Московский физико-технический институт
Факультет аэромеханики и летательной техники

Задание по «Математической статистике»

Студент: *Бортник Степан Б03-115*
Семинарист: *Животов Сергей Дмитриевич*
Последняя дата изменения: *10 октября 2023 г.*

Inspired by the community

AEROKITTIES

Содержание

1 ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

1.1 T1

Задание: Случайная величина распределенна равномерно на отрезке $[0,\, \theta]$. по выборке обьема n найденны оценки
параметра

$$\theta : \tilde{\theta}_1 = 2\overline{x},\; \tilde{\theta}_2 = x_{min}\; \tilde{\theta}_3 = x_{max}\; \tilde{\theta}_4 = x_{min} + x_{min}\; \tilde{\theta}_5 = \left(x_1 + \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} x_k}{(n-1)} \right).$$

1.1.1 Пункт «а»

1: $\tilde{\theta}_1 = 2\overline{x}$

$$M_{\tilde{\theta}_1} = M\left[\frac{2}{n}\sum x_i\right] = \frac{2}{n}\sum M_{x_i} = \frac{2}{n}\, n\, \frac{\theta}{2} = \theta$$

$\Rightarrow$ **несмещённая**

$$D_{\tilde{\theta}_1} = D\left[\frac{4}{n^2}\sum x_i\right] = \frac{2}{n}\sum D_{x_i} = \frac{4}{n^2}\, n\, D_\xi = \left(\xi \sim\ R(a,b)\quad D_\xi = \frac{(b-a)^2}{12}\right) =$$

$$= \frac{4}{n}\,\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \to 0\ (n \to \infty)$$

$\Rightarrow$ **состоятельная**

не смещённая $\Rightarrow$ ассимптотически несмещённая

2: $\tilde{\theta}_2 = x_{min}$

$$M\left[\tilde{\theta}_2\right] = M\left[x_{min}\right]$$

$$\varphi(y) = n\,(1 - F(y))^{n-1}\, p(y) = n\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}(0;\theta)$$

$$M_{x_{min}} = \int_0^\theta n\left[\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\right]\mathrm{d}y =$$

Замена $t = \frac{y}{\theta}$

$$= \int_0^1 \theta t n(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = n\theta B(2,n) = n\theta\frac{\Gamma(n)\Gamma(2)}{\Gamma(n+2)} = \frac{\theta}{n+1}$$

$\Rightarrow$ **смещённая**

Подарок: «Ассимптотическая несмещённость исходной оценки»

$$M_{x_{min}} = \frac{\theta}{n+1} = \to 0\ \ (n \to \infty)$$

$\Rightarrow$ **асимптотически не смещённая**

Возьмем новую оценку $\tilde{\theta_2}' = (n+1)\tilde{\theta}_2$, которая будет несмещённой.

$$D\left[\tilde{\theta_2}'\right] = M\left[\tilde{\theta_2}'^2\right] - M^2\left[\tilde{\theta_2}'\right]$$

$$M\left[\tilde{\theta_2}'^2\right] = \int_0^\theta y^2\left[n\left(1-\frac{y}{\theta}\right)\right]\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^2\theta^2 nt^2\left(1-t\right)^{n-1}\,\mathrm{d}y = \theta^2 nB(3,n) = n\theta^2\frac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{\Gamma(n+3)} =$$

$$= n\theta^2\frac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{(n+2)(n+2)n\Gamma(n)} = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)}$$

$$D\left[x_{min}\right] = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n-2)}$$

$$D\left[\tilde{\theta_2}'\right] = \frac{n\theta^2}{(n-1)(n+2)}$$

Теперь посмотрим на состоятельность $\tilde{\theta_2}'$

$$\forall\varepsilon>0\;\mathcal{P}\left(|\tilde{\theta_2}'-\theta|\geqslant\varepsilon\right)\to 0\;\;(n\to\infty)$$

$$\mathcal{P}\left(|\tilde{\theta_2}'-\theta|\geqslant\varepsilon\right)\geqslant\mathcal{P}\left(\tilde{\theta_2}'\geqslant\theta+\varepsilon\right)=\mathcal{P}\left(x_{min}\geqslant\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)=\mathcal{P}\left(x_1\geqslant\frac{\theta+\varepsilon}{n+1},x_2\geqslant\frac{\theta+\varepsilon}{n+1},\cdots,\;x_n\geqslant\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^n\mathcal{P}\left(x_i\geqslant\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)=\prod_{i=1}^n\left(1-\mathcal{P}\left(x_i<\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right)=\left(1-F\left(\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right)^n=\left(1-\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)^n\to e^{-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta}}>0$$

не стремится к 0 $=>$ не состоятельная

Подарок: «Состоятельность неисправленной оценки»

$$D\left[x_{min}\right] = \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n-2)}\to 0\;\;(n\to\infty)$$

$\Rightarrow$ **состоятельная**

Подарок: «Предельный закон распределения»

3: $\tilde{\theta}_3 = x_{max}$

$$x_i\sim F(x)\quad x_{max}\sim\Big(F(y)\Big)^n\quad p(y)_{x_{max}} = n\Big(F(y)\Big)^{n-1}p(y)\;\;(0;\theta)$$

$$M\left[\tilde{\theta_3}\right] = \int_0^\theta ny\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\right]\,\mathrm{d}y = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n\,\mathrm{d}y = \frac{n\theta}{n+1}$$

смещённая, $\Rightarrow$ ассимтотически не смещённая

Рассмотрим новую оценку $\tilde{\theta_3}' = \frac{n+1}{n}x_{max}$, которая будет несмещённой.

$$M\left[\tilde{\theta_3}^2\right] = \int_0^\theta ny^2\left[\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}\right]\,\mathrm{d}y = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^{n+1}\,\mathrm{d}y = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$D\left[\tilde{\theta_3}\right] = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{(n\theta)^2}{(n+1)^2} = \frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$D\left[\tilde{\theta_3}'\right] = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}\to 0\;\;(n\to\infty)$$

$\Rightarrow$ **состоятельная по достаточному условию**

Подарок: «Состоятельность неисправленной оценки»

$$D\left[x_{max}\right] = \frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

$\Rightarrow$ **состоятельная**

4: $\tilde{\theta}_4 = x_{min} + x_{max}$

$$M\left[\tilde{\theta_4}\right] = M\left[x_{min}\right] + M\left[x_{max}\right] = \frac{n\theta}{n+1} + \frac{\theta}{n+1} = \theta$$

$\Rightarrow$ **не смещённая**

$$D\left[\tilde{\theta_4}\right] = D\left[x_{min}\right] + D\left[x_{max}\right] + 2cov(x_{min}, x_{max})$$

$$cov(x_{min}, x_{max}) = M\left[x_{min} * x_{max}\right] - M\left[x_{min}\right] * M\left[x_{max}\right]$$

$$p(y;z) = n(n-1)(F(z) - F(y))^{n-2} p(z)p(y) \ \ (z \geqslant y)$$

$$M\left[x_{min} * x_{max}\right] = \oiint_D yzn(n-1)\left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)^{n-2} \theta^{-2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_0^\theta \mathrm{d}z \int_0^z yzn(n-1)\left(\frac{z}{\theta} - \frac{y}{\theta}\right)^{n-2} \theta^{-2}\mathrm{d}y =$$

Замена t $= \frac{y}{z}$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta^n} \int_0^\theta \mathrm{d}z \int_0^1 tz^3\left(z - tz\right)^{n-2}\mathrm{d}y = \frac{n(n-1)}{\theta^n} \int_0^\theta z^{n+1}\mathrm{d}z \int_0^1 t\left(1-t\right)^{n-2}\mathrm{d}y = B(2, n-1)\ \frac{n(n-1)}{\theta^n} \int_0^\theta z^{n+1}\mathrm{d}z$$

$$B(2, n-1) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(2)\Gamma(n-1)}{n\Gamma(n)} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$M\left[x_{min} * x_{max}\right] = \frac{1}{\theta^n}\int_0^\theta z^{n+1}\mathrm{d}z = \frac{\theta^2}{n+2}$$

$$cov(x_{min}, x_{max}) = \frac{\theta^2}{n+2} - \frac{\theta}{n+1}\frac{\theta n}{n+1} = \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$D\left[\tilde{\theta_4}\right] = \frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2} + 2\frac{\theta^2 n}{(n+2)(n+1)^2} + 2\frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \to 0 \ \ \ (n \to \infty)$$

$\Rightarrow$ **состоятельная по достаточному условию**

Подарок: «Ассимптотическая нормальность оценки»

$$\eta = \sqrt{n}\left(x_{min}(n+1) - \theta\right) \rightsquigarrow$$

5: $\tilde{\theta}_5 = \left(x_1 + \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} x_k}{(n-1)}\right)$

$$M\left[\tilde{\theta_5}\right] = M[x_1] + \frac{n-1}{n-1}M[x_2] = \theta$$

$\Rightarrow$ **не смещённая**

не смещённая $\Rightarrow$ ассимптотически несмещённая

$$D\left[\tilde{\theta}_5\right] = D[x_1] + \frac{n-1}{(n-1)^2} D[x_2] = \frac{\theta^2}{12}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \nrightarrow 0 \;\; (n \to \infty)$$

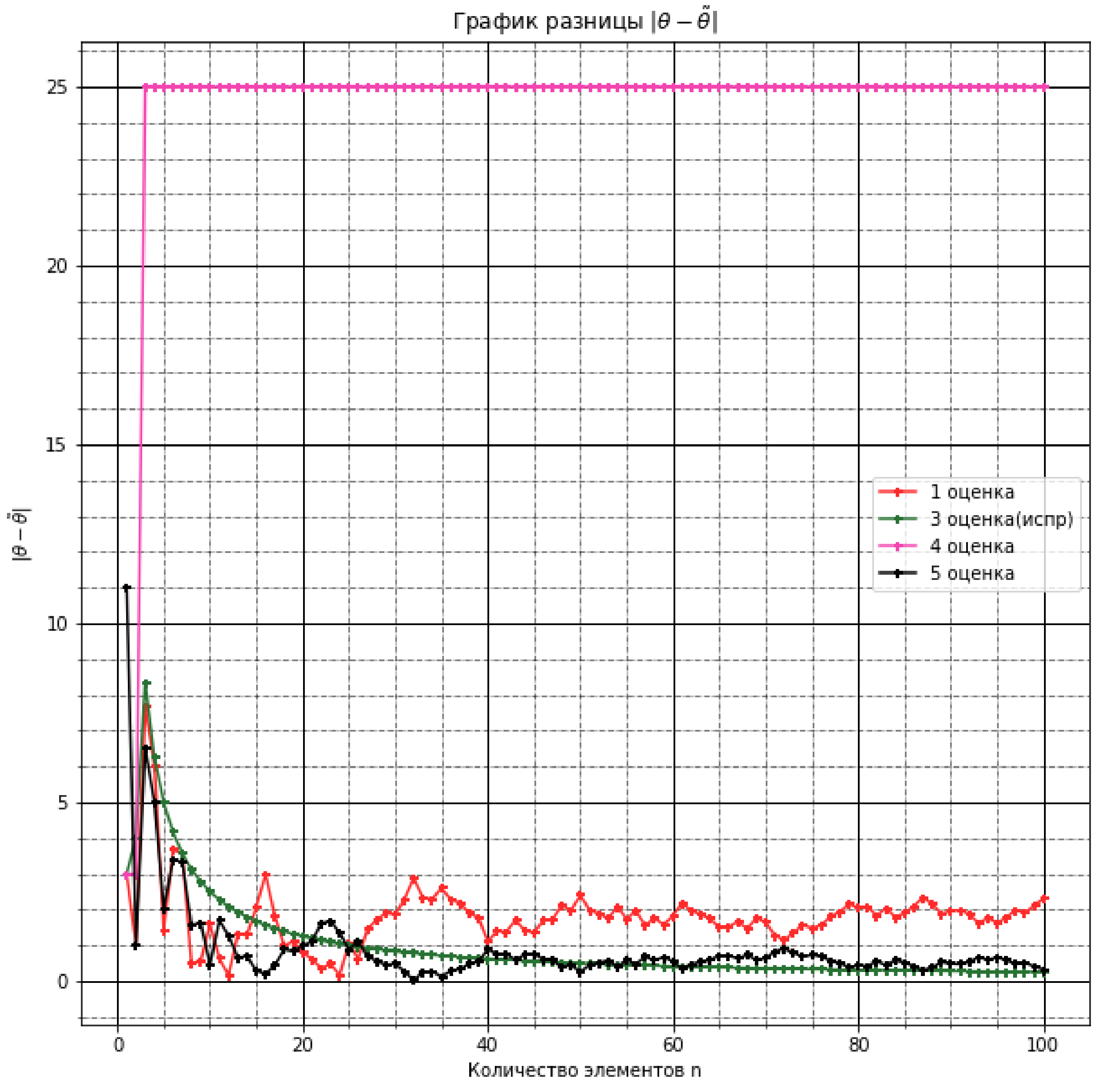
Достаточное условие не работает!!!

$$x_1 + \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} x_k}{(n-1)} \xrightarrow{\mathcal{P}} x_1 + \frac{\theta}{2}$$

$\Rightarrow$ **не является состоятельной**

1.1.2 Пункт «б»

Полученные графики для оценок для случайно сгенерированой выборки из N=100 элементов



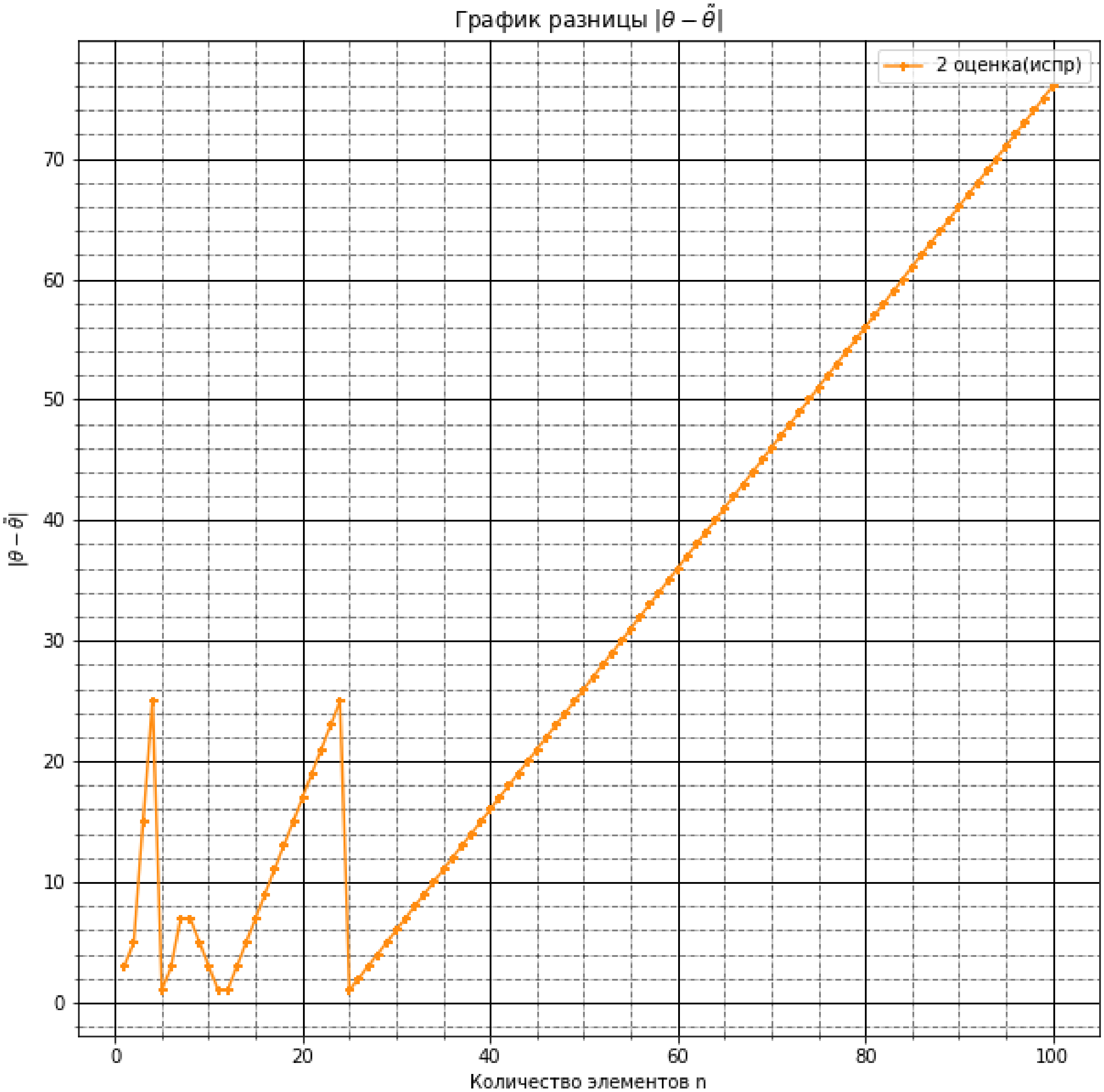


График разницы $|\theta - \tilde{\theta}|$
2 оценка(испр)
$|\theta - \tilde{\theta}|$
0
10
20
30
40
50
60
70
0
20
40
60
80
100
Количество элементов n

1.2 Т2

Задание: Случайная величина имеет экспоненциальный закон распределения

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Сгенерируйте выборку объема n = 25.
a) Определить моду, медиану, размах, коэффициент асимметрии;
b) Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму и boxplot;
c) Найти ядерную оценку плотности распределения;
d) Определить плотность распределения среднего арифметического эле-ментов выборки. Сравнить с бутстраповской оценкой плотности;
e) Найти бутстраповскую оценку плотности распределения коэффициента асимметрии;
f) Найти плотность распределения размаха выборки.

1.2.1 Пункт «а»

1.3 Т3

Задание: Случайная велечина имеет экспоненциальное распределение

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \theta > 0$$

По выборке объема n = 3 найдены оценки параметра

$$\theta : \tilde{\theta}_1 = 2\overline{x}, \ \ \tilde{\theta}_2 = \frac{x_{min} + x_{min}}{2}, \ \ \tilde{\theta}_3 = x_2$$

a) Проверить оценки на несмещенность. Исправить эти оценки, если необходимо. Какая из исправленных оценок более эффективна,
b) Исследовать эти оценки на эффективность с помощью неравенства Крамера-Рао.

1.3.1 Пункт «a»

1: $\tilde{\theta}_1 = \overline{x}$

$$M_{\tilde{\theta}_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = \frac{n}{n}\int_0^{+\infty} x\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}\mathrm{d}x =$$

Замена $t = \frac{x}{\theta}$

$$= \theta\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}x = -\theta\left(te^{-t}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}x\right) = \theta$$

$\Rightarrow$ **несмещённая**

$$M[{x_i}^2] = \sum_{i=1}^{n} M[{x_i}^2] = \theta^2\left(-t^2e^{-t}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}x\right) = 2\theta^2$$

$$D[x_i] = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$D[\tilde{\theta}_1] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{1}{3}\theta^2$$

2: $\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 = \frac{x_{min}+x_{min}}{2}$

Для плотности распределения x_{min} и x_{max} нужна функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{u}{\theta}}}{\theta}du =$$

Замена $\tau = \frac{u}{\theta}$

$$F(x) = \int_0^{\frac{x}{\theta}} e^{-\tau}d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^{\frac{x}{\theta}} = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

Тогда для x_{min} :

$$p(y) = n(1 - F(y))^{n-1}p(x = y) = n(-e^{-\frac{x}{\theta}})^{n-1}\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta}$$