



# Lezioni Teletrasporto 2024-v2

▼ Type

Lesson

## Premessa: fotoni come qubit

I fotoni possono essere usati come qubit in diversi modi, il più semplice è attraverso il loro stato di polarizzazione.

Il campo em  $\vec{E}, \vec{B}$  oscilla nel piano trasverso al vettore d'onda che individua la direzione della propagazione, diciamo  $\hat{z}$ . Il versore  $\hat{e} \equiv \vec{E}/|\vec{E}| \in \mathbb{R}^2$ , comunemente si usa una base cartesiana  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$  oppure una base sferica  $\{\sigma_+, \sigma_-\} = \{(\hat{x} + i\hat{y})/\sqrt{2}, (\hat{x} - i\hat{y})/\sqrt{2}\}$ , dette rispettivamente polarizzazioni lineari e circolari.

La polarizzazione di un generico fotone a frequenza  $\omega$  è data da:

$$\vec{\epsilon} = \cos \theta \hat{x} + e^{i\phi} \sin \theta \hat{y}$$

la fase  $\phi$  è significativa, indica lo "sfasamento" tra le due componenti cartesiane del campo elettrico, come si vede bene nel caso di un'onda piana

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}; t) &= E_0 \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + c.c. = E_0 \left[ \cos \theta \hat{x} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \sin \theta \hat{y} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)} \right] + c.c. \\ &= E_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} \left[ \cos \theta \hat{x} e^{-i\omega t} + \sin \theta \hat{y} e^{-i\omega(t - t_0)} \right] + c.c. \\ &= E_0 e^{-i\omega t} \left[ \cos \theta \hat{x} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \sin \theta \hat{y} e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}_0)} \right] + c.c. \end{aligned}$$

nello stesso punto dello spazio le componenti x e y oscillano fuori fase; alternativamente oscillano in fase se considerate in punti diversi dello spazio. Il vettore d'onda e la frequenza sono proporzionali  $\vec{k} = \hat{z} n \omega / c$ , dove n è indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga il fotone.

Indicando con  $\{|0\rangle, |1\rangle\} = \{\hat{x}, \hat{y}\}$ , la base computazionale dello spazio bidimensionale

$$|\vec{\epsilon}\rangle = \cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle$$

l'angolo  $\theta$  si può restringere all'intervallo  $[0, \pi]$ , dato che un incremento di  $[0, \pi]$  porta solo un fattore  $(-1)$  al vettore e allo stato quantistico.

Operazioni unitarie sullo stato di polarizzazione di un fotone si ottengono facilmente in ottica, sfruttando materiali anisotropi, "birifrangenti", il cui indice di rifrazione dipende dalla direzione della polarizzazione.

## Polarizzatori

Un polarizzatore è un dispositivo che assorbe un fotone la cui polarizzazione sia perpendicolare a una direzione specifica, l'asse del polarizzatore, e trasmette un fotone con polarizzazione parallela.

Il polarizzatore realizza un proiettore nello spazio di Hilbert. Se la polarizzazione non è perpendicolare né parallela all'asse del polarizzatore, che supponiamo orientato con un angolo  $\alpha$  rispetto all'asse  $x$ , la probabilità di trasmissione è data dalla regola di Born:

$$P_T = \langle \epsilon | \Pi_\alpha | \epsilon \rangle = |\langle \alpha | \epsilon \rangle|^2$$
$$|\alpha\rangle \equiv \cos \alpha |0\rangle + \sin \alpha |1\rangle$$

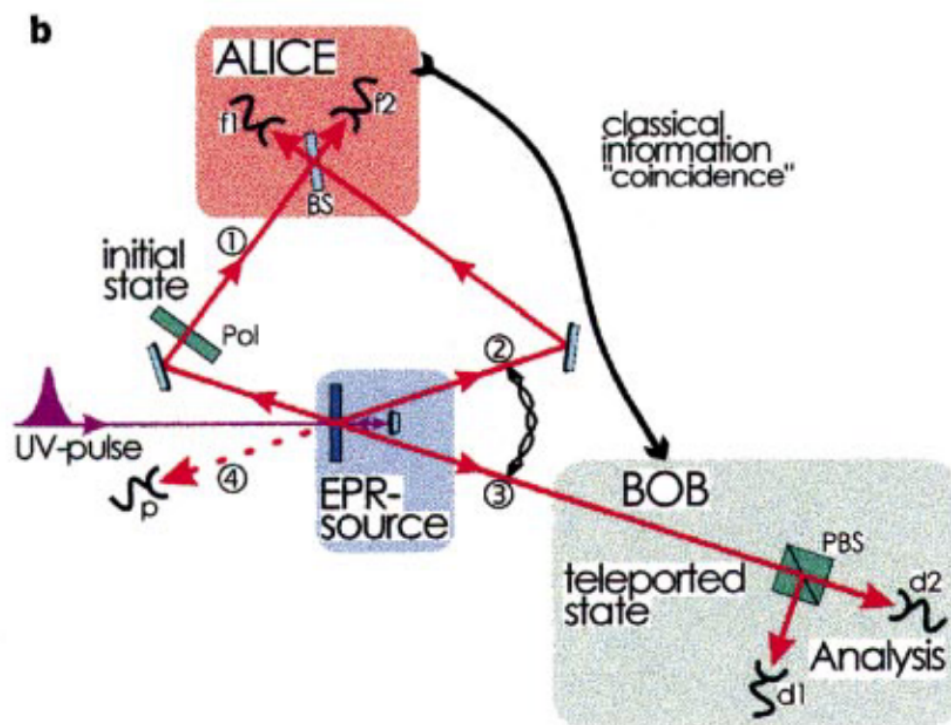
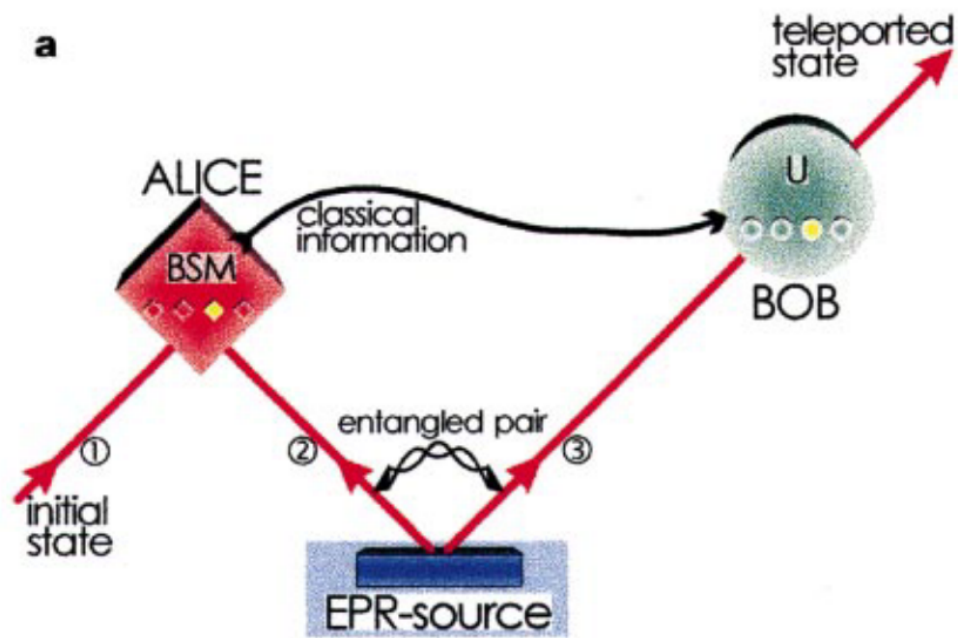
Notiamo che, ruotando un polarizzatore di 180 gradi, la direzione del suo asse non cambia (è una retta), come già notato  $|\alpha + \pi\rangle = -|\alpha\rangle$ .

I polarizzatori reali non sono ideali: la prob. di trasmissione della polarizzazione ortogonale(parallela) all'asse è maggiore di 0 (minore di 1).

## Rivelatori

Un rivelatore è un dispositivo che converte un fotone in un elettrone e misura la corrente elettrica generata, fotocorrente. Rivelare un singolo elettrone è difficile, quindi i rivelatori amplificano il numero di elettroni generati, mediante meccanismi di amplificazione, come nei foto-moltiplicatori. Negli esperimenti sulla violazione delle dis. di Bell, l'efficienza di rivelazione è una questione centrale.

# ESPERIMENTO DI TELETRASPORTO DI VIENNA (1997)



L'esperimento sul teletrasporto quantistico di Vienna, realizzato nel 1997 e premiato con il premio Nobel a A. Zeilinger, segue il protocollo proposto da Bennet alcuni anni prima, nel 1993.

Il protocollo prevede il trasporto da A(lice) a B(ob) dello stato quantistico di un qubit  $q_1$ , codificato nello stato di polarizzazione di un fotone: all'inizio Alice possiede il qubit  $q_1$  nello stato

$$|q_1\rangle = \alpha |1\rangle_1 + \beta |0\rangle_1$$

alla fine Bob avrà il qubit  $q_3$  nello stesso stato  $|q_3\rangle = \alpha |1\rangle_3 + \beta |0\rangle_3$ , dove è esplicito che il fotone di Bob (3) non è lo stesso di Alice (1). Come si può immaginare dalla numerazione, esiste anche un qubit(fotone)  $q_2$ , ausiliare.

Il protocollo prevede i seguenti passi:

1. Viene creata una coppia di fotoni entangled in un particolare stato di Bell. Sono questi i qubit 2,3 nello stato di Bell anti-simmetrico in cui i due fotoni hanno stato diverso

$$|\Phi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle_2 |1\rangle_3 - |1\rangle_2 |0\rangle_3]$$

Nell'esperimento di Zeilinger i qubit sono codificati in stati di polarizzazione dei fotoni,  $\{|0\rangle, |1\rangle\} = \{|H\rangle, |V\rangle\}$ , quindi:

$$|\Phi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_2 |V\rangle_3 - |V\rangle_2 |H\rangle_3)$$

Ricordiamo che questo è uno dei quattro stati di Bell, base entangled per lo spazio di Hilbert di una coppia di sistemi a due livelli. Gli altri tre stati di Bell sono:

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle) \\ |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |0\rangle - |1\rangle |1\rangle) \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) \end{aligned}$$

2. Il fotone  $q_2$  della coppia entangled viene trasmesso ad Alice, il fotone  $q_3$  a Bob;
3. Alice esegue una "misura di Bell" sui due fotoni in suo possesso,  $q_1$  e  $q_2$ . Una misura di Bell è descritta dai proiettori:

$$\{|\Psi^-\rangle \langle \Psi^-|, |\Psi^+\rangle \langle \Psi^+|, |\Phi^-\rangle \langle \Phi^-|, |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|\}$$

Quindi dopo la misura di Bell lo stato della coppia ( $q_1, q_2$ ) è proiettato su uno stato di Bell.

4. Alice comunica a Bob l'esito della sua misura di Bell e, in base a tale esito, Bob esegue una trasformazione unitaria sul fotone q3, a seguito della quale q3 viene trasformato nella copia di q1. Lo stato di q1 è stato tele-trasportato in q3.

Vediamo come ciò è possibile. Dopo l'emissione della coppia entangled, lo stato q. dei tre fotoni è

$$\begin{aligned}
|\varphi\rangle_{123} &= (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)_1 \otimes |\Phi^-\rangle_{23} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|1\rangle|0\rangle|1\rangle - \alpha|1\rangle|1\rangle|0\rangle + \beta|0\rangle|0\rangle|1\rangle - \beta|0\rangle|1\rangle|0\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\alpha(|\Phi^+\rangle_{12} - |\Phi^-\rangle_{12})|1\rangle_3 - \frac{1}{2}\alpha(|\Psi^+\rangle_{12} - |\Psi^-\rangle_{12})|0\rangle_3 + \\
&\quad \frac{1}{2}\beta(|\Psi^+\rangle_{12} + |\Psi^-\rangle_{12})|1\rangle_3 - \frac{1}{2}\beta(|\Phi^+\rangle_{12} + |\Phi^-\rangle_{12})|0\rangle_3 \\
&= \frac{1}{2}|\Psi^+\rangle_{12}(-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + \frac{1}{2}|\Psi^-\rangle_{12}(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \\
&\quad \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle_{12}(\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) + \frac{1}{2}|\Phi^-\rangle_{12}(-\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3)
\end{aligned}$$

Quando l'esito della misura di Bell è la proiezione sullo stato  $|\Phi^-\rangle_{12}$ , allora  $|q_3\rangle = -\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3$ , ovvero lo stesso stato iniziale del fotone q1, dato che il fattore moltiplicativo (-1) è irrilevante. Questo avviene con probabilità 1/4.

Nell'esperimento di Zeilinger, Alice discrimina solo lo stato di Bell  $|\Phi^-\rangle_{12}$ , per cui il teletrasporto avviene solo una volta su quattro. Quando Alice discrimina anche gli altri stati di Bell, allora conosce lo stato del fotone 3 dopo la misura ed è in grado di dire a Bob quale operazione unitaria eseguire per trasformarlo nella combinazione lineare scritta sopra.

Ora ci concentriamo su alcuni aspetti importanti dell'esperimento: (1) la generazione della coppia entangled, (2) la misura di Bell.

In realtà, l'esperimento di Zeilinger distingue solo uno dei quattro stati di Bell, quindi è una misura binaria, descritta dai seguenti proiettori:

$$\begin{aligned}
\{\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2\} &= \{|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|, |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\} \\
&= \{|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|, \mathbb{I} - |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|\}
\end{aligned}$$

## Misura di Bell

La misura di Bell nell'esperimento di Zeilinger è semplicemente ottenuta per mezzo di un *beam-splitter*.

Un *beam-splitter* è un elemento ottico parzialmente riflettente, ovvero in cui la luce incidente viene in parte trasmessa in parte riflessa. In ottica classica, un *beam-splitter*

è semplicemente un dispositivo in cui per ogni "modo" di ingresso ci sono due modi di uscita, dove per "modo" intendiamo qui un vettore d'onda. Se nel modo di ingresso c'è un campo elettrico oscillante di ampiezza  $A_1$ , sulle porte di uscita le ampiezze del campo elettrico  $B_1 = tA_1$  and  $B_2 = rA_1$ , dove  $r, t$  sono i coefficienti di riflessione e trasmissione.

In assenza di assorbimento, la potenza incidente è pari alla somma delle potenze riflessa e trasmessa:  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ .

Trattando stati con pochi fotoni, come nel caso delle coppie entangled, occorre trattare anche il campo elettromagnetico quantisticamente. Si potrebbe pensare quindi di sostituire gli operatori di distruzione (o di creazione) alle ampiezza di campo, ovvero supporre:  $\hat{b}_1 = t\hat{a}_1$  and  $\hat{b}_2 = r\hat{a}_1$ . Ma questo non è compatibile con le regole di commutazione, le stesse degli operatori di salita/discesa dell'oscillatore armonico. Se supponiamo che le regole di commutazione valgano per gli operatori dei modi di ingresso

$$\begin{aligned}[a_1, a_1^\dagger] &= 1 \\ [a_1, a_2] &= [a_1, a_2^\dagger] = 0\end{aligned}$$

con le relazioni  $\hat{b}_1 = t\hat{a}_1$ ,  $\hat{b}_2 = r\hat{a}_1$ , le regole di commutazione per gli operatori  $\hat{b}_1, \hat{b}_2$  :

$$\begin{aligned}[b_1, b_1^\dagger] &= [ta_1, t^*a_1^\dagger] = |t|^2[a_1, a_1^\dagger] = |t|^2 \\ [b_2, b_2^\dagger] &= |r|^2\end{aligned}$$

che non possono essere simultaneamente pari a 1. Nella trattazione quantistica, non possiamo dimenticare l'altra porta di ingresso del beam-splitter, ovvero l'altro modo del campo elettromagnetico che contribuisce ai modi di uscita individuati da  $\hat{b}_1$  e  $\hat{b}_2$  (da qui in poi omettiamo i cappucci per gli operatori):

$$\begin{aligned}b_1 &= ta_1 + r'a_2 \\ b_2 &= ra_1 + t'a_2\end{aligned}$$

In questo modo, anche per i modi di uscita si possono imporre le regole di commutazione:

$$\begin{aligned}[b_1, b_1^\dagger] &= [ta_1 + r'a_2, t^*a_1^\dagger + r'^*a_2^\dagger] = |t|^2 + |r'|^2 = 1 \\ [b_2, b_2^\dagger] &= |r|^2 + |t'|^2 = 1 \\ [b_1, b_2^\dagger] &= [ta_1 + r'a_2, r^*a_1^\dagger + t'^*a_2^\dagger] = tr^* + r't'^* = 0\end{aligned}$$

Combinare con la conservazione dell'energia  $|r|^2 + |t|^2 = |r'|^2 + |t'|^2 = 1$ , quanto sopra implica:  $|r| = |r'|$ ,  $|t| = |t'|$ . Possiamo assumere che i coefficienti di

trasmissione siano reali e, siccome hanno modulo compreso tra 0 e 1, poniamo:  
 $\cos \theta \equiv t = t'$ ; di conseguenza  $r' = |r|e^{i\phi} = \sin \theta e^{i\phi}$ ,  $r = -r'^* = -\sin \theta e^{-i\phi}$ .

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\phi} \\ -\sin \theta e^{-i\phi} & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

La fase  $\phi$  dipende dal beam-splitter, da come viene realizzato.

La matrice di trasformazione è unitaria e quindi la trasformazione inversa è:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta e^{i\phi} \\ \sin \theta e^{-i\phi} & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Nell'esperimenti di Zeilinger si usa un beam-splitter 50/50, ovvero  $\theta = \pi/4$ :

$$\begin{cases} b_1 = (a_1 + a_2 e^{i\phi})/\sqrt{2} \\ b_2 = (-a_1 e^{-i\phi} + a_2)/\sqrt{2} \\ a_1 = (b_1 - b_2 e^{i\phi})/\sqrt{2} \\ a_2 = (b_1 e^{-i\phi} + b_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

Queste relazioni hanno conseguenze notevoli quando ci sono due fotoni sulle porte d'ingresso 1 e 2, ovvero entrambi i modi d'ingresso hanno numero di occupazione pari a 1. Lo stato quantistico è:

$$|\alpha\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |\Omega\rangle$$

che, in termini dei modi di uscita, si scrive:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{2}(b_1^\dagger - e^{-i\phi} b_2^\dagger)(e^{i\phi} b_1^\dagger + b_2^\dagger) |\Omega\rangle \\ &= \frac{1}{2}(e^{i\phi} b_1^\dagger b_1^\dagger - e^{-i\phi} b_2^\dagger b_2^\dagger + b_1^\dagger b_2^\dagger - b_2^\dagger b_1^\dagger) |\Omega\rangle \end{aligned}$$

Questo vale indipendentemente dalla polarizzazione dei modi  $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ .

Esplicitamente, se ad esempio i due modi di ingresso hanno polarizzazione orizzontale, le regole sopra scritte si declinano nel modo seguente, usando le maiuscole per i modi d'ingresso e le minuscole per i modi d'uscita:

$$\begin{cases} H_1 = (h_1 - h_2 e^{i\phi})/\sqrt{2} \\ H_2 = (h_1 e^{-i\phi} + h_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= H_1^\dagger H_2^\dagger |\Omega\rangle \\ &= \frac{1}{2}(e^{i\phi} h_1^\dagger h_1^\dagger - e^{-i\phi} h_2^\dagger h_2^\dagger) |\Omega\rangle \end{aligned}$$

Vediamo nel dettaglio i quattro casi in cui ci sono due singoli fotoni sui modi d'ingresso, distinguendo le polarizzazioni:

- $|\alpha\rangle = |H\rangle_1 |H\rangle_2$

$$|\alpha\rangle = H_1^\dagger H_2^\dagger |\Omega\rangle = \frac{1}{2}(e^{i\phi} h_1^\dagger h_1^\dagger - e^{-i\phi} h_2^\dagger h_2^\dagger) |\Omega\rangle$$

- analogamente,  $|\alpha\rangle = |V\rangle_1 |V\rangle_2$

$$|\alpha\rangle = V_1^\dagger V_2^\dagger |\Omega\rangle = \frac{1}{2}(e^{i\phi} v_1^\dagger v_1^\dagger - e^{-i\phi} v_2^\dagger v_2^\dagger) |\Omega\rangle$$

- $|\alpha\rangle = |H\rangle_1 |V\rangle_2$

in questo caso  $a_1 = H_1 = (h_1 - h_2 e^{i\phi})/\sqrt{2}$  e  $a_2 = V_2 = (v_1 e^{-i\phi} + v_2)/\sqrt{2}$ , da cui:

$$|\alpha\rangle = H_1^\dagger V_2^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2}(e^{i\phi} h_1^\dagger v_1^\dagger - e^{-i\phi} h_2^\dagger v_2^\dagger + h_1^\dagger v_2^\dagger - v_1^\dagger h_2^\dagger) |0\rangle$$

- $|\alpha\rangle = |V\rangle_1 |H\rangle_2$

$$|\alpha\rangle = V_1^\dagger H_2^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2}(e^{i\phi} v_1^\dagger h_1^\dagger - e^{-i\phi} v_2^\dagger h_2^\dagger + v_1^\dagger h_2^\dagger - h_1^\dagger v_2^\dagger) |0\rangle$$

La conseguenza notevole è che, nel caso i due fotoni d'ingresso abbiano uguale polarizzazione, questi escono entrambi sulla stessa porta di uscita, ovvero lo stato di uscita è la sovrapposizione lineare di due stati in cui un solo modo di uscita ha occupazione pari a 2.

Nella misura di Bell, i due fotoni (1,2) vengono inviati alle due porte d'ingresso del beam-splitter. Consideriamo quello che avviene quando la coppia (1,2) è in ciascuno dei quattro stati di Bell:

- $|\alpha\rangle = |\Psi^+\rangle_{12}$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H_1^\dagger H_2^\dagger + V_1^\dagger V_2^\dagger) |0\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{i\phi} h_1^\dagger h_1^\dagger - e^{-i\phi} h_2^\dagger h_2^\dagger + e^{i\phi} v_1^\dagger v_1^\dagger - e^{-i\phi} v_2^\dagger v_2^\dagger) |0\rangle \end{aligned}$$

- $|\alpha\rangle = |\Psi^-\rangle_{12}$



$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H_1^\dagger H_2^\dagger - V_1^\dagger V_2^\dagger) |0\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{i\phi} h_1^\dagger h_1^\dagger - e^{-i\phi} h_2^\dagger h_2^\dagger - e^{i\phi} v_1^\dagger v_1^\dagger + e^{-i\phi} v_2^\dagger v_2^\dagger) |0\rangle
\end{aligned}$$

- $|\alpha\rangle = |\Phi^+\rangle_{12}$

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H_1^\dagger V_2^\dagger + V_1^\dagger H_2^\dagger) |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi} h_1^\dagger v_1^\dagger - e^{-i\phi} h_2^\dagger v_2^\dagger) |0\rangle
\end{aligned}$$

- $|\alpha\rangle = |\Phi^-\rangle_{12}$

$$\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H_1^\dagger V_2^\dagger - V_1^\dagger H_2^\dagger) |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(h_1^\dagger v_2^\dagger - v_1^\dagger h_2^\dagger) |0\rangle
\end{aligned}$$

Come si vede, nel solo nel caso in cui lo stato d'ingresso sia  $|\Phi^-\rangle_{12}$  si ha un fotone su entrambe le porte d'uscita: per gli altri 3 stati di Bell, i fotoni emergono dalla stessa porta del beam-splitter.

Nell'esperimento di Zeilinger si usa il beam-splitter con due rivelatori, indicati con  $(f_1, f_2)$ , uno su ciascuna porta di uscita: quando entrambi i rivelatori rivelano un fotone, si ha la certezza che lo stato d'ingresso fosse  $|\Phi^-\rangle_{12}$ .

## Indistinguibilità dei fotoni

Nell'esperimento di Zeilinger occorre fare attenzione a un dettaglio in più. Affinché quanto visto sopra valga occorre che i modi delle due porte d'ingresso condividano i modi d'uscita. Nel caso stazionario, indipendente dal tempo, questo è garantito dalla scelta dei vettori d'onda. Ma l'esperimento di Zeilinger i fotoni sono prodotti in maniera impulsata, ovvero i modi sono pacchetti d'onda di estensione temporale pari a  $\sim 500$  fs, non monocromatici con una dispersione in frequenza  $\delta\omega/\omega = \delta k/k \sim 0.005$ .

Questi modi hanno quindi una dimensione temporale, ovvero occorre che i due fotoni giungano sulle porte d'ingresso del beam-splitter simultaneamente, altrimenti vengono trasmessi e riflessi come singoli fotoni indipendenti.

Ad esempio, l'interferenza che porta alla cancellazione delle due ampiezze di probabilità degli stati con un fotone per ciascuna uscita non si può avere se i due modi sono distinguibili temporalmente.

Sperimentalmente, la sovrapposizione temporale si realizza variando il tempo di arrivo del fotone 2 sul beam-splitter, ovvero variando la lunghezza del percorso.

# Parametric down-conversion per fotoni entangled

La coppia di fotoni entangled non viene prodotta, come nell'esperimento di Aspect, mediante una cascata radiativa. Si usano invece dei cristalli non-lineari in cui un fotone di frequenza alta viene convertito in 2 fotoni di frequenza inferiore. Sotto opportune condizioni la coppia di fotoni generati è entangled. Vediamo di seguito quando accade.

In un mezzo materiale isotropo, le equazioni di Maxwell portano all'equazione d'onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}$$

dove la polarizzabilità elettrica dipende dal campo elettrico presente.

In un mezzo lineare la polarizzabilità elettrica è proporzionale al campo elettrico:

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j$$

In un mezzo lineare la polarizzabilità elettrica è proporzionale al campo elettrico:

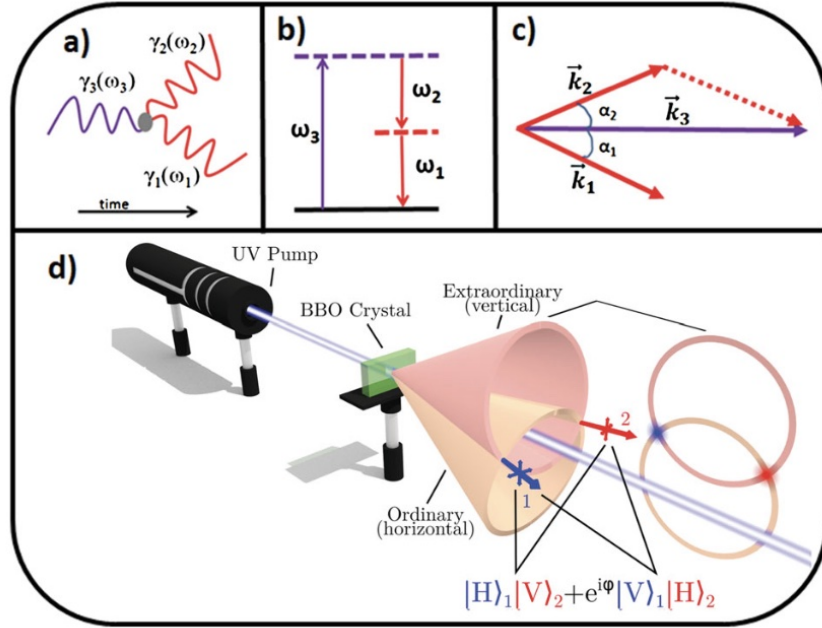
$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j$$

e nel caso il tensore suscettività sia diagonale.

$$\begin{aligned} \left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] E_i &= \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_0 \chi_{ii} E_i \\ \left[ -k^2 + \frac{1}{c^2} \omega^2 (1 + \chi_{ii}) \right] E_i &= 0 \\ k^2 &= \frac{n_i^2}{c^2} \omega^2 \quad n_i^2 \equiv 1 + \chi_{ii} \end{aligned}$$

: nei mezzi non-lineari, esiste un contributo proporzionale a  $E^2$ ,  $E^3$ , etc. Noi consideriamo solo il termine non-lineare di ordine più basso, proporzionale al tensore di suscettività quadratica:

$$P_i^{(NL)} = \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$$



**Figure 1.** (a) Feynman's diagram of SPDC where one photon at energy  $\hbar\omega_3$  splits into two twin photons at energies  $\hbar\omega_2$  and  $\hbar\omega_1$  and (b) representation of energy conservation of SPDC, (c) is the representation of momentum conservation of SPDC and (d) is a schematic of SPDC where a UV pump laser generates red SPDC photons coming out of the crystal in two cone shapes.

Consideriamo il caso in cui ci sono tre campi di frequenze ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ) che si propagano nel mezzo non-lineare a partire dalla posizione  $z = 0$ , assumendo per semplicità che siano tre onde piane con ampiezza quasi uniforme, ovvero che varia su distanze grandi rispetto all'inverso del vettore d'onda:

$$\vec{E}_j(z, t) = \vec{\epsilon}_j A_j(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \quad j = 1, 2, 3$$

Assumendo che  $|A_3| \gg |A_1|, |A_2|$  e che sia uniforme, ovvero che non varia nella propagazione, le componenti di Fourier dell'equazione d'onda sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} A_1 &= i \frac{\omega_1}{n_1 c} \chi_e^{(2)} A_2^* A_3 e^{i\Delta k z} \\ \frac{d}{dz} A_2 &= i \frac{\omega_2}{n_2 c} \chi_e^{(2)} A_1^* A_3 e^{i\Delta k z} \\ \Delta k &= k_3 - k_2 - k_1 \end{aligned}$$

dove  $n_j$  sono gli indici di rifrazione (lineari) e  $\chi_e^{(2)}$  è una componente del tensore che dipende dalle polarizzazioni: ad esempio, se  $\vec{\epsilon}_1 = \vec{\epsilon}_2 = \hat{x}$ ,  $\vec{\epsilon}_3 = \hat{z} \Rightarrow \chi_e^{(2)} = \chi_{311}^{(2)}$ .

Le equazioni sopra scritte si risolvono nel caso  $\Delta k = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} A_1 = i\omega_1 \chi_e^{(2)} / (n_1 c) A_2^* A_3 \\ \frac{d}{dz} A_2 = i\omega_2 \chi_e^{(2)} / (n_2 c) A_1^* A_3 \\ \frac{d^2}{dz^2} A_1 = \omega_1 \chi_e^{(2)} \omega_2 \chi_e^{(2)} / (n_1 n_2 c^2) |A_3|^2 A_1 \\ \frac{d}{dz} A_2 = i\omega_2 \chi_e^{(2)} / (n_2 c) A_1^* A_3 \end{cases}$$

da cui, assumendo come condizioni al contorno a  $z = 0$  un'ampiezza non nulla per una componente a bassa frequenza, ovvero  $A_1(0)$  e  $A_2(0) = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_1(0) \cosh(\alpha z) \\ A_2(z) &= i \sqrt{\frac{\omega_2 n_1}{\omega_1 n_2}} A_1^*(0) \frac{A_3}{|A_3|} \sinh(\alpha z) \\ \alpha &\equiv (\chi_e^{(2)} / c) \sqrt{\omega_1 \omega_2 / n_1 n_2} = \sqrt{k_1 k_2} \chi_e^{(2)} / (n_1 n_2) \end{aligned}$$

In ottica classica la conversione di radiazione da frequenza alta a frequenza più bassa ( $\omega_3 \rightarrow \omega_1, \omega_2$ ) può avvenire solo se almeno uno dei due campi ha ampiezza non nulla all'ingresso del mezzo materiale. Non è così in ottica quantistica.

A partire dall'Hamiltoniana del campo elettromagnetico nel mezzo materiale, il contributo non-lineare della polarizzazione dà luogo a termini cubici nei campi e quindi negli operatori di creazione e distruzione. Il processo di conversione di un fotone in due è descritto dall'Hamiltoniana, in rappresentazione di interazione:

$$\begin{aligned} H_{SPDC}(t) &= V a_3 e^{-i\omega_3 t} a_2^\dagger e^{i\omega_2 t} a_1^\dagger e^{i\omega_1 t} + h.c \\ V &\propto \int_0^L dz e^{i\Delta k z} = L e^{i\Delta k L/2} \text{sinc}(\Delta k L/2) \end{aligned}$$

dove  $L$  indica la lunghezza del cristallo.

$$\begin{aligned} H_{SPDC}(t) &= V a_3 e^{-i\omega_3 t} a_2^\dagger e^{i\omega_2 t} a_1^\dagger e^{i\omega_1 t} + h.c \\ V &\propto \int_0^L dz e^{i\Delta k z} = L e^{i\Delta k L/2} \text{sinc}(\Delta k L/2) \end{aligned}$$

La probabilità di creare due fotoni decresce rapidamente se:

- non si ha conservazione dell'energia,  $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$ , perché  $H_{SPDC}$  oscilla;
- non si ha conservazione dell'impulso (phase-matching),  $\Delta k L \gg 1$ .

Le due condizioni non sono facili da ottenere simultaneamente considerato che

$$\Delta k = k_3 - k_2 - k_1 = \frac{1}{c} [n(\omega_3)\omega_3 - n(\omega_2)\omega_2 - n(\omega_1)\omega_1]$$

e nei cristalli normalmente si ha che l'indice di rifrazione diminuisce all'aumentare delle frequenza, ovvero la dispersione cromatica "normale" corrisponde, per  $\omega_3 > \omega_2 \geq \omega_1$ , a  $n_3 > n_2 \geq n_1$ . Nella SPDC degenere, in cui  $\omega_1 = \omega_2$ , si richiede che gli indici di rifrazione siano uguali,  $n_3 = (n_2 + n_1)/2$ .

## Phase matching mediante birifrangenza

Per realizzare il phase-matching si sfrutta la birifrangenza, ovvero la proprietà di alcuni cristalli per cui l'indice di rifrazione dipende dalla polarizzazione della luce.

Tornando alle equazioni di Maxwell, in un mezzo non-isotropo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D}$$

$$\vec{D} \equiv \varepsilon \vec{E}$$

dove la costante dielettrica è adesso un tensore.

Nel caso di un'onda piana  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{k}\vec{E}) = \mu_0 \omega^2 \varepsilon \vec{E}$$

Scegliendo gli assi cartesiani lungo gli assi principali del mezzo, il tensore dielettrico è diagonale

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix}$$

e le equazioni per li componenti  $E_x, E_y, E_z$  diventano

$$\begin{aligned} (k_x^2 - k^2)E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z &= -\mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 n_x^2 E_x \\ k_x k_y E_x + (k_y^2 - k^2)E_y + k_y k_z E_z &= -\mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 n_y^2 E_y \\ k_x k_z E_x + k_y k_z E_y + (k_z^2 - k^2)E_z &= -\mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 n_z^2 E_z \end{aligned}$$

Si tratta di un set di equazioni lineari omogenee, per cui una soluzione non nulla  $(E_x, E_y, E_z) \neq (0, 0, 0)$  richiede che il determinante della matrice dei coefficiente sia nullo, ovvero:

$$\begin{vmatrix} (-k_y^2 - k_z^2 + \omega^2 n_x^2 / c^2) & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & (-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2 n_y^2 / c^2) & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & (-k_x^2 - k_y^2 + \omega^2 n_z^2 / c^2) \end{vmatrix} = 0$$

L'esperimento di Zeilinger sfrutta il materiale tuttora maggiormente utilizzato, ovvero  $\beta$ -Ba(BO<sub>2</sub>)<sub>2</sub>, barium-borate (BBO). Questo è un cristallo uniassiale negativo, ovvero c'è un asse privilegiato e l'indice di rifrazione  $n_o$  è massimo per la polarizzazione

perpendicolare all'asse (onda ordinaria). Indicando con  $n_e = n_z$  e  $n_o = n_x = n_y$ , con  $n_e < n_o$ , l'equazione secolare diventa

$$\frac{\omega^4}{c^4} - \frac{\omega^2}{c^2} \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) + \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) \frac{k^2}{n_o^2} = 0$$

$$\left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) \right] \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k^2}{n_o^2} \right) = 0$$

Si vede bene che ci sono due tipi di onde, distinte dalla "relazione di dispersione", ovvero dalla relazione tra  $\omega$  e  $k$ :

$$\begin{cases} \omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2)/n_e^2 + c^2 k_z^2/n_o^2 & \text{onda straordinaria} \\ \omega^2 = c^2 k^2/n_o^2 & \text{onda ordinaria} \end{cases}$$

## Onda ordinaria

Nel caso di onda ordinaria, il sistema di equazioni lineari delle componenti del campo elettrico diventa:

$$\begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & k_y^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & k_z^2 - (\omega^2/c^2)(n_o^2 - n_e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Le soluzioni sono:

$$\vec{k} \vec{E} = 0, E_z = 0$$

ovvero il campo elettrico è sempre perpendicolare sia al vettore d'onda sia all'asse ottico.

## Onda straordinaria

Nel caso di onda straordinaria, il sistema di equazioni lineari delle componenti del campo elettrico diventa:

$$\begin{pmatrix} (k_x^2 + k_y^2)(n_o^2/n_e^2 - 1) + k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & (k_x^2 + k_y^2)(n_o^2/n_e^2 - 1) + k_y^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & k_z^2 n_e^2/n_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

da cui si vede che  $k_z = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$ . Il campo è nel piano che contiene l'asse ottico e il vettore d'onda; scegliendo asse  $x$  in modo che  $k_y = 0$ :

$$\begin{pmatrix} k_x^2(n_o^2/n_e^2) & 0 & k_x k_z \\ 0 & k_x^2(n_o^2/n_e^2 - 1) & 0 \\ k_x k_z & 0 & k_z^2 n_e^2/n_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

da cui  $E_y = 0$  e  $E_x/E_z = -(k_z/k_x)(n_e^2/n_o^2)$ .

Siccome  $n_e^2/n_o^2 \simeq 1$ , il campo  $\vec{E}$  è approssimativamente ortogonale a  $\vec{k}$ .

## Phase matching

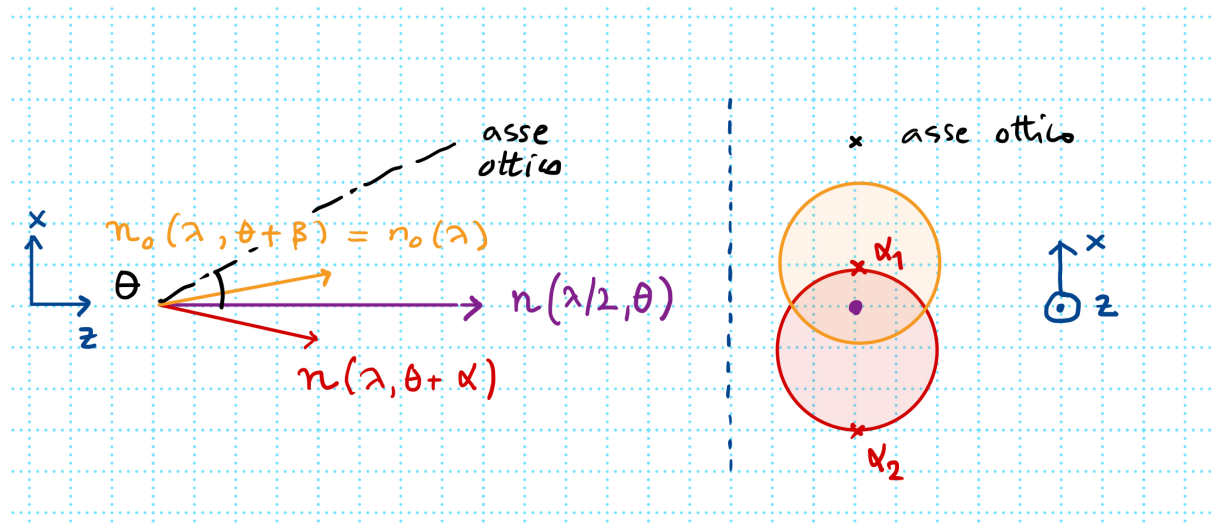
Vediamo ora le direzioni dei vettori d'onda per avere il phase-matching,  $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ . In questo caso conviene prendere asse  $z$  lungo la direzione del vettore d'onda  $\vec{k}_3$  della luce ad alta frequenza, che è un'onda straordinaria; l'asse ottico è nel piano  $xz$  e forma angolo  $\theta$  con l'asse  $z$ . Consideriamo che anche i vettori  $\vec{k}_1$  (onda straordinaria) e  $\vec{k}_2$  (onda ordinaria) sono nel piano  $xz$  e formano angoli  $\alpha$  e  $\beta$  con asse  $z$ :

$$\begin{cases} (x) & 0 = \omega n(\theta + \alpha, \lambda) \sin \alpha + \omega n_o(\lambda) \sin \beta \\ (z) & 2 \omega n(\theta, \lambda/2) = \omega n(\theta + \alpha, \lambda) \cos \alpha + \omega n_o(\lambda) \cos \beta \\ \sin \beta = -[n(\theta + \alpha, \lambda)/n_o(\lambda)] \sin \alpha \\ 2 n(\theta, \lambda/2) - n(\theta + \alpha, \lambda) \cos \alpha = \sqrt{n_o(\lambda)^2 - n(\theta + \alpha, \lambda)^2 \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

la seconda equazione quadratica in  $\cos \alpha$  ha due soluzioni,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , scegliendo opportunamente  $\theta$ , le due soluzioni sono angoli piccoli. Siccome questi angoli sono piccoli, anche considerando vettori  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  con angolo azimutale non nullo, l'indice di rifrazione dell'onda straordinaria  $n(\theta, \lambda/2)$  rimane lo stesso:

$$\begin{cases} (x) & 0 = n(\theta + \alpha, \lambda) \sin \alpha \cos \phi_1 + n_o(\lambda) \sin \beta \cos \phi_2 \\ (y) & 0 = n(\theta + \alpha, \lambda) \sin \alpha \sin \phi_1 + n_o(\lambda) \sin \beta \sin \phi_2 \\ (z) & 2 n(\theta, \lambda/2) = n(\theta + \alpha, \lambda) \cos \alpha + n_o(\lambda) \cos \beta \end{cases}$$

quindi le componenti perpendicolari a  $z$  di  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  sono uguali e opposte e giacciono su due circonferenze, ovvero i vettori d'onda sulla superficie di due coni.

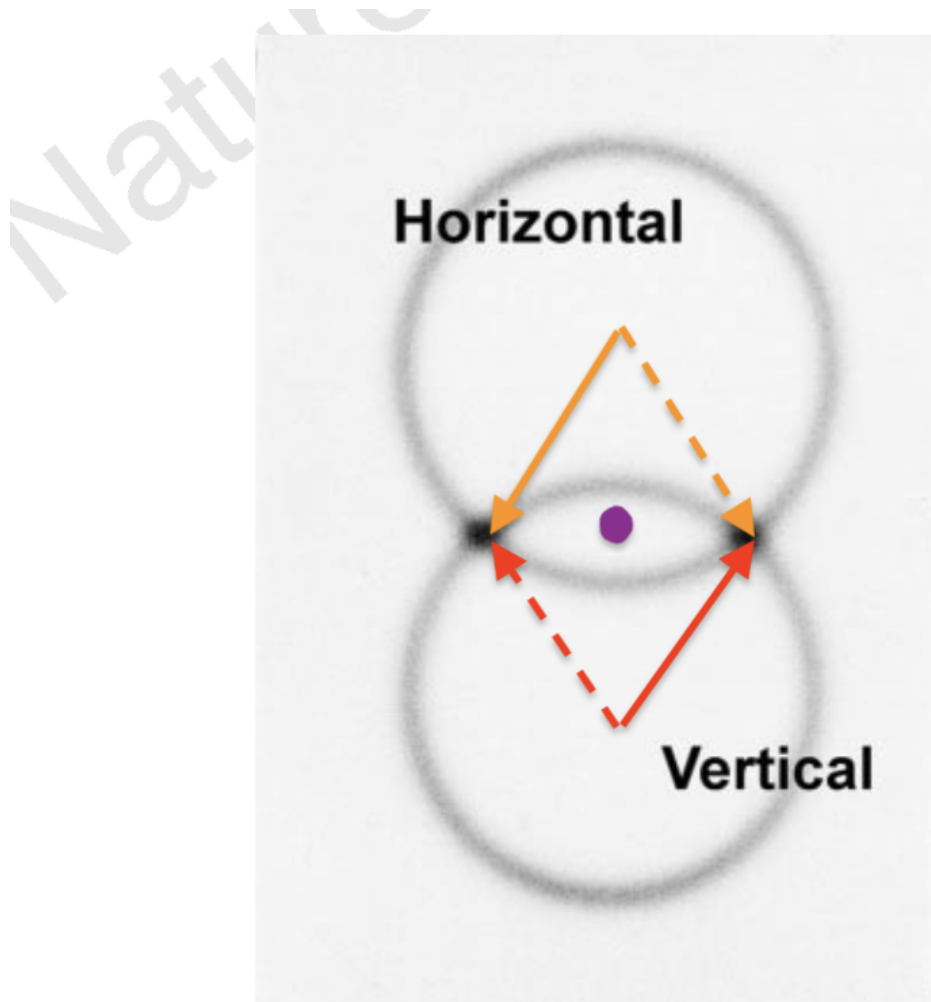


L'onda ordinaria (circonferenza gialla) ha polarizzazione H, l'onda straordinaria invece nel piano xz, ovvero V.

Nell'esperimento di Zeilinger, viene usata luce "di pompa" con  $\lambda_3 = 394$  nm in onda straordinaria, con un angolo di  $\sim 35^\circ$  rispetto all'asse del cristallo. I due fotoni generati hanno la stessa frequenza, ovvero  $\lambda_1 = \lambda_2 = 788$  nm, ma uno è in onda ordinaria con indice  $n_o(\omega_1)$ , l'altro è in onda straordinaria con indice  $n(\omega_1, \theta_1)$ .

I vettori d'onda  $\vec{k}_1, \vec{k}_2$  giacciono su due coni distinti, i cui assi formano un angolo di  $\sim 3^\circ$  rispetto alla direzione di propagazione della "pompa",  $\vec{k}_3$ . I due fotoni hanno polarizzazioni ortogonali tra loro. Ogni coppia viene emessa in maniera casuale nei due coni con il vincolo che gli angoli azimutali nei due coni differiscono di  $\pi$ , ovvero le componenti di  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  perpendicolari a  $\vec{k}_3$  sono uguali in modulo e opposte. Nella figura si vede l'immagine in sezione dei due coni nell'esperimento di Zeilinger. Nei due punti di intersezione dei coni, si possono avere entrambe le polarizzazioni: se il fotone con polarizzazione H è a sinistra, quello con polarizzazione V è a destra (freccie piene) oppure viceversa (freccie tratteggiate)





**Figure 2** Photons emerging from type II down-conversion (see text). Photograph taken perpendicular to the propagation direction. Photons are produced in pairs. A photon on the top circle is horizontally polarized while its exactly opposite partner in the bottom circle is vertically polarized. At the intersection points their polarizations are undefined; all that is known is that they have to be different, which results in entanglement.

Le due direzioni d'intersezione sono i modi che definiscono i fotoni 2 e 3, nella parametric down-conversion vengono generate coppie di fotoni entangled:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_2 |V\rangle_3 + e^{i\varphi} |V\rangle_2 |H\rangle_3)$$

con una fase  $\varphi$  che può essere scelta tra 0 e  $\pi$  variando la lunghezza, o anche solo l'orientazione, del cristallo.

## Risultati

Alice prepara lo stato di polarizzazione lineare del fotone  $q1$  (tecnicamente questo si realizza mediante opportuni elementi ottici che sfruttano la birifrangenza per cambiare arbitrariamente lo stato di polarizzazione)

$$|q1\rangle = \cos\theta |H\rangle_1 + \sin\theta |V\rangle_1$$

prima con  $\theta = \pi/4$  e poi con  $\theta = -\pi/4$ .

Bob allora usa un analizzatore di polarizzazione, costituito da:

- un beam-splitter che trasmette la polarizzazione uguale a quella di  $|q1\rangle$  e riflette la polarizzazione ortogonale;
- due rivelatori,  $d_{\parallel}$  e  $d_{\perp}$ , rispettivamente sulla trasmissione e sulla riflessione.

Sono osservate le triple coincidenze (TC):

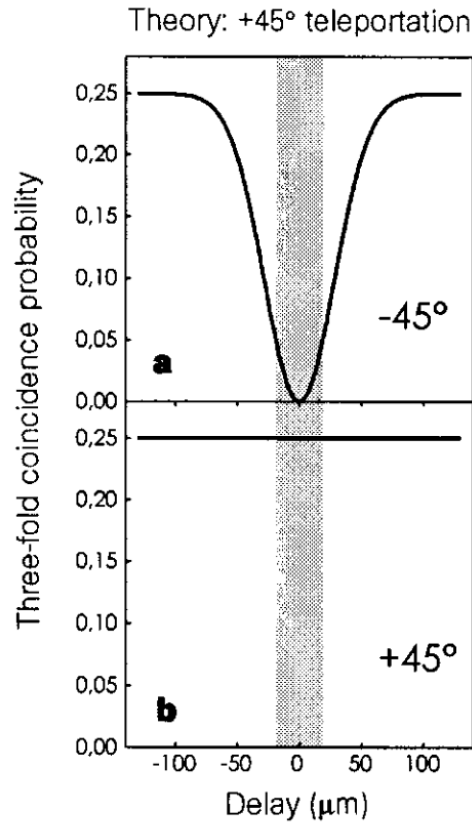
- $TC_{\parallel}$  = coppia di fotoni nella misura di Bell e fotone nella trasmissione dell'analizzatore di polarizzazione,  $(f_1 f_2 d_{\parallel})$
- $TC_{\perp}$  = coppia di fotoni nella misura di Bell e fotone nella riflessione dell'analizzatore di polarizzazione,  $(f_1 f_2 d_{\perp})$

al variare del ritardo con cui il fotone 2 arriva sul beam-splitter della misura di Bell.

Per ritardo "grande", non si ha la misura di Bell e tutte le rivelazioni sono eventi indipendenti. In questo caso la probabilità di avere rivelazione  $(f_1 f_2)$  è pari a  $1/2$ .

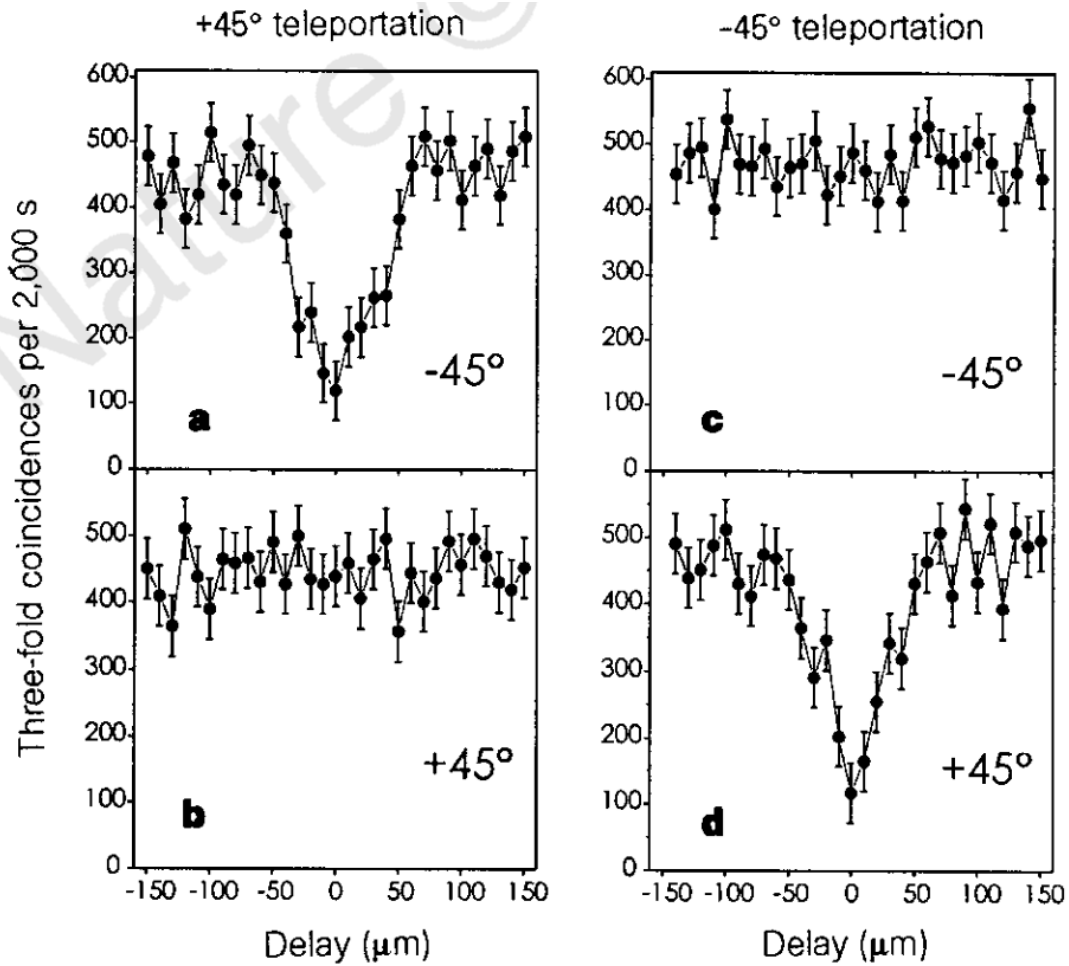
Siccome il fotone 3 fa parte di una coppia entangled, non ha polarizzazione definita e viene rivelato con uguale probabilità da  $d_1$  o da  $d_2$ . Di conseguenza a grande ritardo,  $p(TC_{\parallel}) = (1/2) * (1/2) = 1/4 = p(TC_{\perp})$ .

Per ritardo nullo invece,  $p(f_1 f_2) = 1/4$  e se il teletrasporto accade  $p(TC_{\parallel}) = p(f_1 f_2) = 1/4$  (come mostrato in Figura 3a), mentre  $p(TC_{\perp}) = 0$  (come mostrato in Figura 3b).



**Figure 3** Theoretical prediction for the three-fold coincidence probability between the two Bell-state detectors (f1, f2) and one of the detectors analysing the teleported state. The signature of teleportation of a photon polarization state at +45° is a dip to zero at zero delay in the three-fold coincidence rate with the detector analysing -45° (d1f1f2) **(a)** and a constant value for the detector analysis +45° (d2f1f2) **(b)**. The shaded area indicates the region of teleportation.

I risultati sperimentali riproducono questo andamento, come si vede in Figura 4, dove la colonna di sinistra si riferisce alla preparazione del fotone q1 con  $\theta = \pi/4$  e quella di destra con  $\theta = -\pi/4$ .



**Figure 4** Experimental results. Measured three-fold coincidence rates  $d1f1f2$  ( $-45^\circ$ ) and  $d2f1f2$  ( $+45^\circ$ ) in the case that the photon state to be teleported is polarized at  $+45^\circ$  (**a** and **b**) or at  $-45^\circ$  (**c** and **d**). The coincidence rates are plotted as function of the delay between the arrival of photon 1 and 2 at Alice's beam splitter (see Fig. 1b). The three-fold coincidence rates are plotted after subtracting the spurious three-fold contribution (see text). These data, compared with Fig. 3, together with similar ones for other polarizations (Table 1) confirm teleportation for an arbitrary state.

## Riferimenti

- C. H. Bennett et al. "Teleporting an unknown quantum state via dual classic and Einstein-Podolsky-Rosen channels", Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).
- D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, "Experimental Quantum Teleportation", Nature 390, 660 (1997).
- C. Couteau, "Spontaneous parametric down-conversion", Contemporary Physics 59, 291 (2018)
- <https://doi.org/10.1080/00107514.2018.1488463>