April 14, 2022

1 Somma di Reimann

Dato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, fissato n $\in \mathbb{N}$
poniamo $h = \frac{b-a}{n}$ e
$x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h, \ldots,\ x_n = a+nh$

$\forall k \in \{1,\ldots,n\}$ fissiamo $\xi_k \in [x_k - 1, x_k]$

Sia f continua su $[a,b]$. Poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)h = \sum_{k=1} {}_n f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

S_n = somma di Riemann n-esima

Nota S_n dipende dalla scelta di $\xi_1, \ldots, \xi_n$, che è arbitraria

Osservazione $a = b \Rightarrow S_n = 0 \forall n$

Osservazione $\forall x \in [a,b].f(x) = c \Rightarrow S_n = c(b-a)$
Dunque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è costante , in questi casi

1.1 Teorema

f continuia in $[a,b]$. Allora $\exists \lim S_n$ *finito* t.c limite ** dipende dalla $n \to +\infty$ sulla retta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fatta nella costurzuone sopra

Si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$$

e si dice che f è integrabile

Osservazione dalle precedenti osservazioni si deduce
$\int_a^a f(x)dx = 0\ e$
$\int_a^b cdx = c(b-a)$

Osservazione Esistono funzioni discontinue per cui $\nexists \lim_{n\to\infty} S_n$ oppure dipende dalla scelta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fatta ad ogni passo

Osservazione Se f ha un numero finito di punti di discontinuità (con salto finito) allora f è integrabile.

2 Proprietà dell'integrale

1. **Linearità:** f,g continue su $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
   Allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g] = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} integrabile$
   Allora $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ vale$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. **Monotomia:** f,g continue su $[a, b]$

$$\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \quad con\ a < b$$

4. **Convenzione:**

$$\forall a, b \int_a^b f = -\int_b^a f$$

3 Teorema della media integrale

f continua su $[a, b]$, allora $\exists c \in [a, b]\ t.c$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Dimostazione: Siano x_0 e x_1 punti di minimo e massimo assoluti (Wiestrass). Allora

$$\forall x \in [a, b]. f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x_0)dx}_{f(x_0)(b-a)} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x_1)dx}_{f(x_1)(b-a)}$$

Divido per $b - a$ e trovo

$$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)$$

Per il teorema dei valori intermedi applicato a f,

$$\exists c \in [a, b]\ t.c\ f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)$$

4 La primitiva di una funzione

4.1 Definizione

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$. $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ si dice primidiva di f su $]a,b[$ se vale $F'(x) = f(x)\ \forall x \in]a,b[$

Osservazione: Se F è la primitiva di f su]a,b[,
allora $H :]a,b[\to \mathbb{R},\ H(x) = F(x) + C$ è primitiva di $f\ \forall c \in \mathbb{R}$

Osservazione personale: Le primitive di una funzione f sono infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a F(x)+C, dove 'C' è un valore scalare

4.2 Proposizione:

siano F e G primitive di f su]a,b[. Allora

$$\exists k \in \mathbb{R} :\ F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in]a,b[$$

Dimostazione: usiamo $H :]a,b[\to \mathbb{R},\ H(x) = F(x) - G(x)$. Vale $H'(x) = 0 \forall x \in]a,b[$ e dunque H è costante su $]a,b[$

Osservazione: La proposizione è valida purché si lavori su un intervallo $]a,b[$

5 Funzioni integrali

5.1 Definizione

data $f :]a_0, a_0[\to \mathbb{R}$ continua e $c \in \mathbb{R}$
definiamo

$$\underbrace{I_c}_{(Funzione\ integrale\ di\ punto\ base\ c)} :]a_0, b_0[\to \mathbb{R},\ I_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

5.2 Proprietà di I_c

1. $I_c(c) = 0$
2. Dati $c_1, c_2 \in]a_0, b_0[$,

$$I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt \Rightarrow I_{c_1} - I_{c_2}\ è\ costante$$

5.3 Teorema fondametale del calcolo integrale

Sia f continua su $]a_0, b_0[$, sia $c \in]a_0, b_0[$
Allora $\forall x \in]a_0, b_0[\ vale\ I_c'(x) = f(x)$

Dimostazione: Bisogna trovare

$$\lim_{h\to 0} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$$

$\forall x \in]a_0, b_0[$ Guardiamo il limite destro;
dunque dobbiamo provare che $\forall h_n \to 0^+$

$$h_n > 0 \forall n \text{ vale } \frac{I_c(x+h_n) - I_c(x)}{h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

Si scrive

$$I_c(x+h_n) - I_c(x) = \int_c^{x+h_n} f - \int_c^x f = \int_x^{x+h_n} f(t)dt$$

Per teorema della media integrale

$$\exists c_n \in [x_1, x+h_n] \ t.c \ \frac{1}{h_n}\int_x^{x+h_n} f(t)dt = f(c_n).$$

Poiché f è continua e $c_n \to x$, si ottiene $f(c_n) \to f(x)$. **qed**

5.4 Teorema fondametale del calcolo 2 o Formula di Torricelli

Se f è continua su $]a_0, b_0[$ e se F è primitiva di f su $]a_0, b_0[$ allora $\forall a, b \in]a_0, b_0[$ vale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dimostazione: Sia $c \in]a_0, b_0[$
I_c e F sono le primitive di f si $]a_0, b_0[$.
Per il teorema di caratterizzazione delle primitive

$$\exists k \in \mathbb{R} \ t.c \ F(x) = I_c(x) + k \forall x \in]a_0, b_0[$$

Dunque

$$F(b) - F(a) = I_c(b) + k - I_c(a) + k = I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^b f(x)dx$$

qed

6 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come $\int x^k \sin x$

6.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

Proposizione: Sia $h : I \to J$ derivabile e $f : J \to \mathbb{R}$ continua ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti. Definiamo $F : I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t)dt$$

Allora F è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

Dimostrazione: scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t)dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive $F = I_c \circ h$.
Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I_c'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

7 Formula per il cambio variabile

Teorema: I, J intervalli aperti, $h : I \to J$ con derivata h' continua su I
$f : J \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

Dimostrazione: siano $F : I \to \mathbb{R}, G : I \to R, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx, G(z) = \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt$
Le funzioni integrande sono continue, h' è continua. Dunque F e G sono derivabili in I.
Vale $F'(z) = f(h(z))h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$
Dunque $F - G$ è costante su I.
Poiché $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$, si conclude che $F(z) = G(z) \quad z \in I$

8 Integrali generalizzati

Definizione $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua.
Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$$\exists \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)dx =: \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La definizione per $f :] - \infty, b] \to \mathbb{R}$ è omessa perché analoga

Definizione: $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se

$$\exists \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

9 Spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n|x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R}\}$$

In $\mathbb{R}^n$ vale

Somma tra vettori $x = (x_1, \dots, x_2), y = (y_1, ..., y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1 + \cdots + x_n + y_n)$$

Prodotto con scalare dato $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Definizione Prodotto scalare euclideo Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, poniamo:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

9.1 Proprietà:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

9.2 Definizione Vettori ortogonale

$x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

9.3 Definizione Norma euclidea

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$

Si dice norma di x (viene usata la notazione $|x|$)

Interpretazione della norma con lunghezza (con il Teorema di Pitagora)

9.3.1 Proprietà della norma

1. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ in oltre $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguanza triangolare, con relativa interpretazione)

9.4 Normalizzato di un vettore

Definizione: dato $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$, il normalizzato di x è il vettore $\frac{x}{|x|}$, l'unico multiplo positivo di x che ha norma 1

9.5 Scrittura del prodotto scalare in coordinate polati in $\mathbb{R}^n$

Dati $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, scriviamo

$$x = |x|\frac{x}{|x|} = r(\cos\theta, \sin\theta)$$

dove $r = |x|$ e $\theta \in \mathbb{R}$ è opportuno. Presi $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $y = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$, risulta

$$\langle x, y\rangle = r\rho\cos(\phi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\phi - \theta)$$

la conseguenza è la disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

9.6 La disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Inoltre vale l'uguaglianza sse x e y sono indipendenti

9.7 Formula del "quadrato di un binomio "

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$$

La dimostazione avviene con le proprietà del prodotto scalare. Dalla formula sopra segue che, se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Teorema dio Pitagora

9.8 Disuguaglianza triangolare

Ancora della formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dimostazione della disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti

$$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2+2\langle x, y\rangle \leq \text{ (per Clauchy-Schwarz) } \leq |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y| = (|x| + |y|)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

9.9 Definizione distanza

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ la distanza tra x e y è

$$|x - y|$$

9.10 Intorni sferici o dischi o palle

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ (centro) e $r > 0$ (raggio), poniamo

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\} \text{ (palla con centro x e raggio r)}$$

9.11 Definizione insieme limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c $A \subseteq B(0, R)$

9.12 Insieme aperto

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ t.c } B(x, r) \subseteq A$$

Esempi: Gli intervalli $]a, b[$, i rettangoli $A = IJ \subseteq \mathbb{R}^2$ con I, J aperti in R.

10 Sucessioni in $\mathbf{R}^n$

Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucessione in $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

10.1 Definizione

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucessione in $\mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$ Si dice $x_k \to x$ per $k \to +\infty$ se vale

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Equivalentemente se vale $lim_{k\to+\infty}|x_k - x| = 0$

11 Funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$. Data $f : A \to B$, il grafico di f è

$$Graf(G) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

11.1 Definizione funzione continua

$f : A \to B$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$)
f si dice continua se $\overline{x}$ se vale quanto segue:

$$\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (x_k) \text{ sucessione in A, } x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \overline{x} \implies f(x_k) \to f(\overline{x}) \quad k \to +\infty$$

Si dimostra che la definizione di continuà "per sucessioni" opportuna data è equivalente alla seguente:

$$f : A \to B \textit{ continua in } x \in A \textit{ se}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \textit{ t.c } |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$
$\forall x \in A \cap B(x, \delta)$

A Proprietà integrali

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

B Tabella primitive

TODO

C Integrazione di una funzione composta

La formula generica è:

$$\int_a^b g'(f(x))f'(x)dx = \Big[g(f(x))\Big]_a^b$$

deriva da

$$f : I \to J, g : J \to \mathbb{R},\ \ f, g\ derivabili$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \int_a^b g'(f(x))f'(x)dx = \Big[g(f(x))\Big]_a^b$$

C.1 Integrali notevoli di funzioni composte

- $\int f'(x)[f'(x)]^\alpha dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ *con* $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$ **NB:***questo è il caso* $\alpha = -1$ *della prec.*
- $\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x)$
- $\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x)$
- $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$