

# Estruturas de Kripke

Aula para disciplina de Métodos Formais

Gabriela Moreira

Departamento de Ciência da Computação - DCC  
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

04 de março de 2024



# Conteúdo

Sistemas de transições

Estruturas de Kripke

Não determinismo



# Outline

Sistemas de transições

Estruturas de Kripke

Não determinismo



# Sistema de transições: Definição

- Abstrações que descrevem o comportamento de sistemas com precisão matemática e sem ambiguidade (BAIER; KATOEN, 2008) .
- Podem ser vistos como grafos dirigidos onde
  - Os nós são **estados**
  - As arestas são **transições**

Um **estado** descreve as informações de um sistema em um momento específico.

Uma **transição** descreve como um sistema pode mudar de um estado para outro.

# Sistema de transições: Definição formal

Um sistema de transições é definido pela tripla  $(S, \rightarrow, I)$  onde

- $S$  é um conjunto de estados,
- $\rightarrow \subseteq S \times S$  é uma relação de transições, e
- $I \subseteq S$  é um conjunto de estados iniciais.

Um **comportamento** ou **execução**  $\rho$  de um sistema de transições é uma sequência de estados tal que

$$\rho = s_0, s_1, \dots \text{ tal que } s_i \rightarrow s_{i+1} \text{ para todo } i \geq 0$$



# Sistemas de transições finito

Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se  $S$  é finito.

**Pergunta:** Comportamentos de sistemas de transições finitos são sempre finitos?



# Determinismo e Não-Determinismo

O conjunto de **sucessores** de um estado  $s$  é definido por  $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .

Um sistema de transições é dito **determinístico** se e somente se  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$ . Ou seja:

- Tem apenas um estado inicial, e
- Todo estado tem, no máximo, um sucessor.

Não-Determinismo acontece quando há múltiplos estados iniciais  $|I| > 1$  ou múltiplos sucessores para o mesmo estado ( $|Post(s)| > 1$ ).



# Outline

Sistemas de transições

Estruturas de Kripke

Não determinismo





# Estruturas de Kripke

Estruturas de Kripke são um tipo de sistema de transições com uma restrição adicional:

*A relação  $\rightarrow$  deve ser total*

ou seja

$$\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$$

# Estruturas de Kripke

Estruturas de Kripke são um tipo de sistema de transições com uma restrição adicional:

*A relação  $\rightarrow$  deve ser total*

ou seja

$$\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$$

## Estados terminais

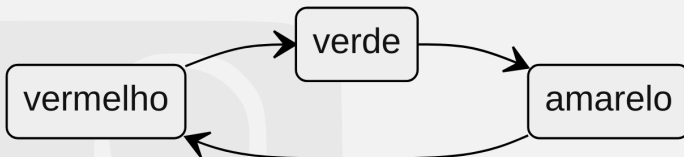
Em sistemas de transições, um estado é dito terminal se  $Post(s) = \emptyset$ .

Isso não é possível em estruturas de Kripke, devido a restrição acima. Em estruturas de Kripke, estados terminais são aqueles que possuem apenas transições para si mesmo, ou seja  $Post(s) = \{s\}$

## Exemplo: Semáforo

Um semáforo pode ser representado por uma estrutura de Kripke  $(S, \rightarrow, I)$  onde

- $S = \{\text{verde}, \text{amarelo}, \text{vermelho}\}$
- $\rightarrow = \{\text{verde} \rightarrow \text{amarelo}, \text{amarelo} \rightarrow \text{vermelho}, \text{vermelho} \rightarrow \text{verde}\}$
- $I = \{\text{vermelho}\}$





## Exercício: Dois semáforos

Um sistema com **dois** semáforos pode ser representado por uma estrutura de Kripke  $(S, \rightarrow, I)$  onde ...



## Exercício: Três semáforos





## Exercício: Três semáforos

- Vish!



## Exercício: Três semáforos

- Vish!
- Muita coisa pra escrever, certo?
- Um jeito melhor: linguagens de especificação

## Exercício: Três semáforos

- Vish!
- Muita coisa pra escrever, certo?
- Um jeito melhor: linguagens de especificação

### Vamos perceber algumas generalizações

- 1 Cada semáforo deve iniciar vermelho, e fazer o caminho vermelho → verde → amarelo enquanto os outros permanecem vermelhos.
- 2 Quando um semáforo fecha, queremos que **outro** semáforo abra
  - Com três semáforos, deve haver um revezamento que garanta que cada um vai abrir de vez em quando.



## N semáforos em TLA+

```

MODULE Semaforos
EXTENDS Integers, FiniteSets
VARIABLE cores, proximo
CONSTANT SEMAFOROS

FicaVerde(s)  $\triangleq$ 
   $\wedge$  proximo = s
   $\wedge \forall s2 \in$  SEMAFOROS : cores[s2] = "vermelho"
   $\wedge$  cores' = [cores EXCEPT ![s] = "verde"]
   $\wedge$  proximo' = (s + 1) % Cardinality(SEMAFOROS)

FicaAmarelo(s)  $\triangleq$ 
   $\wedge$  cores[s] = "verde"
   $\wedge$  cores' = [cores EXCEPT ![s] = "amarelo"]
   $\wedge$  UNCHANGED  $\langle$ proximo $\rangle$ 

FicaVermelho(s)  $\triangleq$ 
   $\wedge$  cores[s] = "amarelo"
   $\wedge$  cores' = [cores EXCEPT ![s] = "vermelho"]
   $\wedge$  UNCHANGED  $\langle$ proximo $\rangle$ 

Init  $\triangleq$  cores = [s  $\in$  SEMAFOROS  $\mapsto$  "vermelho"]  $\wedge$  proximo = 0

Next  $\triangleq$   $\exists s \in$  SEMAFOROS : FicaVerde(s)  $\vee$  FicaAmarelo(s)  $\vee$  FicaVermelho(s)

Spec  $\triangleq$  Init  $\wedge$   $\Box$ [Next] $_{\langle$ cores, proximo $\rangle}$ 

```

# N semáforos em Quint

Especificação completa no GitHub.

```
module semaforos {  
  type Cor = Vermelho | Verde | Amarelo  
  type Semaforo = int  
  
  var cores: Semaforo -> Cor  
  var proximo: Semaforo  
  
  const SEMAFOROS: Set[Semaforo]  
  
  action fica_verde(s: Semaforo): bool = all {  
    proximo == s,  
    SEMAFOROS.forall(s2 => cores.get(s2) == Vermelho),  
  
    cores' = cores.set(s, Verde),  
    proximo' = (s + 1) % SEMAFOROS.size(),  
  }  
}
```



# Perguntas

- 1 Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?



# Perguntas

- 1 Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - ? Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\rightarrow$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$



# Perguntas

- ① Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - ? Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\rightarrow$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
- ② Os sistemas de semáforos são finitos?



# Perguntas

- ① Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - 💡 Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\rightarrow$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
- ② Os sistemas de semáforos são finitos?
  - 💡 Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se  $S$  é finito.



# Perguntas

- ① Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - 💡 Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\rightarrow$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
- ② Os sistemas de semáforos são finitos?
  - 💡 Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se  $S$  é finito.
- ③ Nossas definições de semáforo são determinísticas?

# Perguntas

- ① Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - 💡 Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\rightarrow$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
- ② Os sistemas de semáforos são finitos?
  - 💡 Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se  $S$  é finito.
- ③ Nossas definições de semáforo são determinísticas?
  - 💡 O conjunto de **sucedores** de um estado  $s$  é definido por  $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
  - 💡 Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$





# Outline

Sistemas de transições

Estruturas de Kripke

Não determinismo



# Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
- Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$

# Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
- Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$
- ① Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso ( $I = S$ ), temos não determinismo

# Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
- Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$
- ① Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso ( $I = S$ ), temos não determinismo
  - $|I| \leq 1$  não é satisfeito

# Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
  - Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$
- 1 Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso ( $I = S$ ), temos não determinismo
    - $|I| \leq 1$  não é satisfeito
  - 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido



# Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
  - Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$
- 1 Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso ( $I = S$ ), temos não determinismo
    - $|I| \leq 1$  não é satisfeito
  - 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido
    - $|Post(1 : \text{vermelho e ... e } N : \text{vermelho e próximo : indefinido})| \leq 1$  não é satisfeito

# Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
  - Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$
- 1 Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso ( $I = S$ ), temos não determinismo
    - $|I| \leq 1$  não é satisfeito
  - 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido
    - $|Post(1 : \text{vermelho e ... e } N : \text{vermelho e próximo : indefinido})| \leq 1$  não é satisfeito
  - 3 Caso a definição de próximo seja removida

# Não determinismo nos semáforos

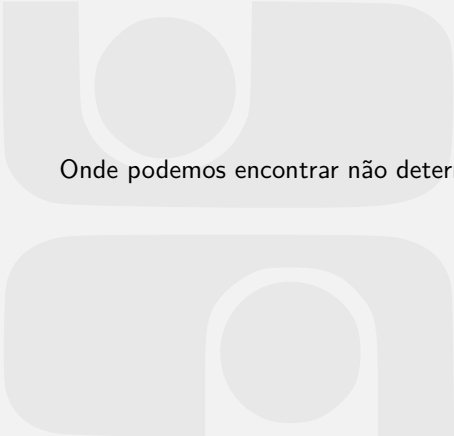
Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}$ .
  - Sistema é determinístico sse  $|I| \leq 1 \wedge \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$
- 1 Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso ( $I = S$ ), temos não determinismo
    - $|I| \leq 1$  não é satisfeito
  - 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido
    - $|Post(1 : \text{vermelho e ... e } N : \text{vermelho e próximo : indefinido})| \leq 1$  não é satisfeito
  - 3 Caso a definição de próximo seja removida
    - $|Post(1 : \text{vermelho e ... e } N : \text{vermelho})| \leq 1$  não é satisfeito





# Não determinismo na realidade



Onde podemos encontrar não determinismo em sistemas de software?



# Definindo a fronteira

Ao especificar um sistema, especialmente quando há não determinismo, é preciso definir uma fronteira.

- Até aquela fronteira, fatores externos não especificados determinam o que acontece.
- O não determinismo é uma forma de abstrair esses fatores externos
  - i.e. De A, vou pra B ou C. Isso depende de algum fator externo. Se é a jogada de um dado ou o input de um usuário, não me importa.
  - Se isso me importa, então vou modelar a jogada de dado.



## Exemplo: Notas de alunos

Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

- 1 O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq 7$ , o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor



## Exemplo: Notas de alunos

Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

- ① O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq 7$ , o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor
- ② O aluno pode ou não prestar atenção nas aulas. Se prestar atenção, vai se dar bem na prova, sua nota será maior que 7, e portanto vai passar.
  - Não determinismo nas escolhas do aluno
  - A nota que o professor dá é **determinada** pelas escolhas do aluno



## Exemplo: Notas de alunos

Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

- ① O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq 7$ , o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor
- ② O aluno pode ou não prestar atenção nas aulas. Se prestar atenção, vai se dar bem na prova, sua nota será maior que 7, e portanto vai passar.
  - Não determinismo nas escolhas do aluno
  - A nota que o professor dá é **determinada** pelas escolhas do aluno

No caso (2) estamos detalhando mais o mundo externo fora do SIGA, enquanto no (1) a fronteira é na interface do SIGA.

## Exemplo: Notas de alunos

Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

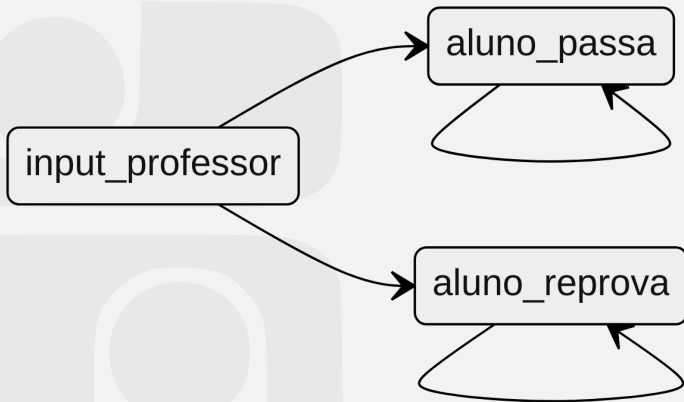
- ① O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq 7$ , o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor
- ② O aluno pode ou não prestar atenção nas aulas. Se prestar atenção, vai se dar bem na prova, sua nota será maior que 7, e portanto vai passar.
  - Não determinismo nas escolhas do aluno
  - A nota que o professor dá é **determinada** pelas escolhas do aluno

No caso (2) estamos detalhando mais o mundo externo fora do SIGA, enquanto no (1) a fronteira é na interface do SIGA.

O caso (1) é uma especificação do SIGA, enquanto o (2) fala mais sobre um sistema universitário.

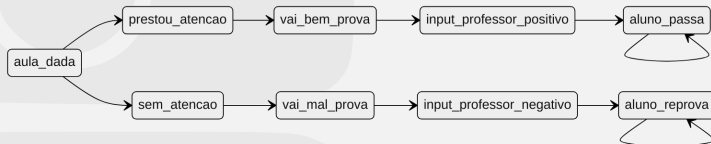


## Exemplo: Notas de alunos - input professor





## Exemplo: Notas de alunos - escolhas dos alunos







## Exemplo: Vôo com conexões

**Versão 1:**

*Joinville  $\rightarrow$  São Paulo  $\rightarrow$  Paris*



## Exemplo: Vôo com conexões

### **Versão 1:**

*Joinville → São Paulo → Paris*

### **Versão 2:**

*Check-in em Joinville → Despacho de Bagagem em Joinville  
→ Check de Segurança em Joinville → Embarque em Joinville  
→ Pouso em São Paulo → Check de Segurança em São Paulo  
→ Embarque em São Paulo → Pouso em Paris → Retirada de  
bagagem em Paris*



# Exemplo: Vôo com conexões - Não determinismo

Onde poderia ter **não determinismo**?

- Chegar atrasado e perder o check-in
- Acharem uma bomba na bagagem
- Problemas técnicos no voo
- Perder a conexão



## Exemplo: Vôo com conexões - Não determinismo

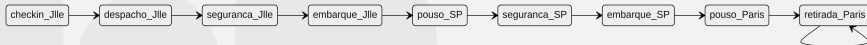
Onde poderia ter **não determinismo**?

- Chegar atrasado e perder o check-in
- Acharem uma bomba na bagagem
- Problemas técnicos no voo
- Perder a conexão

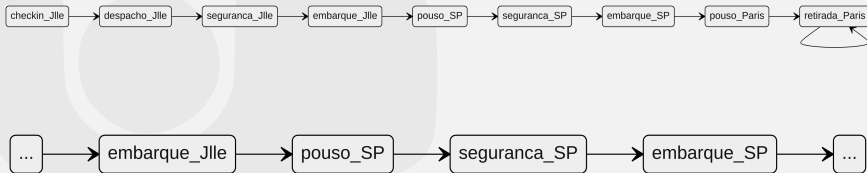
Podemos ter não determinismo em cada estado. Nos casos listados, podemos ou não determinar o que acontece. Cabe ao nível de detalhe, ou a **fronteira** da nossa modelagem.



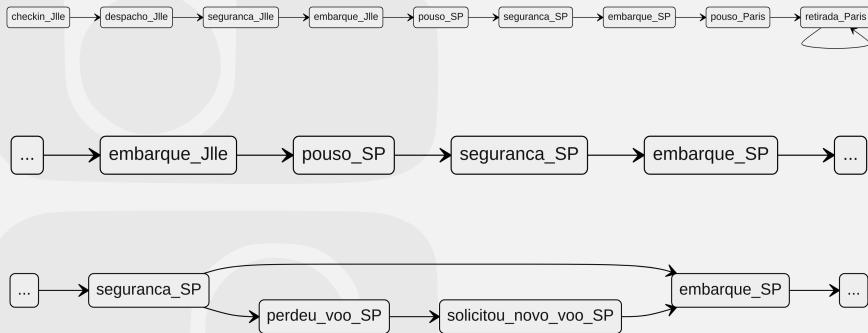
## Exemplo: Vôo com conexões - Perdendo a conexão



## Exemplo: Vôo com conexões - Perdendo a conexão



# Exemplo: Vôo com conexões - Perdendo a conexão





# Referências

BAIER, C.; KATOEN, J.-P. **Principles of model checking**. Cambridge, MA: The MIT Press, 2008.





# Estruturas de Kripke

Aula para disciplina de Métodos Formais

Gabriela Moreira

Departamento de Ciência da Computação - DCC  
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

04 de março de 2024