March 27, 2022

1 Somma di Reimann

Dato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, fissato n $\in \mathbb{N}$
poniamo $h = \frac{b-a}{n}$ e
$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \ldots,\ x_n = a + nh$

$\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ fissiamo $\xi_k \in [x_k - 1, x_k]$

Sia f continua su $[a, b]$. Poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)h = \sum_{k=1} {}_n f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

S_n = somma di Riemann n-esima

Nota S_n dipende dalla scelta di $\xi_1, \ldots, \xi_n$, che è arbitraria

Osservazione $a = b \Rightarrow S_n = 0 \forall n$

Osservazione $\forall x \in [a, b]. f(x) = c \Rightarrow S_n = c(b - a)$
Dunque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è costante , in questi casi

1.1 Teorema

f continuia in $[a, b]$. Allora $\exists \lim S_n\ finito$ t.c limite ** dipende dalla $n \to +\infty$ sulla retta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fatta nella costurzuone sopra

Si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$$

e si dice che f è integrabile

Osservazione dalle precedenti osservazioni si deduce
$\int_a^a f(x)dx = 0\ e$
$\int_a^b cdx = c(b - a)$

Osservazione Esistono funzioni discontinue per cui $\nexists \lim_{n \to \infty} S_n$ oppure dipende dalla scelta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fatta ad ogni passo

Osservazione Se f ha un numero finito di punti di discontinuità (con salto finito) allora f è integrabile.

2 Proprietà dell'integrale

1. **Linearità:** f,g continue su $[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   Allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g] = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} integrabile$
   Allora $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ vale$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. **Monotomia:** f,g continue su $[a,b]$

$$\forall x \in [a,b] f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \quad con\ a < b$$

4. **Convenzione:**

$$\forall a, b \int_a^b f = -\int_b^a f$$

3 Teorema della media integrale

f continua su $[a,b]$, allora $\exists c \in [a,b]\ t.c$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Dimostazione: Siano x_0 e x_1 punti di minimo e massimo assoluti (Wiestrass). Allora

$$\forall x \in [a,b]. f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x_0)dx}_{f(x_0)(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x_1)dx}_{f(x_1)(b-a)}$$

Divido per $b - a$ e trovo

$$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)$$

Per il teorema dei valori intermedi applicato a f,

$$\exists c \in [a,b]\ t.c\ f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)$$

4 La primitiva di una funzione

4.1 Definizione

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$. $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ si dice primidiva di f su $]a,b[$ se vale $F'(x) = f(x)\ \forall x \in]a,b[$

Osservazione: Se F è la primitiva di f su]a,b[,
allora $H :]a,b[\to \mathbb{R},\ H(x) = F(x) + C$ è primitiva di $f\ \forall c \in \mathbb{R}$

Osservazione personale: Le primitive di una funzione f sono infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a F(x)+C, dove 'C' è un valore scalare

4.2 Proposizione:

siano F e G primitive di f su]a,b[. Allora

$$\exists k \in \mathbb{R} :\ F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in]a,b[$$

Dimostazione: usiamo $H :]a,b[\to \mathbb{R},\ H(x) = F(x) - G(x)$. Vale $H'(x) = 0 \forall x \in]a,b[$ e dunque H è costante su $]a,b[$

Osservazione: La proposizione è valida purché si lavori su un intervallo $]a,b[$

5 Funzioni integrali

5.1 Definizione

data $f :]a_0, a_0[\to \mathbb{R}$ continua e $c \in \mathbb{R}$
definiamo

$$\underbrace{I_c}_{(Funzione\ integrale\ di\ punto\ base\ c)} :]a_0, b_0[\to \mathbb{R},\ I_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

5.2 Proprietà di I_c

1. $I_c(c) = 0$
2. Dati $c_1, c_2 \in]a_0, b_0[$,

$$I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt \Rightarrow I_{c_1} - I_{c_2}\ \text{è}\ costante$$

5.3 Teorema fondametale del calcolo integrale

Sia f continua su $]a_0, b_0[$, sia $c \in]a_0, b_0[$
Allora $\forall x \in]a_0, b_0[\ vale\ I'_c(x) = f(x)$

Dimostazione: Bisogna trovare

$$\lim_{h\to 0}\frac{I_c(x+h)-I_c(x)}{h}=f(x)$$

$\forall x \in]a_0,b_0[$ Guardiamo il limite destro;
dunque dobbiamo provare che $\forall h_n \to 0^+$

$$h_n > 0 \forall n \text{ vale } \frac{I_c(x+h_n)-I_c(x)}{h_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Si scrive

$$I_c(x+h_n)-I_c(x)=\int_c^{x+h_n} f-\int_c^x f=\int_x^{x+h_n} f(t)dt$$

Per teorema della media integrale

$$\exists c_n \in [x_1, x+h_n]\ t.c\ \frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} f(t)dt = f(c_n).$$

Poiché f è continua e $c_n \to x$, si ottiene $f(c_n)\to f(x)$. **qed**

5.4 Teorema fondametale del calcolo 2 o Formula di Torricelli

Se f è continua su $]a_0,b_0[$ e se F è primitiva di f su $]a_0,b_0[$ allora $\forall a,b \in]a_0,b_0[$ vale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Dimostazione: Sia $c \in]a_0,b_0[$
I_c e F sono le primitive di f si $]a_0,b_0[$.
Per il teorema di caratterizzazione delle primitive

$$\exists k \in \mathbb{R}\ t.c\ F(x)=I_c(x)+k \forall x \in]a_0,b_0[$$

Dunque

$$F(b)-F(a)=I_c(b)+k-I_c(a)+k=I_c(b)-I_c(a)=\int_c^b f-\int_c^a f=\int_a^b f(x)dx$$

qed

6 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come $\int x^k \sin x$

6.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

Proposizione: Sia $h: I \to J$ derivabile e $f: J \to \mathbb{R}$ continua ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti. Definiamo $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x)=\int_c^{h(x)} f(t)dt$$

Allora F è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x)=f(h(x))h'(x)$.

Dimostrazione: scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t)dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive $F = I_c \circ h$.
Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I_c'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

7 Formula per il cambio variabile

Teorema: I, J intervalli aperti, $h : I \to J$ con derivata h' continua su I
$f : J \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

Dimostrazione: siano $F : I \to \mathbb{R}, G : I \to R, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx, G(z) = \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt$
Le funzioni integrande sono continue, h' è continua. Dunque F e G sono derivabili in I.
Vale $F'(z) = f(h(z))h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$
Dunque $F - G$ è costante su I.
Poiché $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$, si conclude che $F(z) = G(z) \quad z \in I$

8 Integrali generalizzati

Definizione $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua.
Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$$\exists \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)dx =: \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La definizione per $f :] - \infty, b] \to \mathbb{R}$ è omessa perché analoga

Definizione: $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se

$$\exists \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

A Proprietà integrali

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

B Tabella primitive

TODO

C Integrazione di una funzione composta

La formula generica è:

$$\int_a^b g'(f(x))f'(x)dx = \Big[g(f(x))\Big]_a^b$$

deriva da

$$f : I \to J, g : J \to \mathbb{R},\ \ f, g \ \textit{derivabili}$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \int_a^b g'(f(x))f'(x)dx = \Big[g(f(x))\Big]_a^b$$

C.1 Integrali notevoli di funzioni composte

- $\int f'(x)[f'(x)]^\alpha dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ *con* $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$ **NB:***questo è il caso* $\alpha = -1$ *della prec.*
- $\int f'(x) \cos f(x)dx = \sin f(x)$
- $\int f'(x) \sin f(x)dx = -\cos f(x)$
- $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}$