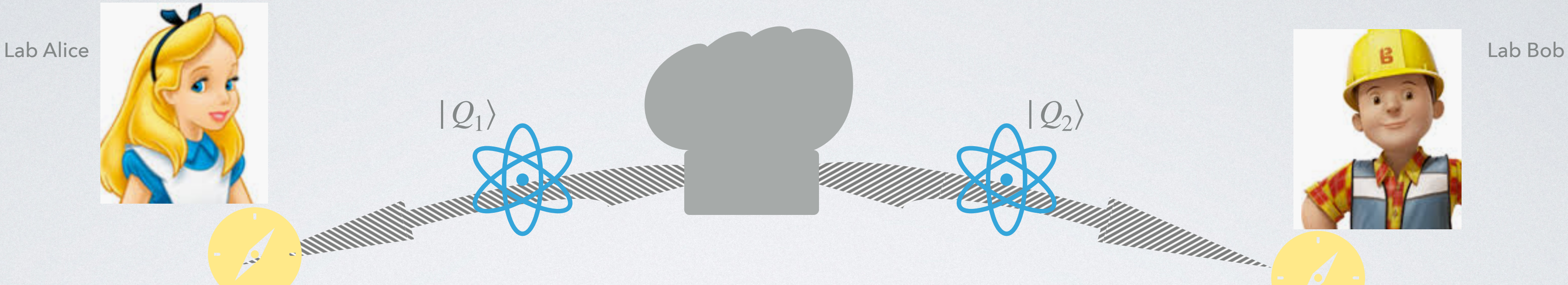
paradosso EPR

2 QUBIT



$$|Q_1Q_2\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle$$

misura (sulla base computazionale)

una misura di Alice sul qubit Q_1 ci permette di determinare se il primo qubit è in |0> o |1>

una misura di Bob sul qubit Q_2 ci permette di determinare se il secondo qubit è in |0> o |1>

- $a_{00} = a_{01} = 1/\sqrt{2}$ $a_{10} = a_{11} = 0$ stato prodotto

stato del bit prima della misura	stato del bit dopo la misura	esito della misura su Q_1	esito della misura su Q_2	$Q_1 = Q_2$
$(\|00\rangle + \|01\rangle)/\sqrt{2}$	$\|00\rangle$, $p_{00} = \|a_{00}\|^2 = 1/2$	0	0	SÌ
$= \|0\rangle \cdot (\|0\rangle + \|1\rangle)/\sqrt{2}$	$\|01\rangle$, $p_{01} = \|a_{01}\|^2 = 1/2$	0	1	NO

nessuna correlazione tra Q_1 e Q_2

- $a_{00} = a_{11} = 1/\sqrt{2}$ $a_{10} = a_{01} = 0$ stato entangled

stato del bit prima della misura	stato del bit dopo la misura	esito della misura su Q_1	esito della misura su Q_2	$Q_1 = Q_2$
$(\|00\rangle + \|11\rangle)/\sqrt{2}$	$\|00\rangle$, $p_{00} = \|a_{00}\|^2 = 1/2$	0	0	SÌ
	$\|11\rangle$, $p_{11} = \|a_{11}\|^2 = 1/2$	1	1	SÌ

sia la misura su Q_1 che quella su Q_2 è non prevedibile

perfetta correlazione tra Q_1 e Q_2!

Quando questo capita si dice che i due qubit sono entangled.

Stati di BELL (massimamente entangled)

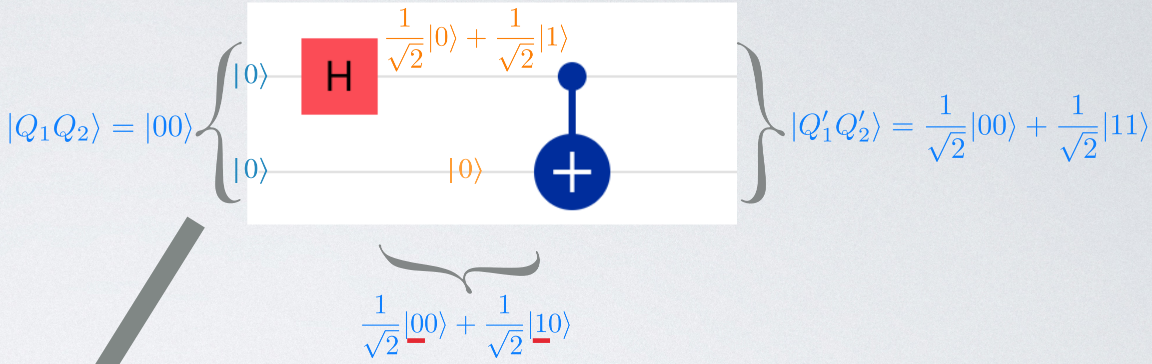
$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right)$$

Come creare uno stato di Bell

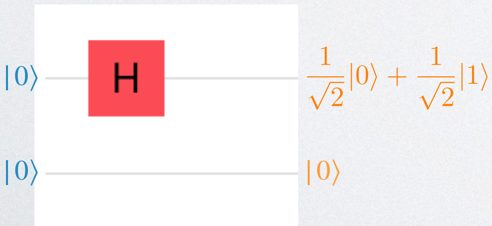


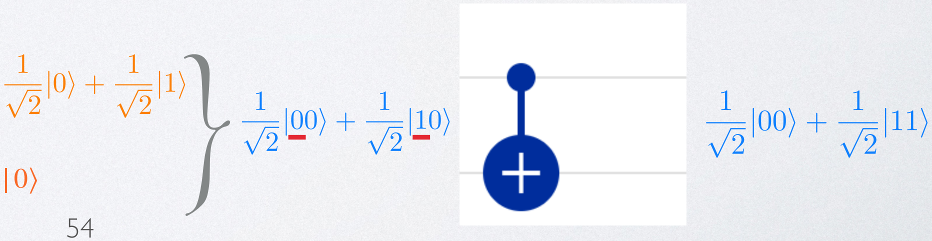
gate H

IN	OUT
$\lvert 0\rangle$	$(\lvert 0\rangle + \lvert 1\rangle)/\sqrt{2}$
$\lvert 1\rangle$	$(\lvert 0\rangle - \lvert 1\rangle)/\sqrt{2}$

gate CNOT

IN	OUT
$\lvert 00\rangle$	$\lvert 00\rangle$
$\lvert 01\rangle$	$\lvert 01\rangle$
$\lvert 10\rangle$	$\lvert 11\rangle$
$\lvert 11\rangle$	$\lvert 10\rangle$





Esercizio: ripetete il calcolo del circuito partendo ora dagli stati $|01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ dimostrando che si ottengono gli altri stati di Bell

La parola Entanglement (Verschränkung) fu coniata da Erwin Schrödinger in una lettera del 1935 ad Einstein "per descrivere le correlazioni tra due particelle che interagiscono e poi si separano come nell'esperimento EPR.“

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

1. Realismo

"The elements of the physical reality cannot be determined by a priori philosophical considerations, but must be found by an appeal to results of experiments and measurements."

Criterio di realtà

"We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable. If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e. , with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity."

2. Completezza

Condizione necessaria: *"every element of the physical reality must have a counter part in the physical theory."*

3. Località

L'informazione derivante da una misura su uno di due sistemi isolati non può produrre un cambiamento reale nell'altro, ovvero le misure fatte da B non possono dipendere dalla misure fatte da A se la loro distanza è sufficientemente grande.

stato del bit prima della misura	stato del bit dopo la misura	esito della misura su Q_1	esito della misura su Q_2	$Q_1 = Q_2$
$(\|00\rangle + \|11\rangle)/\sqrt{2}$	$\|00\rangle$, $p_{00} = \|a_{00}\|^2 = 1/2$ $\|11\rangle$, $p_{11} = \|a_{11}\|^2 = 1/2$	0 1	0 1	Sì Sì

Alice e Bob condividono una coppia di qubit entangled.
Con una misura del proprio qubit, Alice può determinare con certezza lo stato del qubit di Bob: lo stato del qubit di BOB deve essere un elemento di realtà.

Tuttavia, Bob non può conoscere a priori con certezza lo stato del proprio qubit, perchè la sua misura è del tutto casuale.

- **non vale il realismo (non è vero che ci sono elementi di realtà pre-esistenti alle misure)**
- **non vale la località (la misura su una parte dello stato *entangled* determina istantaneamente il cambiamento dello stato dell'altra)**
- **la Meccanica Quantistica è incompleta** $\Rightarrow$ Einstein

variabili nascoste e disuguaglianza di Bell

Il punto di vista di Einstein secondo cui la teoria quantistica è incompleta porta ad ipotizzare l'esistenza di *variabili nascoste*, che descrivono gradi di libertà che non conosciamo, che rendono la teoria completa.

Il dibattito sulle variabili nascoste, e la loro natura, è stato molto intenso e non può trovare una soluzione all'interno della teoria. Possono esistere evidentemente molte tipologie di variabili nascoste che sono compatibili con i risultati della meccanica quantistica. Un esempio è dato dalla teoria dell'onda pilota di Bohm (e de Broglie)

https://www.youtube.com/watch?v=ix9nJmz4mGg

La teoria di Bohm, dando esattamente gli stessi risultati della meccanica quantistica, non è dimostrabile. Inoltre è fortemente non-locale e non può essere generalizzata alla teoria dei campi.

Restringiamo la nostra attenzione al caso di **variabili locali,** assumendo il principio di *realismo locale* ovvero che esistano delle proprietà misurabili di singoli oggetti che 1) possono essere attribuite simultaneamente e che 2) queste siano indipendenti le une dalle altre se effettuate a distanze spazio-temporali (che non possono essere collegate da segnali che viaggiano al massimo alla velocità della luce).
Tuttavia possiamo assumere che queste variabili siano aleatorie, ovvero possano assumere un set di valori con una certa probabilità.

Consideriamo un sistema di 2 particelle che dotate di diverse proprietà che, senza perdere di generalità, possiamo supporre essere binarie.
Nello specifico, supponiamo che

- Alice possa misurare le proprietà Q , $q = \pm 1$ e R , $r = \pm 1$
- Bob possa misurare le proprietà S , $s = \pm 1$ e T , $t = \pm 1$

con certe probabilità che possono essere determinate conducendo esperimenti.
Alice e Bob effettuano le loro misure simultaneamente su una coppia di particelle, scegliendo di effettuare la misura di una o l'altra porprietà all'ultimo momento, in modo che non ci possa essere scambio di informazione tra i due laboratori.

Consideriamo l'osservabile $QS + RS + RT - QT$ che può assumere il valore $qs + rs + rt - qt$ sullo stato specificato dai valori $q, r, s, t = \pm 1$ con probabilità $p(q, , r, s, t)$

Il suo valore di aspettazione è quindi:

$$E(QS + RS + RT - QT) = \sum_{q,r,s,t=\pm 1} (qs + rs + rt - qt)\, p(q, r, s, t)$$

Notiamo che $qs + rs + rt - qt = (q + r)s - (q - r)t = \pm 2$ poichè

q	r	q+r	q-r
-1	-1	-2	0
-1	1	0	-2
1	-1	0	2
1	1	2	0

$s, t = \pm 1$

Quindi

$$E(QS+RS+RT-QT)=\sum_{q,r,s,t=\pm 1}(qs+rs+rt-qt)\,p(q,r,s,t)$$

$$\leq \sum_{q,r,s,t=\pm 1}|\,qs+rs+rt-qt\,|\,p(q,r,s,t)\leq 2\sum_{q,r,s,t=\pm 1}|\,p(q,r,s,t)=2$$

Inoltre:

$$E(QS+RS+RT-QT)=E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT)$$

Otteniamo così la disuguaglianza di Bell, nella versione CHSH (Clauser, Horne,Shimony, Holt):

$$E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT)\leq 2$$

che può essere verificata sperimentalmente misurando le 4 propabilità congiunte

$$p(q,s),p(r,s),p(r,t),p(q,t)$$

Questa disuguaglianza deve essere rispettata da qualunque sistema descritto da variabili nascoste che soddisfano il principio di realismo locale.
Quindi anche dalla meccanica quantistica, secondo Einstein, affinchè possa essere una teoria completa.

Le previsioni della meccanica quantistica soddisfano sempre questa condizione? **NO**

Per dimostrarlo, consideriamo un sistema di due qubit in entanglement:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

e supponiamo che
Alice misuri le osservabili $Q = Z_1, R = X_1$

Bob misuri le osservabili $S = -\frac{Z_2 + X_2}{\sqrt{2}}, T = \frac{Z_2 - X_2}{\sqrt{2}}$

Si ha $$E(QS) = E(RS) = E(RT) = -E(QT) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ad esempio:

$$E(QS) = \langle \psi_{AB} | Z_1 \otimes \left[-\frac{Z_2 + X_2}{\sqrt{2}} \right] | \psi_{AB} \rangle = \frac{1}{2} \langle 01 | Z_1 \otimes \left[-\frac{Z_2 + X_2}{\sqrt{2}} \right] | 01 \rangle - \frac{1}{2} \langle 01 | Z_1 \otimes \left[-\frac{Z_2 + X_2}{\sqrt{2}} \right] | 10 \rangle$$
$$- \frac{1}{2} \langle 10 | Z_1 \otimes \left[-\frac{Z_2 + X_2}{\sqrt{2}} \right] | 01 \rangle + \frac{1}{2} \langle 10 | Z_1 \otimes \left[-\frac{Z_2 + X_2}{\sqrt{2}} \right] | 10 \rangle$$

dove:

$$\langle 01 | Z_1 \otimes \left[-\frac{Z_2 + X_2}{\sqrt{2}} \right] | 01 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | Z_1 | 0 \rangle \left[\langle 1 | Z_2 | 1 \rangle + \langle 1 | X_2 | 1 \rangle \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | 0 \rangle \left[-\langle 1 | 1 \rangle + \langle 1 | 0 \rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

avendo usato: $Z|0\rangle = |0\rangle\,, Z|1\rangle = -|1\rangle\,; X|0\rangle = |1\rangle\,, X|1\rangle = |0\rangle$

Similmente per tutti gli altri termini.

Quindi, la disuguaglianza di Bell è violata:

$$E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2 \;\; !$$

La meccanica quantistica NON può essere completata con una teoria alle variabili nascoste locali.

Ma cosa ci dicono gli esperimenti? Il mondo è quantistico (violazione della disuguaglianza di Bell) oppure può essere spiegato da una teoria a variabili nascoste locali?

- primo esperimento di Clauser
- esperimento di Aspect
- the Big Bell Test http://thebigbelltest.icfo.eu/ (minuto 8 del video)

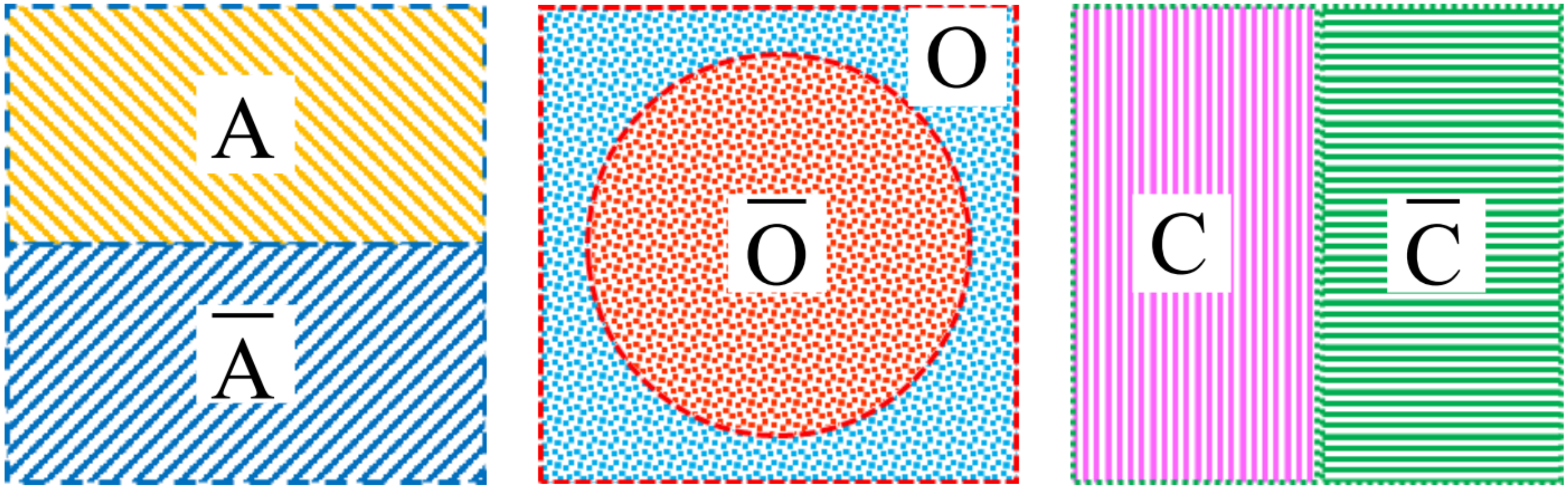
Ma questi esprimenti non ci danno solo una risposta alla domanda epistemologica: di Einstein: ora li possiamo usare come una risorsa per verificare che un sistema è intrinsecamente quantistico.

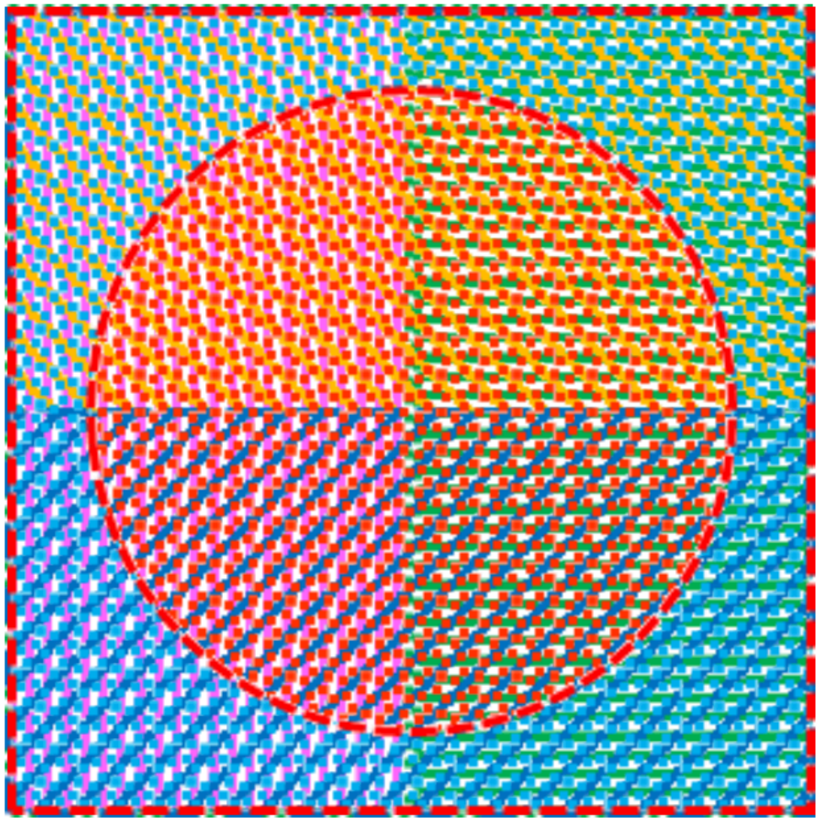
Una disuguaglianza alternativa

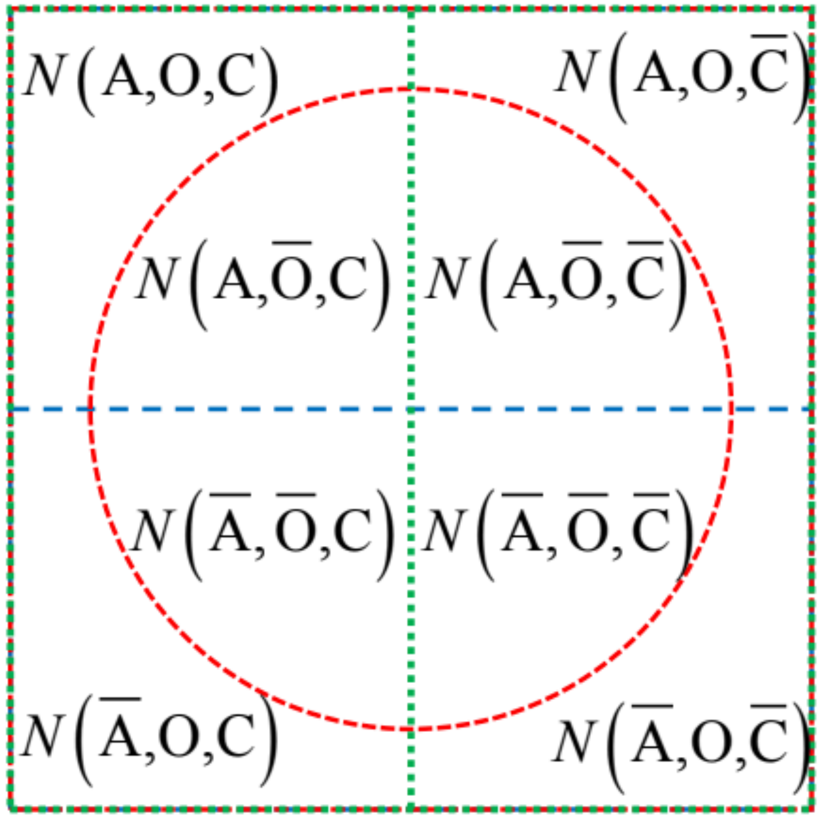
[D'Espagnat, "The Quantum Theory and Reality," Scientific American 241, 128-140 (1979)]

Supponiamo di avere un certo numero di N_{TOT} elementi che abbia tre proprietà misurabili.

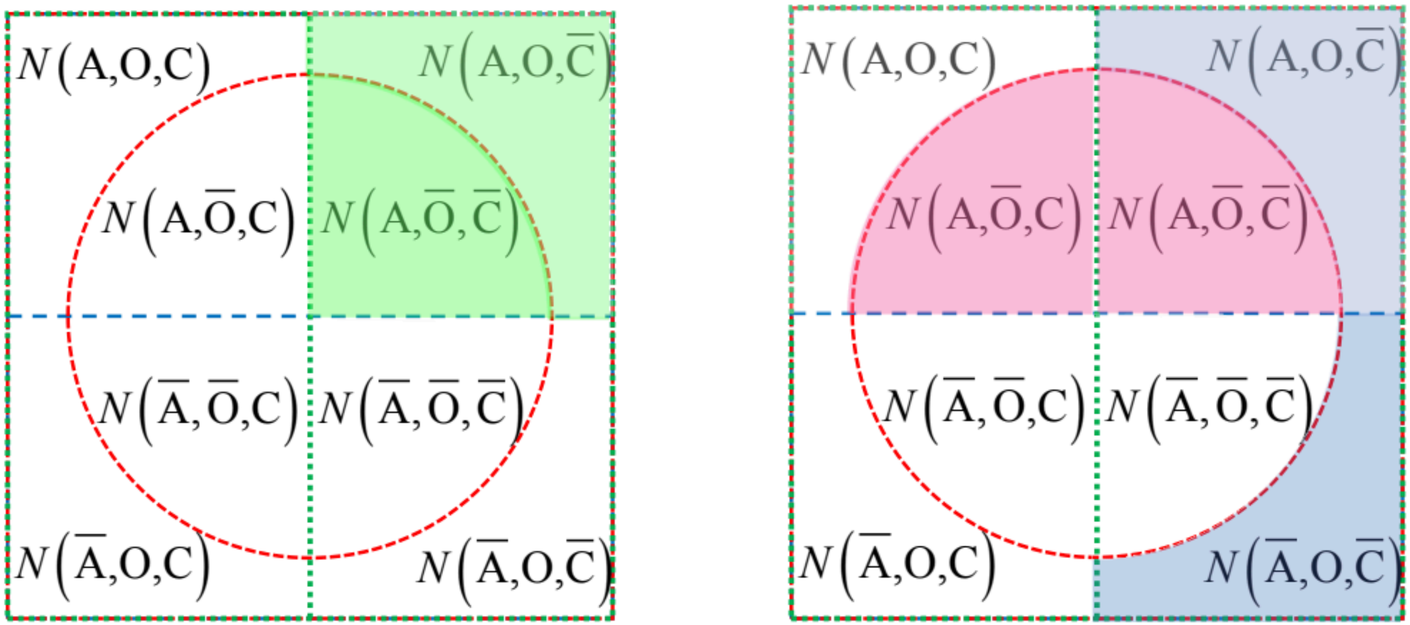
- A : essere alti più di 1.70 m — $\overline{\mathrm{A}}$: non essere alti più di 1.70 m
- O : avere gli occhi azzurri — $\overline{\mathrm{O}}$: non avere gli occhi azzurri
- C : avere i capelli rossi — $\overline{\mathrm{C}}$: non avere i capelli rossi







$N(A,B,C) = n$. *studenti per cui valgono simultaneamente le proprieta'* A, O, C *etc* .



$$N(A,\overline{O}) = N(A,\overline{O},C) + N(A,\overline{O},\overline{C}) \quad etc\,.$$

$$N(A,\overline{C}) \quad \leq \quad N(O,\overline{C}) \quad + \quad N(A,\overline{O}) \quad /N_{TOT}$$

$$p(A,\overline{C}) \quad \leq \quad p(O,\overline{C}) \quad + \quad p(A,\overline{O})$$




Supponiamo ora che ogni studente abbia un gemello identico (stessi occhi, capelli e altezza). Le coppie di gemelli sono correlate (classicamente) nelle varie proprietà: ae separiamo una coppia e osserviamo le proprietà di uno dei due conosciamo con certezza anche le proprietà dell'altro.

$$p(A_1, \overline{C_2}) \leq p(O_1, \overline{C_2}) + p(A_1, \overline{O_2})$$

Consideriamo lo stato entangled di due spin

$$|Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\right)$$

Si può dimostrare che effettuando una misura con apparati di Stern-Gerlach ad un angolo qualsiasi α sulla prima particella e β sulla seconda particella si ottengono le probabilità

$$p\left(|0\rangle_\alpha, |1\rangle_\beta\right) = p\left(|1\rangle_\alpha, |0\rangle_\beta\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$p\left(|0\rangle_\alpha, |0\rangle_\beta\right) = p\left(|1\rangle_\alpha, |1\rangle_\beta\right) = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Scegliamo tre valori degli angoli $\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 45^\circ \quad \theta_3 = 90^\circ$

$$p\left(|0\rangle_{0^\circ}, |1\rangle_{90^\circ}\right) \le p\left(|0\rangle_{90^\circ}, |1\rangle_{45^\circ}\right) + p\left(|0\rangle_{0^\circ}, |1\rangle_{45^\circ}\right)$$

$$\frac{1}{4} \le \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad 0.25 \le 0.146 \qquad \textbf{Falso!}$$

Le previsioni della Meccanica Quantistica violano le disuguaglianze di Bell!

Esercizio.

Per calcolare il risultato di possibili misure a due angoli qualsiasi a e b sui due qubit è conveniente riscrivere lo stato su due basi ruotate:

$$|0\rangle_\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \sin\frac{\alpha}{2}|1\rangle \qquad |0\rangle = \cos\frac{\alpha}{2}|0\rangle_\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}|1\rangle_\alpha$$

$$|1\rangle_\alpha = -\sin\frac{\alpha}{2}|0\rangle + \cos\frac{\alpha}{2}|1\rangle \qquad |1\rangle = \sin\frac{\alpha}{2}|0\rangle_\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}|1\rangle_\alpha$$

$$|Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}|0\rangle_\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}|1\rangle_\alpha\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}|0\rangle_\beta - \sin\frac{\beta}{2}|1\rangle_\beta\right) + \left(\sin\frac{\alpha}{2}|0\rangle_\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}|1\rangle_\alpha\right)\left(\sin\frac{\beta}{2}|0\rangle_\beta + \cos\frac{\beta}{2}|1\rangle_\beta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta + \left(-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)|0\rangle_\alpha|1\rangle_\beta\right.$$

$$\left. + \left(-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)|1\rangle_\alpha|0\rangle_\beta + \left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)|1\rangle_\alpha|1\rangle_\beta\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(|0\rangle_\alpha|0\rangle_\beta + \boxed{|1\rangle_\alpha|1\rangle_\beta}\right) + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\boxed{|0\rangle_\alpha|1\rangle_\beta} - |1\rangle_\alpha|0\rangle_\beta\right)\right]$$

$$\boxed{p\left(|0\rangle_\alpha, |0\rangle_\beta\right) = p\left(|1\rangle_\alpha, |1\rangle_\beta\right) = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \boxed{p\left(|0\rangle_\alpha, |1\rangle_\beta\right) = p\left(|1\rangle_\alpha, |0\rangle_\beta\right) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

La meccanica quantistica non soddisfa la logica classica o booleana

bit
 0
1 

NOT

IN	OUT
0	1
1	0

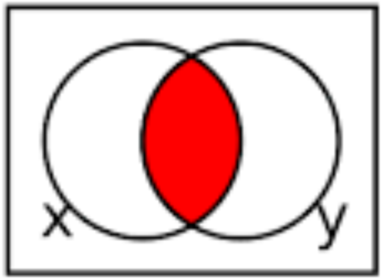
AND

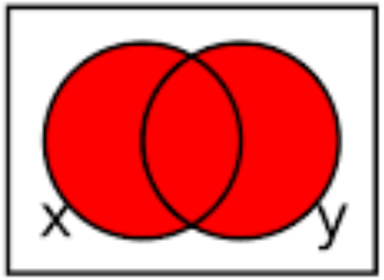
IN	OUT
00	0
01	0
10	0
11	1

OR

IN	OUT
00	0
01	1
10	1
11	1

INSIEMI
diagrammi di Venn





PROPOSIZIONI
P, Q vera/falsa

P=l’elettrone è una particella
Q=l’elettrone è un’onda

$\neg P$

l’elettrone NON è una particella

$P \wedge Q$

l’elettrone è una particella
e un’onda

$P \vee Q$

l’elettrone è una particella
o un’onda