期末突击

概率论基础

- 条件概率：$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$
- 乘法公式：$P(AB) = P(A)P(B|A)$

一维随机变量

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
- $Y = F(X)$ 的分布函数 $G(y) = P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq x\} = P\{X \leq H(y)\} = F[H(y)]$

二维随机变量

- $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 1$
- $P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$
- 相互独立：$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

随机变量的数字特征

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(x)D(y)}}$
- $D(aX + bY + c) = a^2D(X) + b^2D(y) + 2abCov(X,Y)$
- $Cov(aX + bY, cX + dY) = acCov(X,X) + adCov(X,Y) + bcCov(Y,X) + bdCov(Y,Y)$

分布名称	分布律或概率密度	数学期望	方差
二项分布 $X \sim B(n,p)$	$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $X \sim \pi(\lambda)$	$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
均匀分布 $X \sim U(a,b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}, \ a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $X \sim Exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

大数定律与中心极限定理

- 独立同分布中心极限定理
  - $P\{\sum_{i=1}^n X_i \le x\} \approx \Phi(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$
- 棣莫弗-拉普拉斯定理
  - 若Y_n 服从二项分布，则 $P\{a < Y_n \le b\} \approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$

参数估计

- 矩估计
  - $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k \longrightarrow E(X^k)$
- 最大似然估计
  1. $L(\theta) = \Pi_{i=1}^n f(x_i)$
  2. $lnL(\theta) = \cdots$
  3. $\frac{dlnL(\theta)}{d\theta} = \cdots = 0$
  4. $\hat{\theta} = \cdots$
- 无偏估计
  - $E(\hat{\theta}) = \theta$

类型	公式	置信区间
σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
σ^2 未知	$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$
μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$

假设检验

类型	假设	检验统计量	拒绝域
σ^2 已知	$H_0: \mu = \mu_0$，$H_0: \mu \ne \mu_0$ $H_0: \mu \le \mu_0$，$H_0: \mu > \mu_0$ $H_0: \mu \ge \mu_0$，$H_0: \mu < \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$ $z \ge z_\alpha$ $z \le z_\alpha$
σ^2 未知	$H_0: \mu = \mu_0$，$H_0: \mu \ne \mu_0$ $H_0: \mu \le \mu_0$，$H_0: \mu > \mu_0$ $H_0: \mu \ge \mu_0$，$H_0: \mu < \mu_0$	$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$ $t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le t_\alpha(n-1)$