

April 16, 2022

1 Somma di Reimann

Dato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, fissato $n \in \mathbb{N}$
poniamo $h = \frac{b-a}{n}$ e
 $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = a + nh$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$ fissiamo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Sia f continua su $[a, b]$. Poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)h = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n}$$

S_n = somma di Riemann n -esima

Nota S_n dipende dalla scelta di ξ_1, \dots, ξ_n , che è arbitraria

Osservazione $a = b \Rightarrow S_n = 0 \forall n$

Osservazione $\forall x \in [a, b]. f(x) = c \Rightarrow S_n = c(b-a)$
Dunque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è costante, in questi casi

1.1 Teorema

f continua in $[a, b]$. Allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ *finito* t.c limite ** dipende dalla $n \rightarrow +\infty$
sulla retta dei punti ξ_1, \dots, ξ_n fatta nella costruzione sopra

Si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$$

e si dice che f è integrabile

Osservazione dalle precedenti osservazioni si deduce
 $\int_a^a f(x)dx = 0$ e
 $\int_a^b cdx = c(b-a)$

Osservazione Esistono funzioni discontinue per cui $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ oppure dipende
dalla scelta dei punti ξ_1, \dots, ξ_n fatta ad ogni passo

Osservazione Se f ha un numero finito di punti di discontinuità (con salto finito) allora f è integrabile.

2 Proprietà dell'integrale

1. **Linearità:** f, g continue su $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g] = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività:** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile
Allora $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. **Monotomia:** f, g continue su $[a, b]$

$$\forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \quad \text{con } a < b$$

4. **Convenzione:**

$$\forall a, b \int_a^b f = - \int_b^a f$$

3 Teorema della media integrale

f continua su $[a, b]$, allora $\exists c \in [a, b]$ t.c

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dimostrazione: Siano x_0 e x_1 punti di minimo e massimo assoluti (Weierstrass). Allora

$$\forall x \in [a, b]. f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x_0) dx}_{f(x_0)(b-a)} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x_1) dx}_{f(x_1)(b-a)}$$

Divido per $b-a$ e trovo

$$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x_1)$$

Per il teorema dei valori intermedi applicato a f ,

$$\exists c \in [a, b] \text{ t.c } f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x_1)$$

4 La primitiva di una funzione

4.1 Definizione

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ si dice primitiva di f su $]a, b[$ se vale $F'(x) = f(x) \forall x \in]a, b[$

Osservazione: Se F è la primitiva di f su $]a, b[$, allora $H :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = F(x) + C$ è primitiva di $f \forall C \in \mathbb{R}$

Osservazione personale: Le primitive di una funzione f sono infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a $F(x)+C$, dove ‘ C ’ è un valore scalare

4.2 Proposizione:

siano F e G primitive di f su $]a, b[$. Allora

$$\exists k \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in]a, b[$$

Dimostrazione: usiamo $H :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = F(x) - G(x)$. Vale $H'(x) = 0 \forall x \in]a, b[$ e dunque H è costante su $]a, b[$

Osservazione: La proposizione è valida purché si lavori su un intervallo $]a, b[$

5 Funzioni integrali

5.1 Definizione

data $f :]a_0, a_0[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e $c \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\underbrace{I_c}_{\text{(Funzione integrale di punto base } c)} :]a_0, b_0[\rightarrow \mathbb{R}, \quad I_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

5.2 Proprietà di I_c

1. $I_c(c) = 0$
2. Dati $c_1, c_2 \in]a_0, b_0[$,

$$I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^{c_2} f(t)dt \Rightarrow I_{c_1} - I_{c_2} \text{ è costante}$$

5.3 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f continua su $]a_0, b_0[$, sia $c \in]a_0, b_0[$
Allora $\forall x \in]a_0, b_0[$ vale $I'_c(x) = f(x)$

Dimostrazione: Bisogna trovare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$$

$\forall x \in]a_0, b_0[$ Guardiamo il limite destro;
dunque dobbiamo provare che $\forall h_n \rightarrow 0^+$

$$h_n > 0 \forall n \text{ vale } \frac{I_c(x+h_n) - I_c(x)}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

Si scrive

$$I_c(x+h_n) - I_c(x) = \int_c^{x+h_n} f - \int_c^x f = \int_x^{x+h_n} f(t) dt$$

Per teorema della media integrale

$$\exists c_n \in [x, x+h_n] \text{ t.c. } \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f(t) dt = f(c_n).$$

Poiché f è continua e $c_n \rightarrow x$, si ottiene $f(c_n) \rightarrow f(x)$. **qed**

5.4 Teorema fondamentale del calcolo 2 o Formula di Torricelli

Se f è continua su $]a_0, b_0[$ e se F è primitiva di f su $]a_0, b_0[$ allora $\forall a, b \in]a_0, b_0[$ vale:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione: Sia $c \in]a_0, b_0[$

I_c e F sono le primitive di f su $]a_0, b_0[$.

Per il teorema di caratterizzazione delle primitive

$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } F(x) = I_c(x) + k \forall x \in]a_0, b_0[$$

Dunque

$$F(b) - F(a) = I_c(b) + k - I_c(a) + k = I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^b f(x) dx$$

qed

6 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come $\int x^k \sin x$

6.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

Proposizione: Sia $h : I \rightarrow J$ derivabile e $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti. Definiamo $F : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t) dt$$

Allora F è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

Dimostrazione: scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t)dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive $F = I_c \circ h$.

Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I'_c(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

7 Formula per il cambio variabile

Teorema: I, J intervalli aperti, $h : I \rightarrow J$ con derivata h' continua su I
 $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t)dt$$

Dimostrazione: siano $F : I \rightarrow \mathbb{R}, G : I \rightarrow \mathbb{R}, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx, G(z) = \int_{\alpha}^z f(h(t))h'(t)dt$

Le funzioni integrande sono continue, h' è continua. Dunque F e G sono derivabili in I .

Vale $F'(z) = f(h(z))h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$

Dunque $F - G$ è costante su I .

Poiché $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$, si conclude che $F(z) = G(z) \quad z \in I$

8 Integrali generalizzati

Definizione $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$$\exists \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x)dx =: \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La definizione per $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è omessa perché analoga

Definizione: $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se

$$\exists \lim_{z \rightarrow a^+} \int_z^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

9 Spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R}\}$$

In \mathbb{R}^n vale

Somma tra vettori $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n)$$

Prodotto con scalare dato $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Definizione Prodotto scalare euclideo Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, poniamo:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

9.1 Proprietà:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0).$

9.2 Definizione Vettori ortogonale

$x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

9.3 Definizione Norma euclidea

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$
 Si dice norma di x (viene usata la notazione $|x|$)

Interpretazione della norma con lunghezza (con il Teorema di Pitagora)

9.3.1 Proprietà della norma

1. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ in oltre $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare, con relativa interpretazione)

9.4 Normalizzato di un vettore

Definizione: dato $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$, il normalizzato di x è il vettore $\frac{x}{|x|}$, l'unico multiplo positivo di x che ha norma 1

9.5 Scrittura del prodotto scalare in coordinate polari in \mathbb{R}^n

Dati $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, scriviamo

$$x = |x| \frac{x}{|x|} = r(\cos \theta, \sin \theta)$$

dove $r = |x|$ e $\theta \in \mathbb{R}$ è opportuno. Presi $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $y = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$, risulta

$$\langle x, y \rangle = r \rho \cos(\phi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\phi - \theta)$$

la conseguenza è la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

9.6 La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Inoltre vale l'uguaglianza sse x e y sono indipendenti

9.7 Formula del "quadrato di un binomio"

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

La dimostrazione avviene con le proprietà del prodotto scalare. Dalla formula sopra segue che, se $x \perp y$ in \mathbb{R}^n , allora vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Teorema di Pitagora

9.8 Disuguaglianza triangolare

Ancora della formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dimostrazione della disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq (\text{per Cauchy-Schwarz}) \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

9.9 Definizione distanza

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ la distanza tra x e y è

$$|x - y|$$

9.10 Interni sferici o dischi o palle

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ (centro) e $r > 0$ (raggio), poniamo

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\} \text{ (palla con centro } x \text{ e raggio } r)$$

9.11 Definizione insieme limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B(0, R)$

9.12 Insieme aperto

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ t.c. } B(x, r) \subseteq A$$

Esempi: Gli intervalli $]a, b[$, i rettangoli $A = IJ \subseteq \mathbb{R}^2$ con I, J aperti in \mathbb{R} .

10 Successioni in \mathbb{R}^n

Sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

10.1 Definizione

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione in \mathbb{R}^n ; $x \in \mathbb{R}^n$ Si dice $x_k \rightarrow x$ per $k \rightarrow +\infty$ se vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Equivalentemente se vale $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - x| = 0$

11 Funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$. Data $f : A \rightarrow B$, il grafico di f è

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

11.1 Definizione funzione continua

$f : A \rightarrow B$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$)

f si dice continua se \bar{x} se vale quanto segue:

$$\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x_k) \text{ successione in } A, x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{x} \implies f(x_k) \rightarrow f(\bar{x}) \quad k \rightarrow +\infty$$

Si dimostra che la definizione di continuità "per successioni" opportuna data è equivalente alla seguente:

$f : A \rightarrow B$ continua in $x \in A$ se

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \\ \forall x \in A \cap B(x, \delta) \end{aligned}$$

A Proprietà integrali

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int k f(x) dx &= k \int f(x) dx \end{aligned}$$

B Tabella primitive

TODO

C Integrazione di una funzione composta

La formula generica è:

$$\int_a^b g'(f(x))f'(x)dx = \left[g(f(x)) \right]_a^b$$

deriva da

$$f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}, f, g \text{ derivabili}$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \int_a^b g'(f(x))f'(x)dx = \left[g(f(x)) \right]_a^b$$

C.1 Integrali notevoli di funzioni composte

- $\int f'(x)[f'(x)]^\alpha dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ con $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$ **NB:** questo è il caso $\alpha = -1$ della prec.
- $\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x)$
- $\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x)$
- $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$