

# Estruturas de Kripke

Aula para disciplina de Métodos Formais

#### Gabriela Moreira

Departamento de Ciência da Computação - DCC Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

04 de março de 2024



### Conteúdo

Sistemas de transições

Estruturas de Kripke

Não determinismo



### Outline

Sistemas de transições

Estruturas de Kripke

Não determinismo



# Sistema de transições: Definição

- Abstrações que descrevem o comportamento de sistemas com precisão matemática e sem ambiguidade (BAIER; KATOEN, 2008) .
- Podem ser vistos como grafos dirigidos onde
  - Os nós são estados
  - As arestas são transições

Um **estado** descreve as informações de um sistema em um momento específico.

Uma **transição** descreve como um sistema pode mudar de um estado para outro.



# Sistema de transições: Definição formal

Um sistema de transições é definido pela tripla  $(S, \rightarrow, I)$  onde

- S é um conjunto de estados,
- $\rightarrow \subseteq S \times S$  é uma relação de transições, e
- $I \subseteq S$  é um conjunto de estados iniciais.

Um **comportamento** ou **execução**  $\rho$  de um sistema de transições é uma sequência de estados tal que

$$\rho = s_0, s_1, \dots$$
 tal que  $s_i \rightarrow s_{i+1}$  para todo  $i \ge 0$ 



## Sistemas de transições finito

Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se S é finito.

Pergunta: Comportamentos de sistemas de transições finitos são sempre finitos?



# Sistemas de transições finito

Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se S é finito.

Pergunta: Comportamentos de sistemas de transições finitos são sempre finitos?

Não! Comportamentos sobre uma sequência de estados ainda podem ser infinitos, mesmo que os estados sejam finitos.



### Determinismo e Não-Determinismo

O conjunto de **sucessores** de um estado s é definido por  $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$ 

Um sistema de transições é dito **determinístico** se e somente se  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$ . Ou seja:

- Tem apenas um estado inicial, e
- Todo estado tem, no máximo, um sucessor.

Não-Determinismo acontece quando há múltiplos estados iniciais |I| > 1 ou múltiplos sucessores para o mesmo estado (|Post(s)| > 1).



### Outline

Sistemas de transições

Estruturas de Kripke

Não determinismo



# Estruturas de Kripke

Estruturas de Kripke são um tipo de sistema de transições com uma restrição adicional:

A relação 
$$ightarrow$$
 deve ser total

ou seja

$$\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$$



# Estruturas de Kripke

Estruturas de Kripke são um tipo de sistema de transições com uma restrição adicional:

A~relação 
ightarrow deve~ser~totalou seja

$$\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$$

#### Estados terminais

Em sistemas de transições, um estado é dito terminal se  $Post(s) = \emptyset$ .

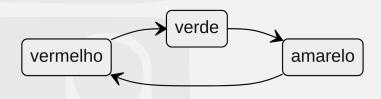
Isso não é possível em estruturas de Kripke, devido a restrição acima. Em estruturas de Kripke, estados terminais são aqueles que possuem apenas transições para si mesmo, ou seja  $Post(s) = \{s\}$ 



# Exemplo: **§** Semáforo

Um semáforo pode ser representado por uma estrutura de Kripke  $(S, \rightarrow, I)$  onde

- $S = \{verde, amarelo, vermelho\}$
- $\rightarrow$ = {verde  $\rightarrow$  amarelo, amarelo  $\rightarrow$  vermelho, vermelho  $\rightarrow$  verde}
- *I* = {*vermelho*}





# Exercício: **\$ \$** Dois semáforos

Um sistema com **dois** semáforos pode ser representado por uma estrutura de Kripke  $(S, \rightarrow, I)$  onde





# Exercício: **\$ \$** Dois semáforos

Um sistema com **dois** semáforos pode ser representado por uma estrutura de Kripke  $(S, \rightarrow, I)$  onde

```
• S = \{(1 : vermelho e 2 : vermelho), (1 : amarelo e 2 : vermelho), (1 : verde e 2 : vermelho), (1 : vermelho e : amarelo), (1 : vermelho e 2 : verde)\}
```



# Exercício: # Dois semáforos

Um sistema com **dois** semáforos pode ser representado por uma estrutura de Kripke  $(S, \rightarrow, I)$  onde

```
• S = \{(1 : vermelho e 2 : vermelho), (1 : amarelo e 2 : vermelho e 2 : vermelh
            verde e 2 : vermelho), (1 : vermelho e : amarelo), (1 : vermelho e 2 :
            verde)}
            \rightarrow = \{
                                               (1 : vermelho \ e \ 2 : vermelho) \rightarrow (1 : verde \ e \ 2 : vermelho),
                                                (1 : verde \ e \ 2 : vermelho) \rightarrow (1 : amarelo \ e \ 2 : vermelho),
                                               (1 : amarelo \ e \ 2 : vermelho) \rightarrow (1 : vermelho \ e \ 2 : vermelho),
                                               (1 : vermelho e 2 : vermelho) \rightarrow (1 : vermelho e 2 : verde),
                                               (1 : vermelho e 2 : verde) \rightarrow (1 : vermelho e 2 : amarelo),
                                               (1 : vermelho \ e \ 2 : amarelo) \rightarrow (1 : vermelho \ e \ 2 : vermelho),
```

11 / 28



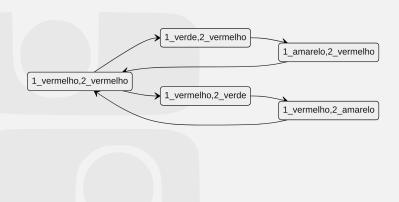
# Exercício: **\$ \$** Dois semáforos

Um sistema com **dois** semáforos pode ser representado por uma estrutura de Kripke  $(S, \rightarrow, I)$  onde

```
• S = \{(1 : vermelho e 2 : vermelho), (1 : amarelo e 2 : vermelho e 3 : vermelh
           verde e 2 : vermelho), (1 : vermelho e : amarelo), (1 : vermelho e 2 :
           verde)}
           \rightarrow = \{
                                            (1 : vermelho \ e \ 2 : vermelho) \rightarrow (1 : verde \ e \ 2 : vermelho),
                                             (1 : verde \ e \ 2 : vermelho) \rightarrow (1 : amarelo \ e \ 2 : vermelho),
                                            (1 : amarelo \ e \ 2 : vermelho) \rightarrow (1 : vermelho \ e \ 2 : vermelho),
                                            (1 : vermelho e 2 : vermelho) \rightarrow (1 : vermelho e 2 : verde),
                                            (1 : vermelho e 2 : verde) \rightarrow (1 : vermelho e 2 : amarelo),
                                            (1 : vermelho e 2 : amarelo) \rightarrow (1 : vermelho e 2 : vermelho),
• I = {(1 : vermelho e 2 : vermelho)}
```

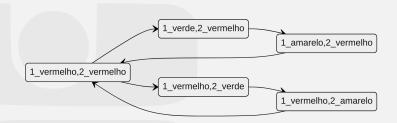


# Exercício: 😻 🕏 Dois semáforos II





# Exercício: # B Dois semáforos II



https://forsyte.at/kripke/

- AF(B\_verde)
- AF(A\_vermelho & B\_vermelho)



# Exercício: **8 8 8** Três semáforos





# Exercício: 🛭 🗗 🕏 Três semáforos



13 / 28



# Exercício: **\$ \$** Três semáforos

- Vish!
- Muita coisa pra escrever, certo?
- Um jeito melhor: linguagens de especificação



# Exercício: **\$ \$** Três semáforos

- Vish!
- Muita coisa pra escrever, certo?
- Um jeito melhor: linguagens de especificação

### Vamos perceber algumas generalizações

- lacktriangle Cada semáforo deve iniciar vermelho, e fazer o caminho vermelho ightarrow verde ightarrow amarelo enquanto os outros permanecem vermelhos.
- 2 Quando um semáforo fecha, queremos que outro semáforo abra
  - Com três semáforos, deve haver um revezamento que garanta que cada um vai abrir de vez em quando.



### N semáforos em TLA+

```
    Module Semaforos

Extends Integers, FiniteSets
Variable cores, proximo
CONSTANT SEMAFOROS
FicaVerde(s) \stackrel{\triangle}{=} \land proximo = s
                   \land \forall s2 \in SEMAFOROS : cores[s2] = "vermelho"
                   \land cores' = [cores \ EXCEPT \ ![s] = "verde"]
                   \land proximo' = (s+1)\% Cardinality(SEMAFOROS)
FicaAmarelo(s) \stackrel{\triangle}{=} \land cores[s] = "verde"
                     \land cores' = [cores \ EXCEPT \ ![s] = "amarelo"]
                      ∧ UNCHANGED ⟨proximo⟩
FicaVermelho(s) \triangleq \land cores[s] = "amarelo"
                   \land cores' = [cores \ EXCEPT \ ![s] = "vermelho"]
                   ∧ UNCHANGED ⟨proximo⟩
Init \stackrel{\triangle}{=} cores = [s \in SEMAFOROS \mapsto "vermelho"] \land proximo = 0
Next \triangleq \exists s \in SEMAFOROS : FicaVerde(s) \lor FicaAmarelo(s) \lor FicaVermelho(s)
Spec \stackrel{\Delta}{=} Init \wedge \Box [Next]_{\langle cores, proximo \rangle}
```

15 / 28



### N semáforos em Quint

Especificação completa no GitHub.

```
module semaforos {
  type Cor = Vermelho | Verde | Amarelo
  type Semaforo = int
  var cores: Semaforo -> Cor
  var proximo: Semaforo
  const SEMAFOROS: Set[Semaforo]
  action fica verde(s: Semaforo): bool = all {
    proximo == s,
    SEMAFOROS.forall(s2 => cores.get(s2) == Vermelho),
    cores' = cores.set(s, Verde),
   proximo' = (s + 1) % SEMAFOROS.size(),
  }
```



Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\Omega$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\to$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\Omega$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\to$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
  - Resposta: Sim! Sempre há um passo para um próximo estado



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\mathbb{Q}$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\to$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
  - Resposta: Sim! Sempre há um passo para um próximo estado
- 2 Os sistemas de semáforos são finitos?



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\mathbb{Q}$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\to$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
  - Resposta: Sim! Sempre há um passo para um próximo estado
- 2 Os sistemas de semáforos são finitos?
  - $\mathbb{Q}$  Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se S é finito.



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\mathbb{Q}$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\to$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
  - Resposta: Sim! Sempre há um passo para um próximo estado
- 2 Os sistemas de semáforos são finitos?
  - $\mathbb{Q}$  Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se S é finito.
  - Resposta: Sim! Os estados são um conjunto finito.



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\mathbb{Q}$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\to$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
  - Resposta: Sim! Sempre há um passo para um próximo estado
- 2 Os sistemas de semáforos são finitos?
  - $\mathbb{Q}$  Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se S é finito.
  - Resposta: Sim! Os estados s\u00e30 um conjunto finito.
- 3 Nossas definições de semáforo são determinísticas?



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\mathbb{Q}$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke,  $\to$  deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
  - Resposta: Sim! Sempre há um passo para um próximo estado
- Os sistemas de semáforos são finitos?
  - $\mathbb{Q}$  Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se S é finito.
  - Resposta: Sim! Os estados são um conjunto finito.
- 3 Nossas definições de semáforo são determinísticas?
  - $\mathbb{Q}$  O conjunto de **sucessores** de um estado s é definido por  $Post(s) = \{s' \in S \mid s \to s'\}.$
  - $\mathfrak{O}$  Sistema é deterministico sse  $|I| \leq 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$



- Todos os exemplos de semáforos (1, 2, 3 e N) são sistemas de transições. Quais deles são Estruturas de Kripke?
  - $\mathbb{Q}$  Para um sistema de transições ser uma estrutura de Kripke, o deve ser total:
    - $\forall s \in S, \exists s' \in S : s \rightarrow s'$
  - Resposta: Sim! Sempre há um passo para um próximo estado
- Os sistemas de semáforos são finitos?
  - $\mathbb{Q}$  Um sistema de transições é dito **finito** se e somente se S é finito.
  - Resposta: Sim! Os estados são um conjunto finito.
- 3 Nossas definições de semáforo são determinísticas?
  - $\mathbb{Q}$  O conjunto de **sucessores** de um estado s é definido por  $Post(s) = \{s' \in S \mid s \to s'\}.$
  - $\mathfrak{O}$  Sistema é deterministico sse  $|I| \leq 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \leq 1$
  - Resposta: Nem todas. A definição que demos para 2 semáforos contém não determinismo. As definições para 1 semáforo e N semáforos são determinísticas.



### Outline

Sistemas de transiçõe

Estruturas de Kripk

Não determinismo



### Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$
- Sistema é deterministico sse  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$



### Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$
- Sistema é deterministico sse  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$
- Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso (I = S), temos não determinismo



## Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$
- Sistema é deterministico sse  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$
- Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso (I = S), temos não determinismo
  - $|I| \le 1$  não é satisfeito

18 / 28



## Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$
- Sistema é deterministico sse  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$
- Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso (I = S), temos não determinismo
  - $|I| \le 1$  não é satisfeito
- 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido



## Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$
- Sistema é deterministico sse  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$
- Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso (I = S), temos não determinismo
  - $|I| \leq 1$  não é satisfeito
- 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido
  - $|Post(1:vermelho \ e \ ... \ e \ N:vermelho \ e \ pr\'oximo:indefinido)| \le 1$  não é satisfeito

18 / 28



## Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$
- Sistema é deterministico sse  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$
- Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso (I = S), temos não determinismo
  - $|I| \le 1$  não é satisfeito
- 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido
  - |Post(1 : vermelho e ... e N : vermelho e próximo : indefinido)| ≤ 1 não é satisfeito
- 3 Caso a definição de próximo seja removida



## Não determinismo nos semáforos

Como seriam semáforos com não determinismo?

- $Post(s) = \{s' \in S \mid s \rightarrow s'\}.$
- Sistema é deterministico sse  $|I| \le 1 \land \forall s \in S : |Post(s)| \le 1$
- Qualquer estado pode ser um estado inicial. Se definirmos isso (I = S), temos não determinismo
  - $|I| \le 1$  não é satisfeito
- 2 Caso o primeiro semáforo a abrir não esteja definido
  - |Post(1 : vermelho e ... e N : vermelho e próximo : indefinido)| ≤ 1 não é satisfeito
- 3 Caso a definição de próximo seja removida
  - $|Post(1 : vermelho e ... e N : vermelho)| \le 1$  não é satisfeito



Onde podemos encontrar não determinismo em sistemas de software?





Onde podemos encontrar não determinismo em sistemas de software?

- Escolhas de usuário
  - Depósitos e saques
  - Qualquer input em geral



Onde podemos encontrar não determinismo em sistemas de software?

- Escolhas de usuário
  - Depósitos e saques
  - Qualquer input em geral
- Patores aleatórios
  - Se rolar 20 no dado, o dano é dobrado



Onde podemos encontrar não determinismo em sistemas de software?

- Escolhas de usuário
  - Depósitos e saques
  - Qualquer input em geral
- Patores aleatórios
  - Se rolar 20 no dado, o dano é dobrado
- Influências do ambiente
  - Falha de hardware
  - Falha na rede

19 / 28



## Não determinismo na realidade

Onde podemos encontrar não determinismo em sistemas de software?

- Escolhas de usuário
  - Depósitos e saques
  - Qualquer input em geral
- Patores aleatórios
  - Se rolar 20 no dado, o dano é dobrado
- Influências do ambiente
  - Falha de hardware
  - Falha na rede
- 4 Ordem de execução quando há concorrência
  - Processo A executa antes do processo B
  - Requisição A é recebida antes da requisição B



## Definindo a fronteira

Ao especificar um sistema, especialmente quando há não determinismo, é preciso definir uma fronteira.

- Até aquela fronteira, fatores externos n\u00e3o especificados determinam o que acontece.
- O não determinismo é uma forma de abstrair esses fatores externos
  - i.e. De A, vou pra B ou C. Isso depende de algum fator externo. Se é a jogada de um dado ou o input de um usuário, não me importa.
  - Se isso me importa, então vou modelar a jogada de dado.



Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

- $\ensuremath{\mathbf{0}}$  O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq$  7, o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor



#### Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

- lacktriangle O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq$  7, o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor
- O aluno pode ou não prestar atenção nas aulas. Se prestar atenção, vai se dar bem na prova, sua nota será maior que 7, e portanto vai passar.
  - Não determinismo nas escolhas do aluno
  - A nota que o professor dá é determinada pelas escolhas do aluno



Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

- lacktriangle O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq$  7, o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor
- O aluno pode ou não prestar atenção nas aulas. Se prestar atenção, vai se dar bem na prova, sua nota será maior que 7, e portanto vai passar.
  - Não determinismo nas escolhas do aluno
  - A nota que o professor dá é determinada pelas escolhas do aluno

No caso (2) estamos detalhando mais o mundo externo fora do SIGA, enquanto no (1) a fronteira é na interface do SIGA.



Vamos considerar duas fronteiras diferentes:

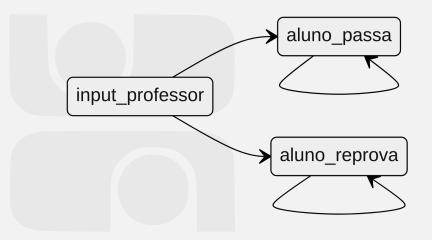
- lacktriangle O professor coloca uma nota no SIGA. Se a nota for  $\geq$  7, o aluno passa.
  - Não determinismo no input do professor
- O aluno pode ou não prestar atenção nas aulas. Se prestar atenção, vai se dar bem na prova, sua nota será maior que 7, e portanto vai passar.
  - Não determinismo nas escolhas do aluno
  - A nota que o professor dá é determinada pelas escolhas do aluno

No caso (2) estamos detalhando mais o mundo externo fora do SIGA, enquanto no (1) a fronteira é na interface do SIGA.

O caso (1) é uma especificação do SIGA, enquanto o (2) fala mais sobre um sistema universitário.

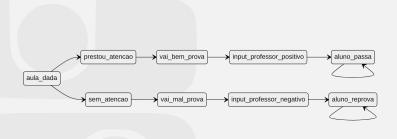


## Exemplo: Notas de alunos - input professor





## Exemplo: Notas de alunos - escolhas dos alunos



24 / 28



## Exemplo: Vôo com conexões

#### Versão 1:

Joinville o São Paulo o Paris



# Exemplo: Vôo com conexões

#### Versão 1:

Joinville → São Paulo → Paris

#### Versão 2:

Check-in em Joinville ightarrow Despacho de Bagagem em Joinville

- → Check de Segurança em Joinville → Embarque em Joinville
- ightarrow Pouso em São Paulo ightarrow Check de Segurança em São Paulo
- ightarrow Embarque em São Paulo ightarrow Pouso em Paris ightarrow Retirada de bagagem em Paris



## Exemplo: Vôo com conexões - Não determinismo

#### Onde poderia ter não determinismo?

- Chegar atrasado e perder o check-in
- Acharem uma bomba na bagagem
- Problemas técnicos no vôo
- Perder a conexão



## Exemplo: Vôo com conexões - Não determinismo

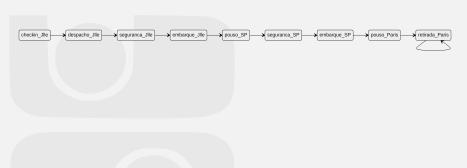
#### Onde poderia ter não determinismo?

- Chegar atrasado e perder o check-in
- Acharem uma bomba na bagagem
- Problemas técnicos no vôo
- Perder a conexão

Podemos ter não determinismo em cada estado. Nos casos listados, podemos ou não determinar o que acontece. Cabe ao nível de detalhe, ou a **fronteira** da nossa modelagem.

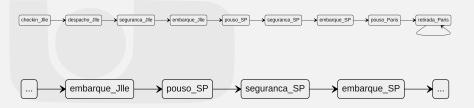


# Exemplo: Vôo com conexões - Perdendo a conexão



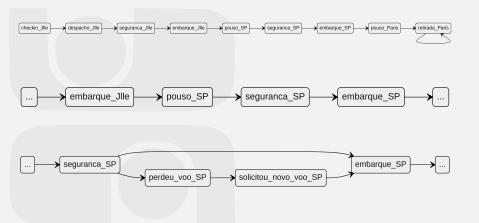


# Exemplo: Vôo com conexões - Perdendo a conexão





# Exemplo: Vôo com conexões - Perdendo a conexão





#### Referências

BAIER, C.; KATOEN, J.-P. **Principles of model checking**. Cambridge, MA: The MIT Press, 2008.



# Estruturas de Kripke

Aula para disciplina de Métodos Formais

#### Gabriela Moreira

Departamento de Ciência da Computação - DCC Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

04 de março de 2024