

# 1 Spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R}\}$$

In  $\mathbb{R}^n$  vale

**Somma tra vettori**  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y = (x_1 + y_1 + \dots + x_n + y_n)$$

**Prodotto con scalare** dato  $x = (x_1, \dots, x_n), \lambda \in \mathbb{R}$ , poniamo

$$\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

**Definizione Prodotto scalare euclideo** Dati  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , poniamo:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

## 1.1 Proprietà:

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2.  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$  e  $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
4.  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \underline{0} = (0, 0, \dots, 0).$

## 1.2 Definizione Vettori ortogonale

$x, y \in \mathbb{R}^n$  si dicono ortogonali se  $\langle x, y \rangle = 0$

## 1.3 Definizione Norma euclidea

Dato  $x \in \mathbb{R}^n$ , poniamo  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$   
Si dice norma di  $x$  (viene usata la notazione  $|x|$ )

**Interpretazione della norma con lunghezza (con il Teorema di Pitagora)**

### 1.3.1 Proprietà della norma

1.  $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2.  $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  in oltre  $|x| = 0 \iff x = 0$
3.  $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n$  (disuguaglianza triangolare, con relativa interpretazione)

## 1.4 Normalizzato di un vettore

**Definizione:** dato  $x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$ , il normalizzato di  $x$  è il vettore  $\frac{x}{|x|}$ , l'unico multiplo positivo di  $x$  che ha norma 1

## 1.5 Scrittura del prodotto scalare in coordinate polari in $\mathbb{R}^n$

Dati  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , scriviamo

$$x = |x| \frac{x}{|x|} = r(\cos \theta, \sin \theta)$$

dove  $r = |x|$  e  $\theta \in \mathbb{R}$  è opportuno. Presi  $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  e  $y = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ , risulta

$$\langle x, y \rangle = r\rho \cos(\phi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\phi - \theta)$$

la conseguenza è la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

## 1.6 La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  vale

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Inoltre vale l'uguaglianza sse  $x$  e  $y$  sono indipendenti

## 1.7 Formula del "quadrato di un binomio"

Dati  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

La dimostrazione avviene con le proprietà del prodotto scalare. Dalla formula sopra segue che, se  $x \perp y$  in  $\mathbb{R}^n$ , allora vale

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

**Teorema di Pitagora**

## 1.8 Disuguaglianza triangolare

Ancora della formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dimostrazione della disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq (\text{per Cauchy-Schwarz}) \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

## 1.9 Definizione distanza

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  la distanza tra  $x$  e  $y$  è

$$|x - y|$$

### 1.10 Interni sferici o dischi o palle

Dato  $x \in \mathbb{R}^n$  (centro) e  $r > 0$  (raggio), poniamo

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\} \text{ (palla con centro } x \text{ e raggio } r)$$

### 1.11 Definizione insieme limitato

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice limitato se  $\exists R > 0$  t.c.  $A \subseteq B(0, R)$

### 1.12 Insieme aperto

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice aperto se

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ t.c. } B(x, r) \subseteq A$$

**Esempi** Gli intervalli  $]a, b[$ , i rettangoli  $A = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$  con  $I, J$  aperti in  $\mathbb{R}$ .

## 2 Sucessioni in $\mathbb{R}^n$

Sia  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucessione in  $\mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

### 2.1 Definizione

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sucessione in  $\mathbb{R}^n$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$  Si dice  $x_k \rightarrow x$  per  $k \rightarrow +\infty$  se vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Equivalentemente** se vale  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - x| = 0$

## 3 Funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$ . Data  $f : A \rightarrow B$ , il grafico di  $f$  è

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

### 3.1 Definizione funzione continua

$f : A \rightarrow B$  (con  $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$ )

$f$  si dice continua se  $\bar{x}$  se vale quanto segue:

$$\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x_k) \text{ sucessione in } A, x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \bar{x} \implies f(x_k) \rightarrow f(\bar{x}) \quad k \rightarrow +\infty$$

Si dimostra che la definizione di continuità "per sucessioni" opportuna data è equivalente alla seguente:

$f : A \rightarrow B$  continua in  $x \in A$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.  $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \forall x \in A \cap B(x, \delta)$