June 2, 2022

# 1 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come $\int x^k \sin x$

## 1.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

**Proposizione:** Sia $h : I \to J$ derivabile e $f : J \to \mathbb{R}$ continua ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti. Definiamo $F : I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t)dt$$

Allora $F$ è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

**Dimostrazione:** scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t)dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive $F = I_c \circ h$.
Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I_c'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

# 2 Formula per il cambio variabile

**Teorema:** $I, J$ intervalli aperti, $h : I \to J$ con derivata $h'$ continua su $I$
$f : J \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

**Dimostrazione:** siano $F : I \to \mathbb{R}, G : I \to R, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx, G(z) = \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt$
Le funzioni integrande sono continue, $h'$ è continua. Dunque $F$ e $G$ sono derivabili in $I$.
Vale $F'(z) = f(h(z))h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$
Dunque $F - G$ è costante su $I$.
Poiché $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$, si conclude che $F(z) = G(z) \quad z \in I$

# 3 Integrali generalizzati

**Definizione** $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua.
Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$$\exists \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)dx =: \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La definizione per $f : ]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è omessa perché analoga

**Definizione:** $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$, continua. Si dice che $f$ è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se

$$\exists \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

# 4 Spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n | x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R}\}$$

In $\mathbb{R}^n$ vale

**Somma tra vettori** $x = (x_1, \dots, x_2), y = (y_1, ..., y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n)$$

**Prodotto con scalare** dato $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

**Definizione Prodotto scalare euclideo** Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, poniamo:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

## 4.1 Proprietà:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x+\mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle+\mu\langle y, z\rangle$ e $\langle z, \lambda x+\mu y\rangle = \lambda\langle z, x\rangle+\mu\langle z, y\rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
4. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

## 4.2 Definizione Vettori ortogonale

$x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $\langle x, y\rangle = 0$

## 4.3 Definizione Norma euclidea

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \in [0, +\infty[$
Si dice norma di x (viene usata la notazione $|x|$)

**Interpretazione della norma con lunghezza (con il Teorema di Pitagora)**

### 4.3.1 Proprietà della norma

1. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ in oltre $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x+y| \leq |x| + |y| \quad forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguanza triangolare, con relativa interpretazione)

## 4.4 Normalizzato di un vettore

**Definizione:** dato $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$, il normalizzato di x è il vettore $\frac{x}{|x|}$, l'unico multiplo positivo di $x$ che ha norma 1

## 4.5 Scrittura del prodotto scalare in coordinate polati in $\mathbb{R}^n$

Dati $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , scriviamo

$$x = |x| \frac{x}{|x|} = r(\cos\theta, \sin\theta)$$

dove $r = |x|$ e $\theta \in \mathbb{R}$ è opportuno. Presi $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $y = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ , risulta

$$\langle x, y \rangle = r\rho\cos(\phi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\phi - \theta)$$

la conseguenza è la disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

## 4.6 La disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Inoltre vale l'uguaglianza sse $x$ e $y$ sono indipendenti

## 4.7 Formula del "quadrato di un binomio "

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

La dimostazione avviene con le proprietà del prodotto scalare. Dalla formula sopra segue che, se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora vale

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

**Teorema dio Pitagora**

### 4.8 Disuguaglianza triangolare

Ancora della formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dimostazione della disuguaglianza triangolare

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti

$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2+2\langle x, y\rangle \leq$ (per Clauchy-Schwarz) $\leq |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y| = (|x|+|y|)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

### 4.9 Definizione distanza

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ la distanza tra $x$ e $y$ è

$$|x-y|$$

### 4.10 Intorni sferici o dischi o palle

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ (centro) e $r > 0$ (raggio), poniamo

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < r\} \text{ (palla con centro x e raggio r)}$$

### 4.11 Definizione insieme limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c $A \subseteq B(0,R)$

### 4.12 Insieme aperto

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ t.c } B(x,r) \subseteq A$$

**Esempi:** Gli intervalli $]a,b[$, i rettangoli $A = IJ \subseteq \mathbb{R}^2$ con $I, J$ aperti in R.

## 5 Sucessioni in $\mathbf{R}^n$

Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucessione in $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

### 5.1 Definizione

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucessione in $\mathbb{R}^n$ ; $x \in \mathbb{R}^n$ Si dice $x_k \to x$ per $k \to +\infty$ se vale

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

**Equivalentemente** se vale $lim_{k\to+\infty}|x_k - x| = 0$

## 6 Funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$. Data $f : A \to B$ , il grafico di f è

$$Graf(G) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

### 6.1 Definizione funzione continua

$f : A \to B$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$)
f si dice continua se $\overline{x}$ se vale quanto segue:

$$\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (x_k) \text{ sucessione in A, } x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \overline{x} \implies f(x_k) \to f(\overline{x}) \quad k \to +\infty$$

Si dimostra che la definizione di continuà "per sucessioni" opportuna data è equivalente alla seguente:

$$f : A \to B \ \textit{continua in } x \in A \textit{ se}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \ t.c \ |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$
$\forall x \in A \cap B(x, \delta)$

# 7 Derivate parziale

**Def:** $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$
Poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x} + h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}, \overline{y} + h) - f(\overline{x}, \overline{y})}{h}$$

Se i due limiti esistono (finiti), diciamo che f è derivabile parziamente in $(\overline{x}, \overline{y})$.
Poniamo

$$\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = (\partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))$$

gradiente di $f$
Più in generale, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in A$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_1, \ldots, e_n$ basi canoniche in $\mathbb{R}^n$
Poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x} + he_j) - f(\overline{x})}{h}$$

($anche\ \partial_j f(\overline{x})$). Derivate parziali rispetto $x_j$

# 8 Derivabilità e continuità

Ci chiediamo se l'esitenza della derivate parziali implichino la continuità. La risposta è negativa grazie al segiente esempio

**ES** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & se\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad se\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. $\exists \partial_x f(0, 0), \partial_y f(0, 0)$
2. $f$ è discontinua in $(0, 0)$

**verifica di 1**

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h*0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Analogamente $\partial_x f(0,0) = 0$

**Verifica di 2** Usiamo la definizione "per sucessioni": troviamo, segliendo $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} * \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque $f$ non è continua in $(0,0)$

# 9 Differenziabilità

Ricordiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\overline{x}$ con derivata $f'(\overline{x})$ se e solo se

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + o(h)$$

dove il resto $o(h)$ soddisfa

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{o(h)}{h} \right| = 0$$

equivalente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; t.c \left| \frac{o(h)}{h} \right| < \varepsilon \quad \forall h \in ]-\delta, \delta[$$

## 9.1 Definizione di "o piccolo" in $\mathbb{R}^2$

**Def** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto contenete $(0,0)$

Sia $g : A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $p \geq 0$.

Si scrive $g(h,k) = o(\|(h,k)\|)$ per $(h,k) \to (0,0)$ se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \; t.c \left| \frac{o(h)}{h} \right| < \varepsilon \quad \forall (h,k) \in A \cap B((0,0), \delta)$$

**Esempi:**

$$g(h,k) = hk = o(|(h,k)|) \quad per \; (h,k) \to (0,0)$$

g(h,k) = $\sqrt{|h|^{1/2}} = o(|(h,k)|) = o(1)$

g(h,k) = h$^2 k + k^3 = o(|(h,k)|^2) \quad (h,k) \to (0,0)$

## 9.2 Def. funzione differenziabile

$A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$. (A aperto) Si dice che $f$ è differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ se

1. $\exists \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}$
2. $\forall (h,k) \; t.c \; (\overline{x}, \overline{y}) + (h,k) \in A$ vale lo sviluppo:

   $$f((\overline{x}, \overline{y}) + (h,k)) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k) \rangle + o(|(h,k)|) \quad per \; (h,k) \to (0,0)$$

**Osservazione:** $f$ differenziabile in $(\overline{x},\overline{y}) \in A \implies f$ continua in $(\overline{x},\overline{y})$. Basta osservare che $\forall (h_n,k_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$ risulta

$f(\overline{x},\overline{y})+(h_n,k_n)) - f(\overline{x},\overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}),(h_n,k_n)\rangle + o(|(h_n,k_n)|)$

Nelle coordinate $(\overline{x}+h,\overline{y}+k) = (x,y) \in A$ si scrive:

$$f(x,y) = f(\overline{x},\overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}),(x-\overline{x},y-\overline{y})\rangle + o(|(x-\overline{x},y-\overline{y})|) \quad (x,y)\to(\overline{x},\overline{y})$$

Da questa formula emerge

$$T_1(x,y) = f(\overline{x},\overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}),(x-\overline{x},y-\overline{y})\rangle$$

$T_1$ = Polinomio di Taylor del primo ordine con punto iniziale $(\overline{x},\overline{y})$

Infine $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = T_1(x,y)\}$ è il piano tangente al grafico di $f$ in $(\overline{x},\overline{y},f(\overline{x},\overline{y}))$.

## 9.3 Teorema della differenziabilità

Se $f$ è $C^1$ su $A \in \mathbb{R}^2$, $A$ aperto, allora $\forall (\overline{x},\overline{y}) \in A$ $f$ è differenziabile.

### 9.3.1 Lemma preliminare

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è $C^1$ sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\forall (\overline{x},\overline{y}) \in A$, $\forall h,k \in \mathbb{R}$

Tali che $(\overline{x}+h,)$, $(\overline{x},\overline{y}+k) \in A$, esistono $\theta_1,\theta_2 \in ]0,1[$ tali che

$$f(\overline{x}+h,\overline{y}) - f(\overline{x},\overline{y}) = \partial_x f(\overline{x}+\theta_1 h,\overline{y}) \quad e$$

$$f(\overline{x},\overline{y}+h) - f(\overline{x},\overline{y}) = \partial_y f(\overline{x},\overline{y}+\theta_2 k)$$

**Dim di 1** Per semplicità $A = \mathbb{R}^2$.

Considero la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t,\overline{y})$

Si verifica che $g$ è derivabile e vale

$$g(t) = \partial_x f(t,h) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora uso Lagrange sull'intervallo di estemi $\overline{x}$ e $\overline{x}+h$ per la funzione $g$. $\implies$ $\exists \theta_1 \in ]0,1[$ tale che $g(\overline{x}+h) - g(\overline{x}) = g'(\overline{x}+\theta_1,h)h$ Trascrivendo in termini di $f$, si trova

$$f(\overline{x}+h,\overline{y}) - g(\overline{x},\overline{y}) = \partial_x f(\overline{x}+\theta_1 h,\overline{y})h$$

**Dim 2** è analoga

### 9.3.2 Dimostrazione del teorema sulla differenziabilità

Per semplicità $A = \mathbb{R}^2$, f:R$^2$R classe $C^1$ e $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^2$. Per $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$f(\overline{x}+h,\overline{y}+k) - f(\overline{x},\overline{y}) = [f(\overline{x}+h,\overline{y}+k) - f(\overline{x}+h,\overline{y}] + [f(\overline{x}+h,\overline{y}) - f(\overline{x},\overline{y})] := (1)+(2)$$

Grazie al lemma precendente $\exists \theta_1,\theta_2 \in ]0,1[$ tali che

1. $= \partial_y f(\overline{x}+h,\overline{y}+\theta_1 k)k$
2. $= \partial_x f(\overline{x}+\theta_2 h,\overline{y})h$

Per concludere, basta mostrare che per $(h,k) \to (0,0)$

1. $= \partial_y f(\overline{x},\overline{y})k + o(|(h,k)|)$
2. $= \partial_x f(\overline{x},\overline{y})k + o(|(h,k)|)$

In altri termini basta vedere che (qualizziamo (2), ad esempio) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tali che

$$\frac{|\partial_x f(u,v) - \partial_x f(\overline{x},\overline{y})| < \varepsilon}{|(h,k)|} \quad \forall (h,k) \neq (0,0) \ \ |(h,k) < \delta$$

Siccome $\partial_x f$ è continua, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tali che

$$|\partial_x f(u,v) - \partial_x f(\overline{x},\overline{y})| < \varepsilon \quad \forall (u,v) \in B((\overline{x},\overline{y}),\delta)$$

Con questa scelta di $\delta$ , usando $\left|\frac{h}{|(h,k)|}\right| \leq 1$, abbiamo

$$|\partial_x f(\overline{x} + \theta_2 h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x},\overline{y})| < \varepsilon$$

perchè $(\overline{x} + \theta_2 h, \overline{y}) \in B((\overline{x},\overline{y}), f) \ \forall \theta_2 \in ]0,1[, \ \forall (h,k) \in B((0,0),\delta)$
L'analisi del termine (1) si svolge in modo analogo

# 10 Forme Quadratiche

## 10.1 Definizione

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $A = A^T$ considero $q_A : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $q_A(h) = \langle Ah, h \rangle$
$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ h \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \ Ah \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
$q_A$ è la forma quadratica associata alla matrice quadrata e simmetrica A
**quadrata:** matrice che ha lo stesso numero di righe e colonne
**simmetrica:** matrice che è uguale alla sua trasposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = A^T$$

$$q_A = \ \langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \rangle \ = \ \langle \begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \rangle \ = ah_1^2 + 2b\, h_1\, h_2 + ch_2^2$$

Caso con n generico:

$$q_A = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} h_k h_j = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_{jk} h_j h_k$$

**Osservazione informale:** Abbiamo trovato un polinomio di grado 2, quindi possiamo dire che le forme quadratiche sono delle funzioni associate a delle matrici che rappresentano polinomi

## 10.2 Segno di una forma quadratica

**Definizione:** $A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Si dice che A è definita positiva se vale $\langle Ah, h\rangle > 0 \; \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
2. Si dice che A è definita negativa se vale $\langle Ah, h\rangle < 0 \; \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
3. Si dice che A è indefinita se $\exists h^+, h^- \in \mathbb{R}^n$ t.c.
   $\langle Ah^-, h^-\rangle \lneqq 0 \lneqq \langle Ah^+, h^+\rangle$

**Osservazione informale:** La matrice A è positiva se per ogni vettore h è positiva, stessa cosa vale per il negativo. Invece si dice indefinita se per alcuni vettori h è negativa e per altri è positiva, quindi non possiamo assegnarli un segno preciso.

**Osservazione informale:** I segni di disuguaglianza devono essere stretti ($<$ $, >$), altrimenti si dice che A è semidefinita positiva.

Forme quadratiche non singolari:

1. $A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \qquad \textit{determinante positivo} \end{cases}$
2. $A < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ ac - b^2 > 0 \qquad \textit{determinante positivo} \end{cases}$
3. A è indefinita $\Leftrightarrow ac - b^2 < 0$ *determinante negativo*

   Forme quadratiche singolari:

4. se $ac - b^2 = 0$, quindi *determinante nullo*, si tratta di una matrice singolare, quindi A è semidefinita

## 10.3 Proposizione

Se $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è definita positiva, allora $\exists m > 0$ t.c.

$$\langle Ah, h\rangle \geq m|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Allo stesso modo se A è definita negativa, allora $\exists m > 0$ t.c.

$$\langle Ah, h\rangle \leq m\,|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

**Dimostrazione: (n=2)** Scriviamo $h = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ con $r \geq 0, r = |h|$ e $\theta \in [0, 2\pi]$
Allora vale $\langle Ah, h\rangle = a_{11}\, r^2\cos^2\theta \; + \; 2a_{12}\, r^2\cos\theta\sin\theta \; + \; a_{22}\, r^2\sin^2\theta = r^2[a_{11}\cos^2\theta \; + \; 2a_{12}\cos\theta\sin\theta \; + \; a_{22}\sin^2\theta]$
Poniamo $g(\theta) = [\dots]$ per $\theta \in [0, 2\pi]$
Per ipotesi $g(\theta) > 0 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$ (infatti $r^2 g(\theta) > 0 \quad \forall r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$)
Essendo f continua su $[0, 2\pi]$ per il teorema di Weistrass $\exists\overline{\theta} \in [0, 2\pi]$ tale che $g(\overline{\theta}) = min\ g$.

Tale minimo è positivo e lo chiamiamo m. Dunque $\langle Ah, h\rangle = r^2 g(\theta) \geq r^2 m = m|h|^2 \quad \forall h$

## 11 Formula di Taylor di ordine 2

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$, f è di classe $C^2$
Allora vale $\forall \overline{x} \in A$ vale lo sviluppo

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \triangledown f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \quad \text{per } h \to 0$$

**Dimostrazione:** Dimostriamo la seguente formula con resto "non uniforme"

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1, \forall x \in A$$

vale la formula

$$f(\overline{x}+tv) = f(\overline{x}) + \langle \triangledown f(\overline{x}), tv\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})tv, tv\rangle + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Consideriamo la funzione $g: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\overline{x}+tv)$ definita per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo.
Poichè f è di classe $C^2$, si vede che $\exists g'(t) = \langle \triangledown f(\overline{x}+tv), v\rangle \quad \forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ inoltre esiste ed è continua $g''(t) = \langle Hf(\overline{x}+tv)v, v\rangle$

Scriviamo la Taylor in t per g con punto iniziale t = 0. Otteniamo:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Trascrivendo in termini di f si trova esattamente la formula 1 da dimostrare.

## 12 Teorema di classificazione dei punti critici

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è $C^2$ sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, vale quanto segue, per $\overline{x} \in A$

1. $\begin{cases} \triangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) > 0 \qquad \Longrightarrow \overline{x} \text{ è punto di minimo locale} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \triangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) < 0 \qquad \Longrightarrow \overline{x} \text{ è punto di massimo locale} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \triangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) \text{ indefinita} \qquad \Longrightarrow \overline{x} \text{ è punto di sella} \end{cases}$

**Nota:** $\overline{x}$ punto critico di f si dice di sella se $\forall r > 0 \ \exists x_+,\ x_- \in B(\overline{x}, r)$ tale che $f(x_-) < f(\overline{x}) < f(x_+)$

**Dimostrazione** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$.
Sia $\overline{x} \in A$ un punto critico con $Hf(\overline{x}) > 0$.
Dobbiamo dimostrare che $\exists \delta > 0$ tale che:

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Usiamo la formuala di Taylor.

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) = f(\overline{x}) + \langle \triangledown f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\overline{x})h, h \rangle + o(|h|^2) \quad \text{per } h \to 0$$

visto che $\triangledown f(\overline{x}) = 0$, analizziamo $\frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o\left(|h|^2\right) \geq 0$
Per il teorema sulle forme positive $\exists m > 0$ tale che

$$\langle Hf(x)h, h \rangle \geq m|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2$$

Usando la definizione di o-piccolo con $\varepsilon = \frac{m}{4}$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$-\frac{m}{4} \leq \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Dunque, per $|h| < \delta$ vale

$$\begin{aligned} f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) &\geq |h|^2 \left( \frac{1}{2} m + \frac{o\left(|h|^2\right)}{|h|^2} \right) \geq \\ &\geq |h|^2 \left( \frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right) = \frac{m}{4} |h|^2 \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta) \end{aligned}$$

Il teorema è dimostrato. I casi di punto di massimo o sella sono analoghi.

## 12.1 Condizioni necessarie affinchè $\overline{x}$ sia di minimo

Siamo nel secondo ordine. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, f è $C^2$ su A e $\overline{x}$ è di minimo, allora:

$$\begin{cases} \triangledown f(\overline{x}) = 0 \\ \langle Hf(\overline{x})h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si dice in tal caso che $Hf(\overline{x})$ è semidefinita positiva