

通信系统仿真

第3章 采样与量化

何晨光

哈尔滨工业大学

电子与信息工程学院

Communication Research Center



第3章 采样与量化

3.1 采样

低通采样定理

低通随机信号的采样

带通采样定理

同相正交信号采样

3.2 量化

3.3 重构和内插

理想重构

上采样和内插

下采样和抽值



第3章 采样与量化

在大多数的通信应用中，是通过要研究的系统来产生和处理信号波形的。当然，计算机只能处理所关心的表示信号波形的采样点数值。

计算机存在有效字长的问题。采样值是有限精度的，采样值是要经过量化过程。因此，在所有的数字仿真中，采样和量化都是根本的操作，其中每一个操作都会给仿真结果带来误差，而完全消除这些误差源是不可能的，所以需要在性能中进行折中，使采样和量化对仿真精度的影响最小化。

第3.1章 采样

数字信号是通过对模拟信号进行采样、量化和编码得到的。

模拟信号是时间和幅度都连续的信号。采样的结果是产生幅度连续而时间离散的信号，这样的信号常被称为采样数据信号。

通过将时间采样值编码到一个有限的数值集合，可由采样数据信号得到数字信号。

但是在这每一步的处理中都会引入误差。



第3.1章 采样 低通采样定理

对时间连续信号到数字信号转换的第一步就是，对其进行等时间间隔的采样，得到

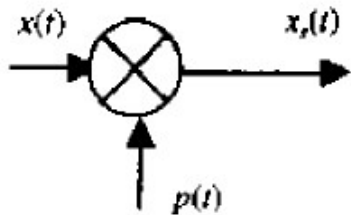
$$x_s(t) = x(kT_s) = x[k]$$

其中， T_s 是采样周期，其倒数就是采样频率 f_s 。

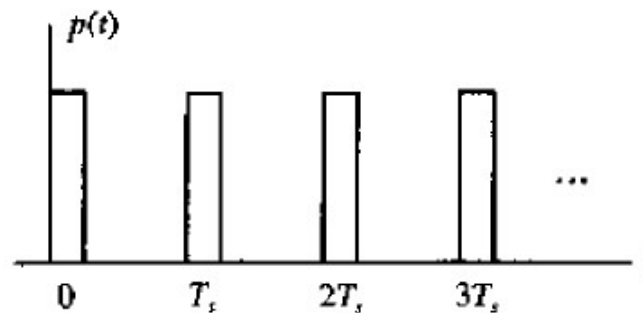
采样信号是用信号乘以周期脉冲来产生的。

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

信号 $p(t)$ 为采样函数。



(a) 采样操作



(b) 采样函数

第3.1章 采样 低通采样定理

采样函数是周期的，可以用傅里叶级数表示：

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi n f_s t)$$

其中，傅里叶系数 $C_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} p(t) \exp(-j2\pi n f_s t) dt$

所以有 $x_s(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi n f_s t)$

通过傅里叶变化得到采样信号的频谱：

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi n f_s t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

交换积分和求和的顺序

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j2\pi(f - n f_s)t] dt$$



第3.1章 采样 低通采样定理

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j2\pi(f - nf_s)t] dt$$

连续信号的傅里叶变换为: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j2\pi ft] dt$

带入 $X_s(f)$ 可得:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(f - nf_s)$$

可以发现, 对时间连续信号的采样导致了信号频谱在直流 ($f=0$) 点和所有采样点的谐波处 ($f=nf_s$) 产生重复。用采样脉冲 $p(t)$ 的傅里叶级数展开的响应系数对变换后的信号频谱做了加权。

第3.1章 采样 低通采样定理

定义采样函数为冲激函数，为 $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$

带入傅里叶系数，可得 $C_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) \exp(-j2\pi n f_s t) dt$

所以，化简有 $C_n = \frac{1}{T_s} = f_s$

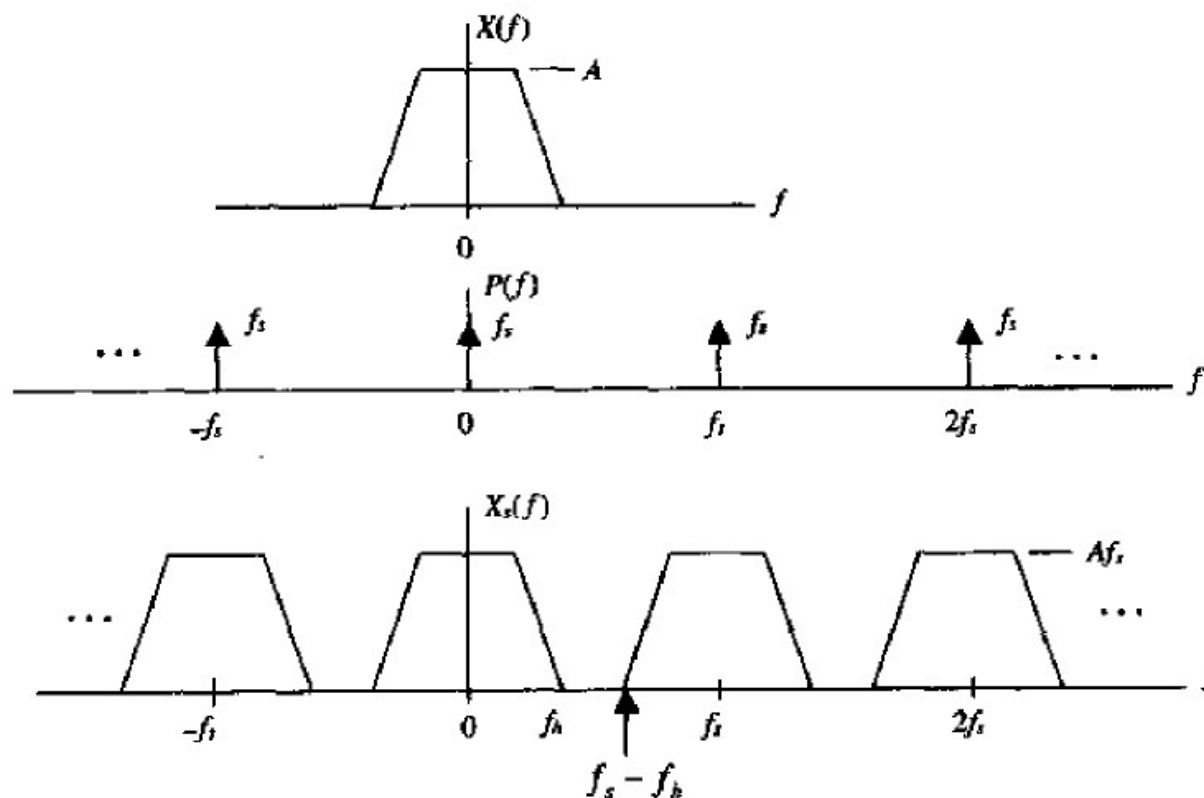
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi n f_s t) \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(f - n f_s)$$

$$P(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) \quad X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_s)$$

$$\Downarrow$$
$$X_s(f) = X(f) \otimes P(f)$$

第3.1章 采样 低通采样定理

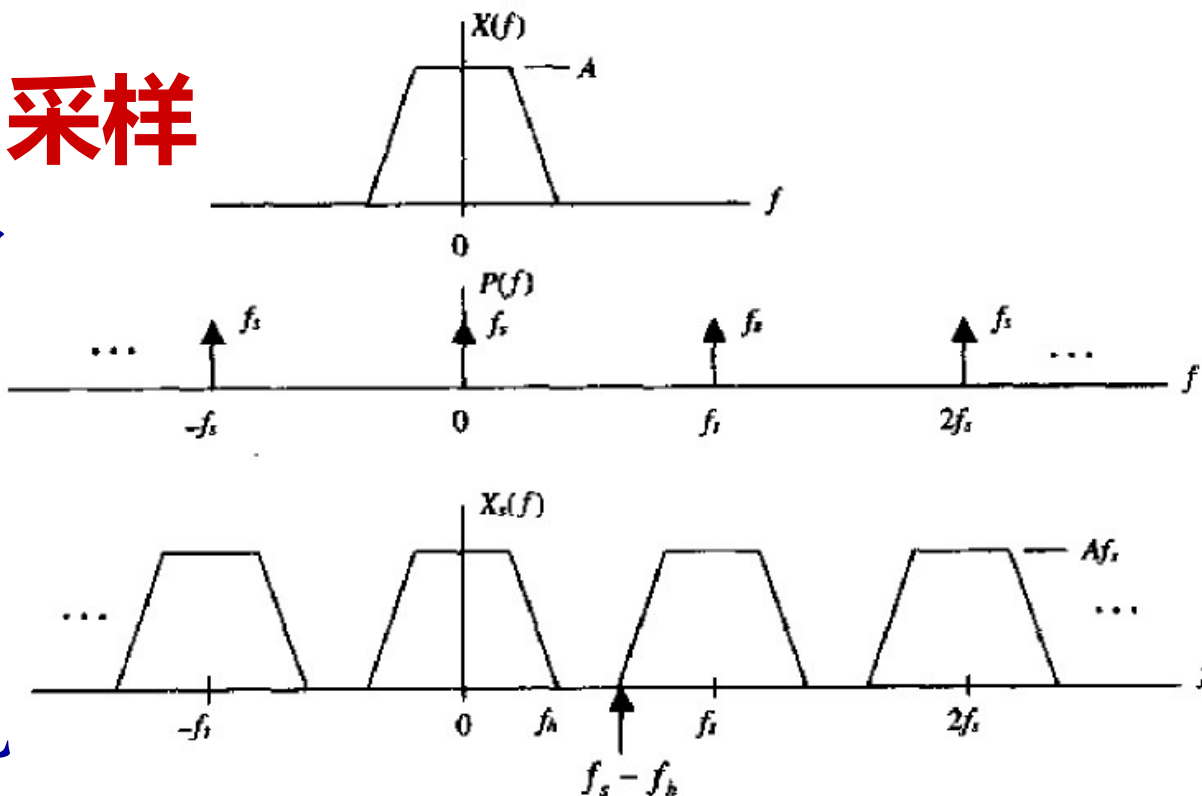
$$X_s(f) = X(f) \otimes P(f)$$



带限信号的采样频谱

第3.1章 采样

为了在采样 $x(nT_s)$ 中包含时间连续信号 $x(t)$ 的所有信息，以便在采样过程中不损失信息，进行的采样必需保证可以通过采样点 $x(nT_s)$ 无差错的重构信号 $x(t)$ 。

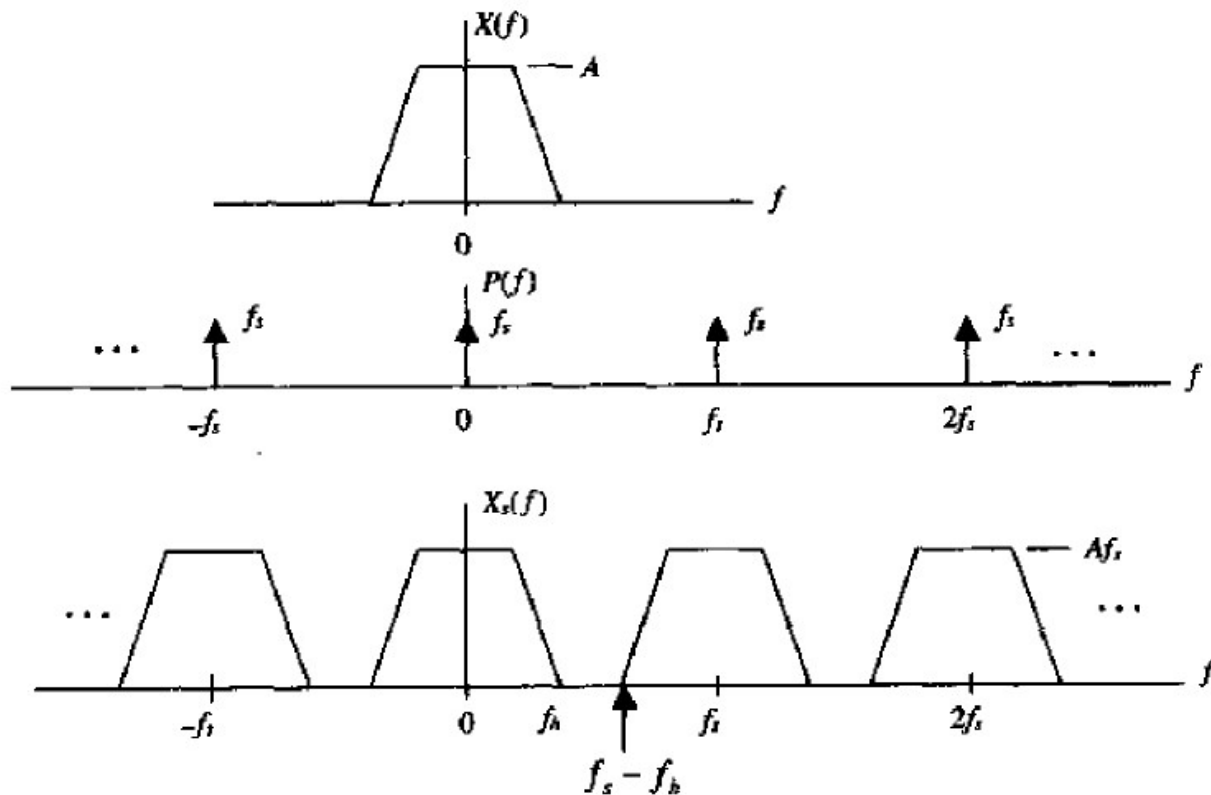


使用低通滤波器在 $n=0$ 附近提取 $X_s(f)$ 的频谱，可以完成从采样信号到原信号的重构。

要完成无差错的重构，要求在 $X_s(f)$ 附近的频谱 $f = \pm f_h$ 与在 $f=0$ 处的频谱没有重叠，既满足 $f_s > 2f_h$

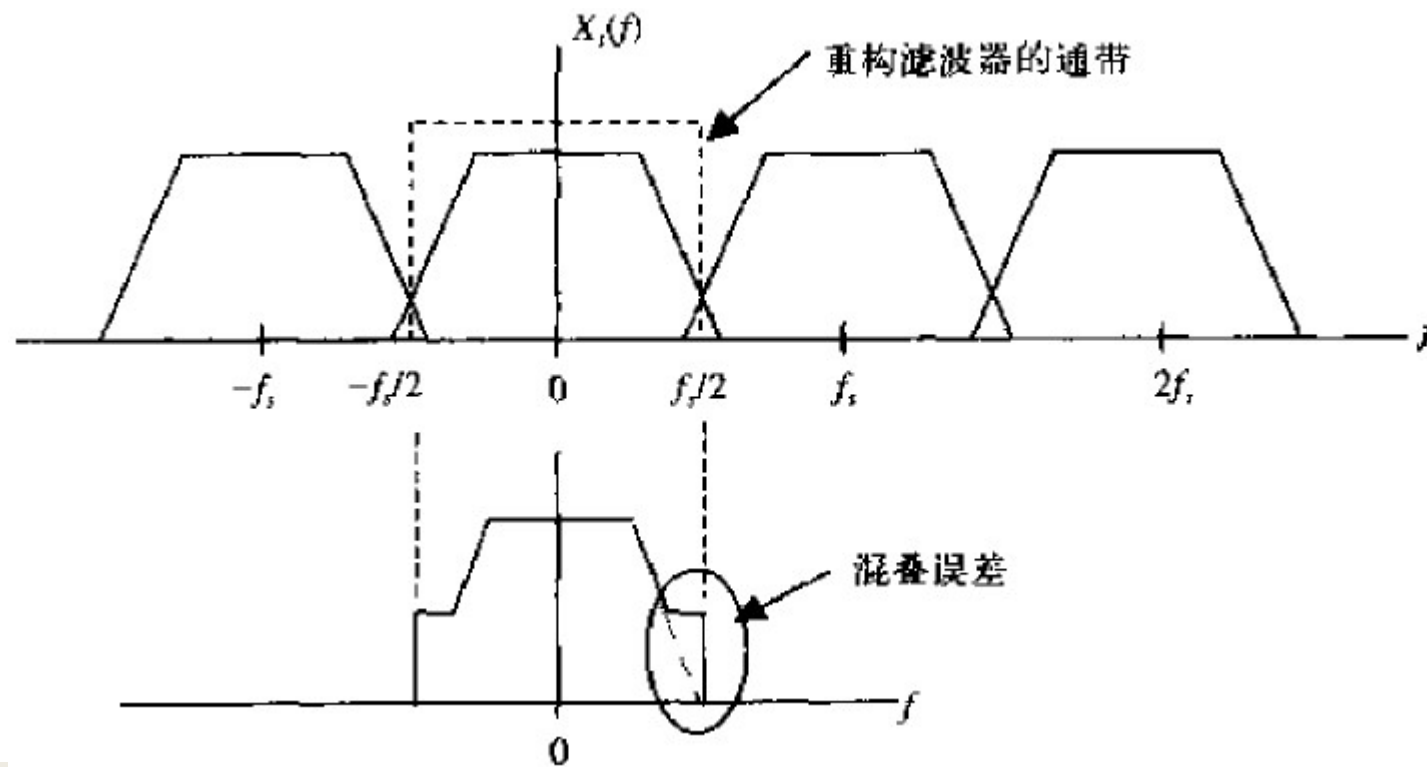
第3.1章 采样 低通采样定理

采样定理：如果采样频率满足 $f_s > 2f_h$ ，那么带限信号就可以无差错的通过其采样信号恢复，这里的 f_h 表示被采样信号中出现的最高频率。



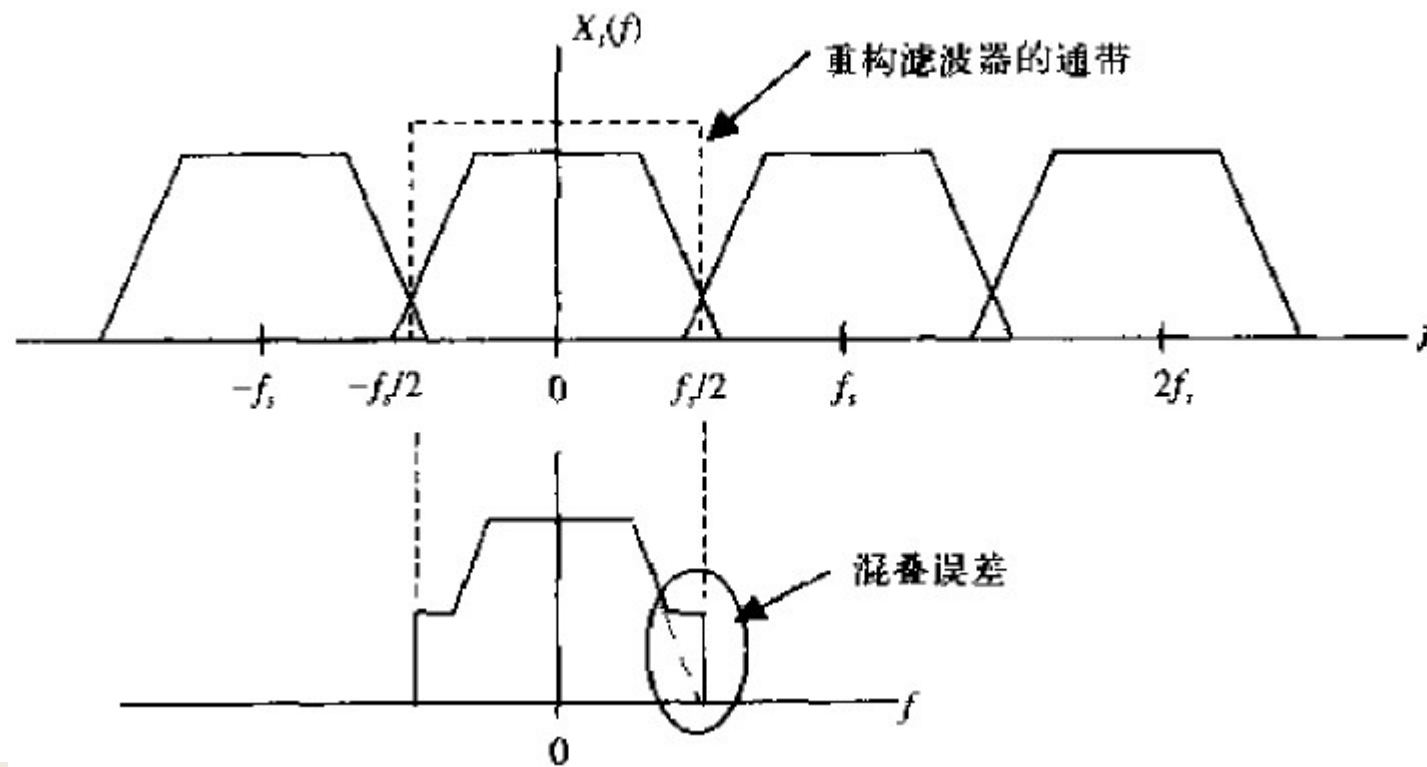
第3.1章 采样 低通采样定理

如果, $f_s > 2f_h$ 以 $\pm f_s$ 为中心频率和以 $f=0$ 为重的频谱将发生重叠, 重构滤波器的输出跟信号 $x(t)$ 相比出现失真, 通常将这种失真称作**混叠**。



第3.1章 采样 低通采样定理

如果, $f_s > 2f_h$ 以 $\pm f_s$ 为中心频率和以 $f=0$ 为重的频谱将发生重叠, 重构滤波器的输出跟信号 $x(t)$ 相比出现失真, 通常将这种失真称作**混叠**。





第3.1章 采样 低通随机信号的采样

前面讨论的波形信号 $x(t)$ 假定为能量有限的确定性信号，这样假定的结果是，傅里叶变换存在，并且采样定理可以基于信号的频谱（傅里叶变换）。

但是通信系统中信号的仿真处理的多数情况都是随机过程的样本函数，因此合适的采样频率不是基于待仿真信号的傅里叶变换，而是基于其功率谱密度(PSD)

第3.1章 采样 低通随机信号的采样

随机信号

$$X_s(t) = X(t)P(t)$$

$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s - D)$$

$$S_s(f) = f_s^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_X(f - nf_s)$$

确定信号

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

随机变量D是独立于X(t)的在(0,T_s)上均匀分布的随机变量，使得P(t)的时间原点随机且固定，确保X_s(t)是平稳随机过程。

结论：为了避免混叠现象，随机信号的采样频率仍然需要信号最高频率的2倍以上。



第3.1章 采样 带通采样

带通采样定理：如果带通信号的带宽为 B ，最高频率为 f_h ，那么可以用大小为 $f_s = 2 f_h / m$ 的采样频率来采样并恢复信号，其中 m 是不超过 f_h / B 的最大整数。更高的采样频率未必全部能用，除非它高于 $2 f_h$ 。

注：对于中心频率 f_0 远大于带宽 B 的情况，带通采样定理规定的采样频率近似等于下界 $2B$ 。



第3.1章 采样 同相正交信号的采样

带通信号表示如下：

$$x(t) = A(t)\cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

$$x(t) = A(t)\cos\phi(t)\cos 2\pi f_c t - A(t)\sin\phi(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$x(t) = x_d(t)\cos 2\pi f_c t - x_q(t)\sin 2\pi f_c t$$

同相： $x_d(t) = A(t)\cos\phi(t)$

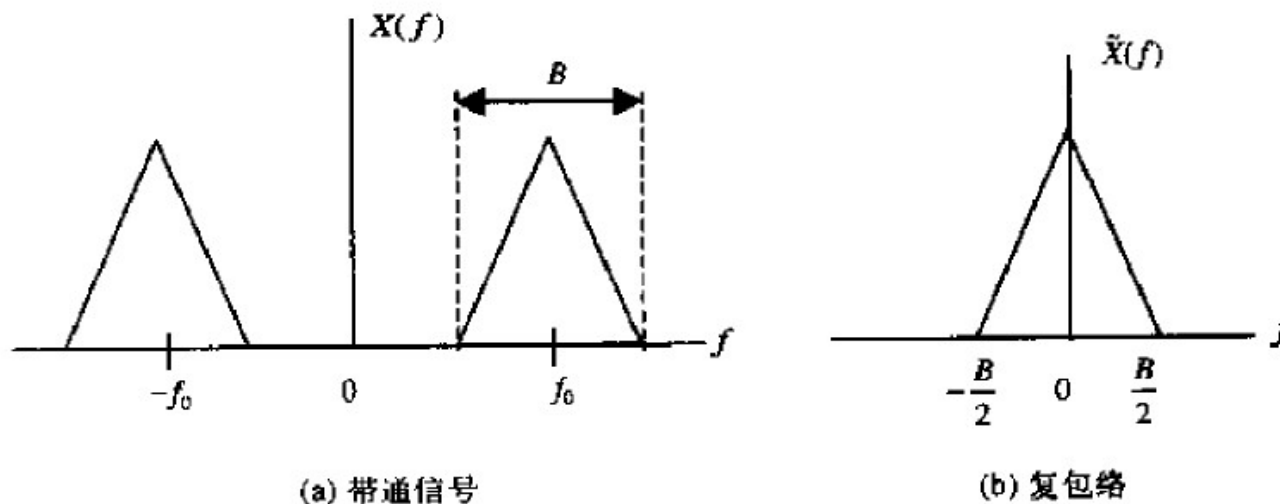
正交： $x_q(t) = A(t)\sin\phi(t)$

$A(t)$ 称为带通信号的包络；

$\phi(t)$ 称为带通信号的相位；

$A(t), \phi(t), x_d(t), x_q(t)$ 都是低通信号，并且具有和信息承载信号大体相当的带宽，因而必须按照低通采样定理的规定进行采样；

第3.1章 采样 同相正交信号的采样



带通信号和对应的复包络

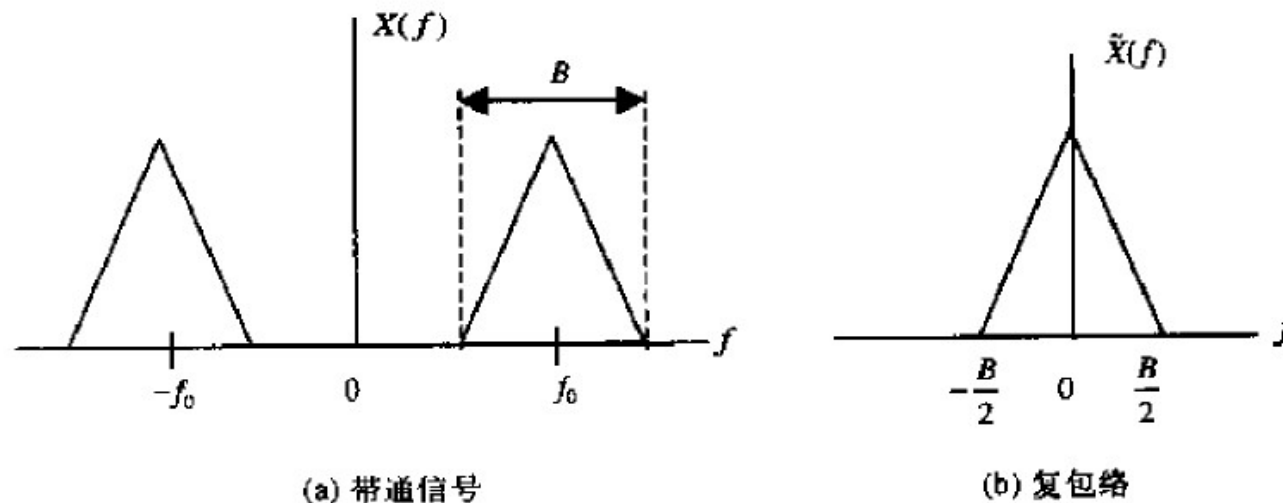
带通信号对应的复包络定义如下

$$\tilde{x}(t) = x_d(t) + jx_q(t)$$

对应的频域表示为

$$\tilde{X}(f) = X_d(f) + jX_q(f)$$

第3.1章 采样 同相正交信号的采样



带通信号和对应的复包络

低通信号 $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 的最高频率是 $B/2$ ，其每个的最小采样频率都是 B 。由于必须采样两个低通信号 $[x_d(t), x_q(t)]$ ，因此必须使用超过 $2B$ 的采样率。

所以，对于中心频率 f_0 远大于带宽 B 的情况，利用低通采样定理对复包络信号采样，和利用带通采样定理对实带通信号进行采样所需的采样频率是一样的。 ■19



例1：考虑用一组采样点来表示1秒钟的某调频(FM)信号，已知载波频率为100MHz,已调信号带宽180KHz，试计算采样点数。

解：

1. 已调信号的最高频率 $f_m=100,090\text{KHz}$ ，根据低通采样定理，采样1秒，需要200,180,000个采样点。
2. 现采用同相/正交形式的信号表示FM信号，其同相和正交分量的带宽为 $B/2$ ，即90KHz，因而采样1秒， $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 每个至少要180,000个采样点，这样，合计1秒共有360,000个采样点。节约了 $200,180,000/360,000 \approx 556$



例1：考虑用一组采样点来表示1秒钟的某调频(FM)信号，已知载波频率为100MHz,调制信号中出现的最高频率为15KHz，试计算采样点数。(调频指数为 $m_f = 5$)

如果同相和正交信号用低通采样定理进行了合适的采样的话，原带通信号就可以无差错的恢复。用低通信号来表示带通信号的优势非常明显。



确定任意的功率谱密度或自相关函数

要确定一个随机数序列，使之具有给定自相关函数或等价地具有给定的功率谱密度，一个通用的方法是，对一组不相关的样本进行适当的滤波，从而使之具有目标功率谱密度。根据定义，不相关样本的功率谱密度在仿真带宽 $< f_s/2$ 上是常数，而方差就是 $S_n(f)$ 曲线下的面积

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0 f_s}{2}$$

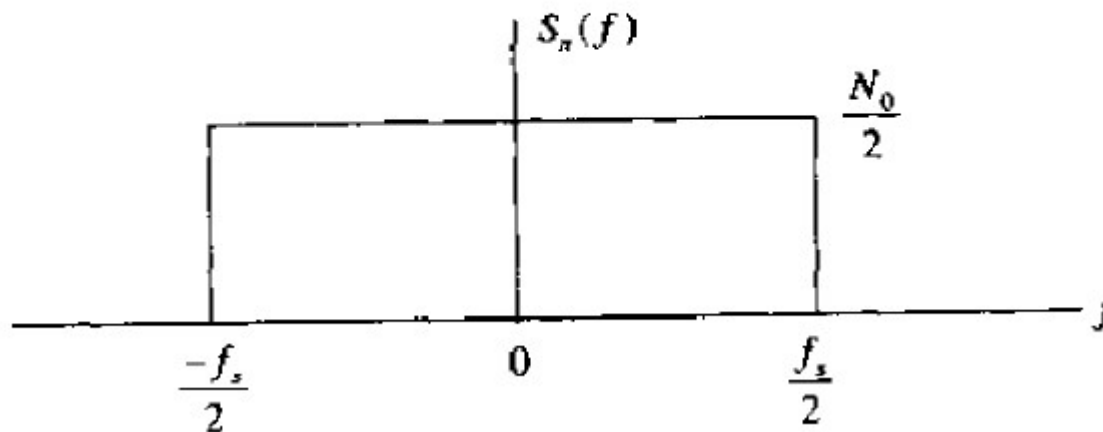
因此，为了产生功率谱密度为 N_0 的噪声，随机数(噪声)发生器的方差和采样频率必须满足 $f_s = 2\sigma_n^2/N_0$

可见，给定功率谱密度所要求的噪声发生器的方差是采样频率的函数。

确定任意的功率谱密度或自相关函数

线性系统的输入是功率谱密度为 $S_X(f)$ 的随机过程，则系统输出端的功率谱密度为下式，其中 $H(f)$ 为传递函数。

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$





确定任意的功率谱密度或自相关函数

如果噪声的功率谱密度为常数 $N_0/2$ ，于是有

$$S_Y(f) = \frac{|H(f)|^2 N_0}{2}$$

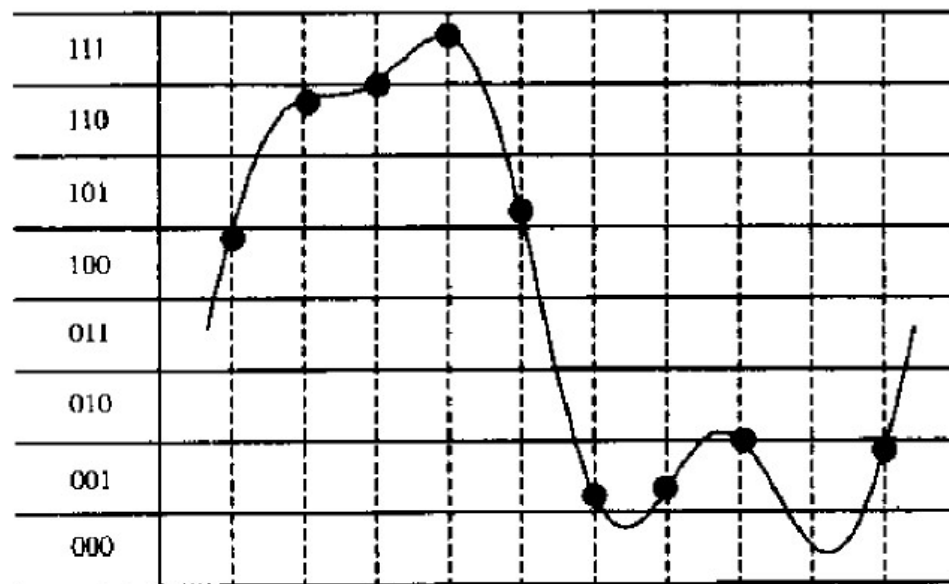
为了得到

$$H(f) = \sqrt{\frac{2S_Y(f)}{N_0}}$$

因此，产生符合要求的功率谱密度的问题，简化为寻找一个传递函数为 $H(f)$ 的滤波器，使得 $H(f)^2$ 给出所需的形状

第3.2章 量化

量化和编码过程如下图

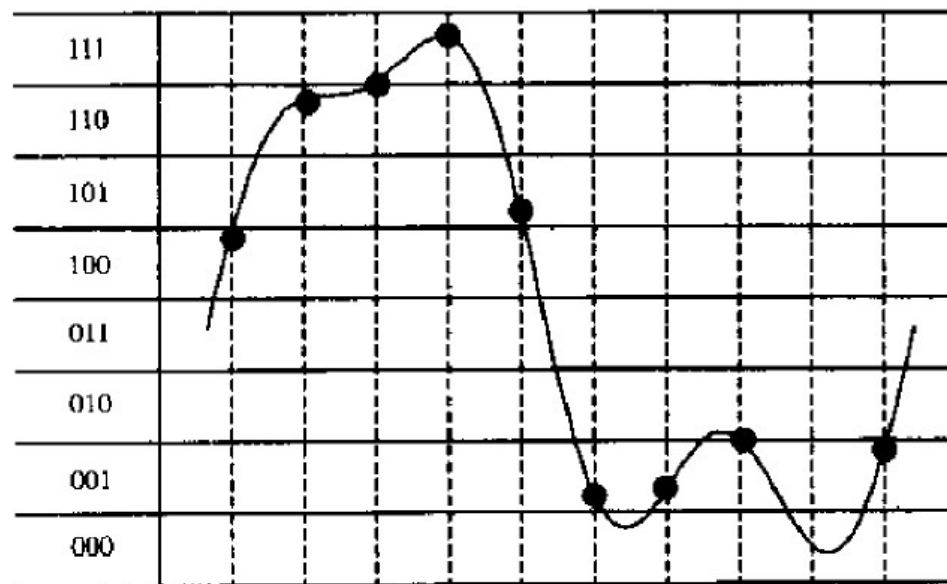


图中给出了连续时间波形和许多该波形的采样点，采样值以黑色圆点表示，每个采样点都落在一个量化级内。假设有 n 个量化级，每个量化级用一个长度为 b 比特的二进制字表示，于是

$$n = 2^b$$

第3.2章 量化

量化和编码过程如下图



每个量化级映射为3位($b=3, n=8$)。量化之后, 采样值用一个与其所处量化级相对应的码字来表示, 而波形的数字处理通过对码字的处理来完成。

例如, 图中的前三个采样值可以用二进制序列 100 110 111 来表示

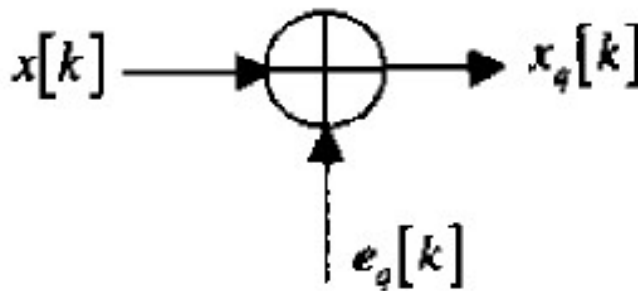
第3.2章 量化

从采样定理知道，以超过奈奎斯特频率的频率对连续时间带限信号进行采样，可以无差错的对它进行重构。因此，在这样的条件下采样操作是可逆的，但是量化确实不可逆的。

点采样值经过量化，仅保持量化级就会引入随机误差。例如波形在采样时刻 $t=kT_s$ 的值表示为 $x[k]$ ，而对应的量化值表示为 $x_q[k]$ ，有

$$x_q[k] = x[k] + e_q[k]$$

其中 $e_q[k]$ 就是量化过程引入的误差。





第3.2章 量化

$$x_q[k] = x[k] + e_q[k]$$

如果原信号不是带宽受限的，那么得到的数字信号包含混叠和量化二者导致的误差。

同样，我们所关心的量是信噪比，这里的噪声解释为量化过程中引入的噪声。量化的信噪比表示为 $(\text{SNR})_q$ ，即

$$(\text{SNR})_q = \frac{S}{N_q} = \frac{E\{x^2[k]\}}{E\{e_q^2[k]\}}$$

其中 E 表示统计平均， N_q 是由于量化过程引入的噪声的功率。为了确定 $(\text{SNR})_q$ 必须已知误差项 $e_q[k]$ 的概率密度函数。



第3.2章 量化

量化误差项 $e_q[k]$ 的概率密度函数是计算机所使用的数字表示格式(定点和浮点)的函数。

- 定点运算

阐明量化误差的基本产生机理；运算速度比浮点计算快；定点处理器的功耗比较低。

$$(\text{SNR})_q = 4.7712 + 20\log_{10} F_c + 6.0206b \text{ dB}$$

用定点数表示时，字长每增加一个bit，量化的信噪比就增加6dB

- 浮点运算

浮点数的格式为 $\pm M^*(\pm 10^E)$ ，其中M和E分别是尾数和指数

ANSI/IEEE标准规定：

尾数用53bit，指数用11bit表示



第3.2章 量化

```
>> A=1-0.4-0.3-0.2-0.1
```

```
A =
```

```
-2.7756e-17
```

结论：由浮点数算术引入的误差确实很小，在多数的应用中可以忽略。但误差不是0，因此计算的结果通常是不精确的。

注意：在开发DSP算法时必须小心，以保证有限字长效应对算法的影响降到最小。DSP计算时关心两个很大的数字间的细小差别。即使很小的计算误差也能累计到使结果完全无用的程度。

第3.3章 重构和内插

重构：从采样序列恢复时间连续信号

方法：将采样点通过具有冲激响应 $h(t)$

的线形滤波器，即 $x_r(t) = x_s(t) \otimes h(t)$

采样信号：

$$x_s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

重构信号：

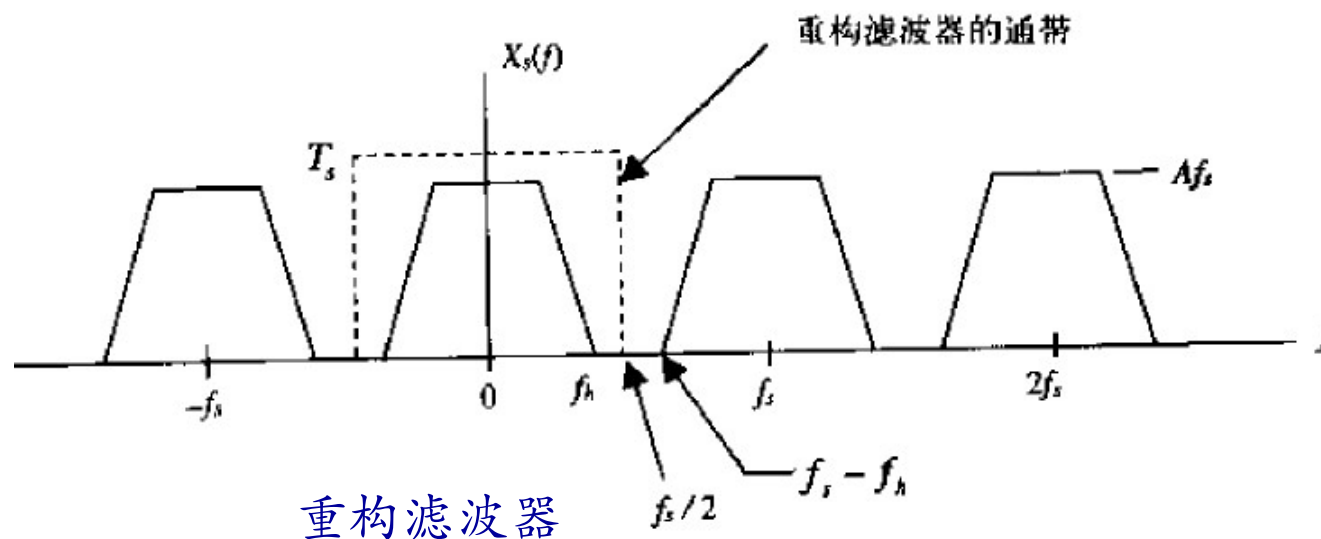
$$x_r(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \right] \otimes h(t)$$

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) h(t - kT_s)$$

问题： $h(t)=?$ ，在可以接受的计算负荷范围内获得满意的结果

第3.3.1章 理想重构

若带限信号使用超过 $2f_h$ 的采样频率进采样，则可以
通过带宽为 $f_s/2$ 的理想低通滤波器来重构。



如果 $f_s > 2f_h$ ，在 $f = \pm f_s$ 附近的频谱与在 $f = 0$ 附近的频谱将不会发生重叠。重构滤波器的输出为 $f_s X(f)$ ，或者，时域表示为 $f_s x(t)$ 。幅度缩放 $1/f_s = T_s$ 倍得到 $x(t)$ 。



第3.3.1章 理想重构

重构滤波器的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= T_s \int_{-f_s/2}^{f_s/2} \exp(j2\pi ft) df \\ &= T_s \frac{1}{j2\pi t} [\exp(j\pi f_s t) - \exp(-j\pi f_s t)] \\ &= T_s \frac{1}{\pi t} \sin(\pi f_s t) = \text{sinc}(f_s t) \end{aligned}$$

帶入重构信号

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)h(t - kT_s)$$

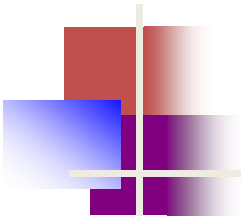


第3.3.1章 理想重构

重构信号形式

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - k\right)$$

结论：若 $x(t)$ 是带限，且采样速率足够高，以确保没有产生混叠误差，则 $x_r(t)=x(t)$ ，即可以得到信号的完全重构。



采样信号: $x_s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$

其傅里叶变换:

$$X_s(f) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T_s}), & \text{对全部 } f \\ \frac{1}{T_s} X(f), & |f| < W \end{cases}$$

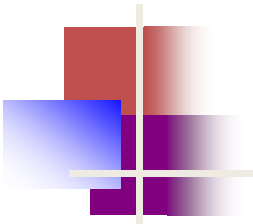
离散时间序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为

$$X_{DFT}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-j2\pi f n T_s)$$

比较上述两式, 可得

$$X(f) = T_s X_{DFT}(f), \quad |f| < W$$

得到模拟信号的傅里叶变换及其对应的已采样信号的DFT之间的关系

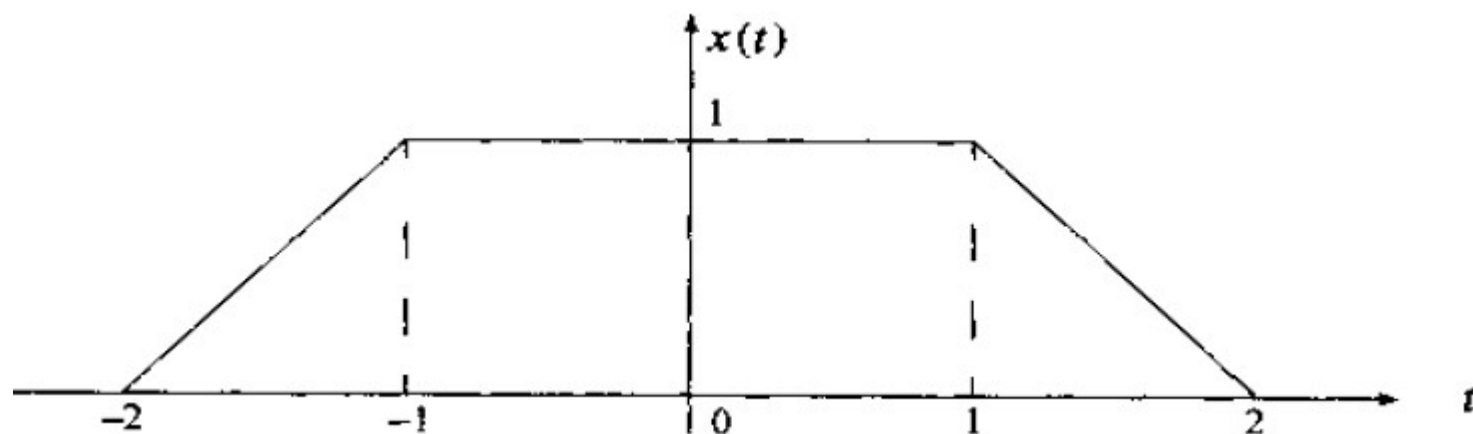


快速傅里叶变换(FFT)算法，可以对离散傅里叶变换完成数值计算。在这个算法中，用在间隔为 T_s 的点上所取得的 $x(t)$ 的 N 个样本序列来表示该信号。其结果是离散傅里叶变换 $X_d(f)$ 在间隔 $[0, f_s]$ 上的 N 个样本序列，其中 $f_s = 1/T_s = 2W$ 是奈奎斯特频率。当这些样本以 $\Delta f = f_s/N$ 为间隔时， Δf 值就给出了所得傅里叶变换的频率分辨率。

如果输入序列的长度 N 是2的幂，则FFT算法在计算上是高效的。在很多情况下，如果序列长度不是2的幂，则可以通过补零等技术使其成为2的幂

例2: 信号 $x(t)$ 为:

$$x(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \leq t \leq -1 \\ 1, & -1 < t \leq 1 \\ -t+2, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$



1. 用解析法求 $x(t)$ 的傅里叶变换, 并画出 $x(t)$ 的频谱。
2. 用 MATLAB 求出该傅里叶变换的数值解, 并画出结果。

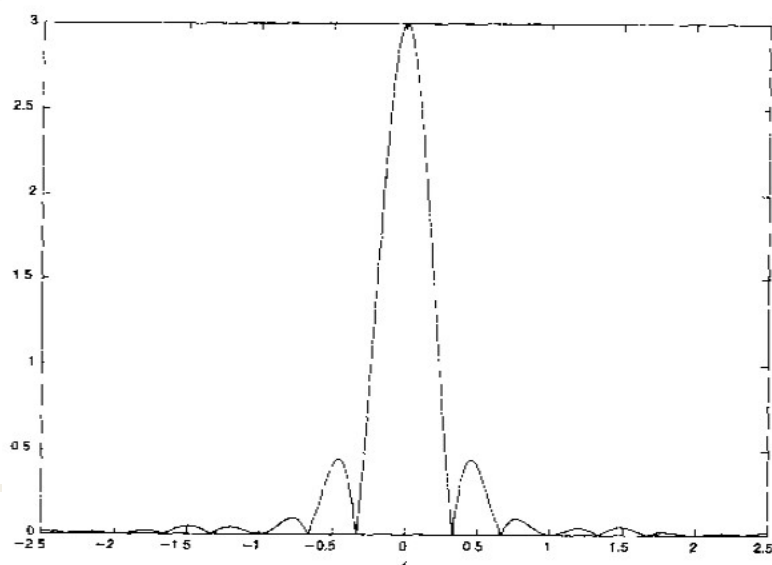
例2: 信号 $x(t)$ 可以写成:

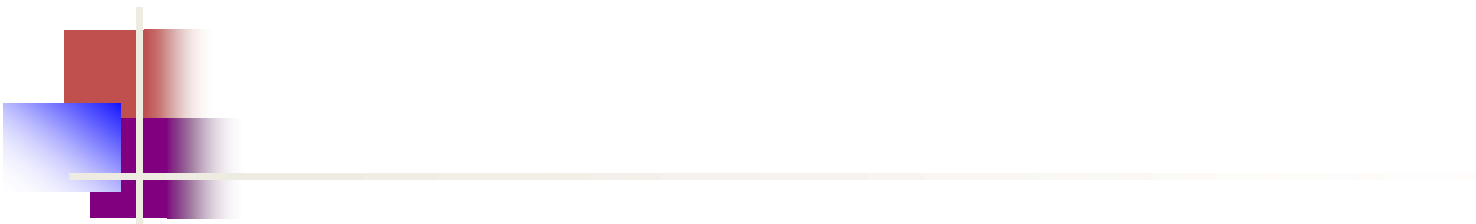
$$x(t) = 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - \Lambda(t)$$

因此有:

$$X(f) = 4\text{sinc}^2(2f) - \text{sinc}^2(f)$$

其中已经用了线性变换、尺度变换和 $\Lambda(t)$ 的傅里叶变换是 $\text{sinc}^2(f)$ 这些条件。
显然, 该傅里叶变换是实函数。幅度谱如图





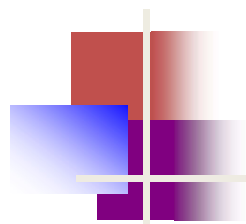
例2：为了使用Matlab求傅里叶变换，首先要给出信号带宽的大致估计。

因为这个信号相对平滑，其带宽正比于持续时间的倒数，该信号的持续时间为4。为了安全起见，带宽常取信号持续时间倒数的10倍。

即： $BW=10 \times 1/4=2.5$

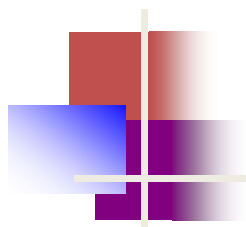
奈奎斯特频率是带宽的2倍，等于5。

因此采样间隔 $T_s=1/f_s=0.2$ ，即在信号的 $[-2,2]$ 区间内以 T_s 对信号进行采样。



```
echo on
ts=0.2; % set parameters
fs=1/ts;
df=0.01;
x=[zeros(1,10),0:0.2:1,ones(1,9),1:-0.2:0,zeros(1,10)];
[X,x,df1]=fftseq(x,ts,df); % derive the FFI
X1=X/fs; % scaling
f=[0:df1:df1*(length(x)-1)]-fs/2; % frequency vector for FFI
f1=[-2.5:0.001:2.5]; % frequency vector for analytic approach
y=4*(sinc(2*f1)).^2-(sinc(f1)).^2; % Exact Fourier Transform
```

(代码见c301.m)



```
]function [M, m, df]=fftseq(m, ts, df)
```

输入：

m 时间序列

ts 采样间隔

df 所需要的频率分辨率

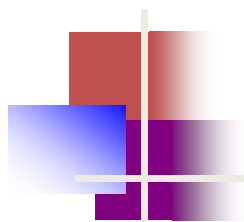
输出：

M 时间序列的FFT

m 补零后的时间序列

df 频率分辨率

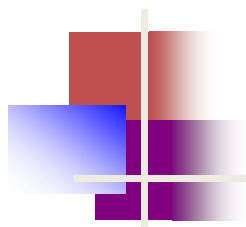
(代码见fftseq.m)



```
]function [M,m,df]=fftseq(m,ts,df)

fs=1/ts;
if nargin == 2
    n1=0;
else
    n1=fs/df;
end
n2=length(m);
n=2^(max(nextpow2(n1),nextpow2(n2)));
M=fft(m,n);
m=[m,zeros(1,n-n2)];
df=fs/n;
```

长度为41的信号
向量x通过补零到
256长度，以满足
频率分辨率的要
求，同时为进行
高效计算而使长
度成为2的幂。



```
y = nextpow2(x);
```


则y为大于等于x的最小的二的整数次幂的数字。

```
x=100
```

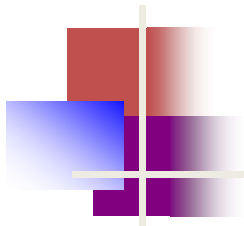
```
y=nextpow2(x);
```

```
y=7
```

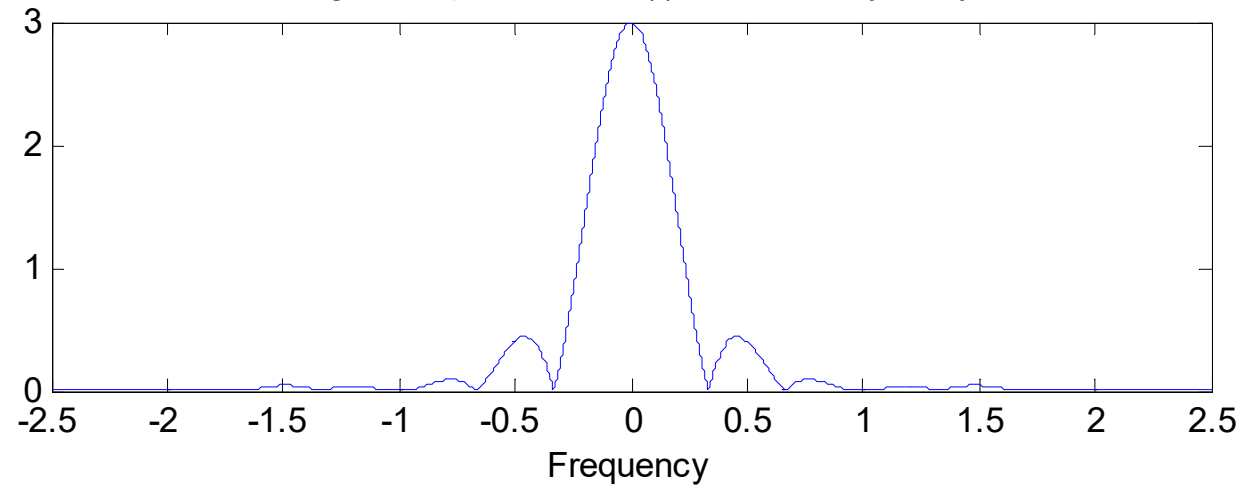
因为 $2^7=128$ ，而128是所有大于100的，二的整数次幂数字中最小的一个。



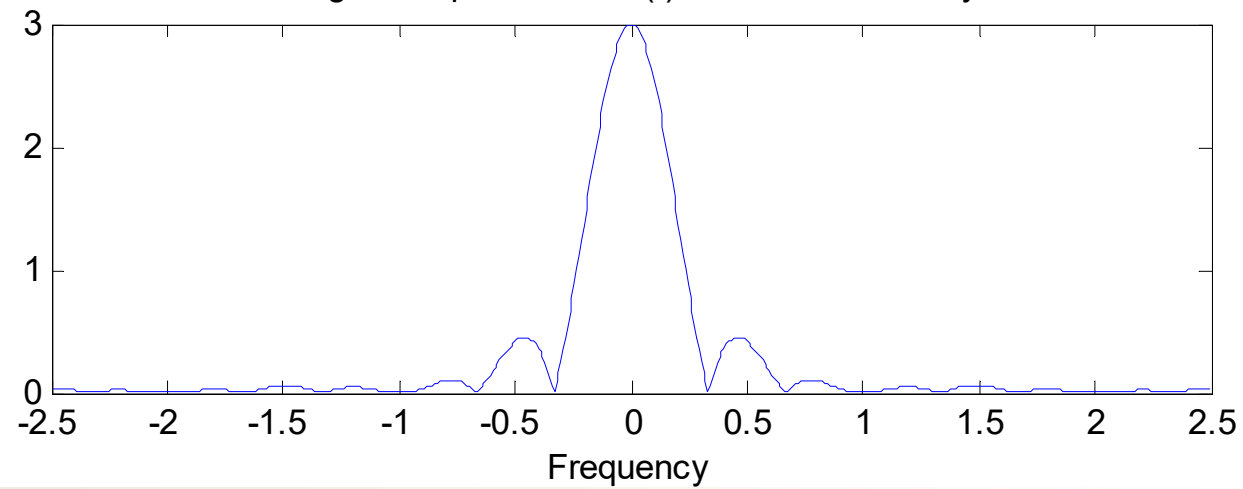
```
pause % Press akey to see the plot of the Fourier Transform derived analytically
clf
subplot(2,1,1)
plot(f1,abs(y));
xlabel('Frequency')
title('Magnitude-spectrum of x(t) derived analytically')
pause % Press akey to see the plot of the Fourier Transform derived numerically
subplot(2,1,2)
plot(f,fftshift(abs(X1)));
xlabel('Frequency')
title('Magnitude-spectrum of x(t) derived numerically')
```



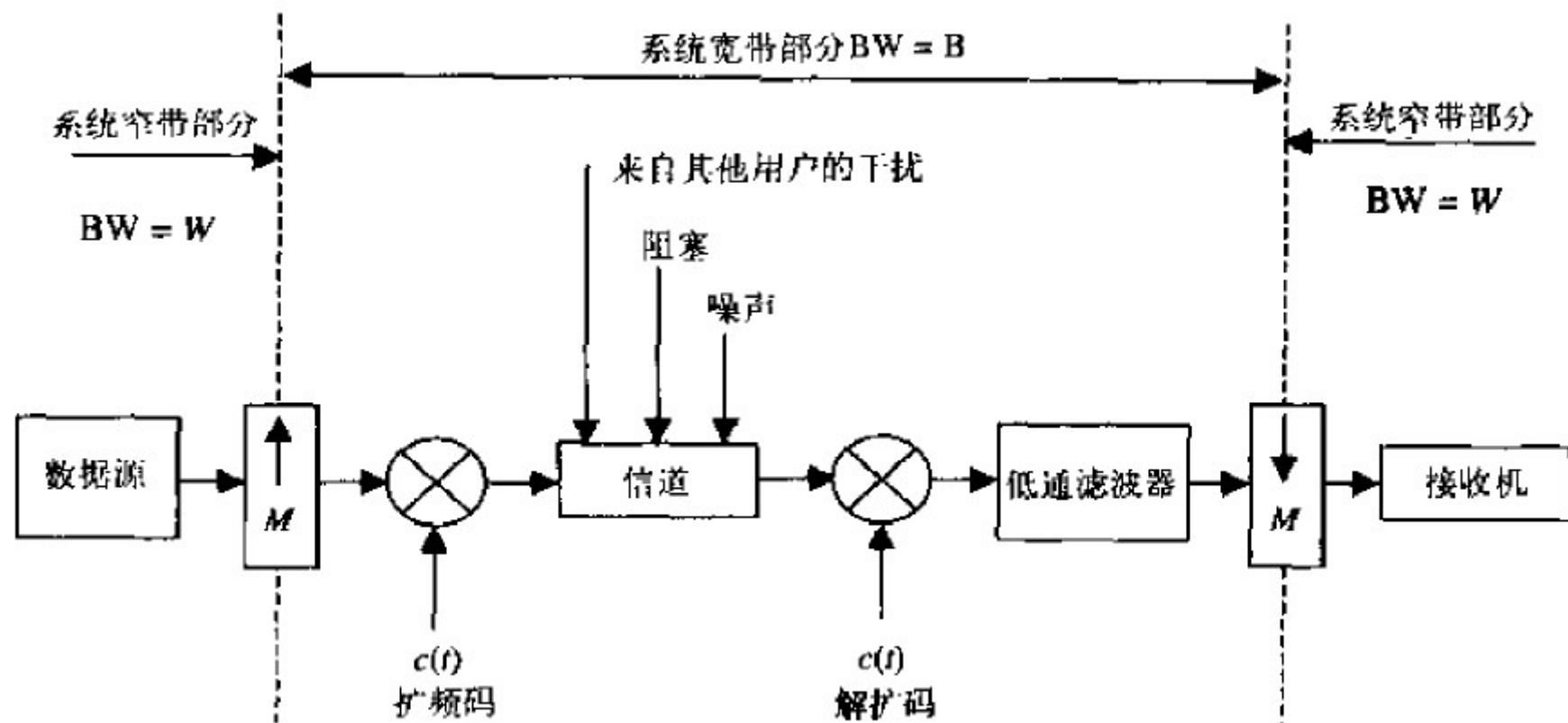
Magnitude-spectrum of $x(t)$ derived analytically



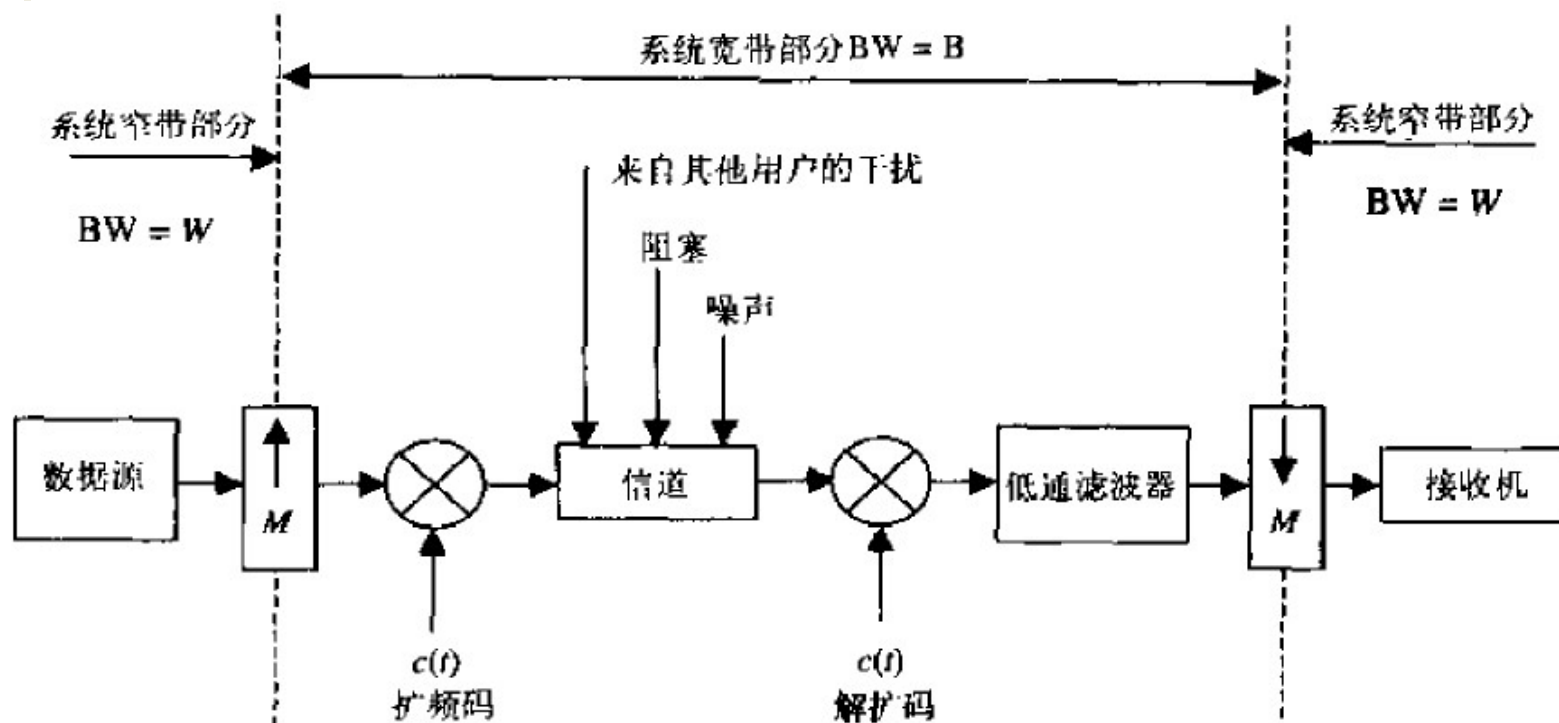
Magnitude-spectrum of $x(t)$ derived numerically



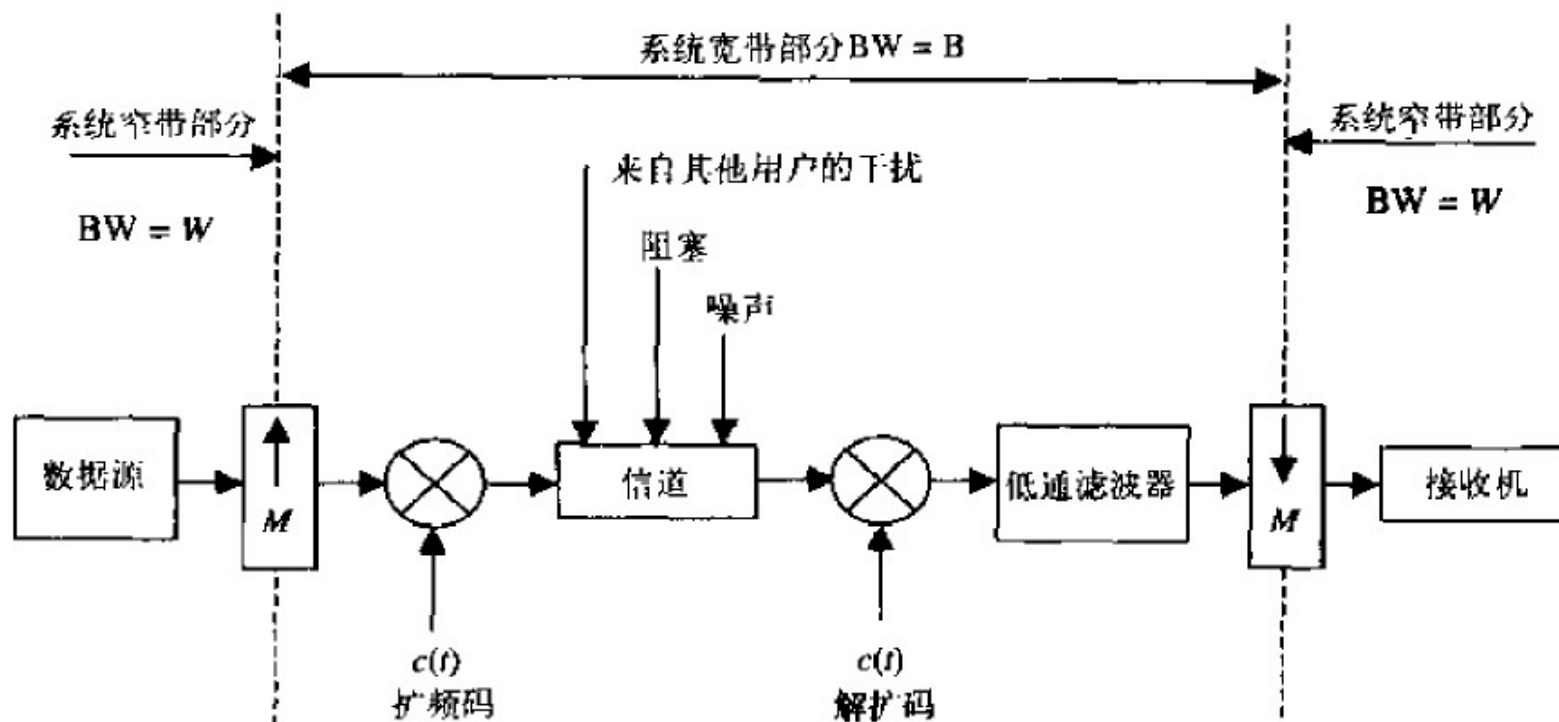
第3.3.2章 上采样和下采样



直接序列扩频系统



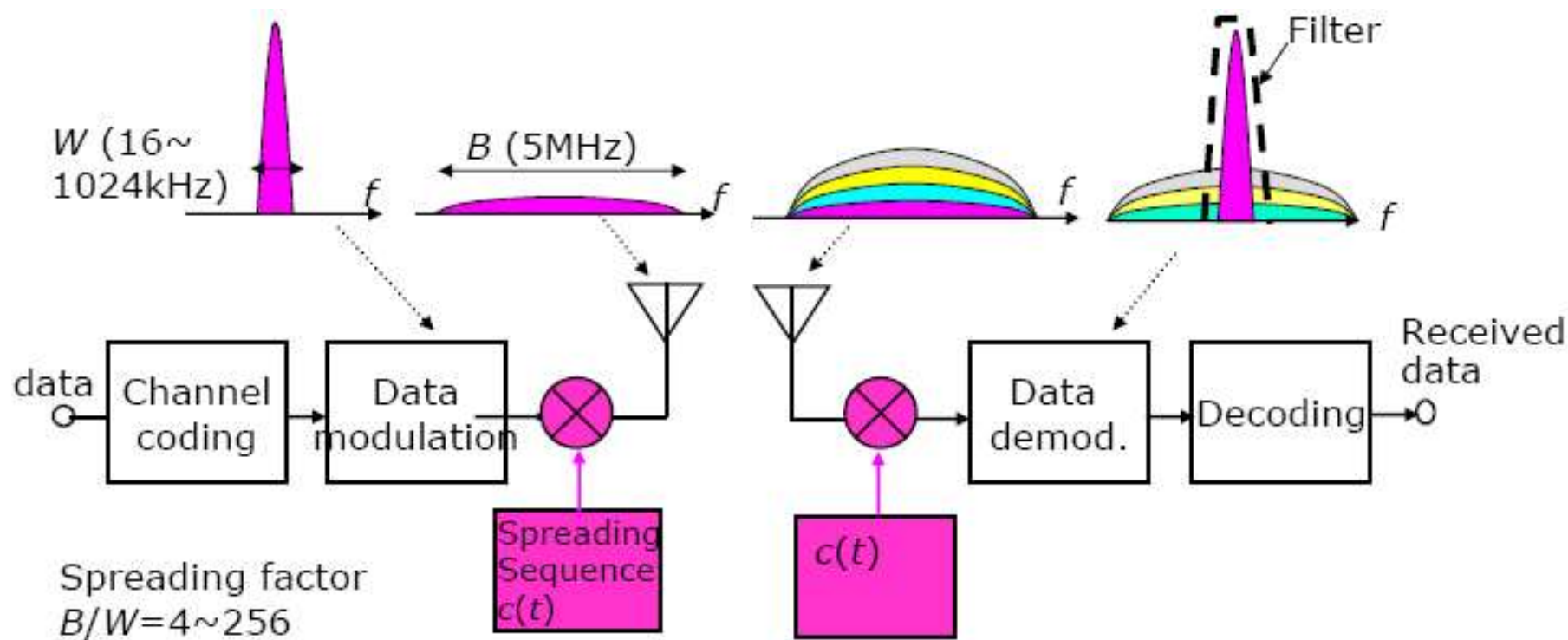
数据源产生一个具有窄带频谱带宽 W 的数据信号。一个宽带的扩频码 $c(t)$ 与数据信号相乘， $c(t)$ 是符号率远远高于数据率的二进制序列，扩频码率与数据率的比值成为系统的处理增益，乘上扩频码字 $c(t)$ ，会产生具有宽带 B 的宽带信号。



把经过信道的输出波形乘以解扩码。假设扩频码取值是 ± 1 ，并假设扩频码和解扩码完全相同，且被正确同步，则扩频码和解扩码相乘后有 $c^2(t)=1$ ，因此扩频和解扩不会影响信道。

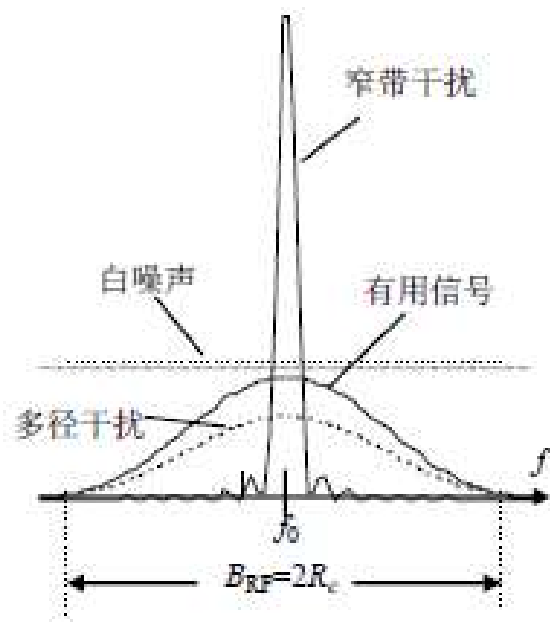
信号数据被扩频码乘了2次，而信道干扰乘了1次，因此，在接收端乘以解扩码后，进入低通滤波器输入端的数据信号又变成窄带信号，而所有其他信号分量则变成为宽带信号。

第3.3.2章 上采样和下采样

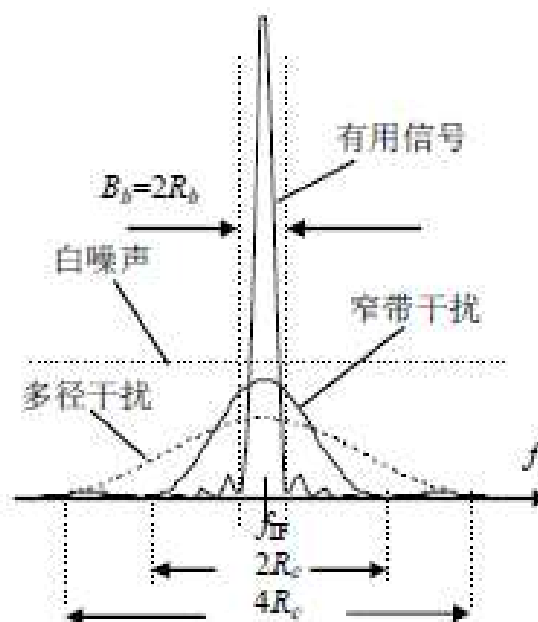


直接序列扩频系统

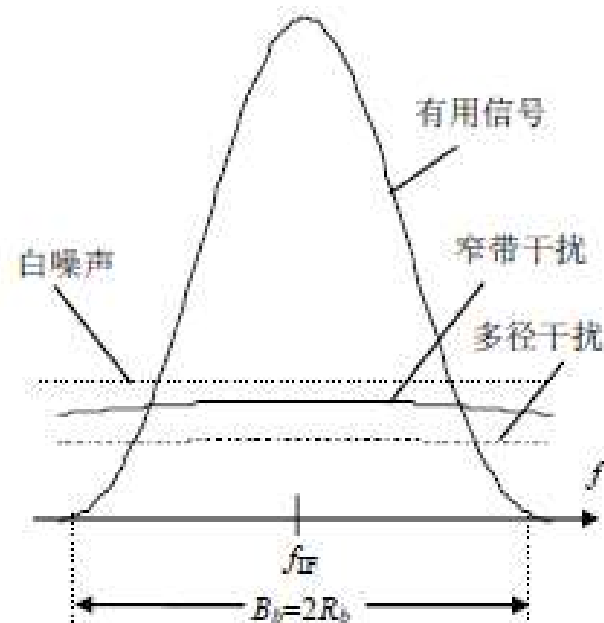
第3.3.2章 上采样和下采样



(a) 接收机输入



(b) 混频器输出



(c) 中频滤波器输出



第3.3.2章 上采样和下采样

问题提出：直序扩频系统中会同时出现窄带和宽带信号，如何确定采样频率？

如果在 $B \gg W$ 这种典型情况下，用宽带信号所需的采样率对窄带信号进行采样，其结果将导致仿真时间过大，效率会很低。理想的是每各信号的采样要使用适合本信号的采样率。

解决办法：采用两个采样率在

窄带到宽带的分界处提高采样频率通过上采样后加内插来完成；

在宽带到窄带的分界处降低采样频率通过抽值来完成。

上采样和内插

上采样提高采样频率，使得采样周期降低M倍

采样周期： $T_u = T_s / M$

采样时刻： $t = nT_s / M$

采样过程：从原有采样值 $x(kT_s)$ 生成新采样值 $x(kT_s / M)$

例：通过对重构信号 $x_r(t)$ 在 $t = nT_s / M$ 处内插来构造一组新的采样，其中重构信号为

$$x_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - k\right)$$

采样信号：

$$x_i(nT_u) = x(nT_s / M) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}\left(\frac{n}{M} - k\right)$$

上采样和内插

采样信号:

$$x_i(nT_u) = x(nT_s / M) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}(\frac{n}{M} - k)$$

因为sinc()函数是无限扩展的。对sinc()函数进行截断，为实际的信号

$$x_i(nT_u) = x(nT_s / M) \cong \sum_{k=-L}^L x(kT_s) \text{sinc}(\frac{n}{M} - k)$$

增大L就可以降低内插的误差。由于每个内差点需要 $2L+1$ 个样点，对于大L的情况，计算负荷往往是难以接受的。因此，在计算负荷和精度之间需要折中。

在内插的过程中是会产生时延 LT_s ，在一般的仿真中可以忽略。



线性内插器

线性内插器比sinc()内插器要简单得多，所需要的计算量也会小得多。

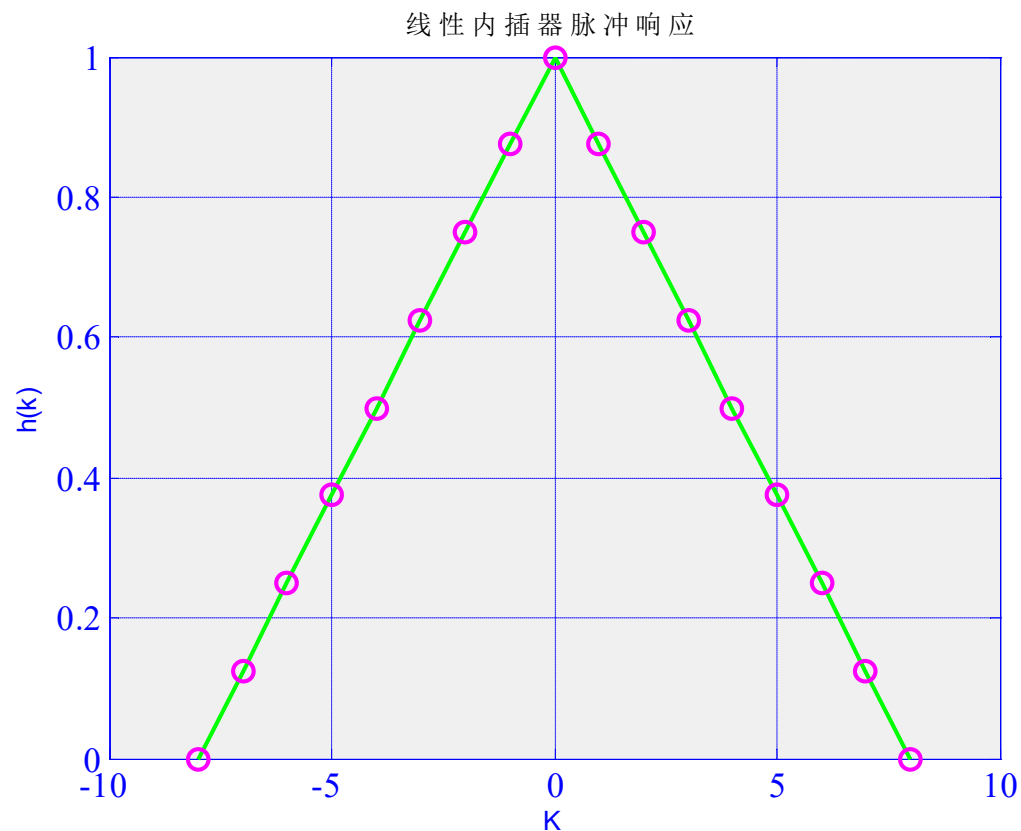
线性内插器的脉冲响应

$$h[k] = \begin{cases} (M - |k|) / M, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(M - 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

公式中有h(k)的2M-1个非零值。

线性内插器

```
% File: lininterp.m  
function h=lininterp(M)  
%M=8;  
h1=zeros(1,(M-1));  
for j=1:(M-1)  
    h1(j)=j/M;  
end  
h=[0,h1,1,flip1r(h1),0];  
%plot([-M:M],h,'go')  
% End of function file
```



(代码见c3_lininterp.m)



线性内插器

$B = \text{fliplr}(A)$

将矩阵A的列绕垂直轴进行左右翻转

如果A是一行向量， $\text{fliplr}(A)$ 将A中元素顺序进行翻转。

如果A是一列向量， $\text{fliplr}(A)$ 还等于A

如果A是一个 3×2 的矩阵 如果A是一个行向量

```
A = [1 4  
     2 5  
     3 6]
```

```
fliplr(A)
```

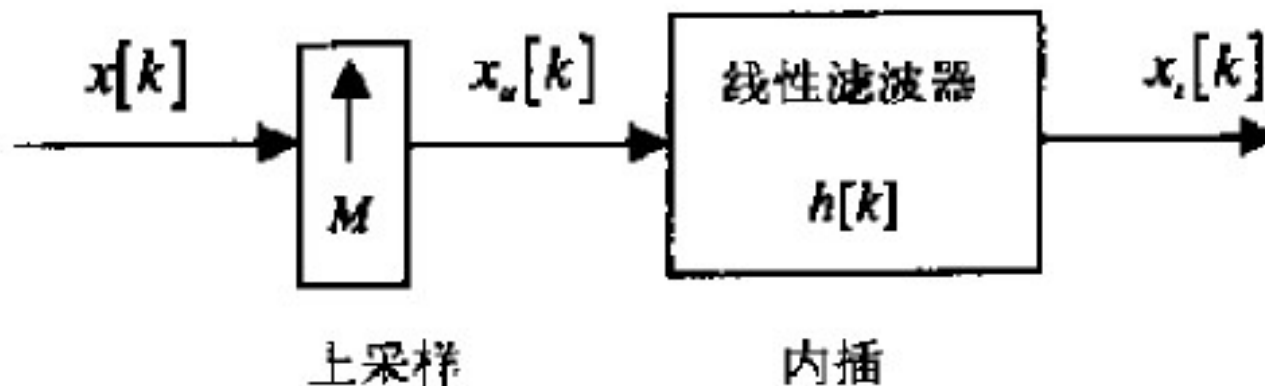
```
ans = [4 1  
       5 2  
       6 3]
```

```
A = [1 3 5 7 9]
```

```
fliplr(A)
```

```
ans = [9 7 5 3 1]
```


线性内插器



上采样在离散样点集合中分两步实现。

第一步：根据下式从从 $x[k]$ 得到 $x_u[k]$

$$x_u[k] = \begin{cases} x[k/M], & k = 0, \pm M, \pm 2M, \dots, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

该操作在原始序列 $x[k]$ 的每两个采样点之间放入 $M-1$ 个零值采样。



线性内插器

上采样在离散样点集合中分两步实现。

第二步：通过 $x_u[k]$ 和线性内插器的冲激响应 $h[k]$ 的卷积操作完成内插。

```
% File: upsample.m
```

```
function out=upsample(in_seq,M)
```

```
%M=3;in_seq=[1 2 3 4];
```

```
L=length(in_seq);
```

```
out=zeros(1,(L-1)*M+1);
```

```
for j=1:L
```

```
    out(M*(j-1)+1)=in_seq(j);
```

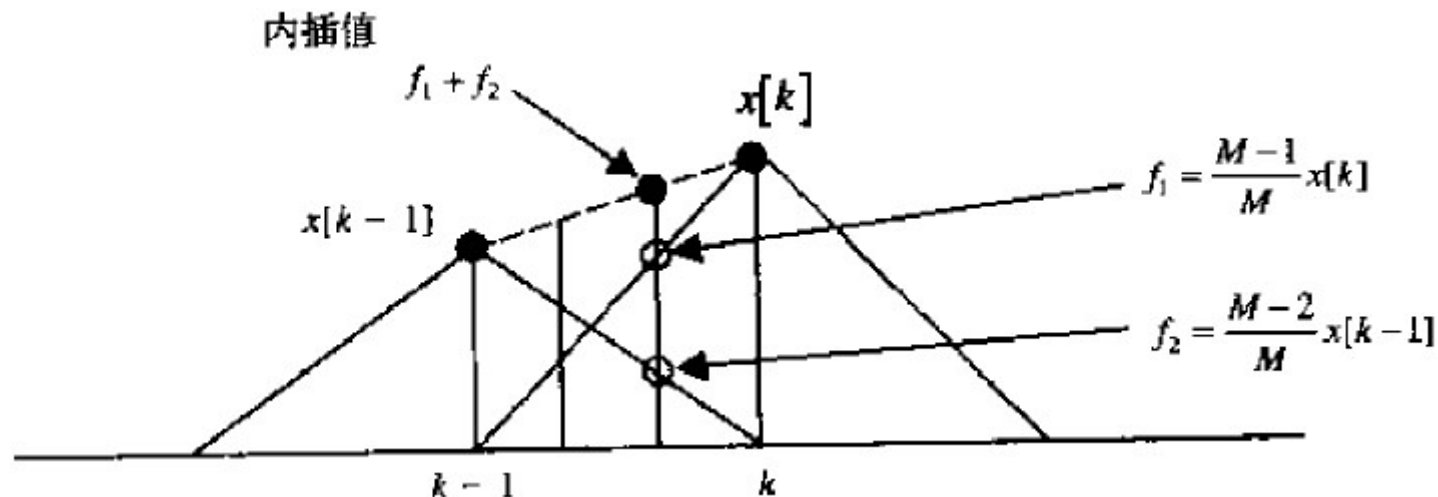
```
end
```

```
% End function file.
```

```
%out
```

(代码见c3_upsamp.m)

线性内插器



上图是 $M=3$ 的线性内插过程。

在上采样中只用到两个采样点，有时延 T_s 。

如上图所示，插入点的值是通过通过对 $x[k]$ 和 $x[k-1]$ 两点的贡献 $((M-1)/M)x[k]$ 和 $((M-2)/M)x[k-1]$ 求和得到的。

因而，当 $M=3$ 时，插入点的值为

$$\frac{2}{3}x[k] + \frac{1}{3}x[k-1]$$



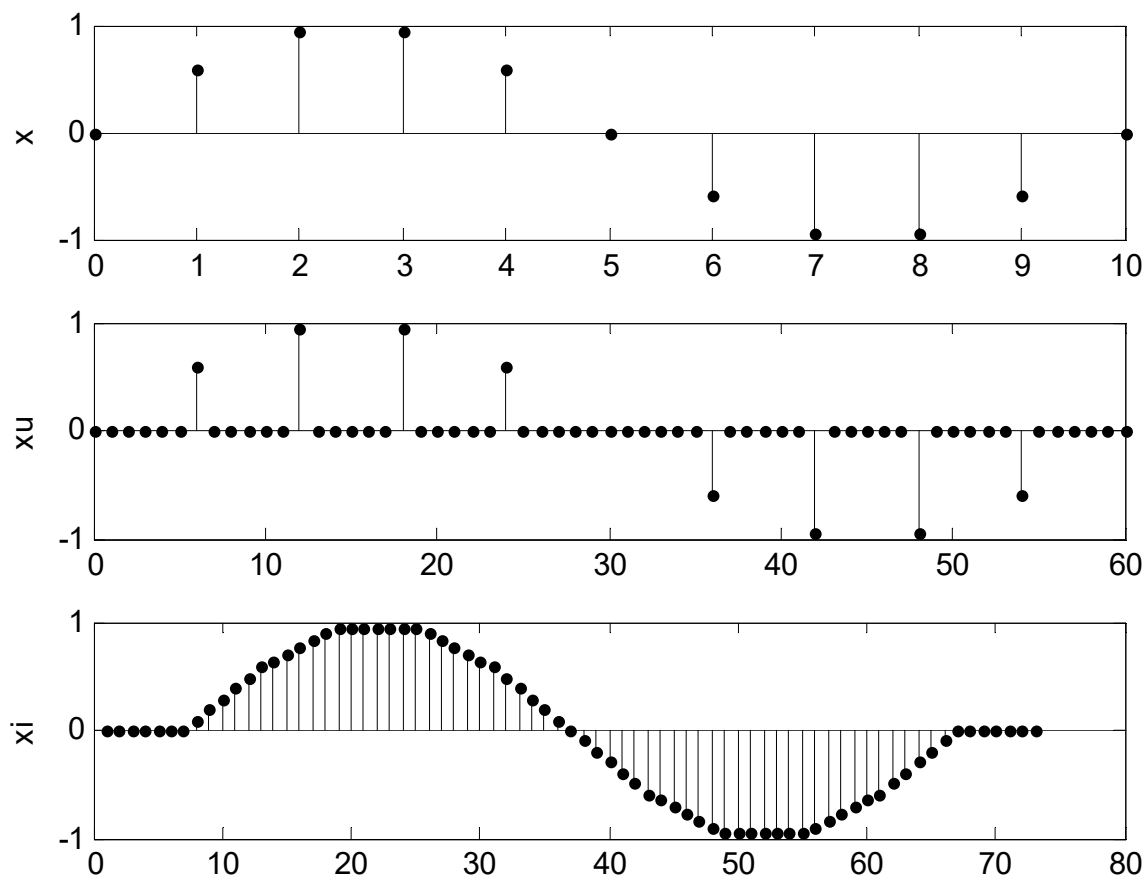
线性内插器

例3：对正弦波的采样进行内插，对基本采样结果 $x[k]$ 进行 $M=6$ 产生上采样值 $xu[k]$ ，由 $M=6$ 的线性内插得到样点序列的 $xi[k]$ 。

```
M = 6; % upsample factor
h = c3_lininterp(M); % imp response of linear interpolator
t = 0:10; % time vector
tu = 0:60; % upsampled time vector
x = sin(2*pi*t/10); % original samples
xu = c3_upsamp(x,M); % upsampled sequence
subplot(3,1,1)
stem(t,x,'k.')
ylabel('x')
subplot(3,1,2)
stem(tu,xu,'k.')
ylabel('xu')
xi = conv(h,xu);
subplot(3,1,3)
stem(xi,'k.')
ylabel('xi')
% End of script file.
```

(代码见c302.m)

线性内插器



如果B和W相差太多，那么通常最有效的方法是对仿真中的每个具有不同带宽的信号采用合适的采样频率



下采样 (抽值)

下采样降低采样频率，用单个采样点代替M个采样来完成。下采样器输出的采样点是通过在采样过程中对采样周期增加M倍来完成，因而下采样器输出的采样点和采样值，记做

采样点： $x_d(kT_d) = x(kMT_s)$

采样值： $x_d[k] = x[kM]$

注意：要确保下采样信号不出现混叠现象



小结

采样:

- 低通采样定理;
- 带通采样定理;
- 对于带通信号, 如果采样频率超过其对应低通带限信号带宽的两倍, 就可以对低通信号进行采样, 并从采样值中恢复这个带通信号;
- 对于带通信号, 如果采样频率在 $2B$ 和 $4B$ 之间, 带通信号也可以采样和重构, 这里 B 是要采样带通信号的带宽。



小结

量化：

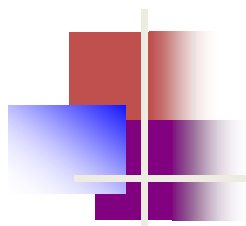
- 由于采样点的值是用有限长的码子来量化的，所有仿真中都会出现量化误差；
- 两种类型的量化误差（定点数表示和浮点数表示）；
- 用定点数表示时，字长每增加一个bit，量化的信噪比就增加6dB；
- 量化误差永远不会为零



小结

重构和内插:

- 用超过低通信号带宽两倍的频率对信号进行采样，以 $\sin(x)/x$ 波形为权重对每个采样点进行加权，这等效为让采样点通过一个理想低通滤波器，结构就是定义在所有时间值上的波形；
- 上采样，增加有效的采样频率；
- 下采样，降低有效的采样频率；
- 当系统中包含的信号带宽差别很大时，可以使用多采样速率进行系统仿真，如扩频通信系统。



实验一：使用每秒10个采样的频率 f_s 对信号

$$x(t) = 5\cos(6\pi t) + 3\sin(8\pi t)$$

进行采样，画出 $X(f)$ 和 $X_s(f)$ 。假定重构滤波器是带宽为 $f_s/2$ 的理想低通滤波器，具有通带增益 $T_s=1/f_s$ ，画出重构滤波器的输出。

实验二：用每秒7个采样点的采样频率重复上面的问题。