

# Appunti di Analisi (prettamente 2)

Luca Tagliavini

Sometime in June 2021

## Indice

<b>1</b>	<b>Formule</b>	<b>4</b>
1.1	Formule goniometriche . . . . .	4
1.2	Prodotto scalare . . . . .	4
1.3	Norma euclidea . . . . .	4
1.3.1	Vettore di norma unitaria . . . . .	4
1.4	Gradiente . . . . .	4
1.5	Derivata direzionale . . . . .	5
1.6	Matrice Hessiana . . . . .	5
1.7	Determinante . . . . .	5
1.7.1	Determinante di matrici $1 \times 1$ . . . . .	5
1.7.2	Determinante di matrici $2 \times 2$ . . . . .	5
1.8	Segno di una matrice Hessiana . . . . .	6
1.9	Studio di punti critici . . . . .	6
1.10	Taylor in due variabili (prim'ordine) . . . . .	6
1.11	Taylor in due variabili (secondo ordine) . . . . .	6
1.12	OSS: formule di Taylor . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Teoria - I modulo</b>	<b>8</b>
2.1	Teorema: dell'unicità del limite . . . . .	8
2.2	Teorema: dei due carabinieri . . . . .	8
2.3	Teorema: degli zeri . . . . .	8
2.4	Teorema: di Weierstrass . . . . .	8
2.5	Teorema: di Fermat . . . . .	9
2.6	Teorema: di Rolle . . . . .	9
2.7	Teorema: di Lagrange . . . . .	9
2.8	Teorema: di Cauchy . . . . .	9
2.9	Teorema: di de l'Hopital . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Teoria - II modulo</b>	<b>11</b>
3.1	Def: Somma di Riemann . . . . .	11
3.2	Def: Integrale di una funzione . . . . .	11
3.3	Teorema: media integrale . . . . .	12

3.4	Def: Primitiva . . . . .	12
3.5	Teorema: caratterizzazione delle primitive di $f$ su un intervallo . . . . .	12
3.6	Def: Funzione integrale . . . . .	13
3.7	Teorema: fondamentale del calcolo integrale (I) . . . . .	13
3.8	Teorema: fondamentale del calcolo integrale (II) o di Toricelli . . . . .	14
3.9	Def: integrale generalizzato . . . . .	15
3.10	Def: Spazio $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
3.11	Def: prodotto scalare . . . . .	15
3.11.1	Proprieta: prodotto scalare . . . . .	15
3.12	Def: Norma euclidea . . . . .	15
3.12.1	Proprieta': norma euclidea . . . . .	16
3.13	Def: intorni sferici . . . . .	16
3.14	Def: successioni in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	16
3.15	Def: insieme limitato . . . . .	16
3.16	Def: insieme aperto . . . . .	16
3.17	Def: funzione di piu' variabili . . . . .	17
3.18	Def: insieme di livello . . . . .	17
3.19	Def: funzione continua . . . . .	17
3.20	Def: derivata parziale . . . . .	17
3.21	Def: Gradiente . . . . .	17
3.22	Dim: Derivabilita' e continuita' . . . . .	18
3.23	Def: funzione differenziabile . . . . .	19
3.23.1	Prop: differenziabilita' e continuita' . . . . .	19
3.24	Extra: polinomio di Taylor e piano tangente . . . . .	20
3.25	Def: funzioni di classe $C^1$ . . . . .	20
3.26	Teorema: differenziabilita' delle funzioni di classe $C^1$ . . . . .	20
3.27	Def: Derivata direzionale . . . . .	22
3.28	Teorema: del gradiente . . . . .	23
3.29	Def: curva o cammino . . . . .	24
3.30	Def: velocita' o vettore tangente di un cammino . . . . .	24
3.31	Def: derivata lungo un cammino . . . . .	24
3.32	Def: matrice Jacobiana . . . . .	25
3.33	Teorema: di Fermat . . . . .	26
3.34	Def: punto di sella . . . . .	26
3.35	Def: derivata seconda . . . . .	26
3.36	Def: matrice Hessiana . . . . .	27
3.37	Def: funzione di classe $C^2$ . . . . .	27
3.38	Teorema: di Schwarz . . . . .	27
3.39	Def: forma quadratica . . . . .	28
3.39.1	Def: forma quadratica positiva . . . . .	29
3.39.2	Def: forma quadratica negativa . . . . .	29
3.39.3	Def: forma quadratica indefinita . . . . .	29
3.39.4	Def: forme semidefinite . . . . .	29
3.40	Teorema: classificazione delle forme quadratiche . . . . .	29
3.41	Def: Formula di Taylor di grado secondo . . . . .	30
3.42	Teorema: sulle forme quadratiche positive ( $\exists m > 0$ ) . . . . .	32

3.43	Teorema: classificazione dei punti critici . . . . .	33
3.44	Prop: condizione necessaria al secondo ordine . . . . .	35
3.45	Def: funzione convessa . . . . .	35
3.46	Teorema: caratterizzazione funzioni convesse-derivabili . . . . .	35
3.47	Teorema: caratterizzazione di funzioni convesse derivabili due volte	36
3.48	Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n = 1$ . . . . .	37
3.49	Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n > 1$ . . . . .	38
3.50	Def: segmento . . . . .	38
3.51	Def: insieme convesso . . . . .	38
3.52	Def: Funzioni convesse in $n > 1$ . . . . .	39
3.53	Teorema: caratterizzazione della complessita' con la matrice Hes- siana . . . . .	39
3.54	Def: insiemi $x, y$ -semplici . . . . .	40
3.55	Prop: formula di riduzione per integrali doppi . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Domande secondo parziale</b>	<b>41</b>

# 1 Formule

## 1.1 Formule goniometriche

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \sin(2x)}{2}$$

## 1.2 Prodotto scalare

Presi due vettori  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  si definisce il loro *prodotto scalare* (o prodotto intero) come:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

NOTA: se il prodotto scalare e' nullo i due vettori sono perpendicolari.

## 1.3 Norma euclidea

Dato un vettore  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  definiamo la sua norma come:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

### 1.3.1 Vettore di norma unitaria

Un *vettore di norma unitaria*, o *versore*, e' un vettore la cui norma ha valore

1. Un qualunque vettore puo' essere reso versore dividendolo per la sua norma.

Preso  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  scriviamo il vettore di norma unitaria come:

$$v_{uni} = \frac{v}{\|v\|} = \left( \frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v\|} \right)$$

## 1.4 Gradiente

Dato  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo definire il *gradiente di f* per un suo generico punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  derivabile in tutte le variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  come:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

NOTA(1): il gradiente in un dato punto calcola il *vettore di direzione di massima crescita* per quella funzione in quel punto.

NOTA(2): un punto in cui vale  $\nabla f(\bar{v}) = \bar{0}$  si chiama *punto stazionario* o *punto critico*. Tali punti saranno poi studiati tramite le tecniche elencate di seguito.

## 1.5 Derivata direzionale

Dati  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|v\| = 1$  ( $v$  di norma unitaria), tali che si possa calcolare il gradiente di  $f$  nel punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la *derivata direzionale* può essere calcolata come:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n), v \rangle$$

## 1.6 Matrice Hessiana

La *Hessiana* di una funzione in più variabili  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è la matrice quadrata  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  tale che:

$$H_f(\bar{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta v_1^2}(\bar{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_1 \delta v_2}(\bar{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_1 \delta v_n}(\bar{v}) \\ \frac{\delta^2 f}{\delta v_2 \delta v_1}(\bar{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_2^2}(\bar{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_2 \delta v_n}(\bar{v}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f}{\delta v_n \delta v_1}(\bar{v}) & \frac{\delta^2 f}{\delta v_n \delta v_2}(\bar{v}) & \dots & \frac{\delta^2 f}{\delta v_n^2}(\bar{v}) \end{bmatrix} \quad \text{con } \bar{v} \in A$$

## 1.7 Determinante

Il *determinante* di una funzione è un numero univoco associato ad ogni matrice calcolabile tramite varie tecniche. Poiché lavoreremo quasi sempre con matrici quadrate  $2 \times 2$  impariamo il metodo più semplice:

### 1.7.1 Determinante di matrici $1 \times 1$

Dove  $A \in M_1(\mathbb{R})$ , ovvero  $A$  è una matrice  $1 \times 1$  contenente un solo numero  $(a_{1,1})$ , vale  $\det(A) = a_{1,1}$ .

### 1.7.2 Determinante di matrici $2 \times 2$

Data la matrice  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  il suo determinante è dato dalla seguente formula, simile a quella del delta per le equazioni di secondo grado (non a caso):

$$\det(A) = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

## 1.8 Segno di una matrice Hessiana

Data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di cui si può calcolare la matrice Hessiana  $H_f(\bar{v}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , si può classificare un dato punto  $\bar{v}$  in base al valore di  $\det(H_f(\bar{v}))$ :

1.  $\det(H_f(\bar{v})) > 0, a > 0 \rightarrow H_f$  **definita positiva** (minimo)
2.  $\det(H_f(\bar{v})) > 0, a < 0 \rightarrow H_f$  **definita negativa** (massimo)
3.  $\det(H_f(\bar{v})) < 0 \rightarrow H_f$  **indefinita** (sella)
4.  $\det(H_f(\bar{v})) = 0 \rightarrow H_f$  **semidefinita** (non possiamo dire nulla)

## 1.9 Studio di punti critici

Dato un punto critico  $(x_1, \dots, x_n)$  e l'Hessiana della funzione  $H_f(x_1, \dots, x_n)$  per determinare il tipo di punto critico possiamo valutare l'Hessiana nel punto dato e studiare il segno della matrice secondo il seguente teorema:

1.  $H_f$  definita **positiva** allora  $(x_1, \dots, x_n)$  punto di minimo
2.  $H_f$  definita **negativa** allora  $(x_1, \dots, x_n)$  punto di massimo
3.  $H_f$  **indefinita** allora  $(x_1, \dots, x_n)$  punto di sella
4.  $H_f$  **semidefinita** non possiamo dire nulla

## 1.10 Taylor in due variabili (prim'ordine)

Data una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  e un punto  $(x_0, y_0)$ , l'equazione del polinomio di Taylor al prim'ordine per funzioni in due variabili è come segue:

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

In egual modo, usando la notazione più compatta  $v = (x, y)$  e  $\bar{v} = (x_0, y_0)$ :

$$T_1(v) = f(\bar{v}) + \langle \nabla f(\bar{v}), v - \bar{v} \rangle$$

## 1.11 Taylor in due variabili (secondo ordine)

Data una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  e un punto  $(x_0, y_0)$ , l'equazione del polinomio di Taylor al secondo ordine per funzioni in due variabili è come segue:

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

In egual modo, usando la notazione piu' compatta  $v = (x, y)$  e  $\bar{v} = (x_0, y_0)$ :

$$T_2(v) = f(\bar{v}) + \langle \nabla f(\bar{v}), v - \bar{v} \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{v})(v - \bar{v}), (v - \bar{v}) \rangle$$

OSS: L'ultimo prodotto scalare, viene spesso riportato in modo esplicito come segue:

$$\frac{1}{2} \langle H_f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle = \\ \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]$$

### 1.12 OSS: formule di Taylor

Entrambe i polinomi di Taylor sopra riportati potrebbero essere scritti tramite il teorema di Taylor con resto secondo peano e usando variabili d'incremento  $h, k$  tali che  $h = x - x_0, k = y - y_0$ :

$$T_1(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ T_2(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle H_f(x_0, y_0)(h, k), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|^2)$$

## 2 Teoria - I modulo

### 2.1 Teorema: dell'unicità del limite

Presa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \implies l \text{ è unico}$$

### 2.2 Teorema: dei due carabinieri

$f, g, h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $\mathbb{I}$  è un intorno di  $x_0$

- $\forall x \in \mathbb{I} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$  con  $l \in \mathbb{R}$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

### 2.3 Teorema: degli zeri

Presa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- $f$  continua su  $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$  (estremi con segno opposto)

Allora:

$$\exists c \in ]a, b[ : f(c) = 0$$

### 2.4 Teorema: di Weierstrass

Presa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- $f$  continua su  $[a, b]$

Allora:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : \\ f(x_1) = \min_{[a,b]} f, \quad f(x_2) = \max_{[a,b]} f$$

o meglio:

$$f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$$



## 2.5 Teorema: di Fermat

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\exists c \in ]a, b[$  dove  $c$  punto di *max/min* relativo
- $f$  derivabile in  $c$

Allora:

$$f'(c) = 0$$

## 2.6 Teorema: di Rolle

Presa  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f$  e' *continua* su  $[a, b]$
- $f$  e' *derivabile* in  $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Allora:

$$\exists c \in ]a, b[ : f'(c) = 0$$

## 2.7 Teorema: di Lagrange

Presa  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f$  e' *continua* su  $[a, b]$
- $f$  e' *derivabile* in  $]a, b[$

Allora:

$$\exists c \in ]a, b[ : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

## 2.8 Teorema: di Cauchy

Presa  $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f, g$  *continue* su  $[a, b]$
- $f, g$  *derivabili* in  $]a, b[$
- $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$

Allora:

$$\exists c \in ]a, b[ : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

## 2.9 Teorema: di de l'Hopital

Presa  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

- $f, g$  derivabili su  $]a, b[$
- che valga uno:
  1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$  oppure  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
  2.  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$  oppure  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
- $g' \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$

Allora:

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
2.  $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

### 3 Teoria - II modulo

#### 3.1 Def: Somme di Riemann

Presa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua e i punti  $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  con  $n \in \mathbb{N}$  tali che  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Scelgo poi la famiglia di punti  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  scelti in modo arbitrario, ma tali che

$$\varepsilon_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Ora possiamo definire la *somma di Riemann*  $n$ -esima relativa alla funzione  $f$  come

$$\begin{aligned} S_n &= f(\varepsilon_1)(x_1 - x_0) + f(\varepsilon_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\varepsilon_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

**Teorema** (non dimostrato): la successione creata dalla somma di Riemann facendo tendere la  $n \rightarrow \infty$  converge sempre ad un numero  $k \in \mathbb{R}$ .

#### 3.2 Def: Integrale di una funzione

Prese  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f, g$  continue, l'integrale negli estremi  $a, b$  rispetta le seguenti proprietà:

1. **Linearità**: dati  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vale:

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. **Additività**: presi  $a, b, c \in ]a, b[$  tali che  $a < c < b$  vale:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. **Convenzione**:  $a < b$ , altrimenti si applica la seguente regola:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Si noti come questa convenzione fa valere la proprietà di additività anche qual'ora i punti non siano nell'ordine  $a < c < b$ .

4. **Monotonia**: se  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$  allora:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

### 3.3 Teorema: media integrale

*Enunciato:* Presa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $\exists z \in [a, b]$  tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Per visualizzare,  $z$  e' il punto tale che  $f(z) \cdot (b-a)$ , ovvero l'area di altezza  $f(z)$  e base  $b-a$  vale esattamente  $\int_a^b f(x) dx$ .

*Dimostrazione:* uso weierstrass, trovo min e max e so che  $f(x)$  e' compreso tra essi, poi uso la proprieta' della monotonia (cambio m, M con gli integrali), infine per il teorema dei valori intermedi arrivo a quello che volevo.

Da Weierstrass ho che  $m = \min_{[a,b]} f, M = \max_{[a,b]} f$ , allora  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$ . Per la *proprietà di monotonia* degli integrali ne segue che:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Poiche'  $k \in \mathbb{R} \int_a^b k dx = k(b-a)$  ho che:

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \\ \frac{1}{b-a} \cdot m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \cdot \frac{1}{b-a} \\ m &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \end{aligned}$$

Per il teorema dei valori intermedi ho che

$$\exists z. f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

□

### 3.4 Def: Primitiva

Preso  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua e dato  $E \subseteq ]a, b[$  si dice che  $F : E \rightarrow \mathbb{R}$  e' una *primitiva* se vale  $F'(x) = f(x) \forall x \in E$

NOTA: Se  $F$  e' una primitiva di  $f$  su  $E$  allora  $\forall k \in \mathbb{R}$  la funzione  $G(x) = k + F(x)$  e' ancora una primitiva di  $f$  su  $E$ .

### 3.5 Teorema: caratterizzazione delle primitive di $f$ su un intervallo

*Enunciato:* Se  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sono primitive di  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  allora  $\exists k \in \mathbb{R}. F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$ .

**Dimostrazione:** definisco  $H = F - G$  e faccio la derivata nulla.

Siano  $F, G$  primitive di  $f$  su  $[a, b]$ . Definisco la funzione  $H(x) = F(x) - G(x)$  e noto che e' costante, poiche'  $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$  ha derivata uguale a zero ed e' percio' costante. Dunque  $\exists k \in \mathbb{R}. F(x) - G(x) = k \quad \forall x \in [a, b]$ . □

### 3.6 Def: Funzione integrale

Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dato  $c \in ]a, b[$  definiamo  $I_c : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  come  $I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$  come *funzione integrale di primo estremo c*.

La funzione descrive come varia l'integrale al cambiare dell'ampiezza dell' intervallo, sempre partendo dal punto  $c$ .

*Osservazione(1):*  $I_c(c) = \int_c^c f(t) dt = 0$

*Osservazione(2):* presi  $c_1 \neq c_2 \in ]a, b[$  la scrittura  $I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^x f - \int_{c_2}^x f = \int_{c_1}^x f + \int_x^{c_2} f = \int_{c_1}^{c_2} f$  per la proprieta' dell'additivita'. La differenza di due funizioni integrali e' dunque sempre costante.

### 3.7 Teorema: fondamentale del calcolo integrale (I)

*Enunciato:* Presa  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $c \in ]a, b[$ , *implica che* la funzione integrale  $F(x) = I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$  e' derivabile su  $]a, b[$  e vale  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[$ , ovvero che  $F$  e' una primitiva di  $f$ .

**Dimostrazione:** applico le def. di derivata e funzione integrale, poi l'additivita', uso una successione per far tendere  $h$  a zero e applico il teorema della media itegrale

Vogliamo mostrare che:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x} \int_c^x f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_c^{x+h} f - \int_c^x f \right) = ? f(x) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_c^{x+h} f + \int_x^c f \right) &= ? f(x) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f &= ? f(x) \end{aligned}$$

Risolvero tramite successioni. Costruisco dunque una successione  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tale che sia una successione di numeri diversi da zero e con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 0$ . Riscrivo dunque la mia ipotesi come:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f = ? f(x)$$

Ora applico il teorema della media integrale su  $[x, x + h_n]$  e ottengo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_n \in [x, x + h_n] \quad f(\varepsilon_n) &= \frac{1}{x + h_n - x} \int_x^{x+h_n} f \quad \text{ovvero} \\ \exists \varepsilon_n \in [x, x + h_n] \quad f(\varepsilon_n) &= \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f\end{aligned}$$

Dal risultato del teorema noto che  $x \leq \varepsilon_n \leq x + h_n$ .

Poichè  $n \rightarrow \infty$ , e per costruzione  $h_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  si ha che  $x \leq \varepsilon_n \leq x + h_n$ , ovvero  $\varepsilon_n \rightarrow x$ . Ma allora, poichè  $f$  è continua vale che:

$f(\varepsilon_n) = f(x)$  con  $n \rightarrow +\infty$ . □

### 3.8 Teorema: fondamentale del calcolo integrale (II) o di Toricelli

*Enunciato:* Data  $f : ]a_0, b_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $[a, b] \subseteq ]a_0, b_0[$ . Sia  $F$  una primitiva di  $f$  su  $[a, b]$  allora vale che:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ &= [F(x)]_a^b \\ &= [F(x)]_{x=a}^{x=b}\end{aligned}$$

**Dimostrazione:** Definire un punto  $c$  in  $[a, b]$ , trovare  $I_c$  che sappiamo essere primitiva per il teorema fondamentale del calcolo, sfruttare il teorema di caratterizzazione per dire che  $I_c = F + k$  poi fare  $I_c(b) - I_c(a)$  applicando le definizioni (da un lato abbiamo  $F(b) - F(a)$  e dall'altro due integrali che possiamo unire per la proprietà di additività

Sia  $c \in [a, b]$  e  $I_c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Per il teorema fondamentale del calcolo (I)  $I_c$  è una primitiva di  $f$  su  $]a_0, b_0[$ .

Per il teorema della caratterizzazione delle primitive  $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in ]a_0, b_0[ \quad I_c(x) = F(x) + k$ .

Ho dunque che  $I_c(b) - I_c(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$ . Espandendo la definizione di  $I_c(x) = \int_c^x$  nell'equazione soprastante e uso la *proprietà di additività degli integrali*:

$$\begin{aligned}\int_c^b f - \int_c^a f &= F(b) - F(a) \\ \int_c^b f + \int_a^c f &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b f &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

□

### 3.9 Def: integrale generalizzato

Presa  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua, definiamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c dx$$

Analogamente presa  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, definiamo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b dx$$

NOTA: vale per  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

### 3.10 Def: Spazio $\mathbb{R}^n$

Definiamo lo spazio dei punti  $\mathbb{R}^n = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ .

### 3.11 Def: prodotto scalare

Presi due vettori  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  si definisce il loro *prodotto scalare* (o prodotto intero) come:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

NOTA: se il prodotto scalare e' nullo i due vettori sono perpendicolari.

#### 3.11.1 Proprieta: prodotto scalare

1. **simmetria:**  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .
2. **bilinearita':**  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vale:

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \text{ e} \\ \langle z, \alpha x + \beta y \rangle &= \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle \end{aligned}$$

3. **somma quadratica:**  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  vale  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x_1, \dots, x_n = 0$   
conseguenza:  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  vale  $\langle x, 0 \rangle = 0$ .

### 3.12 Def: Norma euclidea

Dato un vettore  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  definiamo la sua norma come:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n v_k^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

### 3.12.1 Proprieta': norma euclidea

Preso  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  valgono le seguenti proprieta':

1. **segno:**  $\|\bar{x}\| \geq 0$
2. **annullamento:**  $\|\bar{x}\| = 0 \iff x = \bar{0}$
3. **omogeneita':**  $\|\lambda \bar{x}\| = \|\lambda\| \|\bar{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. **somma:**  $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$  e anche  $\|\bar{x} + \bar{y}\| \geq \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|$

### 3.13 Def: interni sferici

In  $\mathbb{R}^n$ , preso  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, r > 0$  si definisce  $B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{y} - \bar{x}\| < r\}$ .

### 3.14 Def: successioni in $\mathbb{R}^n$

Presa  $(\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tale che  $\bar{x}_k = (\bar{x}_k^1, \dots, \bar{x}_k^n)$  e preso un punto  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$  si definisce la successione come:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_k = c \iff \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_k^1 = c_1 & \text{sse il limite converge} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}_k^n = c_n & \text{sse il limite converge} \end{cases}$$

NOTA: la successione si dice *convergente* sse tutti i suoi limiti convergono.

### 3.15 Def: insieme limitato

Preso un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che  $A$  e' un *insieme limitato* se  $\exists r > 0$  tale che  $\forall \bar{x} \in A. \|\bar{x}\| < r$ , o in altro modo, se si puo' costruire una palla centrata in un centro  $\bar{c}$  e di raggio  $r$  tale che  $A \subseteq B(\bar{c}, r)$ .

OSS: un insieme si dice *illimitato* se non e' limitato.

### 3.16 Def: insieme aperto

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice aperto se  $\forall \bar{x} \in A \exists \varepsilon > 0. B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq A$ .

In modo intuitivo, indipendentemente da quanto vicino al "bordo" dell'insieme scelto prendiamo il nostro punto  $\bar{x}$ , esistera' sempre una palla (intorno in  $n = 1$ ) piccola a piacere (grandezza  $\varepsilon$ ).

NOTA: un insieme si dice *chiuso* quando il suo complementare e' aperto, ovvero:

Preso  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A$  si dice *chiuso* sse  $\mathbb{R}^n \setminus A$  e' aperto.



### 3.17 Def: funzione di piu' variabili

Preso  $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$   $n, q \in \mathbb{N}$ , sia  $f : A \rightarrow B$  dove  $f : x \mapsto f(x) \in B$ .

### 3.18 Def: insieme di livello

Preso  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$  si definisce il suo insieme di livello per un dato valore  $b \in B$  l'insieme dei punti dato da:

$$I = \{\bar{x} \in A | f(\bar{x}) = b\} = f^{-1}(b)$$

Per visualizzare in  $n = 2$  si puo' pensare al disegno di un paraboloide  $f(x, y) = x^2 + y^2$  intersecato con un piano del tipo  $z = b = 1$ . Infatti, l'insieme di tali punti sarebbe del tipo  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ , come ci dice la definizione.

### 3.19 Def: funzione continua

Enunciato in  $n = 2$  per semplicita' di notazione.

Preso  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^2$ , si dice che  $f$  e' continua in  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  se presa

$$(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ tale che } \begin{cases} (x_k, y_k) \in A \\ (x_k, y_k) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$$

risulta  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) = f(\bar{x}, \bar{y})$ .

Oltretutto,  $f$  si dice *continua su tutto*  $A$  sse  $f$  e' continua  $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in A$ .

### 3.20 Def: derivata parziale

Preso  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto, dato un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ , definiamo

- la derivata rispetto a  $x$  come  $\frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$ .
- la derivata rispetto a  $y$  come  $\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}+h) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$ .

### 3.21 Def: Gradiente

Definiamo il *gradiente* di una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  come:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$$

### 3.22 Dim: Derivabilita' e continuita'

A differenza del caso unidimensionale, in piu' variabili la *derivabilita* di una funzione, ossia il poter trovare il suo gradiente con le derivate parziali  $\frac{\delta f}{\delta x}$ ,  $\frac{\delta f}{\delta y}$  non implica continuita' di  $f$ .

**Mostriamolo con un controesempio:** supponiamo che la derivabilita' implichi la continuita' e cerchiamo una funzione  $f$  che sia derivabile ma non continua.

Prendiamo quindi  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilita' in  $(0, 0)$  calcolando sia la derivata parziale rispetto a  $x$  che a  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione e' derivabile in  $(0, 0)$ , quindi  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ .

Mostriamo ora l'assurdo *provando che  $f$  non e' continua in  $(0, 0)$* . Possiamo fare cio' costruendo  $(h_n, k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  che tendono a  $(0, 0)$  ma non assumono mai tale valore  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Prendiamo:

$$\begin{aligned} (h_n, k_n) &= \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ (u_n, v_n) &= \left(\frac{1}{n}, 0\right) \end{aligned}$$

Facendo i limiti per  $n \rightarrow \infty$  di  $f(h_n, k_n)$  e  $f(u_n, v_n)$  notiamo che essi non convergono allo stesso valore.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n, k_n) &\neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n, v_n) \text{ poiche':} \\ f(h_n, k_n) &= \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} =_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \\ f(u_n, v_n) &= \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} \cdot 0^2} = 0 =_{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato l'assurdo e mostrato che  $f$  e' derivabile ma non continua in  $(0, 0)$ .

### 3.23 Def: funzione differenziabile

Presa  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ , si dice che  $f$  e' *differenziabile* in  $(\bar{x}, \bar{y})$  se:

- $\exists \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}), \exists \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})$
- Vale la formula di Taylor  $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$

OSS: ponendo  $x = \bar{x} + h$ ,  $y = \bar{y} + k$  e levando l'o-piccolo si ottiene il polinomio di Taylor di equazione:  $T_1(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle$

#### 3.23.1 Prop: differenziabilita' e continuita'

*Enunciato:* Presa  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto ed  $f$  differenziabile in  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ , si ha che  $f$  e' continua in  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

**OSS:** Nel caso  $n \geq 2$  e' la differenziabilita' (e non la derivabilita') a implicare la continuita'.

*Dimostrazione:* **NON RICHIESTA**

Ricordiamo:  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice continua in  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |u(x, y) - u(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon \\ \forall (x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \delta_\varepsilon) \cap A$$

Devo mostrare, fissato un  $\varepsilon > 0$ , che vale:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon \quad \forall (h, k) \in B((0, 0), \delta_\varepsilon)$$

Si noti che  $(\bar{x} + h, \bar{y} + k) \in A$  e' sempre soddisfatto poiche'  $A$  e' un insieme aperto. Poiche'  $f$  e' differenziabile e vale la formula di Taylor, so che  $f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$ . Sostituisco dunque nella disequazione e ottengo:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad |\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)| < \varepsilon \\ |\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle| + |o(\|(h, k)\|)| < \varepsilon \\ \forall (h, k) \in B((0, 0), \delta_\varepsilon)$$

Divido poi la somma in due disequazioni, che provo entrambe essere  $< \frac{\varepsilon}{2}$ :

1. Devo provare:

$$|\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Per Cauchy-Schwartz ( $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ ) vale che:

$$\|\nabla f(\bar{x}, \bar{y})\| \|(h, k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Che può essere verificata prendendo un opportuno  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\|\nabla f(\bar{x}, \bar{y})\|}$ .

2. Devo provare:

$$|o(\|(h, k)\|)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|o(\|(h, k)\|)| = o(\|(h, k)\|) \|(h, k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Poiché  $o(\|(h, k)\|)$  implica che  $\|(h, k)\| \rightarrow 0$  si ha che la disuguaglianza è verificata.

□

### 3.24 Extra: polinomio di Taylor e piano tangente

La formula di Taylor generalizzata al caso  $n = 2$  usata per la condizione di differenziabilità, dalla quale si ricavano le variabili  $(x, y)$ , ha un altro importante significato geometrico. Infatti, il piano di equazione

$$z = T_1(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle + o(\|(x - \bar{x}, y - \bar{y})\|)$$

rappresenta il *piano tangente* al grafico della funzione  $f$  nel punto  $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$ .

### 3.25 Def: funzioni di classe $C^1$

Preso  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto si dice di *classe  $C^1$*  se  $f$  è continua in  $A$ , se  $\frac{\delta f}{\delta x_j}$  esiste ed è continua  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

**OSS:** tutte le funzioni "elementari" sono di classe  $C^1$ .

### 3.26 Teorema: differenziabilità delle funzioni di classe $C^1$

*Enunciato:* Se ho  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f$  di classe  $C^1$ , allora  $f$  è differenziabile  $\forall \bar{x} \in A$ .

*Premessa (Lagrange in  $n > 1$  o del valor intermedio): (solo per  $x$ ) costruire  $u(x) = f(x, y)$  con  $y$  fissato. espandere la tesi arrivando a dire che  $f(b, y) - f(a, y) = \delta_x f(\bar{x}, y)(b - a)$ . Calcolare con il limite la derivata di  $u$  e usare il teorema di Lagrange*

**per trovare  $\bar{x}$  e giungere esattamente a cio' che si voleva provare.**

Devo mostrare il teorema di Lagrange in  $n = 1$ , e lo faro' per la variabile  $x$  in quanto e' analogo per la  $y$ . Voglio dunque che  $\forall a, b \in A$ , preso  $y$  fissato  $\in \mathbb{R}$ ,  $\exists c \in ]a, b[$  (o  $]b, a[$ ) tale che  $f(b, y) - f(a, y) = \delta_x f(c, y)(b - a)$ . Costruisco la funzione  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x) \mapsto f(x, y)$ , e la derivo ottenendo:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(x, y) \end{aligned}$$

Per Lagrange su  $u$  in  $[a, b]$  (o  $]b, a[$ ) ho che  $\exists c \in ]a, b[$  (o  $]b, a[$ ) tale che  $u(b) - u(a) = u'(c)(b - a)$ , ovvero, rimpiazzando  $u$  con la sua definizione e derivata:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(c, y) = \frac{f(b, y) - f(a, y)}{b - a}$$

Questo e' esattamente cio' che si voleva provare.  $\square$

**Dimostrazione:** dobbiamo mostrare l'esistenza delle derivate parziali che e' ovvia per ipotesi, e la validita' di Taylor. Per provare Taylor lo esplicitiamo, sottraiamo e sommiamo  $f(\bar{x} + h, y)$  notando che si hanno dunque due risultati del lemma di Lagrange. Raccogliamo  $h$  e  $k$  e proviamo una delle due ugualgiance con l'o-piccolo rifacendoci alla definizione di o-piccolo e limite.

Vogliamo mostrare che  $f$  e' differenziabile in  $\forall x \in A$ , fissiamo dunque un generico  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  e mostriamolo per esso. Affinche' una funzione sia differenziabile si ha bisogno che:

1.  $\exists \frac{\delta f}{\delta x}, \quad \exists \frac{\delta f}{\delta y}$  ovvio per l'ipotesi che  $f$  e'  $C^1$ .
2. Vale la formula di Taylor per  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

Mostriamo dunque che vale la formula di Taylor  $((h, k) \rightarrow 0)$ :

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x} + h, \bar{y}) + f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \\ [(1) - (2)] + [(3) - (4)] &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|) \end{aligned}$$

Noto che  $(1) - (2)$  e  $(3) - (4)$  sono i risultati di una eventuale applicazione del lemma di Lagrange dimostrato in precedenza. Allora applico tale lemma due volte, ottenendo:

$$\begin{aligned} &\exists \Theta_1, \Theta_2 \in ]0, 1[ \\ \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x} + \Theta_1 h, \bar{y} + k)h + \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k)k &= \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y})h + \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})k + o(\|(h, k)\|) \end{aligned}$$

Ora raccolgo:

$$h \left[ \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x} + \Theta h, \bar{y} + k) - \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}) \right] + k \left[ \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right] = o(\|(h, k)\|)$$

Devo dunque mostrare che  $h[\dots] = o(\|(h, k)\|) \wedge k[\dots] = o(\|(h, k)\|)$ . Svolgo la seconda ma sono analoghe. Espandendo la definizione di o-piccolo devo provare:

$$\lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})}{\|(h, k)\|} \right| = 0$$

Espando la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall (h, k) \neq 0 \wedge \|(h, k)\| < \delta \\ \left| \frac{\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})}{\|(h, k)\|} \right| < \varepsilon$$

Poiche'  $\frac{|h|}{\|(h, k)\|} \leq 1$  posso affermare che:

$$\left| \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \frac{|h|}{\|(h, k)\|} \leq \left| \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right|$$

Allora posso ridurmi a dimostrare:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall (h, k) \neq 0 \wedge \|(h, k)\| < \delta \\ \left| \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) - \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) \right| < \varepsilon$$

Ovvero:

$$\lim_{\|(h, k)\| \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y} + \Theta_2 k) = \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})$$

Che e' ovvio per la continuita' di  $f$ . □

### 3.27 Def: Derivata direzionale

Presa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$  (o  $A$  aperto),  $v = (v_1, v_2)$  di norma unitaria ( $\|(v_1, v_2)\| = 1$ ), definiamo *la derivata direzionale di  $f$  in  $(\bar{x}, \bar{y})$  nella direzione  $v$*  come segue:

$$\frac{\delta f}{\delta v}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t}$$

(quando esiste il limite finito)

OSS: i casi particolari dove  $v = e_1$  e  $v = e_2$  sono quelli delle derivate parziali  $\frac{\delta f}{\delta x}$  e  $\frac{\delta f}{\delta y}$ .

### 3.28 Teorema: del gradiente

*Enunciato:* Pesa  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in un punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  allora  $\forall v \in \mathbb{R}^2, \|v\| = 1$  vale:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta v}(\bar{x}, \bar{y}) &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y})v_1 + \frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y})v_2\end{aligned}$$

*Dimostrazione:* partiamo dalla formula di taylor con  $h = tv$  dove  $v$  versore. Semplifichiamo fino ad avere solo il prod. scalare con il gradiente in un membro. Si passa ai limiti e si elimina l'o-piccolo per def

Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

Poiche'  $f$  e' differenziabile, per Taylor ho che prso un  $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $(\bar{x} + h_1, \bar{y} + h_2) \in A$ :

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + h_1, \bar{y} + h_2) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h_1, h_2) \rangle + o(\|(h_1, h_2)\|) \\ &\text{per } \|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Pongo  $h = tv$  dove  $v$  e' un versore (di norma unitaria) e ottengo:

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), t(v_1, v_2) \rangle + o(\|t(v_1, v_2)\|) \\ &\text{per } \|t(v_1, v_2)\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Per la proprieta' di omogeneita' della norma e poiche'  $v$  e' un versore ( $\|v\| = 1$ ) ho che

$$\|t(v_1, v_2)\| = \|t\|\|(v_1, v_2)\| = \|t\|$$

Per le proprieta' di omogeneita' del prodotto scalare ho che:

$$\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), t(v_1, v_2) \rangle = t \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

Riscrivo dunque l'uguaglianza come segue:

$$\begin{aligned}f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + t \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle + o(\|t\|) \\ &\text{per } \|t\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Spostiamo al primo membro  $f(\bar{x}, \bar{y})$  e dividiamo entrambi per  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} &= \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle + \frac{o(\|t\|)}{t} \\ &\text{per } \|t\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

Passiamo poi al limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle + \frac{o(\|t\|)}{t}$$

e notiamo che  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\|t\|)}{t} = 0$  per definizione di o-piccolo.

Ho dunque che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) - f(\bar{x}, \bar{y})}{t} = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (v_1, v_2) \rangle$$

$$\forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \|(v_1, v_2)\| = 1$$

Abbiamo mostrato che la derivata nel punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  di direzione  $(v_1, v_2)$  e' uguale al prodotto scalare tra  $\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$  e  $(v_1, v_2)$ .  $\square$

### 3.29 Def: curva o cammino

Una *curva o cammino* in  $\mathbb{R}^n$  e' una funzione del tipo  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  (in fisica: la variabile si chiama  $t \in ]a, b[$ ).

### 3.30 Def: velocita' o vettore tangente di un cammino

Dato  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n, r(t) \mapsto (r_1(t), \dots, r_n(t))$  se le funzioni  $r_1, \dots, r_n$  sono derivabili in qualche  $t$  allora definiamo *il vettore velocita'* di  $r$  come:

$$r'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$$

### 3.31 Def: derivata lungo un cammino

*Enunciato:* Siano  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $r$  derivabile in  $t \in \mathbb{R}$  e  $f$  differenziabile in  $r(t)$ . Allora:

$$(f \circ r)'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(r(t)) r'_j(t)$$

*Dimostrazione:* riscriviamo  $df/dt$  con il limite incrementale, poi applico il teorema della differenziabilita' al numeratore del limite. Ottengo una somma di tre addendi, che analizzo separatamente nel limite

Proviamo il teorema in  $n = 2$  per semplicita' di notazione.

Per ipotesi abbiamo  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $r$  e' derivabile in  $t$  e  $f$  e' differenziabile in  $r(t)$ . Dobbiamo trovare  $\frac{\delta f}{\delta t}(r(t))$  e possiamo farlo tramite il limite incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} =? \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$



Lavoriamo sul numeratore del limite notando che si può usare il teorema della differenziabilità:

$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), [r(t+h) - r(t)] \rangle + o(\|r(t+h) - r(t)\|)$$

Usiamo poi la formula di Taylor, poiché  $r$  è derivabile. Vale perciò:  $r(t+h) - r(t) = r'(t)h + o(h)$ . Possiamo dunque riscrivere come:

$$\begin{aligned} f(r(t+h)) - f(r(t)) &= \langle \nabla f(r(t)), [r'(t)h + o(h)] \rangle + o(\|r'(t)h + o(h)\|) \\ &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t)h \rangle + \langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle + o(\|r'(t)h + o(h)\|) \\ &= (1) + (2) + (3) \end{aligned}$$

Ora analizzo i limiti  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n)}{h}$  (il limite originale, separando il numeratore):

1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

2.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h) \rangle}{h} = (\dots) \cdot \frac{o(h)}{h} = 0$$

3.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(\|r'(t)h + o(h)\|)}{h} = \frac{o(h)}{h} = 0$$

Abbiamo mostrato che il limite restituisce esattamente quello che ci aspettavamo, ovvero  $\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$ .  $\square$

### 3.32 Def: matrice Jacobiana

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  (o  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto),  $f : \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(\bar{x}), \dots, f_q(\bar{x}))$ . Suppongo che ciascuna delle funzioni (scalari)  $f_1, \dots, f_q$  sia differenziabile in  $\mathbb{R}^n$ . Definisco allora la *matrice Jacobiana* come:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_1}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_2}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_q}{\delta x_1}(\bar{x}) & \frac{\delta f_q}{\delta x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\delta f_q}{\delta x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$$

OSS(1) le righe corrispondono ai gradienti di  $f_1, \dots, f_q$ . OSS(2): le colonne corrispondono alle derivate del vettore  $f(x)$  rispetto alle variabili.

### 3.33 Teorema: di Fermat

*Enunciato:* Presa  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  punto di massimo o minimo,  $f$  differenziabile in  $(\bar{x}, \bar{y})$ , si ha che  $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$ .

*Dimostrazione:* **definisco**  $h(x) = f(x, \bar{y})$ , **con**  $(\bar{x}, \bar{y})$  **minimio, derivo con il limite e vedo che e' uguale alla derivata di  $f$  tenendo  $\bar{y}$  fisso poi sfrutto l'ipotesi che il punto e' di minimo e ho che la derivata di  $f$  in  $(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbf{0}$  qed**

Sia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  di minimo locale. Consideriamo  $h(x) = f(x, \bar{y})$  definita per  $x$  vicino a  $\bar{x}$ . Noto che  $h$  ha un punto di minimo in  $\bar{x}$  poiche' chiama a sua volta  $f$  che ha questa proprieta'. Se ora calcoliamo la derivata:

$$h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{h} = \frac{\delta f}{\delta x}(x, \bar{y}) \forall x \in \mathbb{R}$$

e poiche'  $\bar{x}$  e' di minimo per  $h$  vale  $h'(\bar{x}) = 0$  e per quanto provato prima, vale anche  $\frac{\delta f}{\delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  ( $H_1$ ).

Posso svolgere una dimostrazione analoga per  $y$  tenendo fissa la coordinata  $\bar{x}$ , dalla quale otterrei  $\frac{\delta f}{\delta y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  ( $H_2$ ). Combinando  $H_1$  e  $H_2$  ottengo dunque  $(f_x(\bar{x}, \bar{y}), f_y(\bar{x}, \bar{y})) = (0, 0)$ .  $\square$

### 3.34 Def: punto di sella

Preso  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  differenziabile in  $(\bar{x}, \bar{y})$  e valga  $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$ . Si dice che  $(\bar{x}, \bar{y})$  e' punto di *sella* se  $\forall \delta > 0. \exists P_1 = (\bar{x}^+, \bar{y}^+), P_2 = (\bar{x}^-, \bar{y}^-) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \delta)$  tali che  $f(\bar{x}^-, \bar{y}^-) < f(\bar{x}, \bar{y}) < f(\bar{x}^+, \bar{y}^+)$ .

NOTA: intuitivamente e' un punto in cui non si puo' dire se sia di massimo o di minimo poiche' cresce rispetto ad un asse e decresce rispetto ad un altro.

Per questo motivo possiamo individuare due punti in una palla vicina a  $(\bar{x}, \bar{y})$  con questa proprieta'.

### 3.35 Def: derivata seconda

Preso  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile ovunque, e  $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  si considerano le loro derivate seconde:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y, \delta x} = \frac{\delta^2 f}{\delta x, \delta y}, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2}, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

OSS: Il teorema di Schwarz ci garantisce che le derivate parziali rispetto a  $x$  e a  $y$  sono identiche indipendentemente dall'ordine in cui esse vengono derivate.

### 3.36 Def: matrice Hessiana

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ . Preso  $\bar{x} \in A$  tale che esistano tutte le derivate parziali per  $k, j \in \{1, \dots, n\}$  della forma  $\frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_j}(\bar{x})$ . Introduciamo allora la *matrice Hessiana di  $f$  nel punto  $\bar{x}$*   $H_f(\bar{x}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tale che:

$$(H_f(\bar{x}))_{j,k} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_k}$$

### 3.37 Def: funzione di classe $C^2$

Si dice che  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e' di classe  $C^2$  su  $A$  se tutte le derivate parziali di ordine  $\leq 2$  sono continue  $\forall j, k \in \{1, \dots, n\}$ , ovvero se:

$$\frac{\delta f}{\delta x_j} \text{ e } \frac{\delta f}{\delta x_j \delta x_k} \text{ sono continue } \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$$

### 3.38 Teorema: di Schwarz

*Enunciato:* Preso  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  possiamo dire che  $\forall \bar{x} \in A, \forall j, k \in \{1, \dots, n\}$  vale

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_k} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_k \delta x_j}$$

*Dimostrazione:* **Costruisco le funzioni:**  $g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}$ ,  $h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}}$  **e l'uguaglianza:**  $\frac{g(x, y) - g(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}} = \frac{h(x, y) - h(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}$ . **Applico due volte su ogni funzione il teorema di Lagrange in intervalli di  $]\bar{x}, x[$  e  $]\bar{y}, y[$  ottenendo quattro uguaglianze che posso sostituire nella uguaglianza originale. A questo punto vedo che quando  $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  ho la tesi.**  
Fissato un generico  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  si ricorda la tesi da mostrare:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\bar{x}, \bar{y})$$

Prendiamo un  $\varepsilon > 0$  e un  $(x, y) \in B(\bar{x}, \varepsilon)$  tale che  $x \neq \bar{x} \wedge y \neq \bar{y}$ . Possiamo allora definire le due funzioni:

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}, \quad h(x, y) = \frac{f(x, y) - f(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}}$$

Si nota che vale l'uguaglianza  $(H_1)$ :

$$\frac{g(x, y) - g(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}} = \frac{h(x, y) - h(x, \bar{y})}{y - \bar{y}}$$

Applichiamo poi il teorema di Lagrange su  $g$  in  $]\bar{x}, x[$  e abbiamo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_1 \in ]\bar{x}, x[. \quad \frac{g(x, y) - g(\bar{x}, y)}{x - \bar{x}} &= \frac{\delta g}{\delta x}(\varepsilon_1, y) \\ &= \frac{\delta_x f(\varepsilon_1, y) - \delta_x f(\varepsilon_1, \bar{y})}{y - \bar{y}}\end{aligned}$$

Applichiamo poi il teorema di Lagrange su  $h$  in  $]\bar{y}, y[$  e abbiamo:

$$\begin{aligned}\exists \varepsilon_2 \in ]\bar{y}, y[. \quad \frac{h(x, y) - h(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} &= \frac{\delta h}{\delta y}(x, \varepsilon_2) \\ &= \frac{\delta_y f(x, \varepsilon_2) - \delta_y f(\bar{x}, \varepsilon_2)}{x - \bar{x}}\end{aligned}$$

Di nuovo per il teorema di Lagrange su  $\frac{\delta g}{\delta x}$  in  $]\bar{y}, y[$ :

$$\exists \varepsilon_3 \in ]\bar{y}, y[. \quad \frac{\delta_x f(\varepsilon_1, y) - \delta_x f(\varepsilon_1, \bar{y})}{y - \bar{y}} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$$

Di nuovo per il teorema di Lagrange su  $\frac{\delta h}{\delta y}$  in  $]\bar{x}, x[$ :

$$\exists \varepsilon_4 \in ]\bar{x}, x[. \quad \frac{\delta_y f(x, \varepsilon_2) - \delta_y f(\bar{x}, \varepsilon_2)}{x - \bar{x}} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\varepsilon_4, \varepsilon_2)$$

Sostituendo ora le ugualianze nell'ipotesi iniziale  $(H_1)$  si ha che:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\varepsilon_4, \varepsilon_2)$$

Facendo tendere  $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  si ha che  $(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  e  $(\varepsilon_4, \varepsilon_2) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  a causa degli intervalli a cui appartengono, e si ha dunque:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(\bar{x}, \bar{y})$$

□

### 3.39 Def: forma quadratica

Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  simmetrica ( $A = A^T$ ), allora la forma quadratica associata ad  $A$  e' data da:

$$\begin{aligned}q_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ q_A : (h) &\mapsto \langle Ah, h \rangle \forall h \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Presa  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  simmetrica,  $q_A$  forma quadratica associata ad  $A$ , si puo' dire che:

### 3.39.1 Def: forma quadratica positiva

$A$  viene detta *definita positiva* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

### 3.39.2 Def: forma quadratica negativa

$A$  viene detta *definita negativa* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle < 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$$

### 3.39.3 Def: forma quadratica indefinita

$A$  viene detta *definita indefinita* se vale:  $\exists h^+, h^- \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Ah^-, h^- \rangle < 0 < \langle Ah^+, h^+ \rangle$$

### 3.39.4 Def: forme semidefinite

$A$  viene detta *semidefinita positiva* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$A$  viene detta *semidefinita negativa* se vale:

$$\langle Ah, h \rangle \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

## 3.40 Teorema: classificazione delle forme quadratiche

*Enunciato:* Se  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  e' simmetrica, allora scrivo  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , allora:

1.  $q_A$  e' **positiva** sse  $\begin{cases} a > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases}$
2.  $q_A$  e' **negativa** sse  $\begin{cases} a < 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases}$
3.  $q_A$  e' **indefinita** sse  $\det(A) < 0$
4.  $q_A$  e' **semidefinita** sse  $\det(A) = 0$

*Dimostrazione: caso 1:*  $\Rightarrow$  espandiamo la forma quadratica e facciamo vedere che poiche'  $e' > 0$  ha il  $\Delta < 0$  dal quale segue esattamente cio che vogliamo.  $\Leftarrow$  espandiamo  $q_A$  e distinguiamo tra i casi  $h_2 = 0 \vee h_1 \neq 0$ , nel primo si conclude semplicemente sostituendo, nell'altro raccoglie  $h_2^2$  e risolve la disequazione in  $\frac{h_1}{h_2}$  e si mostra che il  $\Delta < 0$  sse  $\det(A) > 0$  come da ipotesi

Dimostriamo il caso (1) gli altri sono analoghi:

- $\Rightarrow$ : per ipotesi sappiamo che  $q_A$  e' positiva, ovvero:

$$q_A(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0)$$

Scelgo  $h = (1, 0)$  e ho dunque  $a > 0$  (1).

Invece ponendo  $h = (h_1, 1)$  ho  $ah_1^2 + 2bh_1 + c > 0 \quad \forall h_1 \in \mathbb{R}$ . Affinche' cio' valga *for all*  $h_1$  vogliamo che l'equazione di secondo grado associata abbia  $\Delta < 0$ , ovvero  $4b^2 - 4ac < 0$  e dunque  $ac - b^2 > 0$  che possiamo vedere anche come  $\det(A) > 0$  (2).  $\square$

- $\Leftarrow$ : per ipotesi sappiamo che  $\det(A) > 0$  e che  $a > 0$ , dobbiamo provare che  $q_A$  e' positiva, ovvero che:

$$q_A(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0)$$

Procedo per casi:

- se  $h_2 = 0$  allora ho  $ah_1^2 > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$  che e' vero per l'ipotesi  $a > 0$ .
- se  $h_2 \neq 0$  allora devo provare  $ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$ .  
Raccolgo  $h_2$  (posso poiche'  $h_2 \neq 0$ ) e mostro:

$$h_2^2(a(\frac{h_1}{h_2})^2 + \frac{2bh_1}{h_2} + c) > 0$$

Dobbiamo dunque mostrare che:

$$a(\frac{h_1}{h_2})^2 + 2b(\frac{h_1}{h_2}) + c > 0 \quad \forall h_1 \neq 0$$

che vale sse  $\Delta < 0$ , ovvero:

$$\begin{aligned} 4b^2 - 4ac &< 0 \\ -4(ac - b^2) &< 0 \\ -4\det(A) &< 0 \end{aligned}$$

E poiche'  $\det(A) > 0$  per ipotesi abbiamo mostrato quanto volevamo.  $\square$

### 3.41 Def: Formula di Taylor di grado secondo

Sia  $f$  di classe  $C^2$  su  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto. Allora per ogni  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$  vale la formula:

$$\begin{aligned} T_2(\bar{x} + h) &= f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2) \\ &\quad \forall h. \bar{x} + h \in A, o(\|h\|^2) \text{ con } h \rightarrow \bar{0} \end{aligned}$$

**Dimostrazione:** scrivo  $g(t) = f(\bar{x} + th)$  dove  $h$  versore e applico Taylor in una variabile su  $g$ . Notero' che i membri di primo e secondo grado

**combaciano, in quanto sono entrambi derivate di una funzione lungo una curva**

Vogliamo mostrare che avendo  $f$  classe  $C^2$  in  $A$ ,  $\bar{x} \in A$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  e  $\|h\| = 1$  (riscriviamo il vecchio  $h$  come  $th$  in modo da avere il versore  $h$  che indica la direzione e  $t$  il valore del modulo) vale:

$$T_2(\bar{x} + th) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), th \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})th, th \rangle + o(\|th\|^2) \\ \forall h. \bar{x} + h \in A, o(\|th\|^2) \text{ con } t \rightarrow 0$$

Scrivo dunque  $g(t) = f(\bar{x} + th)$  definita in  $t \in I(0, \varepsilon)$ .

Poiche'  $f$  e'  $C^2$  lo e' anche  $g$  nelle variabili  $t \approx 0$ . Allora dal primo semestre posso scrivere la formulad i Taylor al secondo grado per  $g$  in 0:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2!}g''(0)t^2 + o(t^2)$$

Analizzo le parti che compongono la formula di Taylor in una variabile per  $g$ :

1. Noto che  $g(0) = f(\bar{x})$
2. Noto che  $g'(t)$  sarebbe una derivata lungo una curva, quindi la scrivo come:

$$g'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + th), \frac{\delta}{\delta t}(\bar{x} + th) \rangle \\ = \langle \nabla f(\bar{x} + th), h \rangle$$

E dunque il secondo membro di Taylor in una variabile  $g'(0)t$  diventa:

$$g'(0)t = \langle \nabla f(\bar{x} + 0h), h \rangle t \\ = \langle \nabla f(\bar{x}), th \rangle$$

3. Sviluppo infine il secondo membro  $g''(t)$  appoggiandomi sul  $g'(t)$  calcolato prima:  
(si noti che si puo' derivare ulteriormente in quanto  $\nabla f$  e' di classe  $C^1$  per le ipotesi)

$$g''(t) = \frac{\delta}{\delta t} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) h_j \\ = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\delta}{\delta t} \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) \right) h_j$$

In quanto stiamo ancora facendo una derivata lungo una curva possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n (\langle \nabla(\delta_{x_j} f)(\bar{x} + th), h \rangle) h_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \delta_{x_k} \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) h_k \right) h_j \\
&= \sum_{j=1, k=1}^n \delta_{x_k} \delta_{x_j} f(\bar{x} + th) h_k h_j
\end{aligned}$$

Ora espandiamo il membro  $\frac{1}{2}g''(0)t^2$  di Taylor in una variabile:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g''(0)t^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1, k=1}^n \delta_{x_k} \delta_{x_j} f(\bar{x} + 0h) h_k h_j t^2 \\
&= \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle t^2 \\
&= \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})th, th \rangle
\end{aligned}$$

4. Notiamo che  $o(\|th\|^2) = o(\|t\|^2 \cdot \|h\|^2)$  e poiche'  $\|h\| = 1$  per definizione, possiamo riscriverlo come  $o(\|t\|^2)$ .

Abbiamo dunque provato pezzo per pezzo che le due formule sono equivalenti.  $\square$

### 3.42 Teorema: sulle forme quadratiche positive ( $\exists m > 0$ )

*Enunciato:* Sia  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  simmetrica. Suppongo  $q_A$  definita positiva. Allora esiste  $m > 0$  tale che:  $q_A(h) \geq m\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione: idea*

Dimostro in  $n = 2$ . Dobbiamo provare che:

$$\exists m > 0. \quad \langle Ah, h \rangle \geq m\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2$$

Ho due casi:

1. se  $h = \bar{0}$  devo mostrare che:  $\exists m > 0. 0 \geq 0$ , ovvio.
2. quando  $h \neq \bar{0}$  devo provare che esiste  $m > 0$  tale che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h\|^2} \langle Ah, h \rangle &\geq m \quad \forall h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\
\langle A \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \rangle &\geq m
\end{aligned}$$



Osservo che  $\frac{h}{\|h\|}$  e' un versore, dunque:

$$\left\{ \frac{h}{\|h\|} \mid h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \right\} = \{(\cos\Theta, \sin\Theta) \mid \Theta \in [0, 2\pi]\}$$

Devo dunque dimostrare che:

$$\left\langle A \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \right\rangle \geq m \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$$

Poniamo  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\Theta) = \left\langle A \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \right\rangle$ , ovvero  $f(\Theta) = a \cos^2 \Theta + 2b \cos \Theta \sin \Theta + c \sin^2 \Theta$ .

Poiche'  $q_A$  e' definita positiva sappiamo che  $f(\Theta) > 0 \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$ .

Essendo  $f$  continua e  $[0, 2\pi]$  chiuso e limitato per Weierstrass ho che:

$$\exists \bar{\Theta} \in [0, 2\pi]. \quad f(\bar{\Theta}) \leq f(\Theta) \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$$

$$m = f(\bar{\Theta}) \quad \text{scelgo } m \text{ proprio come quel minimo}$$

Dunque ho che:

$$m \leq \left\langle A \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} \right\rangle \quad \forall \Theta \in [0, 2\pi]$$

Sostituisco  $x - \bar{x}$  con  $h$  per semplicita' di notazione: E so che  $m > 0$  poiche'  $q_A$  e' positiva per ipotesi.  $\square$

### 3.43 Teorema: classificazione dei punti critici

Questo teorema offre una **condizione sufficiente** ( $\Rightarrow$ ) del second'ordine per determinare massimi/minimi/selle.

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ . Sia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  punto critico di  $f$ , allora

1. se  $H_f(\bar{x}, \bar{y})$  e' **positiva** allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  e' un punto di minimo (locale).
2. se  $H_f(\bar{x}, \bar{y})$  e' **negativa** allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  e' un punto di massimo (locale).
3. se  $H_f(\bar{x}, \bar{y})$  e' **indefinita** allora  $(\bar{x}, \bar{y})$  e' un punto di sella.

OSS: **sono condizioni sufficienti**, quindi  $(\bar{x}, \bar{y})$  minimo  $\nRightarrow H_f(\bar{x}, \bar{y})$  positiva

*Dimostrazione: idea*

Dimostriamo in  $n = 2$  solo il caso 1.

Sia  $\bar{x} \in A$  un punto critico con  $H_f(\bar{x}) > 0$ . Voglio mostrare che  $\bar{x}$  sia un punto di minimo, ovvero:

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0. \quad f(x) &\geq f(\bar{x}) \quad \forall x \in B(\bar{x}, \delta) \\ f(x) - f(\bar{x}) &\geq 0 \end{aligned}$$

So che vale Taylor di secondo grado nel punto:

$$T_2(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

$$h \rightarrow \bar{0}$$

Notiamo che  $\langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle = 0$  poiche'  $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$  e scriviamo dunque:

$$T_2(\bar{x} + h = x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2)$$

Lo sostituiamo nella tesi del punto di minimo e dobbiamo dunque mostrare che:

$$\exists \delta > 0. \quad \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2) \geq 0 \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Per concludere mostro che  $\exists m > 0$  per cui (dovevmo mostrare  $\geq 0$ , se mostro per un numero maggiore di zero, a maggior ragione, funziona ugualmente):

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle + o(\|h\|^2) \geq \frac{m}{4} \|h\|^2 (1) + (2) \geq \frac{m}{4} \|h\|^2$$

1. Applicando il teorema sulle forme quadratiche positive con  $A = H_f(\bar{x})$  ho che ( $\exists m > 0. \quad \langle Ah, h \rangle \geq m\|h\|^2$ ):

$$\langle H_f(\bar{x})h, h \rangle \geq m\|h\|^2 \quad \text{e quindi anche}$$

$$\frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x})h, h \rangle \geq \frac{m}{2} \|h\|^2$$

$$(1) \geq \frac{m}{2} \|h\|^2$$

2. Devo infine mostrare che  $o(\|h\|^2) > m\|h\|^2$ , ovvero espandendo la definizione di di limite:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \quad \left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| < \varepsilon \quad \forall h \in B(0, \delta)$$

Scelgo  $\varepsilon = \frac{m}{4}$ , e ho dunque:

$$\exists \delta > 0. \quad \left| \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right| < \frac{m}{4}$$

$$-\frac{m}{4} \|h\|^2 < o(\|h\|^2) < \frac{m}{4} \|h\|^2 \quad \text{se } \|h\| < \delta$$

Dunque se  $\|h\| < \delta$  ( $\delta$  e' a nostro piacimento quindi lo sara') ho che:

$$(1) + (2) \geq \frac{m}{2} \|h\|^2 - \frac{m}{4} \|h\|^2 = \frac{m}{4} \|h\|^2$$

□

### 3.44 Prop: condizione necessaria al secondo ordine

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ . Sia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  punto di minimo(massimo) di  $f$ , allora

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0} \\ H_f(\bar{x}, \bar{y}) \text{ e' semidefinita positiva(negativa)} \end{cases}$$

OSS: e' importante specificare che l' $H_f$  e' **semidefinita** in quanto potrebbe avere  $\det(H_f) = 0$  ma essere comunque un punto di massimo/minimo.

**Dimostrazione: provo con  $\bar{x}$  minimo. Costruisco come in Taylor la funzione  $g(t) = f(\bar{x} + tv)$  che ha minimo anch'essa in  $t = 0$ . Ne segue che  $g'(0) = 0, g''(0) > 0$  che per come fatto vedere in Taylor equivale a cio' che vogliamo.**

Sia  $\bar{x}$  punto di minimo per  $f$ . Sia  $v \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\|v\| = 1$ . Considero  $g(t) = f(\bar{x} + tv)$  definita per  $t \in I(0, \varepsilon)$ .

Poiche'  $f$  ha minimo locale in  $\bar{x}$ ,  $g$  avra' minimo locale in  $t \approx 0$ .

Dunque  $g'(0) = 0$  (1) e soprattutto  $g''(0) \geq 0$  (2) il che implica (come visto per Taylor):

$$\begin{cases} \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle = 0 & (1) \\ \langle \frac{1}{2} H_f(\bar{x}) v, v \rangle \geq 0 & (2) \end{cases} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1$$

Da cui segue:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ H_f(\bar{x}) \geq 0 \end{cases}$$

□

### 3.45 Def: funzione convessa

Presa  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile.  $f$  e' convessa se  $\forall \bar{x}, x \in ]a, b[$  vale

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

OSS: si noti che in  $\bar{x}$  il polinomio di Taylor in una variabile di grado uno vale esattamente  $T_1(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ .

La definizioe ci dice dunque che una funzione si dice convessa se maggiore o uguale di ogni sua possibile retta tangente.

### 3.46 Teorema: caratterizzazione funzioni convesse-derivabili

**Enunciato:** Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile, allora  $f$  e' convessa sse  $f'$  e' crescente in  $]a, b[$  ( $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f') \implies x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2)$ ).

*Dimostrazione:* Per  $\Rightarrow$  uso l'ipotesi di convessita' mettendo  $\bar{x} = x_1, x = x_2$  e poi scambiando per ottenere due ipotesi che (invertendo i segni) mi danno una disequazione che altero rimuovendo un numero  $> 0$  e qed.

Per  $\Leftarrow$  separo in casi in base a  $\bar{x} > x$  o opposto, e uso lagrange in entrambi con intervallo appropriato.

1. **Caso  $\Rightarrow$ :** Per ipotesi so che  $f$  e' convessa e derivabile nel suo dominio, dunque devo vedere se e' crescente, ovvero presi  $x_1, x_2 \in ]a, b[$  tali che  $x_1 < x_2$  mostrare  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ . Per l'ipotesi di convessita' ho che:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in ]a, b[$$

pongo  $\bar{x} = x_1, x = x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (H_1)$$

pongo  $\bar{x} = x_2, x = x_1$

$$f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad (H_2)$$

cambiando i segni a una e unendo

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_1) - f(x_2) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

Ho dunque che  $f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f'(x_2)(x_2 - x_1)$  e poiche'  $(x_2 - x_1) > 0$  giungo a  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ .  $\square$

2. **Caso  $\Leftarrow$ :** Per ipotesi  $f$  e' derivabile in  $]a, b[$  e crescente. Devo mostrare che  $f$  e' convessa, ovvero:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Ho due casi:  $\bar{x} < x$  o  $x < \bar{x}$ . Il caso  $\bar{x} = x$  e' ovvio.

- ipotesi:  $\bar{x} < x$ . uso lagrange su  $[\bar{x}, x]$  per cui  $\exists c \in ]\bar{x}, x[$  tale che  $f(x) - f(\bar{x}) = f'(c)(x - \bar{x})$ .
- ipotesi:  $x < \bar{x}$ . uso lagrange su  $[x, \bar{x}]$  per cui  $\exists c \in ]x, \bar{x}[$  tale che  $f(\bar{x}) - f(x) = f'(c)(\bar{x} - x)$ , ovvero (cambio i segni)  $f(x) - f(\bar{x}) = f'(c)(x - \bar{x})$ .

$\square$

### 3.47 Teorema: caratterizzazione di funzioni convesse derivabili due volte

*Enunciato:* Se  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e' derivabile due volte, allora

$$f \text{ e' convessa} \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$$

*Dimostrazione:* usare il teorema per la caratterizzazione su funzioni derivabili, e poi che la derivata e' crescente se la derivata seconda e'  $\geq 0$ .

Per il teorema di caratterizzazione delle funzioni convesse-derivabili,  $f$  e' convessa sse  $f'$  e' crescente. Sappiamo poi che  $f'$  e' crescente sse  $f''(x) \geq 0$  in  $]a, b[$ , ovvio per ipotesi.  $\square$

### 3.48 Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n = 1$

*Enunciato:* Presa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , allora

$$\forall \bar{x}, h. \bar{x} + h \in [a, b], \exists \Theta \in ]0, 1[ \\ f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{1}{2}f''(\bar{x} + \Theta h)h^2$$

OSS: anche Lagrange  $f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x} + \Theta h)h$  e' una formula di Taylor senza l'o-piccolo

*Dimostrazione: idea*

Devo mostrare che  $f : C^2$  su  $]a_0, b_0[$ , preso  $[a, b] \subseteq ]a_0, b_0[$ ,  $\exists c \in ]a, b[$  tale che:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(c)\frac{(b-a)^2}{2}$$

Cerco  $k \in \mathbb{R}$  tale che:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - k\frac{(b-a)^2}{2} = 0 \quad (H_1)$$

Voglio mostrare  $k = f''(c)$  per un opportuno  $c \in ]a, b[$ .

Definisco  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) \mapsto f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - k\frac{(b-x)^2}{2}$  dove ho sostituito  $a = x$  nella formula precedente.

Allora ho che  $h(b) = f(b) - f(b) - f'(b)0 - 0 = 0$  e  $h(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - k\frac{(b-a)^2}{2}$  che sappiamo valere 0 per  $H_1$ . Visto che  $h(a) = h(b)$  posso applicare Rolle:

$$\exists c \in ]a, b[. \quad h'(c) = 0$$

Derivando  $h$  e inserendola in quanto trovato si ottiene:

$$\begin{aligned} \exists c \in ]a, b[. \quad -f'(c) - f''(c)(b-c) + f'(c) + k(b-c) &= 0 \\ -f''(c)(b-c) + k(b-c) &= 0 \\ \exists c \in ]a, b[. \quad (b-c)(k - f''(c)) &= 0 \end{aligned}$$

Poiche'  $c > b$  l'unica possibilita' e' che  $-f''(c) - k = 0$  ovvero  $f''(c) = k$ . Abbiamo dunque trovato il  $k$  opportuno.  $\square$

### 3.49 Teorema: Taylor secondo ordine con resto secondo Lagrange in $n > 1$

*Enunciato:* Sia  $f : A \rightarrow B$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia  $f$  di classe  $C^2$  (dunque  $f, \delta f, \delta^2 f$  continue), allora:

$$\forall \bar{x}, h \in \mathbb{R}^n. \exists \Theta \in ]0, 1[ \text{ tali che}$$

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle$$

*Dimostrazione: idea*

Dati  $\bar{x}, \bar{x} + h \in \mathbb{R}^n$  considero  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  tale che  $h(t) \mapsto f(\bar{x} + th)$ . Si ha dunque che:

$$h'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + th), h \rangle = \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} f(\bar{x} + h) h_j$$

$$h''(t) = \frac{\delta}{\delta t} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} f(\bar{x} + h) h_j = \langle H_f(\bar{x} + th) h, h \rangle$$

Scrivo poi Taylor "secondo Lagrange" per la funzione  $h$  di una variabile, ponendo  $\bar{x} = 0, h = 1$ :

$$h(1) = h(0) + h'(0)(1 - 0) + h''(\Theta) \frac{(1 - 0)^2}{2} \quad \text{con } \Theta \in ]0, 1[$$

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle$$

### 3.50 Def: segmento

Definiamo un *segmento* tra  $x, y \in \mathbb{R}^n$  con la notazione:

$$[x, y] = \{x + t(y - x) | 0 \leq t \leq 1\}$$

Risulta dunque al variare di  $t$ :

- $t = 0 \Rightarrow x$ .
- $t = 1 \Rightarrow y$ .
- $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y)$ .

### 3.51 Def: insieme convesso

Si dice che  $A$  e' convesso se  $\forall x, y \in A$  risulta che  $[x, y] \subseteq A$ .

Si puo' pensare ad un insieme convesso, dal quale si prendono due punti e si traccia un segmento che li collega. Se si riesce a trovare un segmento che tale che i suoi punti non appartengono tutti all'insieme scelto, allora esso non e' convesso.

### 3.52 Def: Funzioni convesse in $n > 1$

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme convesso. Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice convessa su  $A$  se vale per  $\forall x, \bar{x} \in A$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \\ f(x) &\geq T_1(x) \text{ nel punto } \bar{x} \end{aligned}$$

Intuitivamente: vogliamo che il  $Graf(f)$  sia sopra a  $z = T_1$  il piano tangente.

### 3.53 Teorema: caratterizzazione della convessita' con la matrice Hessiana

*Enunciato:* Presa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , si puo' dire che  $f$  e' convessa sse  $H_f(x)$  e' semidefinita positiva  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione: idea*

- caso  $\Rightarrow$ : ipotesi:  $f$  convessa, dobbiamo dimostrare che  $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n. H_f(\bar{x}) \geq 0$  (semidefinita positiva). Fisso  $\bar{x}$  e uso Taylor "secondo Lagrange" in  $\bar{x}$ . Ho dunque che  $\forall h \in \mathbb{R}^n. \exists \Theta \in ]0, 1]$  tale che

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle \quad (H_1)$$

Dalla definizione di  $f$  convessa ho  $f(\bar{x} + h) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle$  ( $H_2$ ).

Unendo  $H_1$  e  $H_2$  ho che  $\langle H_f(\bar{x} + \Theta h) h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$ .

Fisso  $v \in \mathbb{R}^n \neq 0$  e mostriamo che  $\langle H_f(\bar{x} + \Theta v) v, v \rangle \geq 0$ . Faccio cio' costruendo la successione  $h_k = \frac{1}{k} v. k \in \mathbb{N}$ .

Noto che  $h_k \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ . Sostituisco  $h_k$  a  $v$  e proviamo:

$$\begin{aligned} \langle H_f(\bar{x} + \Theta h_k) \frac{1}{k} v, \frac{1}{k} v \rangle &\geq 0 \\ \left(\frac{1}{k}\right)^2 \langle H_f(\bar{x} + \Theta h_k) v, v \rangle &\geq 0 \quad \text{noto } h_k \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \\ \langle H_f(\bar{x}) v, v \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

□

- caso  $\Leftarrow$ : ipotesi:  $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n. H_f(\bar{x}) \geq 0$ , devo mostrare che  $f$  e' convessa, ovvero

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle.$$

Poiche'  $f$  di classe  $C^2$  posso scrivere Taylor di secondo ordine con resto secondo Lagrange:

$$\exists \Theta \in ]0, 1[ \quad f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x)(x - \bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle$$

Poiche'  $H_f$  e' semidefinita positiva si ha che

$$\frac{1}{2} \langle H_f(x)(x - \bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle \geq 0$$

per cui la funzione riscritta secondo Taylor e' sempre maggiore o uguale di

$$f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle$$

□

### 3.54 Def: insiemi $x, y$ -semplici

Sia  $[a, b]$  un intervallo e siano  $h_1, h_2$  due funzioni  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con la proprieta'  $h_1(x) \leq h_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$ .

L'insieme individuato viene detto *y-semplce* e scritto come segue:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b] \wedge h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$$

Sia  $[c, d]$  un intervallo e siano  $g_1, g_2$  due funzioni  $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  con la proprieta'  $g_1(y) \leq g_2(y) \quad \forall y \in [c, d]$ .

L'insieme individuato viene detto *x-semplce* e scritto come segue:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [c, d] \wedge g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

### 3.55 Prop: formula di riduzione per integrali doppi

Preso un insieme  $A$  del tipo *y-semplce* e una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua, si ha che:

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{h_1}^{h_2} f(x, y) dy dx$$

Preso un insieme  $B$  del tipo *x-semplce* e una funzione  $u : B \rightarrow \mathbb{R}$  continua, si ha che:

$$\int_B u(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{g_1}^{g_2} u(x, y) dx dy$$



## 4 Domande secondo parziale

1. Enunciare il **teorema fondamentale del calcolo integrale**.
2. Cosa significa che la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e' differenziabile nel punto  $(1, 2)$ ?
  - Esistono le derivate parziali  $\frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}$ .
  - Vale la formula di Taylor:  $f(x, y) = f(1, 2) + \langle \nabla f(1, 2), (x - 1, y - 2) \rangle + o(\|(x - 1, y - 2)\|)$  con  $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ .
3. Data  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  scrivere cosa significa che  $f = f(x_1, x_2)$  e' derivabile nel punto  $\bar{x} = (1, 2)$  rispetto alla direzione  $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .  
Il seguente limite converge:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{t\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{t\sqrt{2}}{2}) - f(1, 2)}{t}$$

4. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale per la funzione  $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Ipotesi:  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, sia  $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ .  
Teorema:  $G$  e' derivabile,  $G'(x) = g(x) \forall x \in [0, 1]$ .
5. Enunciare il teorema della media integrale per la funzione  $f : [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Ipotesi:  $f : [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  continua nel dominio.  
Teorema:  $\exists c \in [2, 8] \quad f(c) = \frac{1}{8-2} \int_2^8 f(x) dx$
6. Data la funzione  $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt{x + y^2})$  scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(9, -4, f(9, -4))$  (a). Individuare poi la direzione di massima crescita nel sottostante punto  $(9, -4)$  (b). Stabilire poi il valore della derivata parziale in tale direzione (c).

- (a) Il piano tangente e' dato dal polinomio di Taylor ponendo  $(\bar{x}, \bar{y})$  uguali al punto dato. Si ha dunque:

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{1}{1 + \sqrt{x + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^2}}, \frac{1}{1 + \sqrt{x + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + y^2}} \cdot 2y \right)$$

$$z = T_1(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) - \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle$$

$$z = T_1(x, y) = \ln(6) - \left\langle \left( \frac{1}{60}, \frac{-2}{15} \right), (x - 9, y + 4) \right\rangle$$

$$z = T_1(x, y) = \ln(6) - \frac{1}{60}(x - 9) - \frac{2}{15}(y + 4)$$

- (b) La direzione massima (che deve essere un versore, e va dunque reso di norma unitaria) e' data dal calcolo del gradiente nel punto dato:

$$\begin{aligned}v_{max} &= \nabla f(9, -4) = \frac{1}{60}(1, -8) \\ \|v_{max}\| &= \sqrt{1^2 + (-8)^2} = \sqrt{65} \\ \hat{v}_{max} &= \frac{v_{max}}{\|v_{max}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{-8}{\sqrt{65}}\right)\end{aligned}$$

- (c) La derivata parziale in tale direzione puo' essere calcolata tramite il prodotto scalare tra il gradiente nel punto e il versore direzione:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9, -4) &= \left\langle \frac{1}{60}(1, -8), \frac{1}{\sqrt{65}}(1, -8) \right\rangle \\ \frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9, -4) &= \frac{1}{60\sqrt{65}}(1^2 + (-8)^2) \\ \frac{\delta f}{\delta \hat{v}_{max}}(9, -4) &= \frac{65}{60\sqrt{65}} = \frac{13}{12\sqrt{65}}\end{aligned}$$

7. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione in due variabili che soddisfa  $f(x, y) = f(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Usando le definizioni pertinenti verificare che vale  $\frac{\delta f}{\delta x}(a, b) = \frac{\delta f}{\delta y}(b, a) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Applico la definizione di derivata parziale a entrambi i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned}\frac{\delta f}{\delta x}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(b, a+t) - f(b, a)}{t} = \frac{\delta f}{\delta y}(b, a) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(b, a+t) - f(b, a)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(b, a+t) - f(b, a)}{t}\end{aligned}$$

□

8. Calcolare la derivata della funzione  $f(x, y) = x + 3y$  lungo la curva  $r(t) = (\cos t, \sin t)$  in due modi: scrivendo la funzione composta e derivandola direttamente (a), poi usando il teorema visto in classe (b).

(a)

$$\begin{aligned}(f \circ r)(t) &= f(r(t)) = \cos t + 3 \sin t \\ (f \circ r)'(t) &= -\sin t + 3 \cos t\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f \circ r)'(t) &= \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle \\ r'(t) &= (r'_1(t), r'_2(t)) = (-\sin t, \cos t) \\ \nabla f(t) &= (1, 3) \\ (f \circ r)'(t) &= \langle (1, 3), (-\sin t, \cos t) \rangle \\ &= -\sin t + 3 \cos t\end{aligned}$$

9. Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f : (x, y) \mapsto x^2 - xy^2 + y^2 - 3$  trovare i/vi vettori/e  $v \in \mathbb{R}^2$  di norma unitaria per cui  $\frac{\delta f}{\delta v}(2, -2) = -3$ :

Ho due condizioni: (1)  $v$  di norma unitaria, deve dunque valere  $\|v\| = 1$ ,  
 (2)  $\frac{\delta f}{\delta v}(2, -2) = -3$ . Le metto a sistema, scrivendo  $v = (x, y)$ :

$$\nabla f(x, y) = (2x - y^2, -2xy + 2y)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \langle \nabla f(2, -2), (x, y) \rangle = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \langle (0, 4), (x, y) \rangle = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x^2 + \frac{9}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{16} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Abbiamo trovato i vettori  $(\pm \frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4})$ , ora bisogna renderli versori (di norma unitaria):

$$\|(\pm \frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4})\| = \sqrt{\frac{7}{16} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16}} = 1$$

Notiamo che sono già di norma unitaria, e abbiamo dunque già trovato i versori di nostro interesse.

10. Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f : (x, y) \mapsto x^2 - xy^2 + y^2 - 3$  scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine con punto iniziale in  $(2, -2)$ .

Calcolo le parti necessarie per comporre  $\nabla f$  e  $H_f$  che servono per calcolare il polinomio di Taylor di secondo ordine.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - y^2 & f_y(x, y) &= -2xy + 2y \\ f_{xx}(x, y) &= 2 & f_{yy}(x, y) &= -2x + 2 \end{aligned}$$

Applico poi la formula del polinomio di Taylor di secondo grado sostituendo  $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, -2)$ :

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(2, -2) + \langle \nabla f(2, -2), (x - 2, y + 2) \rangle + \\ &\quad \frac{1}{2} \langle H_f(2, -2)(x - 2, y + 2), (x - 2, y + 2) \rangle \\ T_2(x, y) &= -3 + \langle (0, 4), (x - 2, y + 2) \rangle + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 2 \end{pmatrix}, (x - 2, y + 2) \right\rangle \\ T_2(x, y) &= -3 + 4(y + 2) + \frac{1}{2} \langle (2(x - 2) + 4(y + 2), 4(x - 2) + 2(y + 2)), (x - 2, y + 2) \rangle \\ T_2(x, y) &= -3 + 4(y + 2) + \frac{1}{2} \langle (2x + 4y + 4, 4x + 2y - 4), (x - 2, y + 2) \rangle \\ &\dots \end{aligned}$$