May 8, 2022

1 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come $\int x^k \sin x$

1.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

Proposizione: Sia $h : I \to J$ derivabile e $f : J \to \mathbb{R}$ continua ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti. Definiamo $F : I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t)dt$$

Allora F è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

Dimostrazione: scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t)dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive $F = I_c \circ h$.
Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I_c'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

2 Formula per il cambio variabile

Teorema: I, J intervalli aperti, $h : I \to J$ con derivata h' continua su I
$f : J \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt$$

Dimostrazione: siano $F : I \to \mathbb{R}, G : I \to R, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx, G(z) = \int_\alpha^z f(h(t))h'(t)dt$
Le funzioni integrande sono continue, h' è continua. Dunque F e G sono derivabili in I.
Vale $F'(z) = f(h(z))h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$
Dunque $F - G$ è costante su I.
Poiché $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$, si conclude che $F(z) = G(z) \quad z \in I$

3 Integrali generalizzati

Definizione $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua.
Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$$\exists \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)dx =: \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

La definizione per $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ è omessa perché analoga

Definizione: $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se

$$\exists \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

4 Spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n | x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R}\}$$

In $\mathbb{R}^n$ vale

Somma tra vettori $x = (x_1, \dots, x_2), y = (y_1, ..., y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n)$$

Prodotto con scalare dato $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Definizione Prodotto scalare euclideo Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, poniamo:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

4.1 Proprietà:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

4.2 Definizione Vettori ortogonale

$x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

4.3 Definizione Norma euclidea

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$
Si dice norma di x (viene usata la notazione $|x|$)

Interpretazione della norma con lunghezza (con il Teorema di Pitagora)

4.3.1 Proprietà della norma

1. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ in oltre $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguanza triangolare, con relativa interpretazione)

4.4 Normalizzato di un vettore

Definizione: dato $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$, il normalizzato di x è il vettore $\frac{x}{|x|}$, l'unico multiplo positivo di x che ha norma 1

4.5 Scrittura del prodotto scalare in coordinate polati in $\mathbb{R}^n$

Dati $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, scriviamo

$$x = |x| \frac{x}{|x|} = r(\cos\theta, \sin\theta)$$

dove $r = |x|$ e $\theta \in \mathbb{R}$ è opportuno. Presi $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $y = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$, risulta

$$\langle x, y \rangle = r\rho\cos(\phi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\phi - \theta)$$

la conseguenza è la disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

4.6 La disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Inoltre vale l'uguaglianza sse x e y sono indipendenti

4.7 Formula del "quadrato di un binomio "

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

La dimostazione avviene con le proprietà del prodotto scalare. Dalla formula sopra segue che, se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Teorema dio Pitagora

4.8 Disuguaglianza triangolare

Ancora della formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dimostazione della disuguaglianza triangolare

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti

$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2+2\langle x, y\rangle \leq$ (per Clauchy-Schwarz) $\leq |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y| = (|x|+|y|)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

4.9 Definizione distanza

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ la distanza tra x e y è

$$|x-y|$$

4.10 Intorni sferici o dischi o palle

Dato $x \in \mathbb{R}^n$ (centro) e $r > 0$ (raggio), poniamo

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < r\}$ (palla con centro x e raggio r)

4.11 Definizione insieme limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c $A \subseteq B(0, R)$

4.12 Insieme aperto

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ t.c } B(x,r) \subseteq A$$

Esempi: Gli intervalli $]a, b[$, i rettangoli $A = IJ \subseteq \mathbb{R}^2$ con I, J aperti in R.

5 Sucessioni in $\mathbf{R}^n$

Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucessione in $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

5.1 Definizione

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucessione in $\mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$ Si dice $x_k \to x$ per $k \to +\infty$ se vale

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Equivalentemente se vale $lim_{k\to+\infty}|x_k - x| = 0$

6 Funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$. Data $f : A \to B$, il grafico di f è

$$Graf(G) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

6.1 Definizione funzione continua

$f : A \to B$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$)
f si dice continua se $\overline{x}$ se vale quanto segue:

$$\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (x_k) \text{ sucessione in A, } x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \overline{x} \implies f(x_k) \to f(\overline{x}) \quad k \to +\infty$$

Si dimostra che la definizione di continuà "per sucessioni" opportuna data è equivalente alla seguente:

$$f : A \to B \textit{ continua in } x \in A \textit{ se}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta\ t.c\ |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$
$\forall x \in A \cap B(x, \delta)$

7 Forme Quadratiche

7.1 Definizione

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A = A^T$ considero $q_A :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $q_A(h) = \langle Ah, h\rangle$
$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ h \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ Ah \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
q_A è la forma quadratica associata alla matrice quadrata e simmetrica A
quadrata: matrice che ha lo stesso numero di righe e colonne
simmetrica: matrice che è uguale alla sua trasposta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = A^T$$

$$q_A = \ \langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \rangle \ = \ \langle \begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \rangle \ = ah_1^2 + 2b\,h_1\,h_2 + ch_2^2$$

Caso con n generico:

$$q_A = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} h_k h_j = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2 + \sum_{1\le j<k\le n} a_{jk} h_j h_k$$

Osservazione informale: Abbiamo trovato un polinomio di grado 2, quindi possiamo dire che le forme quadratiche sono delle funzioni associate a delle matrici che rappresentano polinomi

7.2 Segno di una forma quadratica

Definizione: $A^T = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Si dice che A è definita positiva se vale $\langle Ah, h\rangle > 0\ \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
2. Si dice che A è definita negativa se vale $\langle Ah, h\rangle < 0\ \forall h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
3. Si dice che A è indefinita se $\exists h^+, h^- \in \mathbb{R}^n$ t.c.
   $\langle Ah^-, h^-\rangle \lneqq 0 \lneqq \langle Ah^+, h^+\rangle$

Osservazione informale: La matrice A è positiva se per ogni vettore h è positiva, stessa cosa vale per il negativo. Invece si dice indefinita se per alcuni vettori h è negativa e per altri è positiva, quindi non possiamo assegnarli un segno preciso.

Osservazione informale: I segni di disuguaglianza devono essere stretti ($<$ $, >$), altrimenti si dice che A è semidefinita positiva.

Forme quadratiche non singolari:

1. $A > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \qquad \textit{determinante positivo} \end{cases}$
2. $A < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ ac - b^2 > 0 \qquad \textit{determinante positivo} \end{cases}$
3. A è indefinita $\Leftrightarrow ac - b^2 < 0$ *determinante negativo*

   Forme quadratiche singolari:

4. se $ac - b^2 = 0$, quindi *determinante nullo*, si tratta di una matrice singolare, quindi A è semidefinita

7.3 Proposizione

Se $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definita positiva, allora $\exists m > 0$ t.c.

$$\langle Ah, h \rangle \geq m|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Allo stesso modo se A è definita negativa, allora $\exists m > 0$ t.c.

$$\langle Ah, h \rangle \leq m\,|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione: (n=2) Scriviamo $h = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ con $r \geq 0, r = |h|$ e $\theta \in [0, 2\pi]$
Allora vale $\langle Ah, h \rangle = a_{11}\,r^2\cos^2\theta + 2a_{12}\,r^2\cos\theta\sin\theta + a_{22}\,r^2\sin^2\theta = r^2[a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta]$
Poniamo $g(\theta) = [\dots]$ per $\theta \in [0, 2\pi]$
Per ipotesi $g(\theta) > 0 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$ (infatti $r^2 g(\theta) > 0 \quad \forall r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$)
Essendo f continua su $[0, 2\pi]$ per il teorema di Weistrass $\exists\overline{\theta} \in [0, 2\pi]$ tale che $g(\overline{\theta}) = min\ g$.
Tale minimo è positivo e lo chiamiamo m. Dunque $\langle Ah, h \rangle = r^2 g(\theta) \geq r^2 m = m|h|^2 \quad \forall h$

8 Formula di Taylor di ordine 2

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f :\ A \to \mathbb{R}$, f è di classe C^2
Allora vale $\forall\overline{x} \in A$ vale lo sviluppo

$$f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + \langle \bigtriangledown f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h \rangle + o(|h|^2) \quad \text{per } h \to 0$$

Dimostrazione: Dimostriamo la seguente formula con resto "non uniforme"

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1, \forall x \in A$$

vale la formula

$$f(\overline{x} + tv) = f(\overline{x}) + \langle \bigtriangledown f(\overline{x}), tv \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\overline{x})tv, tv \rangle + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Consideriamo la funzione $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\overline{x} + tv)$ definita per ε sufficientemente piccolo.
Poichè f è di classe C^2, si vede che $\exists g'(t) = \langle \bigtriangledown f(\overline{x} + tv), v \rangle \ \ \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ inoltre esiste ed è continua $g''(t) = \langle Hf(\overline{x} + tv)v, v \rangle$

Scriviamo la Taylor in t per g con punto iniziale t = 0. Otteniamo:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Trascrivendo in termini di f si trova esattamente la formula 1 da dimostrare.

9 Teorema di classificazione dei punti critici

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è C^2 sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, vale quanto segue, per $\overline{x} \in A$

1. $\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{x}$ è punto di minimo locale

2. $\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{x}$ è punto di massimo locale

3. $\begin{cases} \bigtriangledown f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) \text{ indefinita} \end{cases} \Longrightarrow \overline{x}$ è punto di sella

Nota: $\overline{x}$ punto critico di f si dice di sella se $\forall r > 0 \ \ \exists x_+ ,\ x_- \in B(\overline{x}, r)$ tale che $f(x_-) < f(\overline{x}) < f(x_+)$

Dimostrazione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2.
Sia $\overline{x} \in A$ un punto critico con $Hf(\overline{x}) > 0$.
Dobbiamo dimostrare che $\exists \delta > 0$ tale che:

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Usiamo la formuala di Taylor.

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) = f(\overline{x}) + \langle \bigtriangledown f(\overline{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\overline{x})h, h \rangle + o(|h|^2) \quad \text{per } h \to 0$$

visto che $\bigtriangledown f(\overline{x}) = 0$, analizziamo $\frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h \rangle + o\left(|h|^2\right) \geq 0$
Per il teorema sulle forme positive $\exists m > 0$ tale che

$$\langle Hf(x)h, h \rangle \geq m|h|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2$$

Usando la definizione di o-piccolo con $\varepsilon = \frac{m}{4}$, $\exists \delta > 0$ tale che

$$-\frac{m}{4} \leq \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall h \in B(0,\delta)$$

Dunque, per $|h| < \delta$ vale

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) &\geq |h|^2 \left(\frac{1}{2} m + \frac{o\left(|h|^2\right)}{|h|^2} \right) \geq \\ &\geq |h|^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right) = \frac{m}{4} |h|^2 \geq 0 \quad \forall h \in B(0,\delta) \end{aligned}$$

Il teorema è dimostrato. I casi di punto di massimo o sella sono analoghi.

9.1 Condizioni necessarie affinchè $\overline{x}$ sia di minimo

Siamo nel secondo ordine. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, f è C^2 su A e $\overline{x}$ è di minimo, allora:

$$\begin{cases} \triangledown f(\overline{x}) = 0 \\ \langle Hf(\overline{x})h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si dice in tal caso che $Hf(\overline{x})$ è semidefinita positiva