



Lecture Rydberg-v3

▼ Type

Lesson

Rydberg atoms

Energy levels

The energy levels of hydrogen atom are given by

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{m_p}{m_e + m_p} \right) R_\infty$$

$R_\infty = e^2/2a_0 = 13.6$ eV being the Rydberg constant, m_e, m_p the electron and proton masses, $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ is the Bohr radius = 5.29×10^{-11} m.

The energy differences with respect to $n = 2$ give rise to the Balmer series, named after Balmer who discovered an empirical equation for the wave-numbers of spectral lines in atomic hydrogen:

$$\frac{1}{\lambda_n} \propto E_n - E_2 = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Johannes Rydberg found a similar series (1889) in the spectra of alkali atoms

$$\frac{1}{\lambda_n} \propto T_s - \frac{R}{(n - \delta)^2}$$

that was later refined to let the “quantum defect” depend on the principal quantum number and the orbital angular momentum, i.e. $\delta \rightarrow \delta_{n,\ell}$.

The quantum defect is positive, therefore the energy is decreased. Physically, it is due to the electron penetrating the atomic core, where it experiences a larger attractive potential, unshielded by inner electrons. Larger overlap with atomic core implies larger defect. States with for larger angular momentum have lower quantum defect, due to smaller overlap with atomic core.

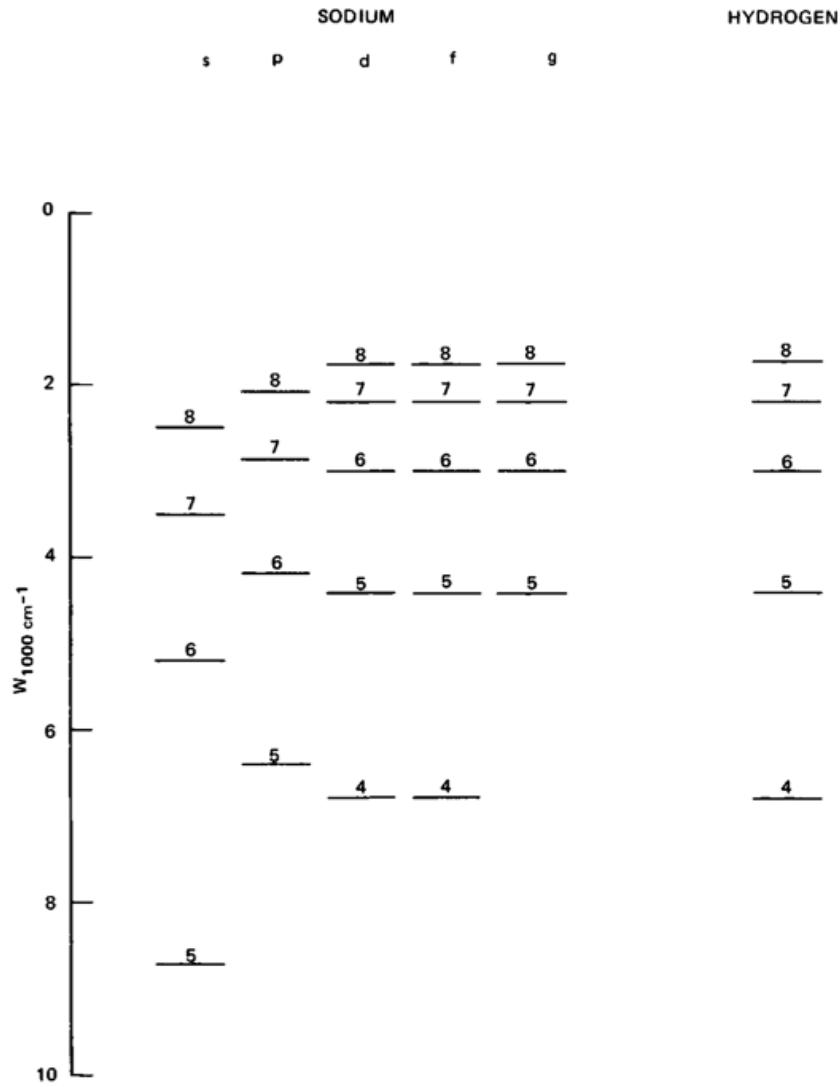
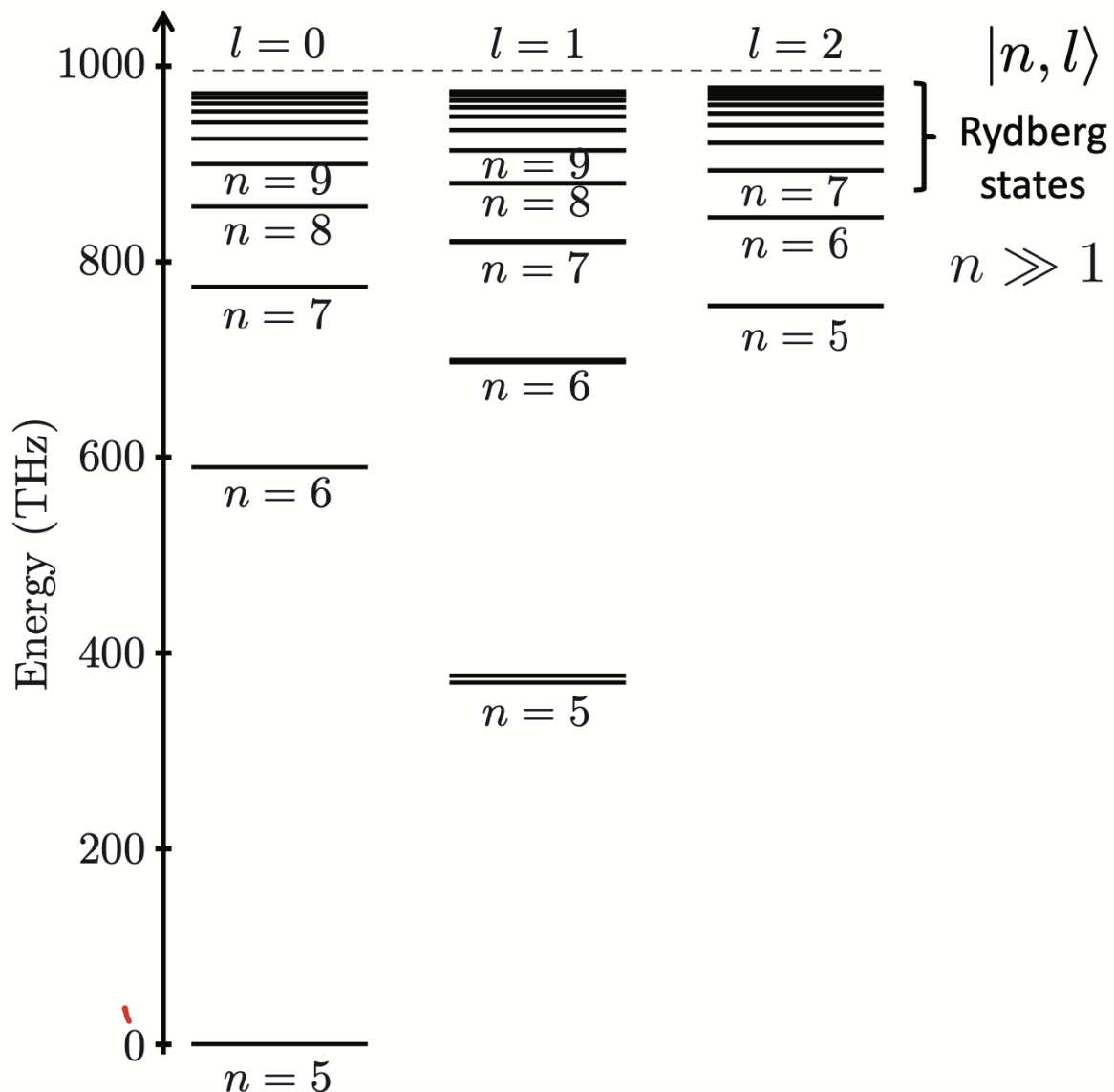


Fig. 2.2 Energy level diagram for H and Na (from ref. 1).

Energy levels of Rb pack around $E = 0$:



The “radius” of the orbital, like in hydrogen, increases with n , we identified it from:

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \simeq -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2}$$

$$r_n = a_0 n^2$$

As the size increases, so does the polarizability.

Lifetimes

States with high quantum numbers have longer lifetime.

The Fermi golden rule for the transition rate for an atomic state $|i\rangle$ to decay into an atomic+field state $|f\rangle \otimes |\omega\rangle$, where $\hbar\omega = E_i - E_f$:

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_I | i \rangle|^2 \rho(E_f)$$

the interaction hamiltonian H_I is, generally, the dipole hamiltonian for highly excited states; $\rho(E_f) = dn/dE|_{E_f}$ is the density of states, equal to the density of em modes in vacuum, $\rho(E_f) \propto \omega^3$. Thus the decay rate is

$$\Gamma_i = \sum_f \frac{\omega_f^3 |\langle f | d | i \rangle|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$$

Here a distinction is in order:

- states with large angular momentum, $\ell \sim n$, the sum is dominated by final atomic states close in energy to the initial state

$$\begin{aligned} r_n &\sim a_0 n^2 \\ \omega_f &\sim 1/(n-1)^2 - 1/n^2 \sim 1/n^3 \\ \Gamma_i &\sim r_n^2 \omega_f^3 \sim n^4 \frac{1}{n^9} = \frac{1}{n^5} \end{aligned}$$

Especially long lifetimes have *circular* Rydberg levels with maximum orbital angular momentum $m_{max} = \ell_{max} = n - 1$. By selection rule $|\Delta\ell| \leq 1$, these can only decay to $\ell = n - 2$ i.e. with $\Delta n = -1$. However excitation of these high-angular-momentum Rydberg states is more elaborated and coherent manipulation is complicated.

- states with low angular momentum, $\ell \sim 1$, there are many low-lying states as final states. For these, the dipole matrix elements decrease with the difference of principal q. number. For example, the dipole matrix element toward the ground state decreases as $n^{-3/2}$, thus

$$\begin{aligned} \langle g | r | \text{Ry} \rangle &\sim a_0 n^{-3/2}, \quad \omega_f \sim (1 - n^{-2}) \\ \Gamma_g &\sim r^2 \omega_f^3 \sim n^{-3} \end{aligned}$$

Thus for circular Ry with $n = 50$ we expect lifetime of the order of $1\text{ns} * 50^5 = 0.3\text{ s}$, while for the same $n = 50$, low angular momentum, we expect lifetime of 0.1ms .

A simplified empirical formula summarizes the above argument: $1/\Gamma_{n,\ell} \sim 10^{-10} n^3 (\ell + 1/2)^2\text{ s}$.

Importantly, the lifetime of Rydberg levels is decreased by blackbody radiation, because Rydberg levels typical separations are separated of the order of GHz frequencies, and $k_B *$

300 K = $h21$ GHz:

$$\Gamma_{nl} = \Gamma_{nl}^{(0)} + \frac{4\alpha^3}{3n^2} \frac{k_B T}{\hbar}$$

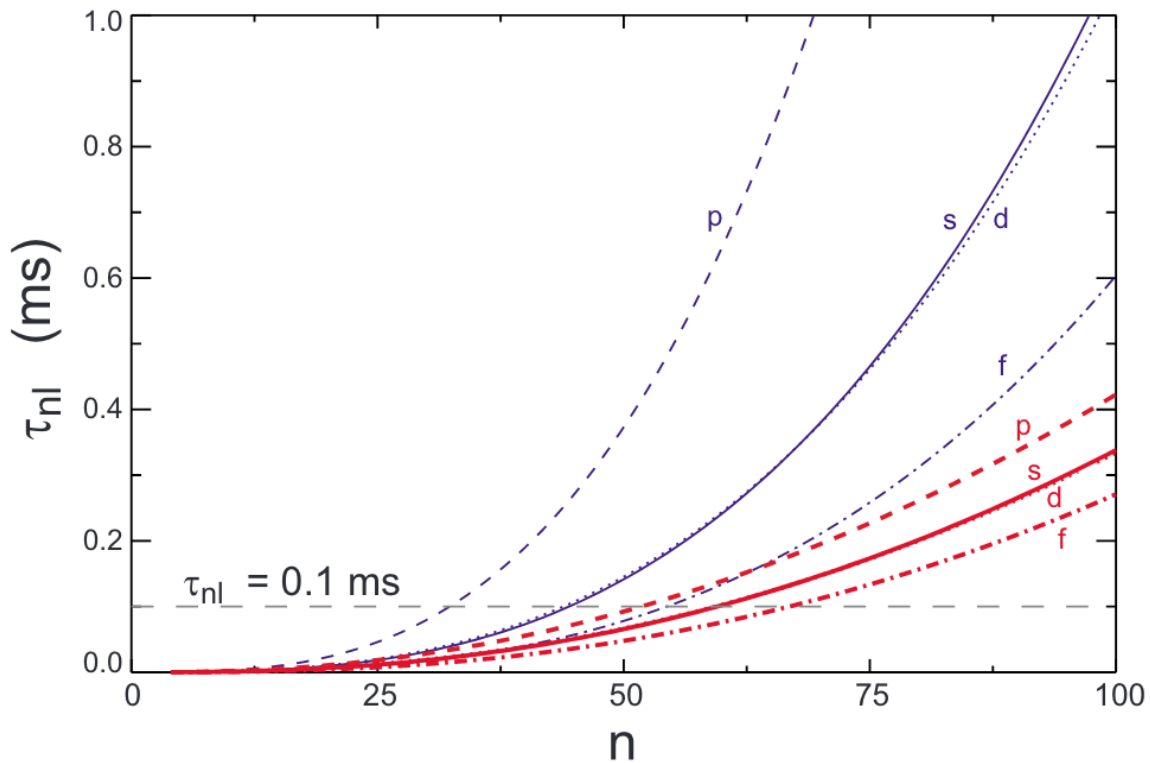


FIG. 6. (Color online) Excited-state lifetimes due to radiative decay for $T=0$ and $T=300$ K for s , p , d , and f states of Rb. From [Saffman and Walker, 2005a](#).

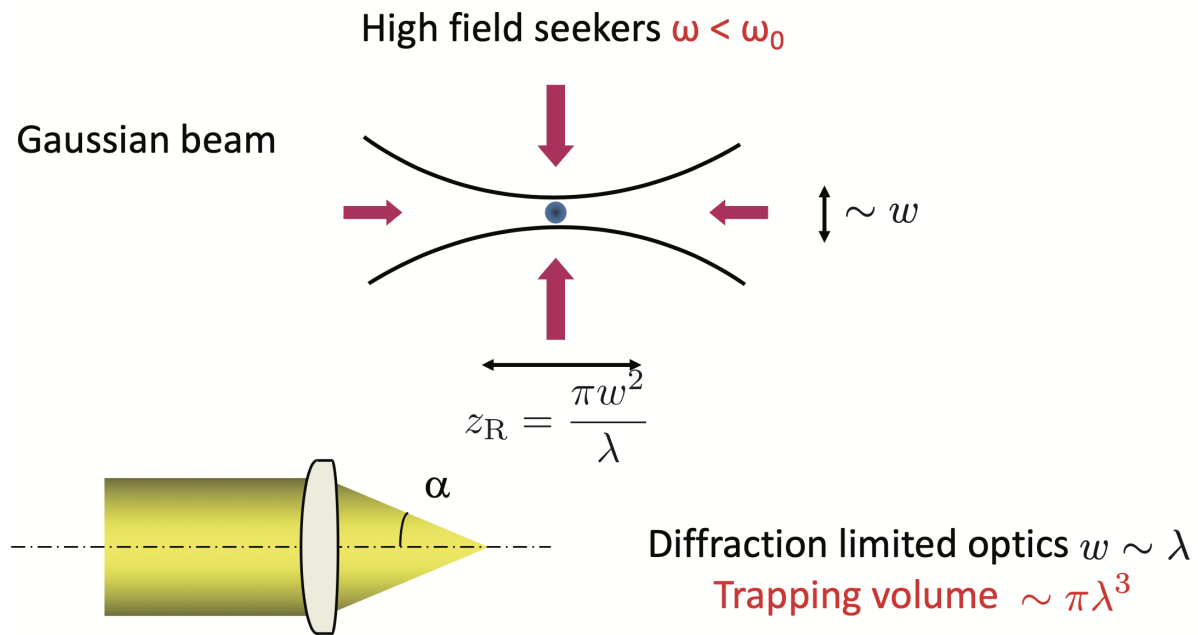
Preparazione del registro quantistico, “pinzette ottiche”

Negli esperimenti attuali gli atomi individuali vengono preparati in siti individuali, separati da circa $5 \mu\text{m}$. Questa separazione è al di sotto del “raggio di blocco” che vedremo in seguito, consentendo porte logiche a due qubit, e comodamente al di sopra della risoluzione ottica di imaging, consentendo la preparazione, l'indirizzamento e la misura dei singoli siti.

Con “pinzette ottiche”, gli atomi vengono intrappolati in regioni ad alta intensità di radiazione fuori risonanza, a lunghezza d'onda, $\lambda > \lambda_{0,max}$, maggiore della massima lunghezza d'onda di tutte le transizioni atomiche. Ad esempio, per gli atomi di Rb, considerando tutte le transizioni dallo stato fondamentale, $\lambda_{0,max} = 795 \text{ nm}$.

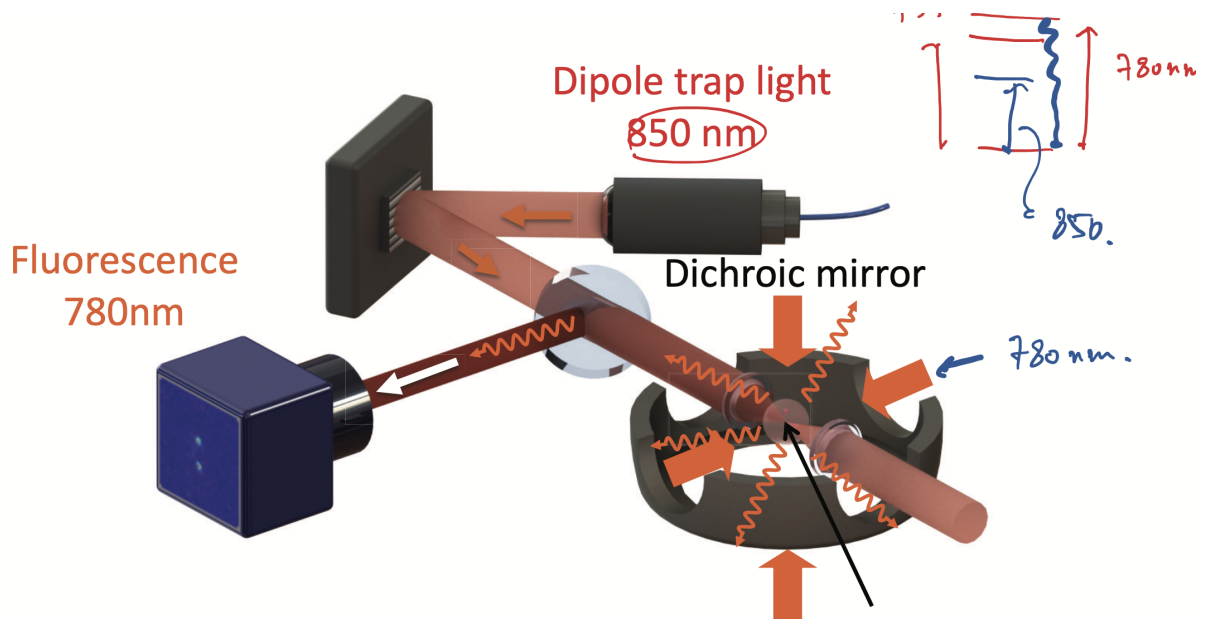
La stretta focalizzazione su una dimensione del fascio $w \sim \lambda$ crea una trappola tridimensionale, sufficientemente profonda anche a potenze moderate: con w di 1 μm , 1 mW produce una profondità di trappola di 1 mK.

Optical tweezers: trapping in 3D

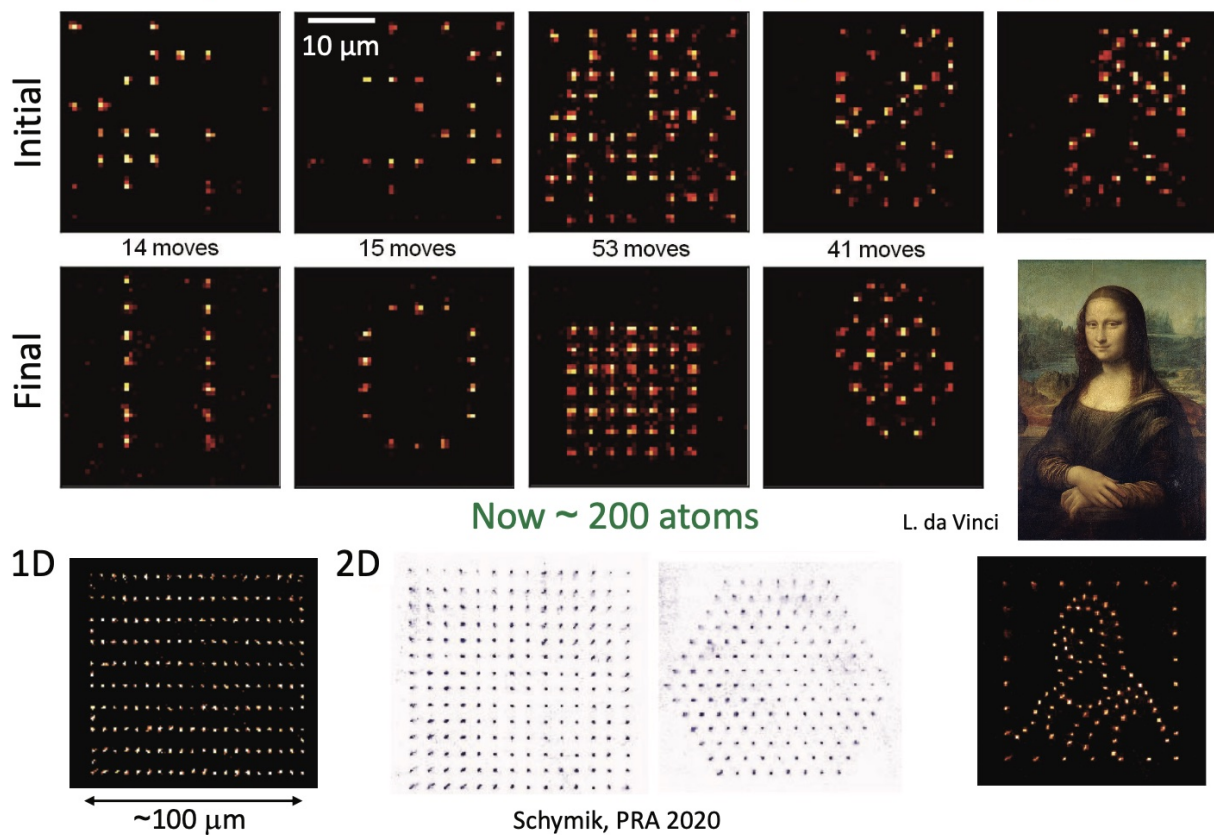


From A. Browaeys, Boulder School

Gli atomi sono intrappolati e raffreddati fino a temperature $T \sim 100 \mu\text{K}$ (con altri laser) in trappole che usano anche campi magnetici, dette trappole magneto-ottiche. Nella figura sotto, la luce a 780nm crea la trappola magneto-ottica e la luce a 850nm crea le pinzette ottiche. Mediante dispositivi opportuni si può dividere un singolo fascio in tante pinzette e localizzarle quasi a piacimento in array generalmente bidimensionali, i siti del registro quantistico. Inizialmente in ogni pinzetta/sito ci sono 0 o 1 atomo, in maniera casuale, con probabilità 50/50. Buona parte della preparazione del registro consiste nel riposizionare gli atomi in modo che i siti di un sotto-insieme del registro siano tutti occupati, come mostrato nella figura in fondo.



Gallery of assembled 2D arrays... (single-shot images...)



Interazioni tra due atomi

Dato che gli atomi di Rydberg possiedono elementi di matrice del dipolo che scalano come n^2 le interazioni dipolo-dipolo risultanti aumentano rapidamente all'aumentare di n . Uno dei principali vantaggi dell'interazione di Rydberg è la controllabilità (intensità, segno, anisotropia e dipendenza spaziale), integrata dalla possibilità di disattivare l'interazione trasferendo gli atomi allo stato fondamentale.

Trascurando gli effetti di ritardo, l'interazione dipolo-dipolo tra due atomi è

$$V_{\text{dd}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3(\vec{d}_1 \cdot \hat{e}_R)(\vec{d}_2 \cdot \hat{e}_R)}{R^3},$$

dove $\vec{d}_1 = -e\vec{r}_1$ è l'operatore di dipolo elettrico, \vec{r}_1 la posizione relativa dell'elettrone dal nucleo 1, e analogamente per \vec{d}_2 ; $\vec{R} = \hat{e}_R R$ la distanza interatomica. In assenza di campi elettrici esterni, gli atomi non hanno momento di dipolo elettrico permanente, $\langle \vec{d} \rangle = 0$ per ogni livello.

Inizialmente considerando le interazioni tra due atomi nello stato fondamentale nS , ovvero $|g; g\rangle = |nS; nS\rangle$. Per semplicità, allineiamo l'asse z parallelo a \hat{e}_R

$$V_{\text{dd}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d_{1,x}d_{2,x} + d_{1,y}d_{2,y} - 2d_{1,z}d_{2,z}}{R^3},$$

al primo ordine in teoria delle perturbazioni il valore di aspettazione di tutte le componenti cartesiane di \vec{d}_1, \vec{d}_2 è nullo, e quindi anche $\langle V_{\text{dd}} \rangle = 0$.

Consideriamo quindi lo spostamento di energia in teoria delle perturbazioni al second'ordine:

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{q_1, q_2} \frac{|\langle q_1; q_2 | V_{\text{dd}} | g; g \rangle|^2}{E_{gg} - E_{q_1, q_2}}$$

A causa della differenza di energia al denominatore, la somma è dominata dagli stati eccitati di energia più bassa $|q_1; q_2\rangle = |nP; nP\rangle$:

$$\begin{aligned}
E_{gg} - E_{p_1, p_2} &= -2\hbar\omega_0 \\
|\langle q_1; q_2 | V_{dd} | g; g \rangle|^2 &= \frac{|\langle p_x | d_x | g \rangle|^4 + |\langle p_y | d_y | g \rangle|^4 + 4|\langle p_z | d_z | g \rangle|^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 R^6} \\
&= 6 \frac{|\langle p_z | d_z | g \rangle|^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 R^6} = \frac{6}{(4\pi\epsilon_0)^2 R^6} \left(\frac{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3 \Gamma}{\omega_0^3} \right)^2 \\
&= \frac{27(\hbar\Gamma)^2}{8(k_0 R)^6}
\end{aligned}$$

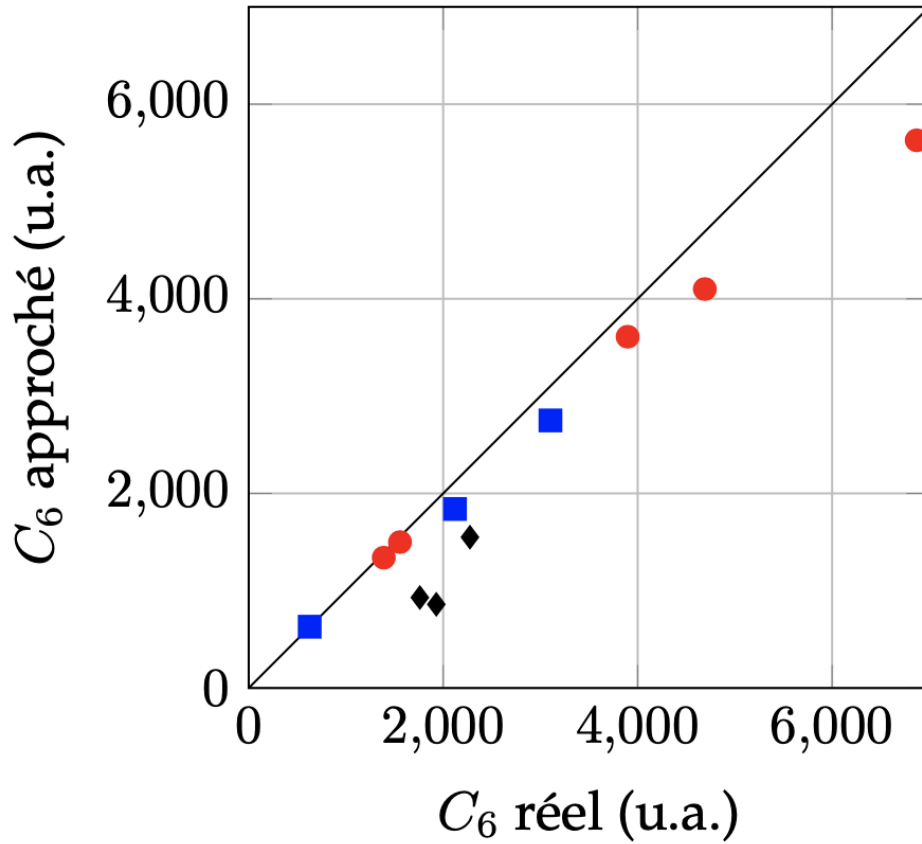
dove abbiamo introdotto il rate di decadimento, ovvero il reciproco della vita media, dei livelli eccitati nP , $\Gamma = \omega_0^3 |\langle p_z | d_z | g \rangle|^2 / (3\pi\epsilon_0 \hbar c^3)$.

Quindi

$$U(R) = \Delta E^{(2)} \simeq -\frac{27}{16(k_0 R)^6} \frac{\Gamma}{\omega_0} \hbar\Gamma$$

Queste sono le interazioni di van der Waals, $U(R) = -C_6/R^6$, tra dipoli elettrici indotti. Intuitivamente, possiamo capire l'andamento $1/R^6$ immaginando che una fluttuazione crei temporaneamente un momento di dipolo d_1 in un atomo, che crea un campo elettrico circostante, $E \sim d_1/R^3$, che quale induce un momento di dipolo nel secondo atomo, $d_2 \propto E$, per cui l'interazione $-d_2 E \propto -E^2 \sim 1/R^6$.

L'espressione sopra riportata $C_6 \simeq -27\hbar\Gamma^2/(16\omega_0 k_0^6)$ è accurata entro il 22% per Cs, meglio ancora per gli alcalini più leggeri, peggio per gli atomi con due elettroni esterni, come Er, Dy, Yb.



système	C_6 [u.a.]	$\Gamma/2\pi$ [MHz]	λ [nm]	C_6 approché [u.a.]
Li-Li	1389	5.87	671	1340
Na-Na	1556	9.80	589	1500
K-K	3897	6.04	767	3610
Rb-Rb	4691	6.07	780	4100
Cs-Cs	6870	5.22	852	5629
Mg-Mg	627	80.9	235	630
Ca-Ca	2121	34.6	423	1840
Sr-Sr	3103	32.0	461	2750
Er-Er	1760	29.7	401	930
Dy-Dy	2275	32.2	421	1550
Yb-Yb	1929	29	399	860

From J. Dalibard, Collège de France, Cours 2020-21

Quantitativamente, per due atomi di Rb a distanza $R = 1\mu\text{m}$, $U(R)/\hbar \simeq -10^{-6} \text{ s}^{-1}$, è trascurabile a tutti gli effetti nella computazione quantistica.

Consideriamo ora due atomi nello stesso stato eccitato di Rydberg $|r; r\rangle$, con n numero quantico principale di $|r\rangle$. Come per tutti i livelli atomici, $\langle r; r | V_{dd} | r; r \rangle = 0$,

nuovamente lo spostamento in energia è dato dalla teoria delle perturbazioni al second'ordine

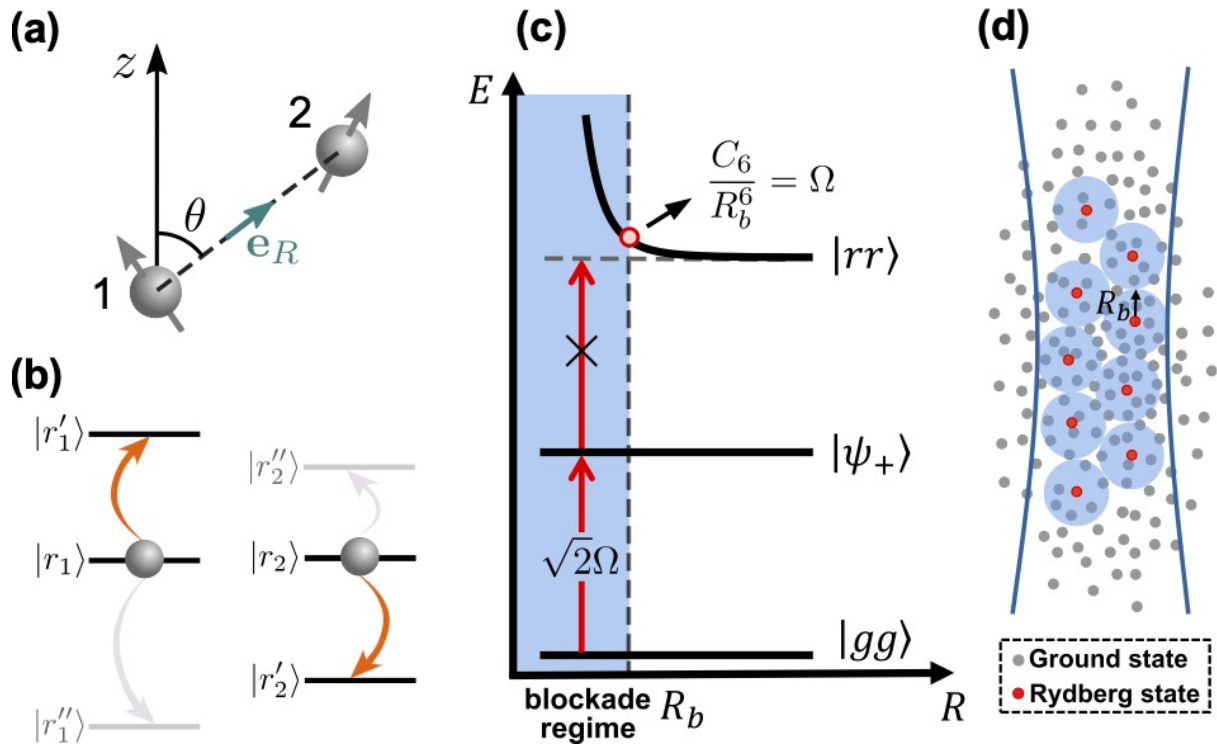
$$\Delta E^{(2)} = \sum_{q_1, q_2} \frac{|\langle q_1; q_2 | V_{dd} | r; r \rangle|^2}{E_{rr} - E_{q_1, q_2}},$$

in questo caso la somma è dominata dai livelli $|q_i\rangle$ prossimi a $|r\rangle$ in energia, per i quali la differenza di energia $E_{r,r} - E_{q_1, q_2} \sim n^{-3}$ e gli elementi di matrice di dipolo $\langle q | d | r \rangle \sim n^2$. Quindi $\Delta E^{(2)} = C_6/R^6$, con $C_6 \sim \langle (n^2)^4 / n^{-3} = n^{11}$.

Ad esempio nel Rb, le interazioni di van der Waals per due stati di Rydberg con $n = 50$ sono approssimativamente 11 ordini di grandezza più forti rispetto allo stato fondamentale, $n = 5$.

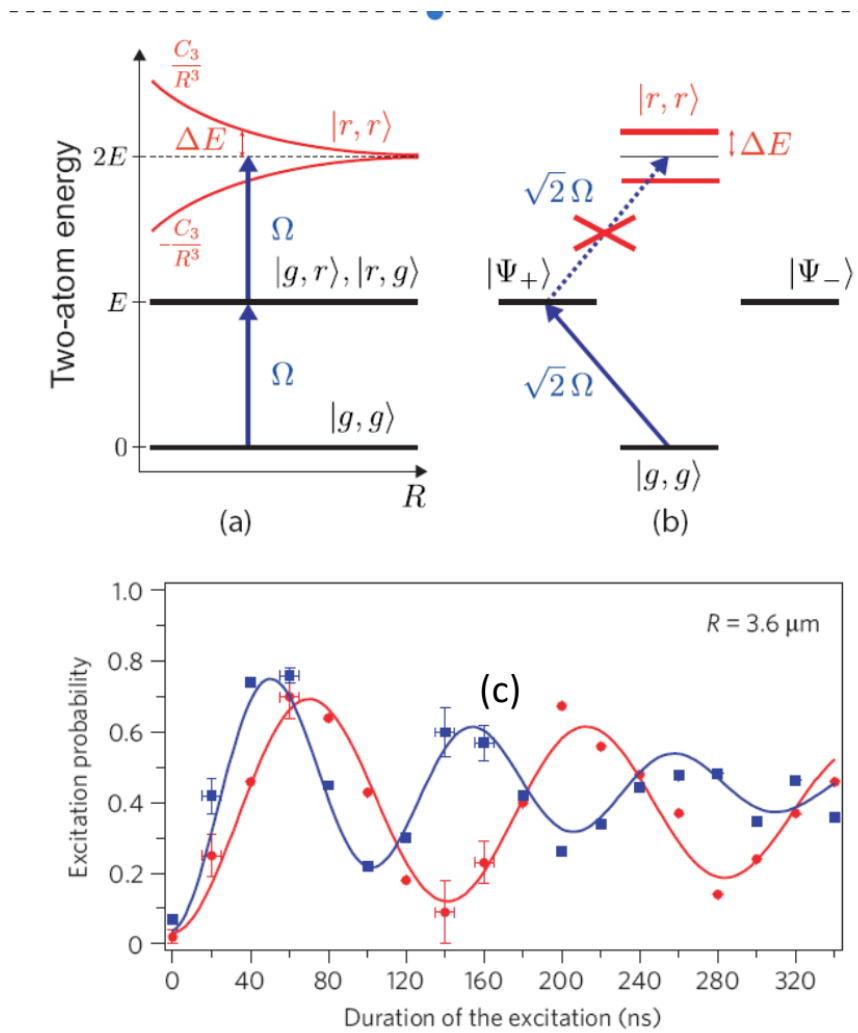
Blocco di Rydberg

A causa della forte interazione reciproca tra gli atomi di Rydberg, entro un certo volume, solo un atomo può essere eccitato dallo stato fondamentale allo stato di Rydberg, poiché l'atomo di Rydberg eccitato sposta i livelli energetici di Rydberg di tutti gli altri atomi vicini fuori risonanza. Questo è il "blocco di Rydberg" che facilita le dinamiche condizionali.



(a) Dipole-dipole interaction between two atoms with interatomic separation R at an angle θ to the quantization axis z . (b) Relevant energy levels and corresponding transition channels contributing to the dipole-dipole interaction. (c) Rydberg blockade in the two-atom case. (d) Rydberg superatoms in an ensemble of atoms. All atoms inside a volume with radius R_b share a single Rydberg excitation

Consideriamo il caso semplice di due atomi: l'eccitazione risonante con la luce dal livello fondamentale $|gg\rangle \equiv |g\rangle_1 |g\rangle_2$ porta i due atomi nello stato simmetrico in cui un solo atomo è eccitato $|\psi_+\rangle = (|gr\rangle + e^{i\phi}|rg\rangle)/\sqrt{2}$. Se gli atomi sono molto vicini, $\phi = 0$, lo stato eccitato $|\psi_+\rangle = (|gr\rangle + |rg\rangle)/\sqrt{2}$ è simmetrico per scambio $1 \leftrightarrow 2$, come si capisce dalla simmetria per scambio sia dello stato iniziale $|gg\rangle$ sia dell'hamiltoniana di interazione con la luce $H_I = -\vec{d}_1 \vec{E}(\vec{r}) - \vec{d}_2 \vec{E}(\vec{r}) = -(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \vec{E}(\vec{r})$.



La dimostrazione sperimentale dell'eccitazione dello stato simmetrico di due atomi è data dalla misura della frequenza di Rabi:

$$\begin{aligned} \langle \psi_+ | H_I | gg \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle r | H_{I,1} | g \rangle_1 + \langle r | H_{I,2} | g \rangle_2] \\ \Rightarrow \Omega_{R,+} &= \frac{2}{\sqrt{2}} \Omega_R \end{aligned}$$

che è un fattore $\sqrt{2}$ maggiore del valore corrispondente per un atomo singolo, come mostrato nella figura.

Lo stato doppiamente eccitato $|rr\rangle$ è spostato dalla forte interazione di van der Waals. Se lo spostamento energetico è maggiore della frequenza di Rabi $\hbar\Omega_{R,+}$, non è possibile eccitare contemporaneamente due atomi agli stati di Rydberg; ciò si verifica ogni volta che i due atomi sono più vicini del "raggio di blocco", R_B , definito appunto da:

$$\hbar\Omega_R = |C_6/R_B^6|$$

Qubit

Gli stati iperfini, essenzialmente liberi dall'emissione spontanea, vengono utilizzati per codificare qubit, specialmente in atomi di alcali pesanti come Rb e Cs, grazie ai loro lunghi tempi di coerenza e alle separazioni iperfini, dell'ordine dei GHz, molto più grandi delle larghezze di transizione dell'ordine dei 10 MHz.

I qubit iperfini sono facilmente inizializzati e rilevati con il pompaggio ottico e la fluorescenza di risonanza. Recentemente, sempre più specie atomiche vengono studiate e vengono dimostrate nuove possibilità per operazioni di qubit con una maggiore fedeltà. Gli atomi di terre alcaline come lo Sr, con due elettroni di valenza, possono essere ulteriormente raffreddati in una trappola ottica mediante raffreddamento a linea stretta.

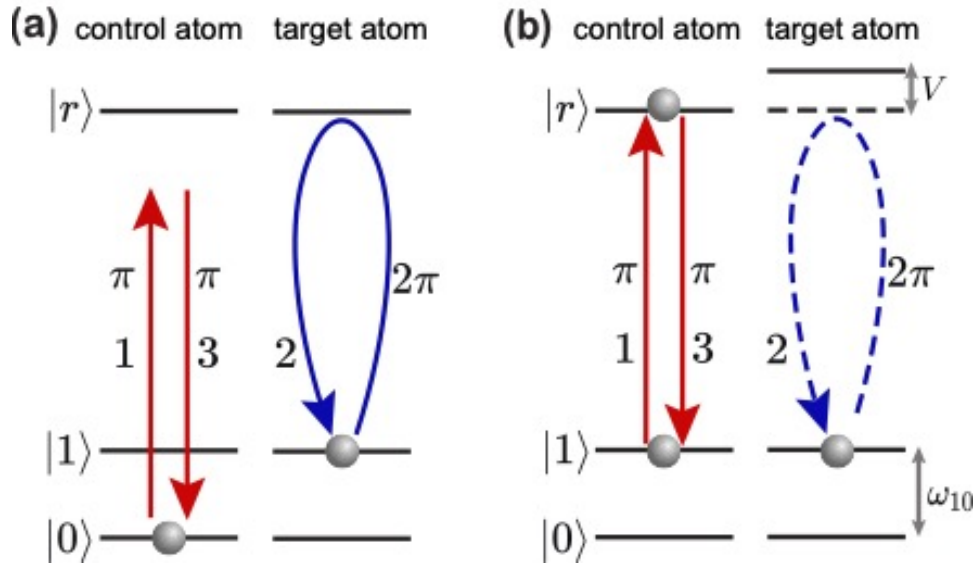
Ad esempio nel computer q. PASQAL, gli stati di Rydberg non sono utilizzati per i qubit, ma per le porte logiche.

Operazioni unitarie

Le operazioni unitarie tra stati iperfini sono facilmente realizzabili, (i) pilotando transizioni dirette di dipolo magnetico a microonde o (ii) pilotando transizioni Raman a due fotoni con una coppia di fasci laser. Il primo metodo non è selettivo spazialmente selettivo, dato che la lunghezza d'onda delle transizioni dirette è di alcuni cm, molto maggiore della separazione tra qubit.

Porta C-Z basata sul blocco di Rydberg

L'idea è di usare due-qbit con atomi di Rydberg nel regime di blocco, ovvero $|C_6/R^6| \gg \Omega_R$. La base computazionale è costituita da due stati iperfini $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ del livello fondamentale, lo stato di Rydberg è ausiliario. La porta è realizzata da una sequenza di 3 operazioni sui singoli qubit:



1. impulso π , ovvero mezzo periodo di oscillazione di Rabi del qubit di controllo, sulla transizione $|1\rangle_c \rightarrow |r\rangle_c$: pulse on the control atom, exciting it to $|r\rangle$ only if it was in $|1\rangle$: $U_1 = [|0\rangle\langle 0| + i|r\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle r|]_c \otimes \mathbb{I}_t$
 2. impulso 2π , ovvero un periodo di oscillazione di Rabi del qubit di target sulla transizione $|1\rangle_t \rightarrow |r\rangle_t$. La transizione non avviene se il qubit controllo è nello stato di Rydberg per via del blocco di Rydberg :
- $$U_2 = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)_c \otimes \mathbb{I}_t + |r\rangle\langle r|_c \otimes \sigma_{z,t}$$
3. come nel passo 1, impulso π sul qubit di controllo riportandolo in $|1\rangle$ con una fase (-1);

quindi abbiamo

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\
 |0\rangle_c |0\rangle_t \rightarrow & |0\rangle_c |0\rangle_t \rightarrow & |0\rangle_c |0\rangle_t \rightarrow & |0\rangle_c |0\rangle_t \\
 |0\rangle_c |1\rangle_t \rightarrow & |0\rangle_c |1\rangle_t \rightarrow & -|0\rangle_c |1\rangle_t \rightarrow & -|0\rangle_c |1\rangle_t \\
 |1\rangle_c |0\rangle_t \rightarrow & i|r\rangle_c |0\rangle_t \rightarrow & i|r\rangle_c |0\rangle_t \rightarrow & -|1\rangle_c |0\rangle_t \\
 |1\rangle_c |1\rangle_t \rightarrow & i|r\rangle_c |1\rangle_t \rightarrow & i|r\rangle_c |1\rangle_t \rightarrow & -|1\rangle_c |1\rangle_t
 \end{array}$$

in breve la sequenza realizza l'evoluzione unitaria $\hat{U} = 2|0;0\rangle\langle 0;0| - \mathbb{I}$.

Differentemente da quanto riportato nella referenza di Xiaoling Wu et al., questa non è (ancora) la porta CZ. In realtà lo sarebbe (quasi) se avessimo invertito i “nomi” della base computazionale, che è equivalente ad operare un NOT di entrambi i qubit, quindi :

$$\text{NOT} = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{CZ} = -(X \otimes X)U(X \otimes X)$$

La porta CZ insieme a tutte le operazioni unitarie sui singoli qubit sono un set di porte universale per la computazione q.

Lecture

- M. Saffman, T. G. Walker, and K. Mølmer, *Quantum information with Rydberg atoms*, Rev. Mod. Phys. **82**, 2313 (2009)
- Xiaoling Wu et al., *A concise review of Rydberg atom based quantum computation and quantum simulation*, Chinese Phys. B **30** 020305 (2021)