TELETRASPORTO QUANTISTICO

Trasferimento dello stato q. di un q-bit

Qubit, fotoni

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \vec{\epsilon}\, e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \quad \text{campo em}$$

$$\vec{\epsilon} \perp k\hat{z}$$

$$= E_0 \left[\hat{x} \cos\theta\, e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y} \sin\theta\, e^{i(kz-\omega t+\phi)} \right]$$

$$+ c.c.$$

$$= E_0\, e^{i(kz-\omega t)} \underbrace{\left[\hat{x}\cos\theta + \hat{y} \sin\theta\, e^{i\phi} \right]}_{\vec{\epsilon}} + c.c.$$

$\vec{\epsilon}$ vettore complesso di polarizzazione

$\vec{\epsilon}$ vettore in spazio bidimensionale

$$\text{base} = \{\hat{x}, \hat{y}\} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

$$\vec{\epsilon} = \cos\theta\, \hat{x} + \sin\theta\, e^{i\phi}\, \hat{y}$$

$$|\vec{\epsilon}\rangle = \cos\theta\, |0\rangle + \sin\theta\, e^{i\phi}\, |1\rangle$$

Incremento di $\theta \to \theta + \pi \qquad |\vec{\epsilon}\rangle \to -|\vec{\epsilon}\rangle$

Misura polarizzazione

Polarizzatore : assorbe fotoni con polarizzazione $\hat{x}$
e trasmette fotoni con polarizz. $\hat{y}$

Π_y proiettore

$$|\vec{\epsilon}\rangle = \cos\theta \underset{\hat{x}}{\underset{\uparrow}{|0\rangle}} + \sin\theta\, e^{-i\phi} \underset{\hat{y}}{\underset{\uparrow}{|1\rangle}}$$

$$\Pi_y |\vec{\epsilon}\rangle = |1\rangle\langle 1 |\vec{\epsilon}\rangle = \sin\theta\, e^{-i\phi} |1\rangle$$

Probabilità di attraversare polarizzatore $\hat{y}$ =

$$= |\langle\vec{\epsilon}\,|\,\Pi_y\,|\vec{\epsilon}\rangle|^2$$

Misure proiettive = polarizzatore + rivelatore

Protocollo di Bennett

Bennet et al., PRL 70, 1985 (1993)

A(lice) e B(ob)

$|q_1\rangle = \alpha|1\rangle_1 + \beta|0\rangle_1$ fotone iniziale di Alice

Alice trasmette a Bob,

$|q_3\rangle = \alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3$ fotone finale di Bob

1) Creazione di una coppia di fotoni entangled, in un particolare stato di Bell

$$|\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\rangle_2|0\rangle_3 - |0\rangle_2|1\rangle_3 \right]$$

2) di cui fotone $|q\rangle_2$ ad Alice, $|q\rangle_3$ a Bob

3) Alice esegue una "misura di Bell" sui fotoni $|q\rangle_1, |q\rangle_2$

Misura di Bell, misura i cui proiettori sono gli stati di Bell

$$\{ |\Psi^-\rangle_{12}\langle\Psi^-|, \ |\Psi^+\rangle_{12}\langle\Psi^+|, \ |\Phi^-\rangle_{12}\langle\Phi^-|, \ |\Phi^+\rangle_{12}\langle\Phi^+| \}$$

$$|\Phi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |1\rangle_2 \right)$$

$$|\Psi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |0\rangle_1 |0\rangle_2 \right)$$

(4) Alice comunica a Bob esito misura di Bell, in base al quale Bob esegue operazione unitaria su $|q\rangle_3$

Nel caso esito $= |\Phi^-\rangle_{12} \rightarrow$ op. unitaria $= \mathbb{1}$

Alice ha $|q\rangle_1 = \alpha|1\rangle_1 + \beta|0\rangle_1$

+ coppia $|\Phi^-\rangle_{23}$

$$|\varphi\rangle_{123} = |q\rangle_1 \otimes |\Phi^-\rangle_{23}$$

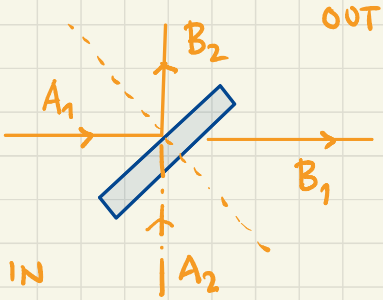
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[\alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle - \alpha|1\rangle|0\rangle|1\rangle + $$
$$+ \beta|0\rangle|1\rangle|0\rangle - \beta|0\rangle|0\rangle|1\rangle \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\alpha \left[|\Psi^+\rangle + |\Psi^-\rangle \right]_{12} |0\rangle$$
$$- \frac{1}{2}\alpha \left[|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle \right]_{12} |1\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\beta \left[|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle \right]_{12} |0\rangle$$
$$- \frac{1}{2}\beta \left[|\Psi^+\rangle - |\Psi^-\rangle \right]_{12} |1\rangle$$

$$= \frac{1}{2} |\Phi^-\rangle_{12} \left(-\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3 \right) + \frac{1}{2} |\Phi^+\rangle_{12} \cdots$$

MISURA DI BELL

Usando un "beam-splitter", specchio parzialmente riflettente



A_1 ampiezza del campo elettrico incidente

B_1 ampiezza del c. elettrico trasmesso
B_2 " " riflesso

$B_1 = t\, A_1$ t coefficiente di trasmissione

$B_2 = r\, A_1$ r " di riflessione

In assenza di assorbimento, cons. energia

$$\rightarrow \quad |A_1|^2 = |B_1|^2 + |B_2|^2$$

$$1 = |t|^2 + |r|^2$$

Ottica quantistica (pochi fotoni)

$A_1 \longrightarrow \hat{a}_1$ distruzione di un fotone nel "modo" 1 di ingresso

$B_1 \rightarrow \hat{b}_1$ distruzione di fotone su "modo" 1 in uscita

$B_2 \rightarrow \hat{b}_2$ distruzione su "modo" 2 in uscita

$$\begin{cases} \hat{b}_1 = t\,\hat{a}_1 + r'\,\hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 = r\,\hat{a}_1 + t'\,\hat{a}_2 \end{cases}$$

$\hat{a}_1^\dagger$ operatore di creazione

$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$ Regole di commutazione (oscill. armon.)

$[\hat{a}_1, \hat{a}_1] = 0 = [\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1^\dagger]$

Regole di commutazione

$[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1 = [b_1, b_1^\dagger] = [b_2, b_2^\dagger]$

$[a_1, b_1] = 0 = [a_1, b_2] = [a_1, b_1^\dagger] = [a_1, b_2^\dagger]$

Se $\hat{b}_1 = t\,\hat{a}_1 \rightarrow$

$$[\hat{b}_1, \hat{b}_1^\dagger] = [t\,\hat{a}_1, t^*\hat{a}_1^\dagger] = |t|^2$$

$$\hat{b}_2 = r\,\hat{a}_1$$

$$[\hat{b}_2, \hat{b}_2^\dagger] = [r\hat{a}_1, r^*\hat{a}_1^\dagger] = |r|^2$$

NON soddisfano simultaneamente le regole di comm. e conservazione dell' energia

$$[\hat{b}_1, \hat{b}_1^\dagger] = [t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_2, \; t^*\hat{a}_1^\dagger + r'^*\hat{a}_2^\dagger] =$$

$$= |t|^2 + |r'|^2 = 1$$

$$[\hat{b}_2, \hat{b}_2^\dagger] = |r|^2 + |t'|^2 = 1$$

$$[b_1, b_2^\dagger] = 0 = t r^* + r' t'^*$$

Cons. energia $\quad |t|^2 + |r|^2 = 1 = |t'|^2 + |r'|^2$

Regole comm. $\quad |t|^2 + |r'|^2 = 1 = |r|^2 + |t'|^2$

$$t r^* + r' t'^* = 0$$

$\rightarrow \quad |r| = |r'|$

$|t| = |t'| \quad , \quad t, t'$ reali , scelta sempre possibile

$r^* + r' = 0$

$$\begin{cases} \hat{b}_1 = \overbrace{\cos\theta}^{t} \; \hat{a}_1 + \overbrace{\sin\theta \, e^{i\phi}}^{r'} \; \hat{a}_2 \\ \hat{b}_2 = \underbrace{-\sin\theta \, e^{-i\phi}}_{r} \; \hat{a}_1 + \underbrace{\cos\theta}_{t'} \; \hat{a}_2 \end{cases}$$