test, 1900, 2030)
```

模型训练准确率为: 0.0
模型训练均方误差为: 1.0251241607510815e+22
模型测试准确率为: 0.0
模型测试均方误差为: 9.880036330737779e+22

训练集样本的原始标签: [2000 1990 1990 2000 1960 2000 2000 1990 1990 2000]
训练集样本的预测结果: [4.73572394e+09 3.45584944e+10 3.99923480e+10 1.80947070
e+10
 -1.20220338e+10 -1.38838662e+10 -8.64918336e+09 -6.37124746e+10
 -2.67014992e+10 5.62744038e+09]



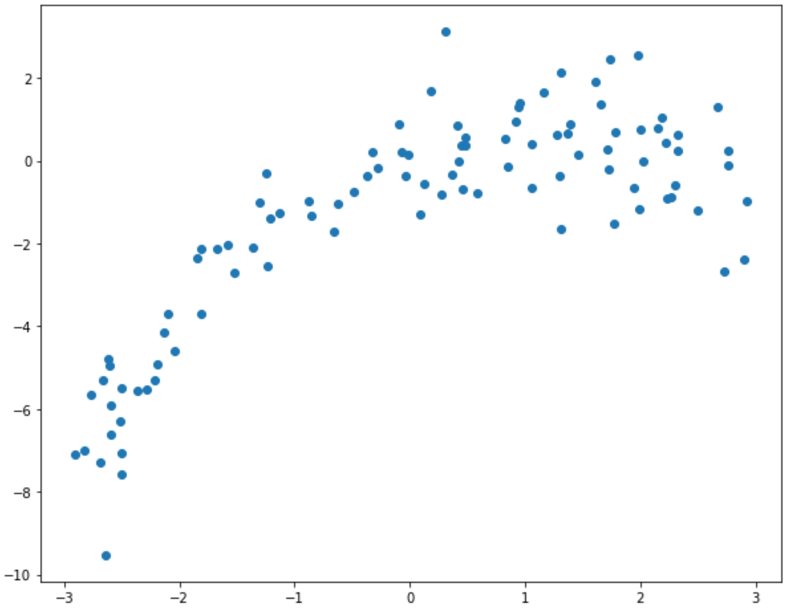
测试集样本的原始标签: [2000 2000 1940 1980 2000 1970 2000 1990 2000 2010]
测试集样本的预测结果: [-2.63646432e+10 -1.78047445e+09 -9.57123979e+10 -2.97828939
e+09
 -1.21459884e+09 -6.71145999e+09 1.15780318e+10 -7.29034031e+09
 -1.68545914e+10 5.23877929e+10]



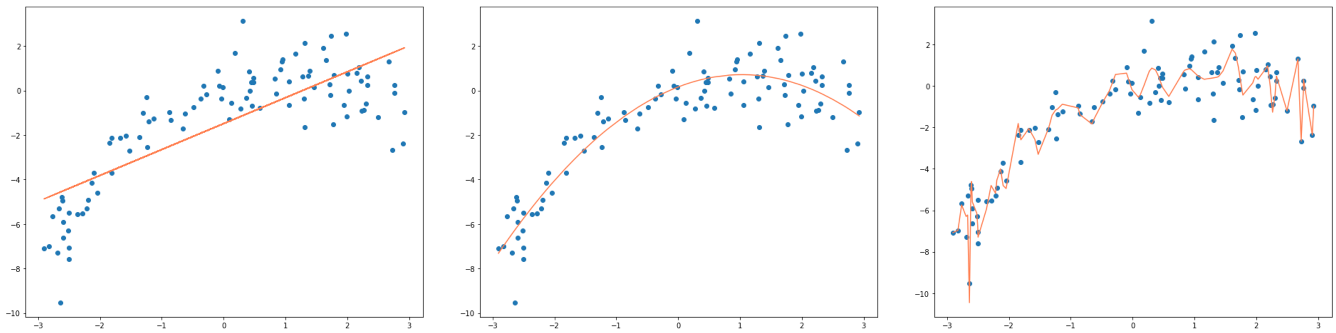
- 使用多项式回归可以解决欠拟合的问题，但又可能带来过拟合
    - ***过拟合***：指模型可以非常好地拟合训练数据，预测测试集时却表现很差

理解欠拟合与过拟合

例如我们想要拟合下面的数据



- 如果采用线性回归，那么拟合效果显然不好，数据距离拟合曲线较远
- 采用二次多项式回归，拟合效果刚刚好
- 采用100次多项式回归，虽然貌似拟合几乎每一个数据，但是丢失了信息规律，显然不能很好地预测未知的数据



六. 岭回归

1. 正则化

- 正如上面过拟合的例子显示，当模型**复杂度**高（比如参数很多）的时候，很容易出现过拟合。
    - 训练集误差很低，测试集表现较差——模型的泛化能力较差。
- ***正则化(Regularization)*** 是一种减少**测试**误差的手段。
    - 我们试图拉伸函数曲线使之更加平滑
    - 为了拉伸曲线，也就要弱化一些高阶项（曲线曲折的罪魁祸首）
    - 为此，我们想要降低高阶项的系数θ_i大小——这叫做**惩罚**
- 做法：
    - 设模型的代价函数是$L(\theta)$，而我们的惩罚项是$R(\theta)$
    - 那么，将目标函数写为$J(\theta) = L(\theta) + \alpha R(\theta)$，再最小化目标函数即可
    - 其中α是一个超参数，它决定了正则化惩罚的“力度”。α越大，惩罚“力度”越大。

2. 岭回归

- ***岭回归***是一种常用的正则化线性回归。
    - 使用线性回归的代价函数，而惩罚项$R(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i^2$
    - 也就是目标函数写为：

$$J(\theta) = L(\theta) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2$$

- 惩罚项的含义是空间中参数点θ到原点的**欧式距离**的平方
    - 因此惩罚的效果是迫使参数点靠近原点，也就是迫使参数变小。
- 可以降低模型的复杂度，提高模型的泛化能力，即模型适用于新的数据集的能力

In [19]:

```
# 使用岭回归训练模型
# 模型训练
####################################### Question 8 #################################################
# 要求：
#   - 确定ridge_reg的参数，使用sklearn.linear_model.Ridge()
#   - 用多项式数据，即poly_x_train, y_train来训练ridge_reg
################################### Start of Your Code ############################################
ridge_reg=sklearn.linear_model.Ridge(alpha=0.5)
ridge_reg.fit(poly_x_train, y_train)
#################################### End of Your Code #############################################
```

Out[19]:

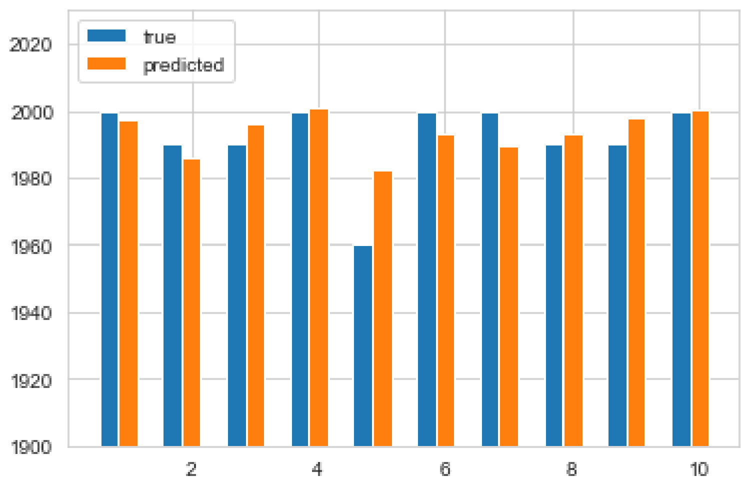
```
Ridge(alpha=0.5, copy_X=True, fit_intercept=True, max_iter=None,
      normalize=False, random_state=None, solver='auto', tol=0.001)
```

- 预测数据是否会符合我们预期，波动变小呢？

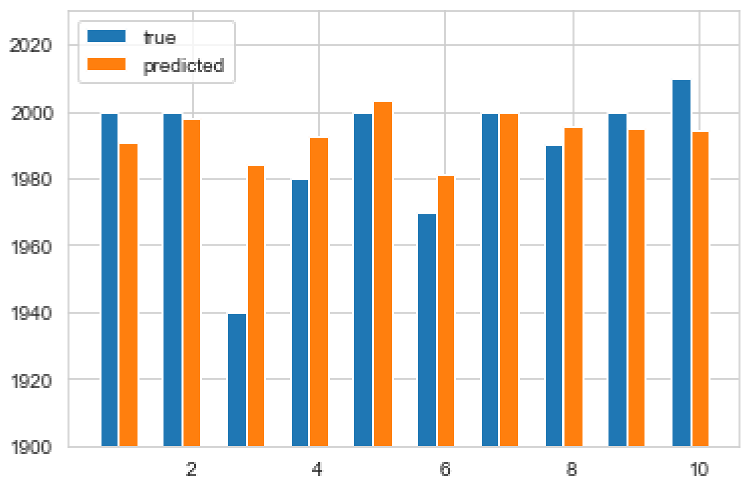
In [20]:

```python
# 训练集准确率和均方差
accuracy_rate_rr_train, mse_rr_train = evaluate_model(ridge_reg, poly_x_train, y_train)
print('模型训练准确率为:', accuracy_rate_rr_train)
print('模型训练均方差为:', mse_rr_train)
print('-------------------------------------------')

# 测试集准确率和均方差
accuracy_rate_rr_test, mse_rr_test = evaluate_model(ridge_reg, poly_x_test, y_test)
print('模型测试准确率为:', accuracy_rate_rr_test)
print('模型测试均方差为:', mse_rr_test)
print('-------------------------------------------')

# 针对训练数据集，展示预测效果
samples_x_train, samples_y_train = shuffle(poly_x_train, y_train, n_samples=10, random_state=0)
predicted_train = ridge_reg.predict(samples_x_train)  # 做预测
print('训练集样本的原始标签:', samples_y_train.values)
print('训练集样本的预测结果:', predicted_train)
barplot(samples_y_train, predicted_train, 1900, 2030)
print('-------------------------------------------')

# 4.3.2 针对测试数据集，展示预测效果
samples_x_test, samples_y_test = shuffle(poly_x_test, y_test, n_samples=10, random_state=0)
predicted_test = ridge_reg.predict(samples_x_test)
print('测试集样本的原始标签:', samples_y_test.values)
print('测试集样本的预测结果:', predicted_test)
barplot(samples_y_test, predicted_test, 1900, 2030)
```

```
模型训练准确率为: 0.46041426307106736
模型训练均方差为: 92.83814843168757
--------------------------------------------
模型测试准确率为: 0.45221770288591906
模型测试均方差为: 98.46916521402285
--------------------------------------------
训练集样本的原始标签: [2000 1990 1990 2000 1960 2000 2000 1990 1990 2000]
训练集样本的预测结果: [1997.51784459 1985.93445063 1996.16912558 2000.97463109 198
2.22315977
 1993.26055428 1989.44736312 1993.27222226 1998.15237901 2000.12231228]
```




```
--------------------------------------------
测试集样本的原始标签: [2000 2000 1940 1980 2000 1970 2000 1990 2000 2010]
测试集样本的预测结果: [1990.56474801 1997.84182646 1984.25510846 1992.58143901 200
3.06173562
 1981.28978899 1999.87959808 1995.82521429 1994.82862715 1994.08585601]
```



线性回归、多项式回归、岭回归模型的表现差异

- 对比三个模型对于测试集的预测准确率、均方差

In [21]:

```python
data_present=[['线性回归', '训练集', accuracy_rate_lr_train, mse_lr_train],
    ['线性回归', '测试集', accuracy_rate_lr_test, mse_lr_test],
    ['多项式回归', '训练集', accuracy_rate_pr_train, mse_pr_train],
    ['多项式回归', '测试集', accuracy_rate_pr_test, mse_pr_test],
    ['岭回归', '训练集', accuracy_rate_rr_train, mse_rr_train],
    ['岭回归', '测试集', accuracy_rate_rr_test, mse_rr_test]]

# 使用PrettyTable做一个表格
table = pt.PrettyTable()
table.field_names = ["模型", "数据集", "准确率", "均方差"]
for row in data_present:
    table.add_row(row)
print(table)
```

```
+------------+--------+---------------------+------------------------+
|    模型    | 数据集 |        准确率       |         均方差         |
+------------+--------+---------------------+------------------------+
|  线性回归  | 训练集 | 0.31914214549885167 |    142.2355347573402   |
|  线性回归  | 测试集 |  0.3200464846019756 |   140.64925430950998   |
| 多项式回归 | 训练集 |         0.0         | 1.0251241607510815e+22 |
| 多项式回归 | 测试集 |         0.0         | 9.880036330737779e+22  |
|   岭回归   | 训练集 | 0.46041426307106736 |    92.83814843168757   |
|   岭回归   | 测试集 | 0.45221770288591906 |    98.46916521402285   |
+------------+--------+---------------------+------------------------+
```