Frekans Cevabı

Frekans Tanım Bölgesi Kriterleri

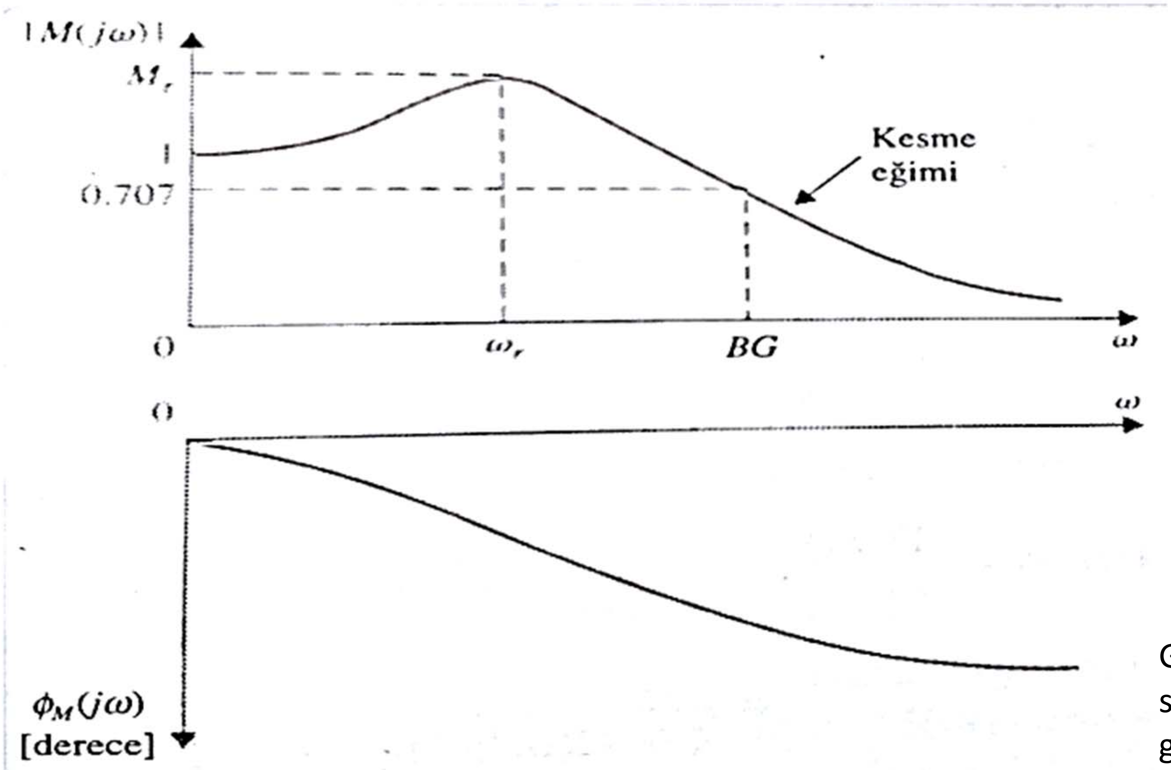
Uygulamada bir kontrol sisteminin davranışı, en gerçekçi ve doğru olarak ancak zaman tanım bölgesi kriterleri ile belirlenir. Bunun nedeni, kontrol sistemlerinde davranışların genellikle sisteme uygulanan test işaretleri etkisinde sistem yanıtlarına göre değerlendirilir. Fakat yüksek mertebeden kontrol sistemlerinde zaman tanım bölgesi yanıtlarına ilişkin analitik ifadelerin çok zor elde edilmektedir. Diğer taraftan frekans tanım bölgesinde düşük mertebeden sistemlerle sınırlı kalmayan çok sayıda grafiksel yöntem bulunmaktadır. Kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımların frekans bölgesinde yapılmasının nedenlerin başında kolaylık ve uygun analitik yöntemlerinin olmasıdır.

Frekans tanım bölgesi yöntemleri kullanılarak tasarlanan doğrusal kontrol sistemlerinde sistemlerin davranışlarını belirlemek için bir dizi kriter tanımlamak gerekir. En büyük aşım sönüm oranı gibi zaman bölgesinde tanımlanmış kriterler frekans tanım bölgesinde doğrydan kullanılamaz. Fakat frekans tanım bölgesinde kullanılan kriterler aşağıda verilmiştir.

Rezonans Tepesi M_r

M_r rezonans tepesi |M(jw)| ‘ nin maksimum değeridir. Genelde M_r genliği bize göreli kararlılığı hakkında bilgi verir. Genellikle büyük bir M_r sistem basamak yanıtında büyük bir aşıma karşı düşer. Uygulamada kontrol sistemlerinde rezonans tepesi 1.1 ile 1.5 arasında bulunması istenir. İkinci mertebeden sistemlerde rezonans tepesi ζ’nin fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \zeta \leq 0.707$$



Geribeslemeli bir kontrol sisteminin örneksel bir genlik faz karakteristiği

Rezonans Frekansı (Wr)

Rezonans frekansı Wr, rezonans tepesi Mr nin oluştuğu frekanstır.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Bandgenişliği (BG)

BG bandgenişliği M(jw) ‘nın sıfır frekansına göre yüzde 70.7 ya da 3 dB düştüğü frekanstır. Genelde bandgenişliği kontrol sisteminin zaman tanım bölgesinde geçici hal yanıtı hakkında bilgi verir. Büyük bandgenişliği yüksek frekanslı işaretlerin sistemden iletilmesini olanak kıldığından, kısa yükselme zamanına düşer. Bandgenişliğinin küçük olması sistemden sadece göreli düşük frekanslar aktarılabilir ve sistemin zaman yanıtı ağırlaşır. Buna göre ikinci mertebeden bir sistemin bandgenişliği aşağıdaki denklem ile ifade edilir.

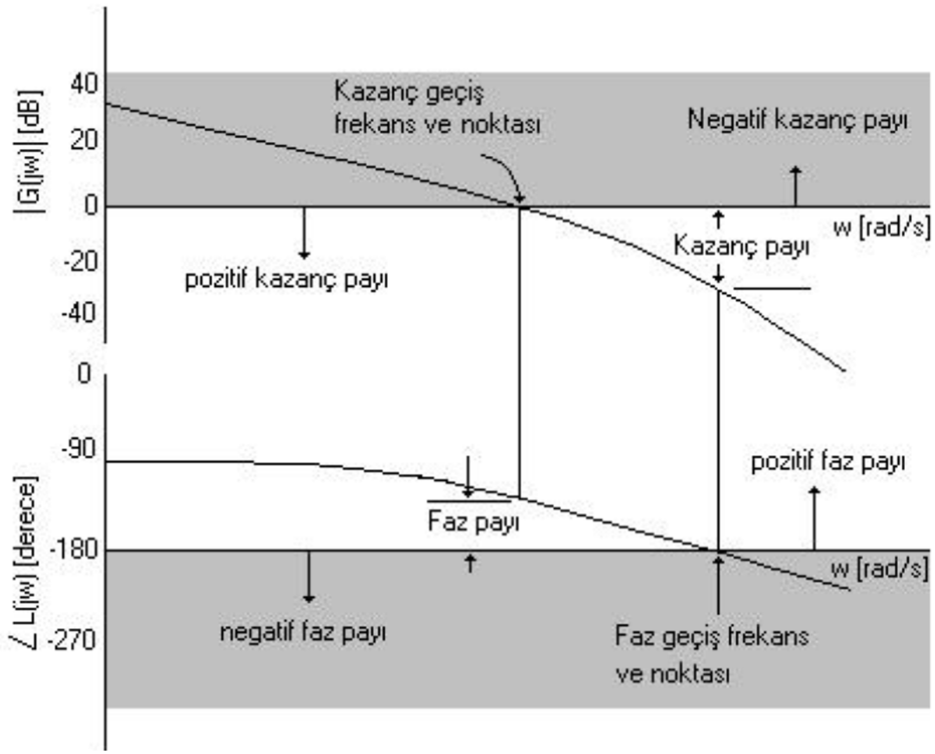
$$BG = \left[\left(1 - 2\zeta^2\right) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2}$$

Buna göre ikinci mertebeden sistemlerde terimler arasındaki ilişkiyi
özetleyecek olursak:
*Bandgenişliği ve yükselme zamanı ters orantılıdır.
* Bandgenişliği arttıkça sistem yanıtı hızlanır.
*w_n arttıkça bandgenişliği artar yükselme zamanı azalır.
* ζ arttıkça bandgenişliği azalır ve yükselme zamanı artar.

BG bir kontrol sisteminin geçici hal davranışı hakkında bilgi verir.
BG sistemin gürültü süzme özelliğinin ve dayanıklılığının bir ölçüsüdür.

Göreli Kararlılık: Kazanç Payı ve Faz Payı

Tasarımcı sistemin mutlak kararlılığı kadar ne kadar kararlı olduğu ile de ilgilidir. Bu kavram genellikle göreli kararlılık olarak bilinir. Zaman tanım bölgesinde göreli kararlılık aşım ve sönüm oranı gibi parametrelerle ölçülür. Frekans tanım bölgesinde ise M_r rezonans tepesi ile ifade edilir. Kazanç payı ve faz payının bode diyagramı üzerinde gösterilişi aşağıdaki şekilde verilmiştir.



9-2 İkinci Mertebeden Örnek Sisteme ilişkin M_r, ω_r, ve Bandgenişliği

9-2-1 Rezonans Tepesi ve Rezonans Frekansı

Kısım 7-5'te tanımlanan ikinci mertebeden örnek sistemde, M_r rezonans tepesi, ω_r rezonans frekansı ve BG bandgenişliği, sistemin ζ sönüm oranı ve ω_n doğal frekansı cinsinden ifade edilebilir.

İkinci mertebeden örnek sisteme ilişkin kapalı çevrim

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{9-17}$$

transfer fonksiyonunu göz önünde bulunduralım. Sinüsoidal sürekli halde, $s = j\omega$ için (9-17) ilişkisi

$$\begin{aligned} M(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{1 + j2(\omega/\omega_n)\zeta - (\omega/\omega_n)^2} \end{aligned} \tag{9-18}$$

şeklinde yazılabilir. $u = \omega/\omega_n$ normalizasyonu ile (9-18) ifadesi

$$M(ju) = \frac{1}{1 + j2u\zeta - u^2} \tag{9-19}$$

biçiminde sadeleşir. $M(j\omega)$'ya ilişkin genlik

$$|M(ju)| = \frac{1}{[(1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2}} \tag{9-20}$$

ve faz

$$\angle M(ju) = \phi_M(ju) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta u}{1 - u^2} \tag{9-21}$$

olarak elde edilir. Resonans frekansını elde etmek için $|M(ju)|$ modülünün u'ya göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenise,

$$\frac{d|M(ju)|}{du} = -\frac{1}{2}[(1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{-3/2}(4u^3 - 4u + 8u\zeta^2) = 0 \tag{9-22}$$

bulunur, ikinci çarpanı için

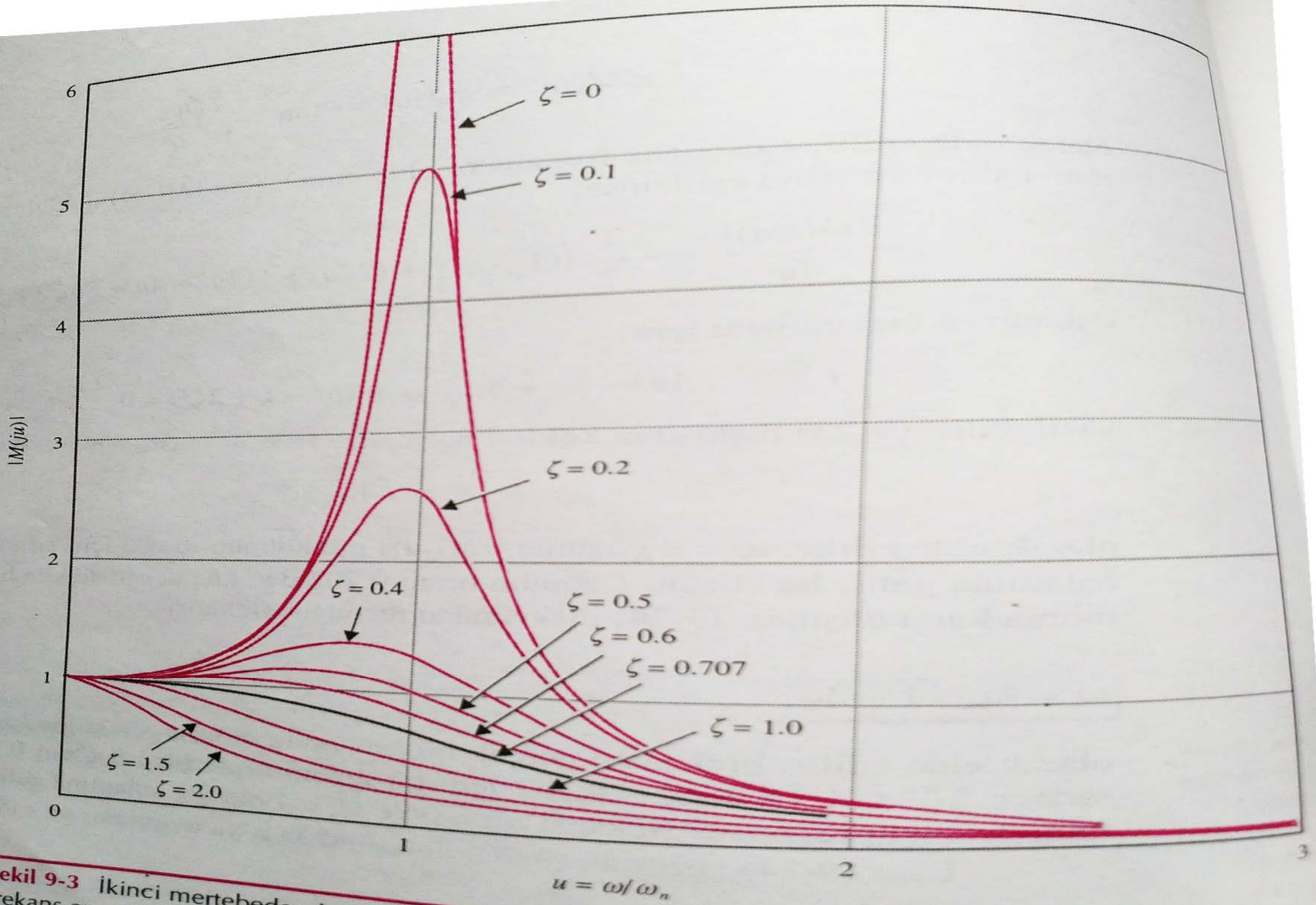
$$4u^3 - 4u + 8u\zeta^2 = 4u(u^2 - 1 + 2\zeta^2) = 0 \tag{9-23}$$

yazılabilir. (9-23) ilişkisinin kökleri normalize frekans cinsinden $u_r = 0$ ve

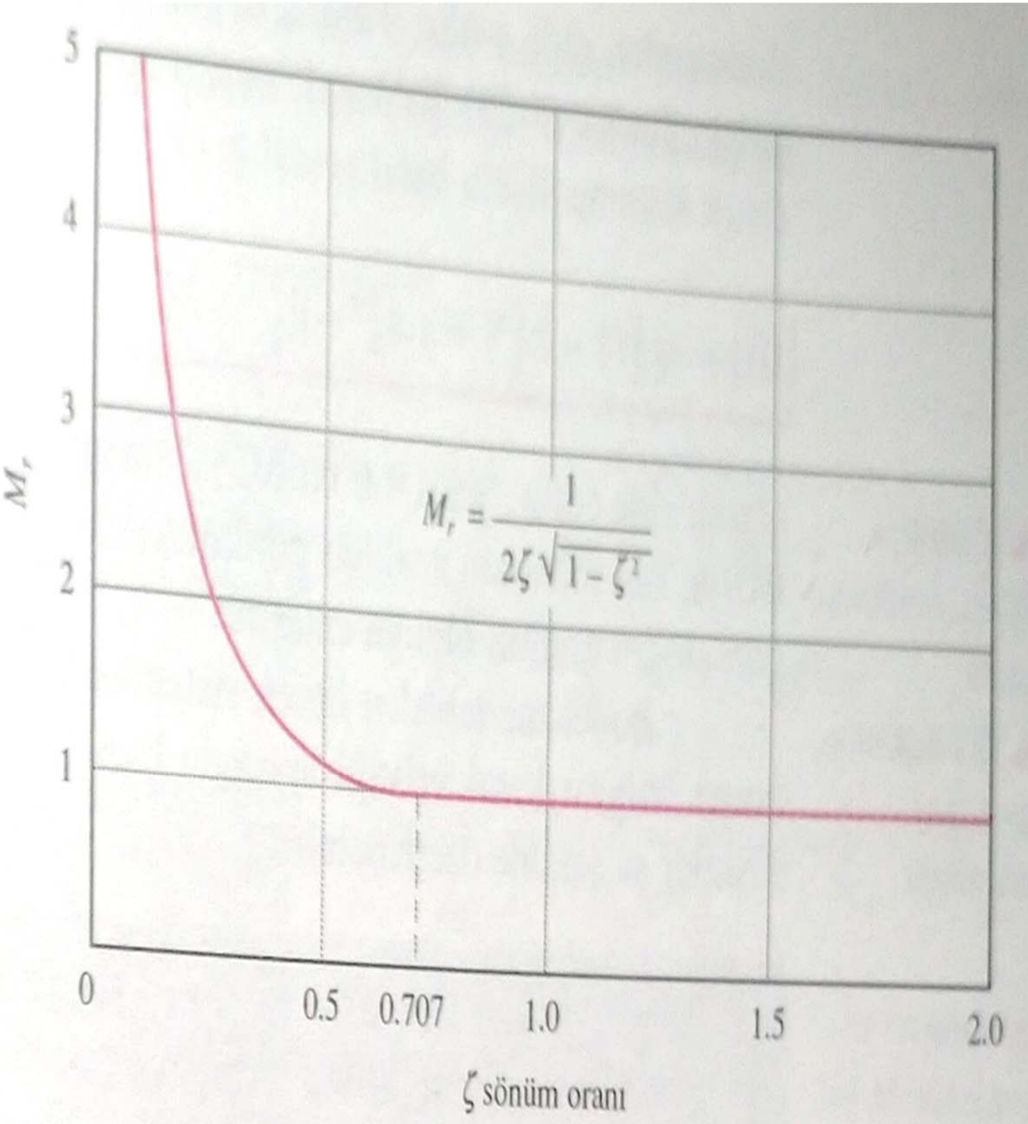
$$u_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{9-24}$$

olarak elde edilir. $u_r = 0$ çözümü, $|M(ju)|$ modülünün $\omega = 0$ için sıfır eğimli olduğu anlamına gelir; bu çözüm ζ sönüm oranı 0.707'den küçük olmadıkça hakiki bu minimuma karşı düşmez. (9-24) ilişkisinden rezonans frekansı

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{9-25}$$



Şekil 9-3 İkinci mertebeden kapalı çevrimli örnek kontrol sisteminde genlik ile normalize frekans arasındaki ilişki.



Şekil 9-4 İkinci mertebeden örnek sistemde M_r ile ζ sönüm oranı arasındaki ilişki.

9-2-2 Bandgenişliği

Bandgenişliği, tanımı gereği $|M(ju)|$ genliği $1/\sqrt{2} \cong 0.707$'ye eşitlenirse,

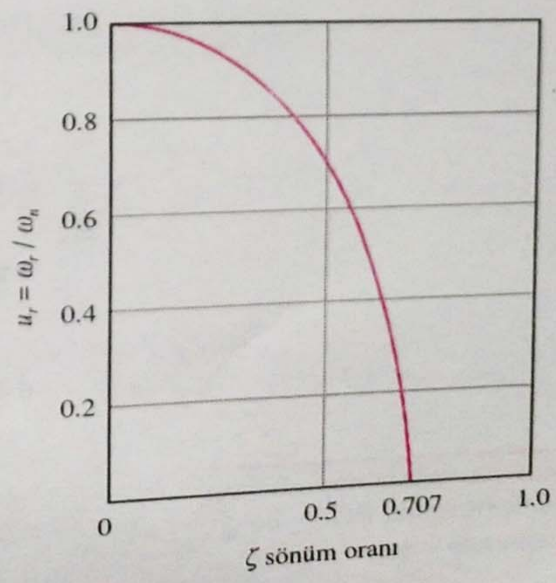
$$|M(ju)| = \frac{1}{[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{9-27}$$

ilişkisinden

$$[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2} = \sqrt{2} \tag{9-28}$$

ya da

$$u^2 = (1-2\zeta^2) \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \tag{9-29}$$



Şekil 9-5 İkinci mertebeden örnek sistemde u_r normalize rezonas frekansı ile ζ sönüm oranı arasındaki ilişki, $u_r = \sqrt{1-2\zeta^2}$.

ifadesinden elde edilir. Tüm ζ değerleri için u pozitif gerçek bir büyüklük olması gerektiğinden (9-29) ilişkisinde pozitif işaret alınmalıdır. Buna göre ikinci mertebeden örnek sisteme ilişkin band genişliği (9-29) ilişkisinden

$$\boxed{BG = \omega_n\left[(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}\right]^{1/2}} \tag{9-30}$$

olarak elde edilir. Şekil 9-6'da BG/ω_n ifadesinin ζ'ye göre çizimi verilmiştir. ζ artıkça BG/ω_n'nin monoton azaldığı görülmektedir. Ayrıca (9-30) ilişkisinden BG'nin ω_n'ye göre doğru orantılı olduğu anlaşılır.

▲ ζ arttıkça BG/ω_n monoton azalır.

▲ BG ilişkisi ω_n ile doğru orantılıdır.

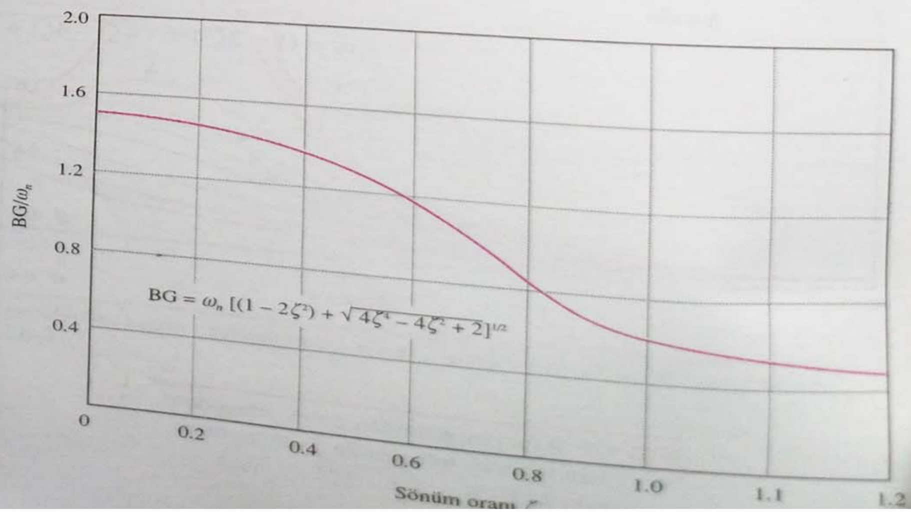
İkinci mertebeden örnek sistemlerde, zaman tanım bölgesi yanıtı ile frekans tanım bölgesi karakteristiği arasında bazı basit ilişkiler belirlemiş bulunuyoruz. Bu ilişkiler şu şekilde özetlenebilir:

▲ Kararsız sistemlerde M_r bir anlam taşımaz.

1. Kapalı çevrim frekans cevabına ilişkin rezonans tepesi M_r sadece ζ'ya bağlıdır [(9-26) denklemi]. Sıfır ζ için M_r sonsuzdur. Negatif ζ için sistem kararsızdır ve M_r'nin bir anlamı kalmaz. ζ artıkça M_r azalır. $\zeta \geq 0.707$ için $M_r = 1$ (Şekil 9-4'e bakınız) ve $\omega_r = 0$'dir (Şekil 9-5'e bakınız). Birim basamak yanıtıyla karşılaştırılırsa, (7-99) ilişkisinden görüldüğü gibi, en büyük aşım da sadece ζ'ya bağlıdır. Ancak $\zeta \geq 1$ için aşım sıfırdır.

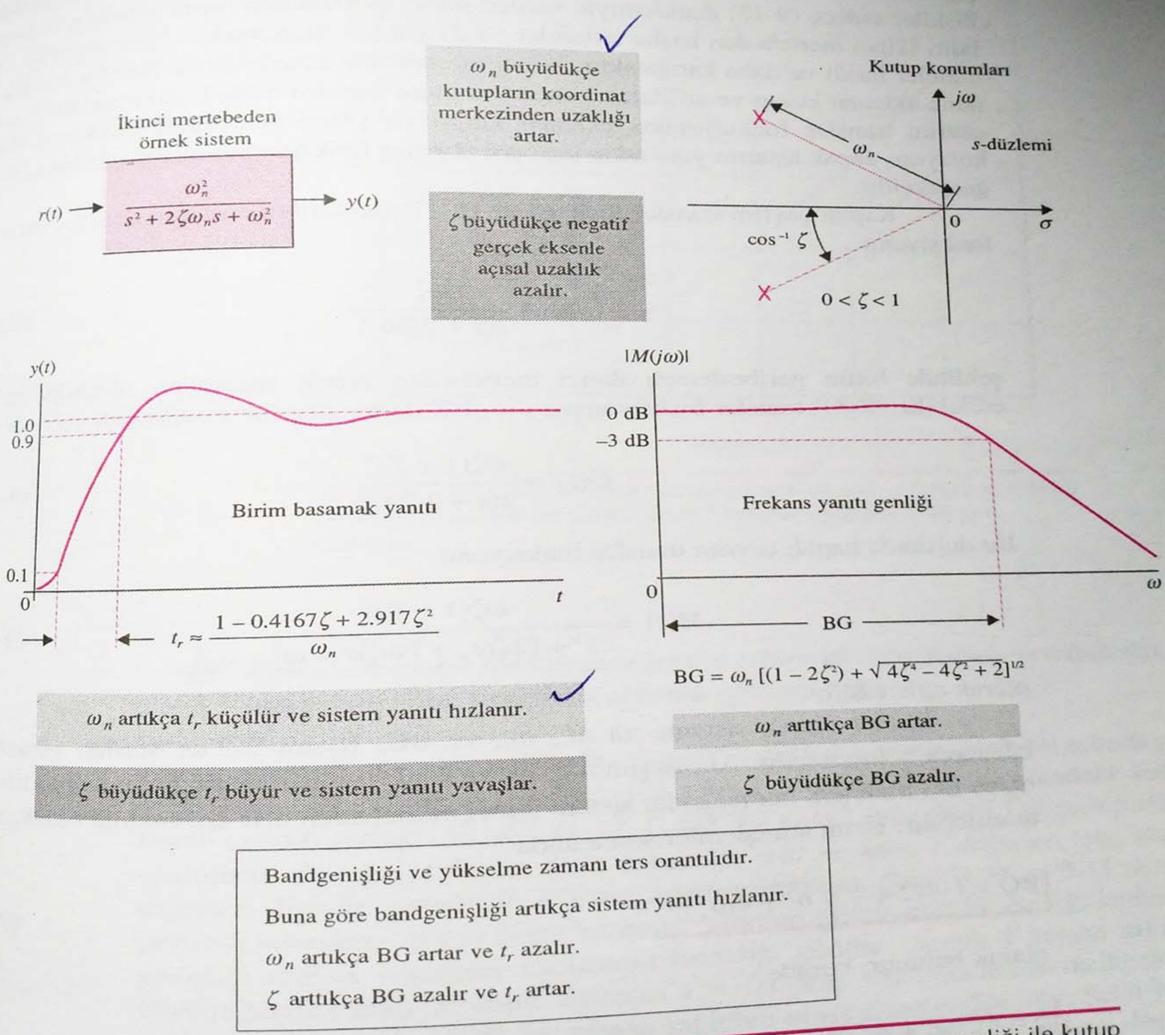
▲ Bandgenişliği ve yükselme zamanı birbirleriyle ters orantılıdır.

2. Bandgenişliği ω_n ile orantılıdır [(9-30) denklemi]; bu BG'nin ω_n ile doğrusal artığı ve azaldığı anlamına gelir. Ayrıca BG, belirli bir ω_n için, ζ artıkça azalır. (Şekil 9-6'ya bakınız). Birim basamak yanıtında ω_n artıkça yükselme zamanı azalır. [(7-104) denklemi ve Şekil 7-21]. Buna göre BG ve yükselme zamanı birbirleriyle ters orantılıdır.
3. $0 \leq \zeta \leq 0.707$ için geniş BG büyük M_r'ye karşı düşer.



Şekil 9-6 İkinci mertebeden örnek sistemde BG/ω_n ile ζ arasındaki ilişki.

İkinci mertebeden örnek sistemde birim basamak yanıtı ve frekans yanıtı genliği ile kutup konumları arasındaki ilişki Şekil 9-7'de özetlenmiştir.



Şekil 9-7 İkinci mertebeden örnek sistemde birim basamak yanıtı ve frekans yanıtı genliği ile kutup konumları arasındaki ilişki.

Oktav :

Uygulamada frekans bantları veya frekans oranlarını ifade etmek üzere oktav ve dekade kullanılır. Oktav, birbirini takip eden iki frekans arasında iki katı bir artışlık değişim 1 oktavlık değişim anlamına gelir. Yani $f_2/f_1 = 2$ ise 1 oktavdır. f_1'den f_2'ye kadar olan frekans aralığındaki oktav sayısı

$$\frac{\log(f_2/f_1)}{\log 2} = 3,321 \cdot \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

Dekade :

Birbirini izleyen iki frekans değeri arasında 10 katı değişim yani $f_2/f_1 = 10$ olması halinde f_1 frekansından f_2 frekansına 1 dekadelik (ondalık) artış var denir. f_1'den f_2'ye kadar olan frekans aralığındaki dekade sayısı $\log \frac{f_2}{f_1}$ ile bulunur.

Desibel :

Kısaca bir logaritmik sayının 20 katıdır. Ve $20 \log m(j\omega)$ şeklinde yazılır. Gerçek sayıların logaritmik karşılıklarını bulmak için $\text{antilog} \frac{(G(j\omega))}{20}$ yazılır.