1 Spazio euclideo

$$R^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n | x_1, x_2, x_n \in R\}$$

In R^n vale

Somma tra vettori $x = (x_1, \dots, x_2), y = (y_1, ..., y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n)$$

Prodotto con scalare dato $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in R$, poniamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Definizione Prodotto scalare euclideo Dati $x, y \in R^n$, poniamo:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

1.1 Proprietà:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in R^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z, x\rangle + \mu\langle z, y\rangle \quad \forall x, y, z \in R^n \lambda, \mu \in R$
3. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in R^n$
4. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

1.2 Definizione Vettori ortogonale

$x, y \in R^n$ si dicono ortogonali se $\langle x, y\rangle = 0$

1.3 Definizione Norma euclidea

Dato $x \in R^n$, poniamo $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \in [0, +\infty[$
Si dice norma di x (viene usata la notazione $|x|$)

Interpretazione della norma con lunghezza (con il Teorema di Pitagora)

1.3.1 Proprietà della norma

1. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in R, x \in R^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in R^n$ in oltre $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad forall x, y \in R^n$ (disuguanza triangolare, con relativa interpretazione)

1.4 Normalizzato di un vettore

Definizione: dato $x \neq 0, x \in R^n$, il normalizzato di x è il vettore $\frac{x}{|x|}$, l'unico multiplo positivo di x che ha norma 1

1.5 Scrittura del prodotto scalare in coordinate polati in R^n

Dati $x \in R^2 \setminus \{0\}$, scriviamo

$$x = |x|\frac{x}{|x|} = r(\cos\theta, \sin\theta)$$

dove $r = |x|$ e $\theta \in R$ è opportuno. Presi $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $y = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$, risulta

$$\langle x, y\rangle = r\rho\cos(\phi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\phi - \theta)$$

la conseguenza è la disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

1.6 La disuguaglianza di Clauchy-Schwarz

$\forall x, y \in R^n$ vale

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Inoltre vale l'uguaglianza sse x e y sono indipendenti

1.7 Formula del "quadrato di un binomio "

Dati $x, y \in R^n$ vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$$

La dimostazione avviene con le proprietà del prodotto scalare. Dalla formula sopra segue che, se $x \perp y$ in R^n, allora vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Teorema dio Pitagora

1.8 Disuguaglianza triangolare

Ancora della formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dimostazione della disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in R^n$$

Infatti

$$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2+2\langle x, y\rangle \leq (per Clauchy - Schwarz) \leq |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y| = (|x| + |y|)^2 \quad \forall x, y \in R^n$$

1.9 Definizione distanza

$\forall x, y \in R$ la distanza tra x e y è

$$|x - y|$$

1.10 Intorni sferici o dischi o palle

Dato $x \in R^n$ (centro) e $r > 0$ (raggio), poniamo

$$B(x,r) = \{y \in R^n \mid |y - x| < r\} \text{ (palla con centro x e raggio r)}$$

1.11 Definizione insieme limitato

Sia $A \subseteq R^n$, si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c $A \subseteq B(0,R)$

1.12 Insieme aperto

Sia $A \subseteq R^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ t.c } B(x,r) \subseteq A$$

Esempi: Gli intervalli $]a,b[$, i rettangoli $A = IJ \subseteq R^2$ con I, J aperti in R.

2 Sucessioni in R^n

Sia $(x_k)_{k\in N}$ una sucessione in $R^n \quad \forall k \in N$

2.1 Definizione

$(x_k)_{k\in N}$ sucessione in R^n ; $x \in R^n$ Si dice $x_k \to x$ per $k \to +\infty$ se vale

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Equivalentemente se vale $lim_{k\to+\infty}|x_k - x| = 0$

3 Funzioni di più variabili

$A \subseteq R^n, B \subseteq R^q$. Data $f : A \to B$, il grafico di f è

$$Graf(G) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

3.1 Definizione funzione continua

$f : A \to B$ (con $A \subseteq R^n, B \subseteq R^q$)

f si dice continua se $\overline{x}$ se vale quanto segue:

$$\forall (x_k)_{k\in N},\ (x_k) \text{ sucessione in A, } x_k k \to +\infty \overline{x}$$