

1 Integrazione per parti

Viene usata nei casi come $\int x^k \sin x$

1.1 Variante del teorema fondamentale del calcolo

Proposizione: Sia $h : I \rightarrow J$ derivabile e $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti). Definiamo $F : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t) dt$$

Allora F è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x) = f(h(x))h'(x)$.

Dimostrazione: scrivo

$$I_c(z) = \int_c^z f(t) dt \quad \forall z \in J$$

Allora si scrive $F = I_c \circ h$.

Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo

$$F'(x) = I'_c(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

2 Formula per il cambio variabile

Teorema: I, J intervalli aperti, $h : I \rightarrow J$ con derivata h' continua su I $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t) dt$$

Dimostrazione: siano $F : I \rightarrow \mathbb{R}, G : I \rightarrow \mathbb{R}, F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x) dx, G(z) = \int_{\alpha}^z f(h(t))h'(t) dt$

Le funzioni integrande sono continue, h' è continua. Dunque F e G sono derivabili in I .

Vale $F'(z) = f(h(z))h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))h'(z) \quad \forall z \in I$

Dunque $F - G$ è costante su I .

Poiché $F(\alpha) = 0, G(\alpha) = 0$, si conclude che $F(z) = G(z) \quad z \in I$

3 Integrali generalizzati

Definizione $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$$\exists \lim_{z \rightarrow +\infty} \int_a^z f(x) dx =: \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

La definizione per $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è omessa perché analoga

Definizione: $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b[$ se

$$\exists \lim_{z \rightarrow a^+} \int_z^b f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$