

通信系统仿真

第4章带通的低通仿真模型

何晨光

哈尔滨工业大学

电子与信息工程学院

Communication Research Center



第4章 带通的低通仿真模型

4.1 带通信号的低通复包络

时域

频域

随机带通信号的正交模型

信噪比

4.2 线性带通系统



第4章 带通的低通仿真模型

如前章所述，要产生射频带通信号，需要大量的采样值。

作为带通信号，射频信号的载波频率通常超过带宽 B 几个数量级。在仿真中使用带通信号的低通表示，通常会极大地加快仿真的运行，并能大大地降低对数据存储和信号处理的要求。

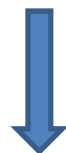
在仿真中如何使用信号和系统的低通仿真模型将是本章的重点。

4.1 带通信号的低通复包络 时域

一般的带通信号可表示成

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$

这里 $A(t)$ 是信号的幅度，或者说是实包络， $\phi(t)$ 是相位偏移。如果上式是调制器的输出信号， f_0 是载波频率， $2\pi f_0 t$ 是未调制载波的瞬时相位。

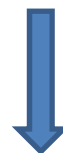


$$\exp(j\theta) = \cos \theta + j \sin \theta$$

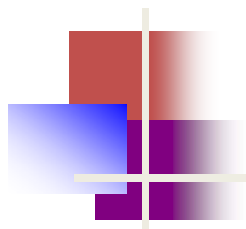
$$x(t) = \operatorname{Re}\{A(t) \exp[j\phi(t)] \exp(j2\pi f_0 t)\}$$

即

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t)\}$$



$$\tilde{x}(t) = A(t) \exp[j\phi(t)]$$



$$\tilde{x}(t) = A(t) \cos \Phi(t) + jA(t) \sin \Phi(t)$$

$$\tilde{x}(t) = A(t) \exp[j\phi(t)]$$



就是实信号 $x(t)$ 的复包络。

通常可用矩形波的形式来表示复包络，即

$$\tilde{x}(t) = x_d(t) + jx_q(t)$$

复包络的实部和虚部分别代表 $x(t)$ 的同相分量和正交分量。因此：

$$x_d(t) = A(t) \cos \Phi(t)$$

$$x_q(t) = A(t) \sin \Phi(t)$$

实际应用中所关心的 $A(t)$ 和 $\phi(t)$ 是低通函数，其带宽远小于 f_0 ，所以 $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 也是低通信号

4.1 带通信号的低通复包络 时域

根据复数的定义, $A(t), \phi(t), x_d(t), x_q(t)$ 有如下的关系

$$\Phi(t) = \arctan \frac{x_q(t)}{x_d(t)} \quad A(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{x_d^2(t) + x_q^2(t)}$$

时域信号 $x(t)$ 可以写成: $x(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t)\}$



$$\tilde{x}(t) = x_d(t) + jx_q(t)$$

$$x(t) = \operatorname{Re}\left\{\left[x_d(t) + jx_q(t)\right]\left[\cos(j2\pi f_0 t) + j\sin(j2\pi f_0 t)\right]\right\}$$

化简:

$$x(t) = x_d(t) \cos(j2\pi f_0 t) - x_q(t) \sin(j2\pi f_0 t)$$



$$\cos[a + b] = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$



4.1 带通信号的低通复包络 时域

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ x_d(t) = A(t) \cos \Phi(t) \\ x_q(t) = A(t) \sin \Phi(t) \end{array}$$

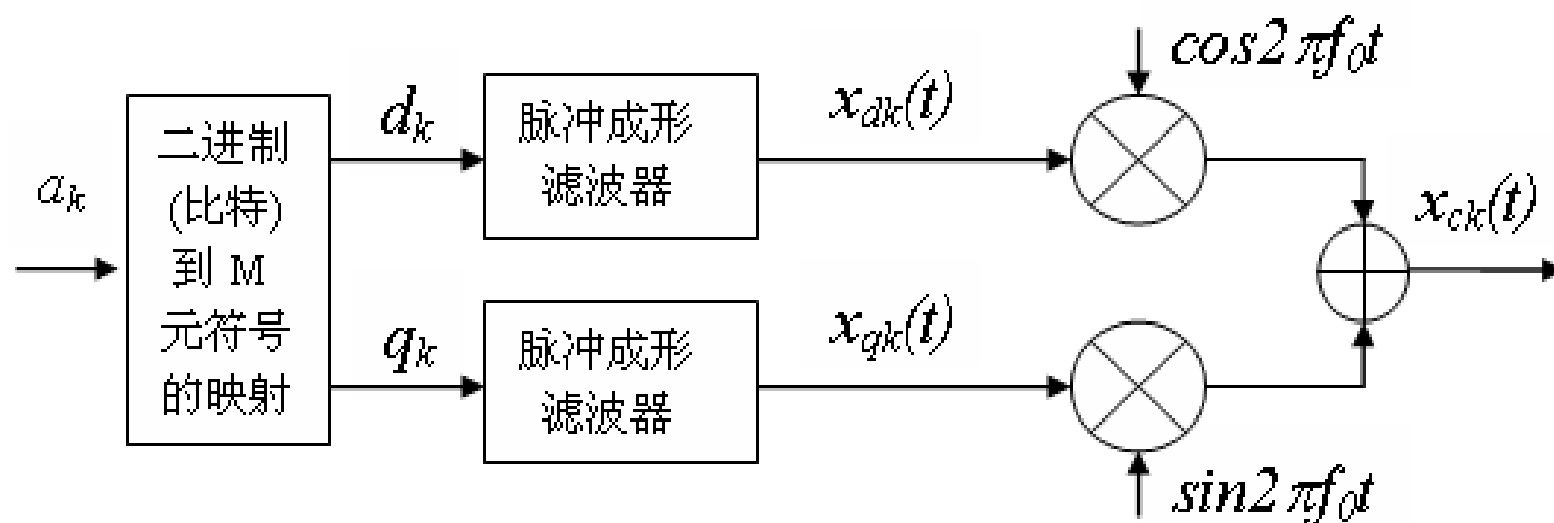
$$x(t) = x_d(t) \cos(j2\pi f_0 t) - x_q(t) \sin(j2\pi f_0 t)$$

注意：通常选择 f_0 为带通信号的中心频率， f_0 是可以任意选的，可以根据方便性原则来选择。

但是， $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 取决于 f_0 ，故仿真时要选取合适的 f_0 以便使计算量减到最小。

4.1 带通信号的低通复包络 时域

数字调制器的仿真模型（带通模型）

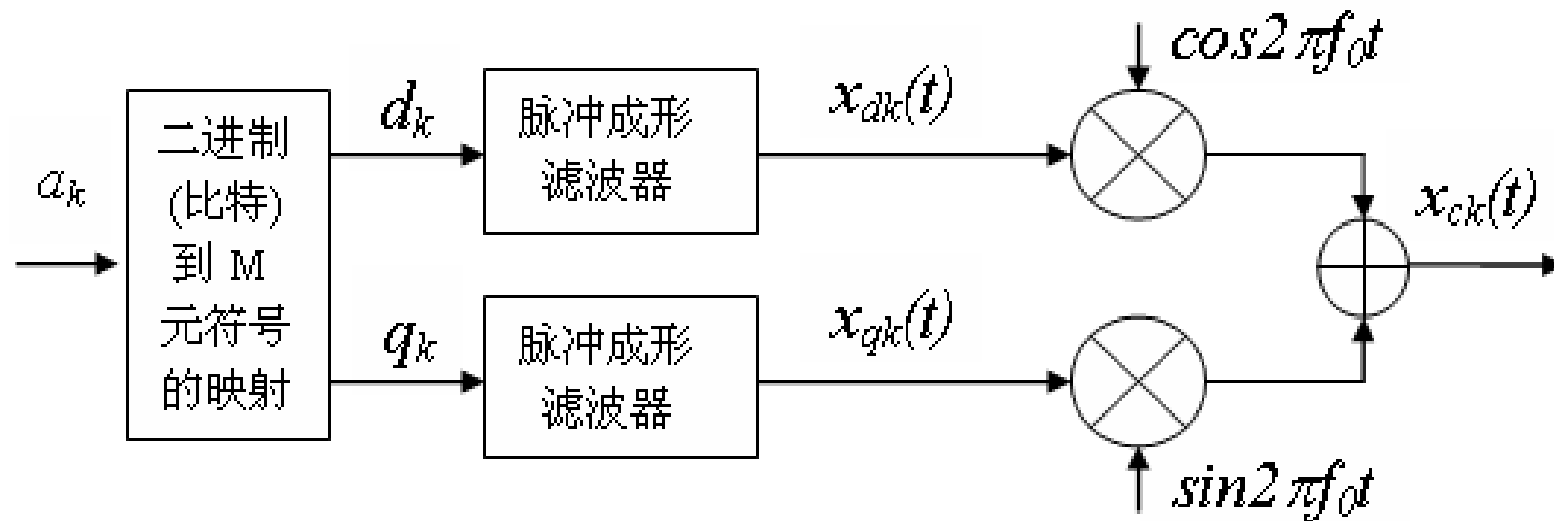


该模型的输出是一个带通信号 $x_{ck}(t)$ 。

低通模型的仿真输出是 $x_{dk}(t)$ 和 $x_{qk}(t)$ ，由此可以确定 $x_{ck}(t)$ 的低通复包络。

4.1 带通信号的低通复包络 时域

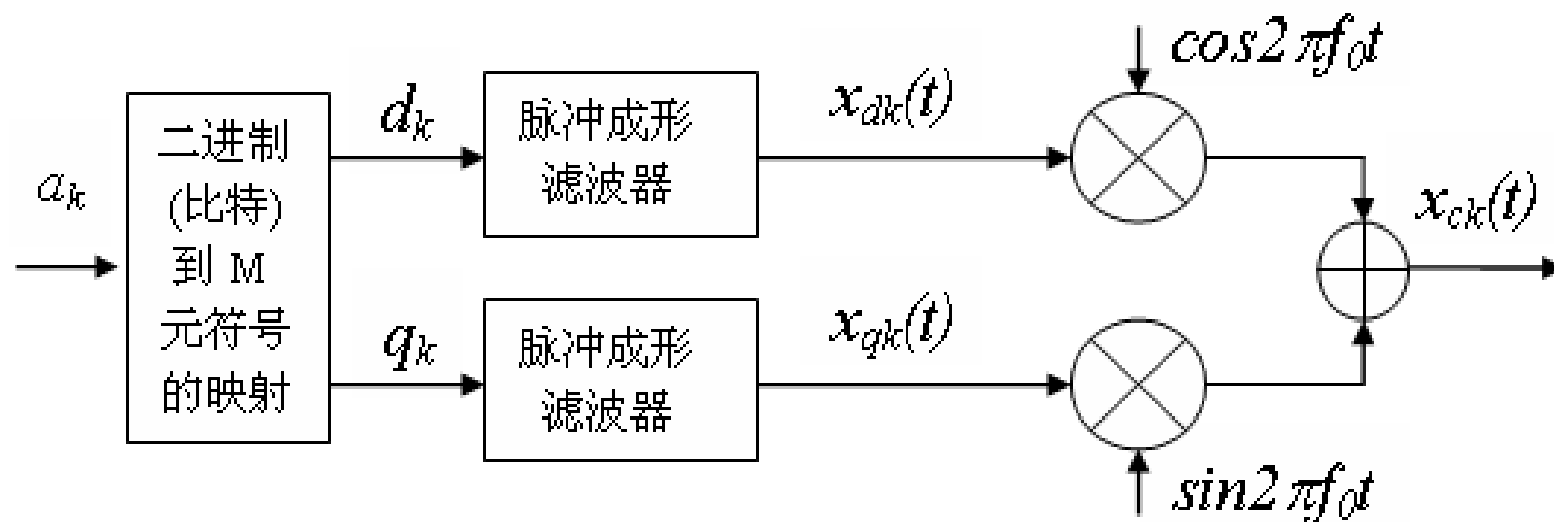
数字调制器的仿真模型（带通模型）



a_k 表示二进制数据流，对于M进制信息，b比特信息量组合在一起形成一个数据符号，这样在第k个信号间隔内传输的信号可以携带多于1比特的信息量。通常有 $M=2^b$ 。

4.1 带通信号的低通复包络 时域

数字调制器的仿真模型（带通模型）

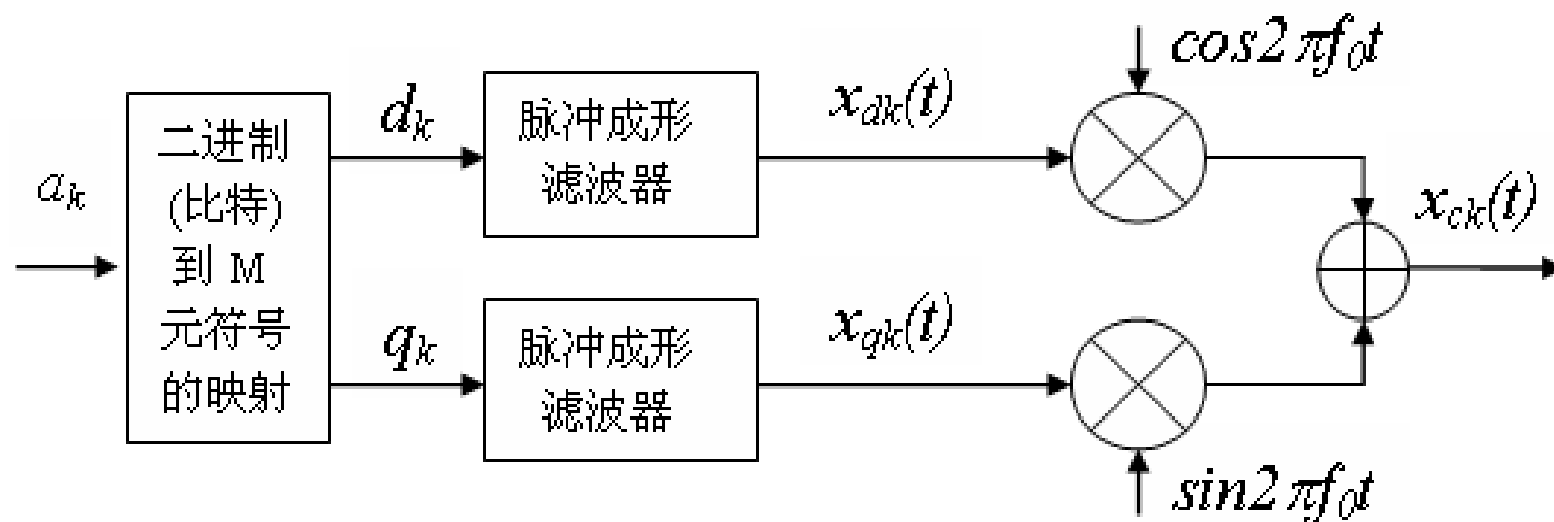


完成了b个比特组合形成一个M进制符号的功能，映射器的输出是第k个符号的同相和正交分量，用 d_k 和 q_k 表示。

第k信号本身可以看作是一个复数值 $s_k = d_k + jq_k$

4.1 带通信号的低通复包络 时域

数字调制器的仿真模型（带通模型）



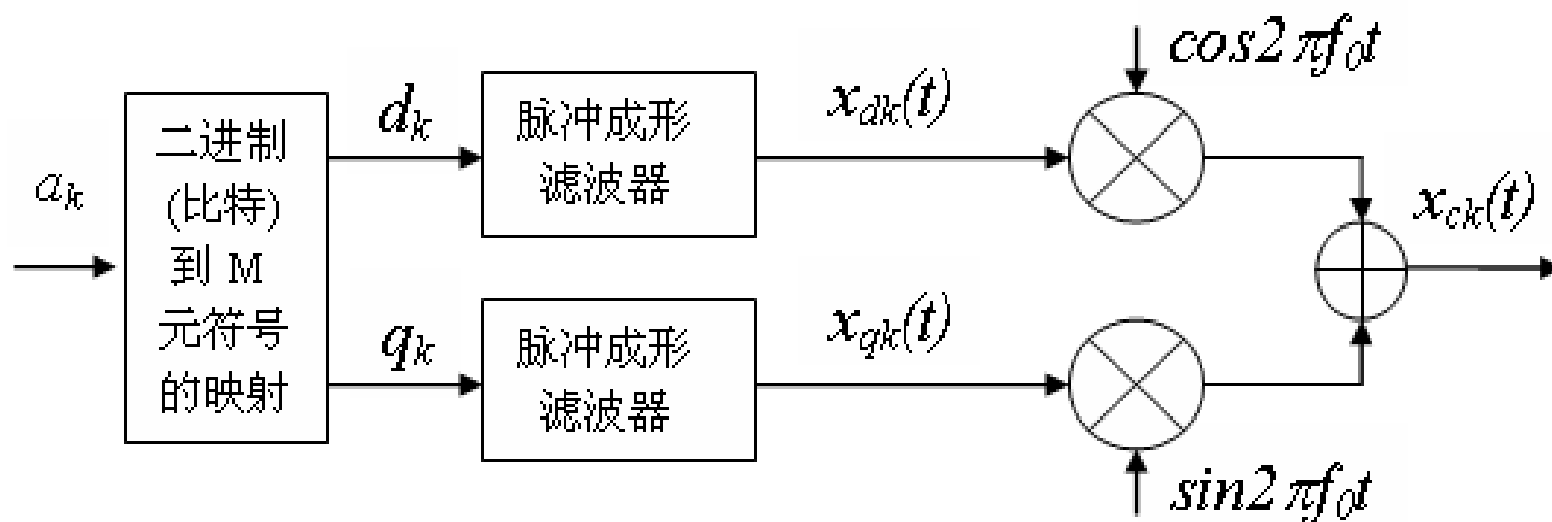
脉冲成形滤波器的冲激响应记做 $p(t)$ ，使第 k 个信号间隔内， $kT < t < (k+1)T$ ，同相信号和正交信号为图中 $x_{dk}(t)$ 和 $x_{qk}(t)$

$$x_{dk}(t) = d_k p(t - kT)$$

$$x_{qk}(t) = q_k p(t - kT)$$

4.1 带通信号的低通复包络 时域

数字调制器的仿真模型（带通模型）



第k个信号间隔内发射机的输出为

$$x_{ck}(t) = x_{dk}(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_{qk}(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

相应的离散时间信号模型

$$x_{ck}(nT) = x_{dk}(nT) \cos 2\pi f_0 nT - x_{qk}(nT) \sin 2\pi f_0 nT$$



4.1 带通信号的低通复包络 时域

散点图与星座图

一个信号空间被定义为由K个正交归一的基函数 $\phi_i(t)$, $i=1,2,\cdots,K$, 所产生的K维空间, 而在这个空间的信号以空间中的向量表示。

对于M进制系统, 在第k个信号间隔内发射的信号可表示为

$$x_c(t) = \sum_{i=1}^K x_{im} \phi_i(t), \quad kT < t < (k+1)T, \quad m=1,2,\cdots,M$$

第m个信号的向量表示 $X_m = [x_{1m} \ x_{2m}, \cdots, x_{Km}]$

$|X_m|^2$ 代表信号的能量

点 X_m , $m=1,2,\cdots,M$ 的K维图定义为信号的星座。



4.1 带通信号的低通复包络 时域

散点图与星座图

与信号相应的散点图是 $x_q(t)$ 相对于 $x_d(t)$ 的平面图，可按照实带通信号的低通复包络来定义。

若 $x_q(t)=0$ 或 $x_d(t)=0$ ，散点图的维数为1；否则散点图的维数是2。

$K=2$ 时，散点图和星座图是紧密相关的

$K>2$ 时，这种关系就消失了

4.1 带通信号的低通复包络 时域

例1 (QPSK) 为了构造一个QPSK信号, 数据符号 a_k 是通过每次取两个二进制符号构成的, 因此每个数据符号由二进制组00,01,10,11中的一个组成。带通QPSK信号在第 k 个信号间隔有以下形式

$$x_{ck}(t) = A_c \cos(2\pi f_0 t + \phi_k), \quad kT < t < (k+1)T$$

这里 ϕ_k 取 $+\pi/4, -\pi/4, +3\pi/4, -3\pi/4$ 中的一个值。

与 $x_{ck}(t)$ 相应的复包络可表达为:

$$\tilde{x}_{ck}(t) = \operatorname{Re}\{A_c \exp(j\phi_k)\}$$

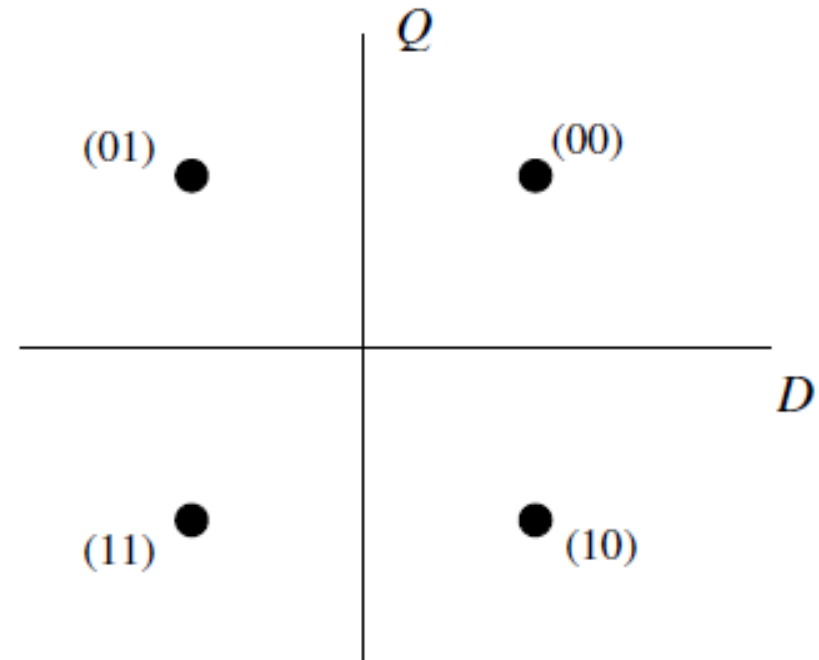
由此可知其同相分量和正交分量为:

$$x_{dk}(t) = A_c \cos \phi_k \quad x_{qk}(t) = A_c \sin \phi_k$$

4.1 带通信号的低通复包络 时域

在QPSK信号的星座图中每一个点对应于一个二进制符号，这对符号是由位到符号的映射决定的。

每对二进制符号映射到QPSK符号的机制可以是任意的，但经常采用如右图所示的影视，即格雷码映射。



格雷码映射的信号空间中，最邻近的码只有一个二进制符号不同。这样的设计是合理的，因为差错率通常是信号中点与点之间的欧几里得距离的单调递减函数。

4.1 带通信号的低通复包络 时域

```
levelx = input('Number of D levels > ');  
levely = input('Number of Q levels > ');  
m = input('Number of symbols > ');  
n = input('Number of samples per symbol > ');  
bw = input('Filter bandwidth, 0<bw<1 > ');  
%  
[xd,xq] = qam(levelx,levely,m,n);  
%  
[b,a] = butter(6,bw);           % determine filter coefficients  
yd = filter(b,a,xd);           % filter direct coefficient  
yq = filter(b,a,xq);           % filter quadrature coefficient
```

(代码见c401.m)

同相（D轴）和正交（Q轴）的阶数可以独立的给定，对于QPSK这两个参数都是2。脉冲成形滤波器是6阶巴特沃思滤波器，仿真用滤波器带宽等于符号率。



4.1 带通信号的低通复包络 时域

```
]function [xd,xq] = qam(levelx,levely,m,n)
    xd = mary(levelx,m,n);
    xq = mary(levely,m,n);
    % End of function file.
```

输入：

levelx 同相（D轴）的阶数

levely 正交（Q轴）的阶数

m 符号个数

n 每个符号的采样数



4.1 带通信号的低通复包络 时域

```
]function y= mary(levels,m,n)
[% m = number of symbols
-% n = samples per symbol
    l = m*n;                                % Total sequence length
    y = zeros(1,l-n+1);                     % Initialize output vector
    lm1 = levels-1;
    x=2*fix(levels*rand(1,m))-lm1;          M个符号的+1或者-1
]for i = 1:m                                % Loop to generate info symbols
        k = (i-1)*n+1;
        y(k) = x(i);
-end
-y = conv(y,ones(1,n));                     % Make each symbol n samples
```

仿真中从未明确形成为组合方式，而是形成符号，
表示一对比特位



4.1 带通信号的低通复包络 时域

conv (向量卷积运算)

```
p = [1 2 3];q=[1 1];
```

```
conv(p,q)
```

```
ans =
```

```
1    3    5    3
```

4.1 带通信号的低通复包络 时域

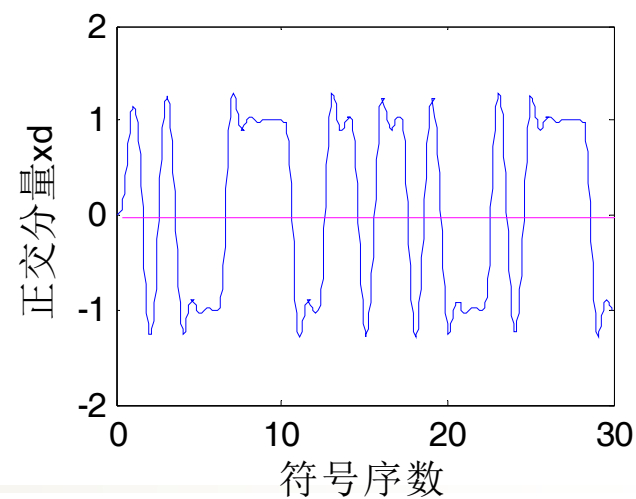
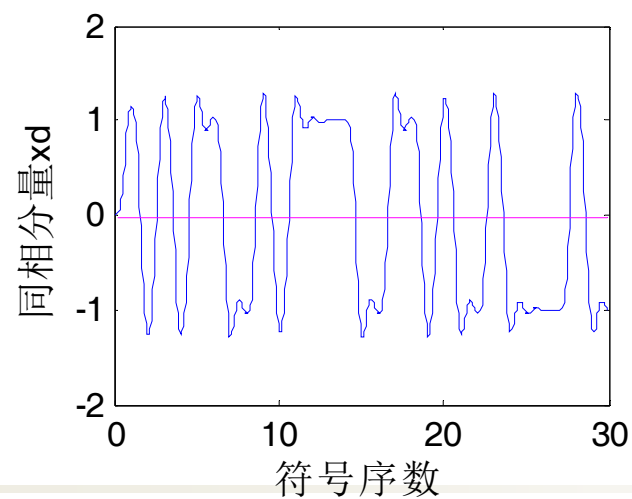
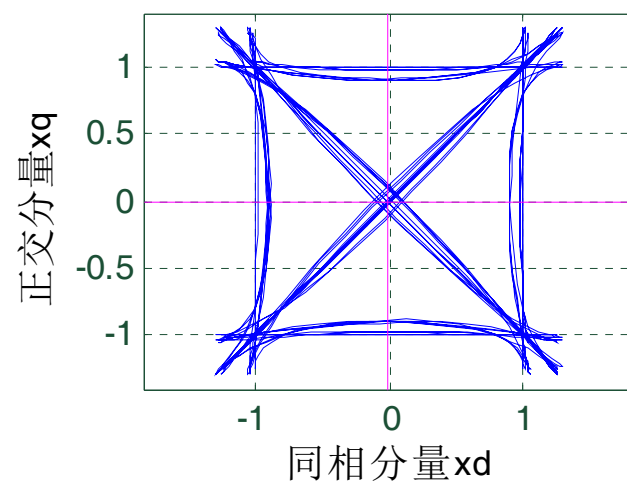
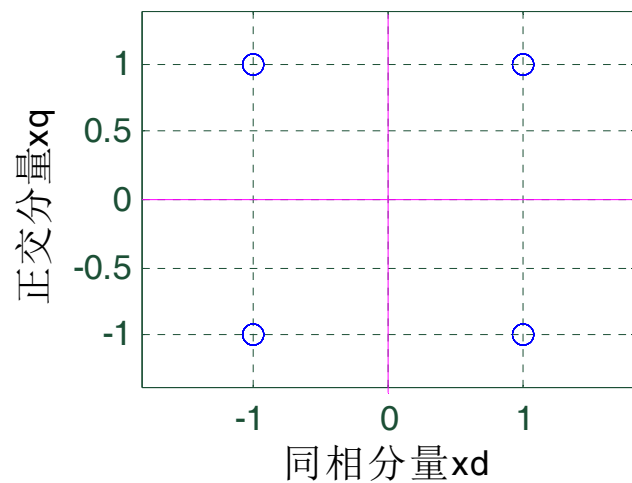
```
>> c4_qamdemo  
Number of D levels > 2  
Number of Q levels > 2  
Number of symbols > 100  
Number of samples per symbol > 20  
Filter bandwidth, 0<bw<1 > 0.1
```

Matlab把滤波器带宽归一化为奈奎斯特频率 f_N ,等于采样频率 f_s 的一半。即, Matlab参数bw为 f_{bw}/f_N , 其中 f_{bw} 是以赫兹为单位的滤波器带宽。假设采样频率是符号率 f_{sym} 的 k 倍, 还假设用 v 表示滤波器带宽和符号率的比值, f_{BW}/f_{sym} 。有

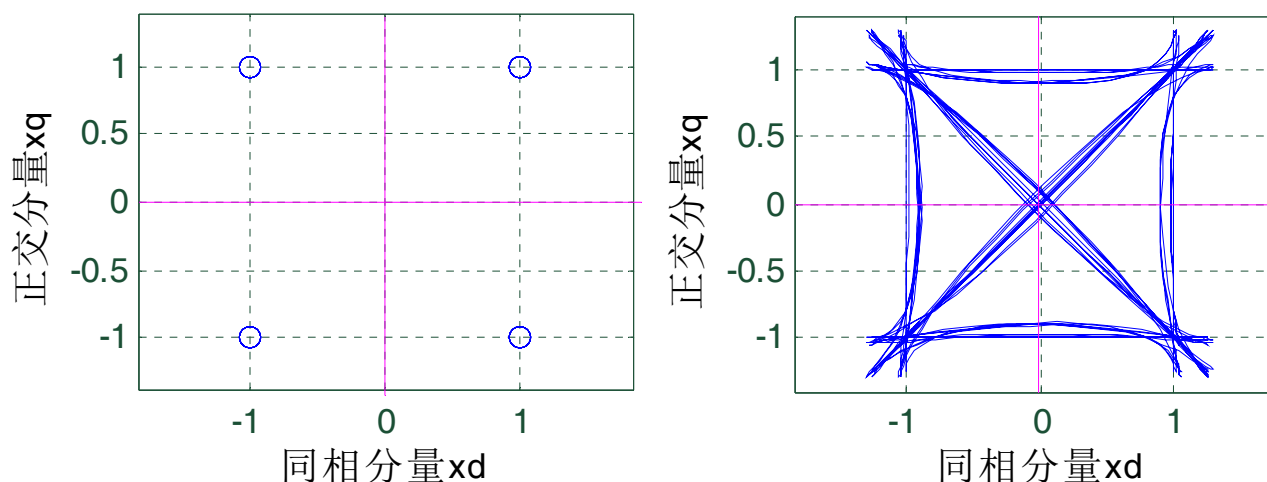
$$\frac{f_{bw}}{f_N} = \frac{2f_{bw}}{f_s} = \frac{2f_{bw}}{kf_{sym}} = \frac{2v}{k}$$

所以, 如果滤波器带宽等于符号率时 $v=1$, 如果仿真采样频率是符号率的20倍, $k=20$, 那么将得到一个归一化滤波器带宽为0.1。

4.1 带通信号的低通复包络 时域



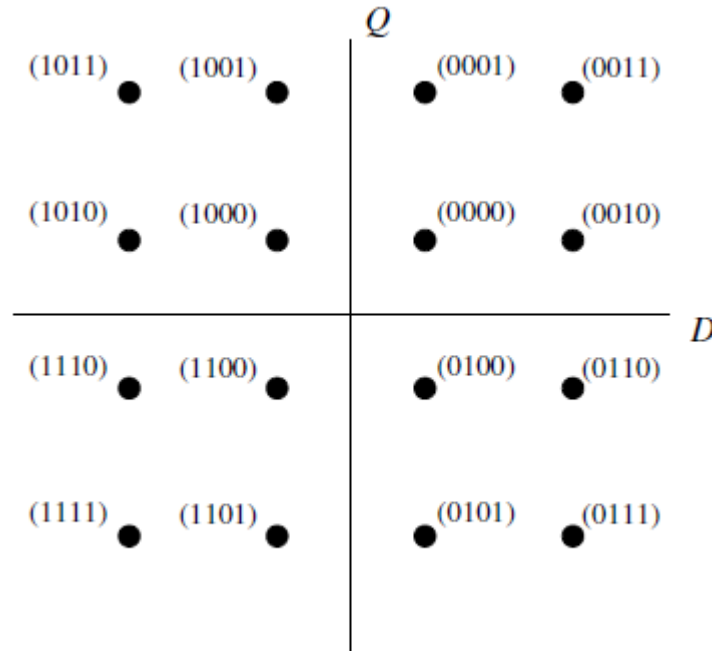
4.1 带通信号的低通复包络 时域



散点图， $x_q(t)$ 作为 $x_d(t)$ 的函数画出来的图。
左面是 $p(t)=1$ ， $0 \leq t \leq T_{\text{sym}}$ 时得到的散点图，其中 T_{sym} 是符号周期；
右面是信号通过六阶巴特沃兹滤波器形成的散点图，此时 $p(t)$ 非恒定。

4.1 带通信号的低通复包络 时域

例2 (16QAM) QAM发射机也可以用数字调制器的仿真带通模型来表示。位到符号的映射器将每组四个的二进制输入符号映射到一个16QAM符号，如图所示为信号的星座图及对应于每个16QAM的二进制序列。跟QPSK一样，二进制序列到16QAM的映射可以使任意的。





4.1 带通信号的低通复包络 时域

在QPSK中，每个符号的 d_k 和 q_k 都只能取两个值中的一个，在先前的例子中定义为+1和-1。在16QAM的每一个符号周期中 d_k 和 q_k 都可以取四个值中的一个。在仿真中定义了+3，+1，-1，-3。

```
x=2*fix(levels*rand(1,m))-lm1;
```



4.1 带通信号的低通复包络 时域

Number of D levels > 4

Number of Q levels > 4

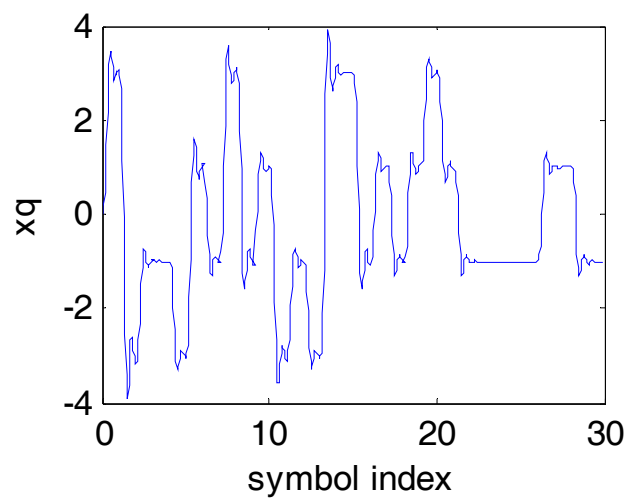
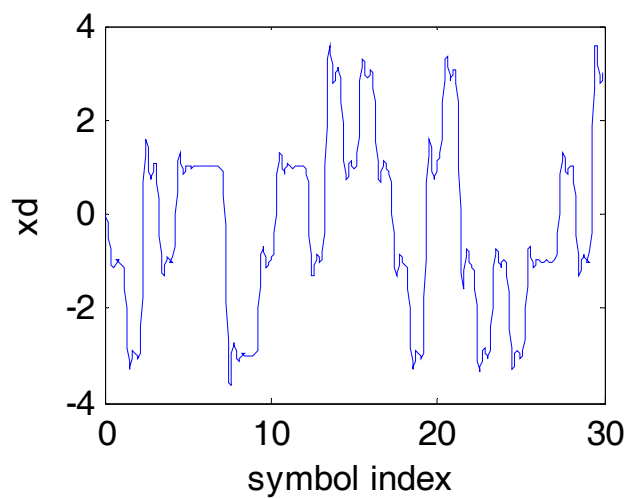
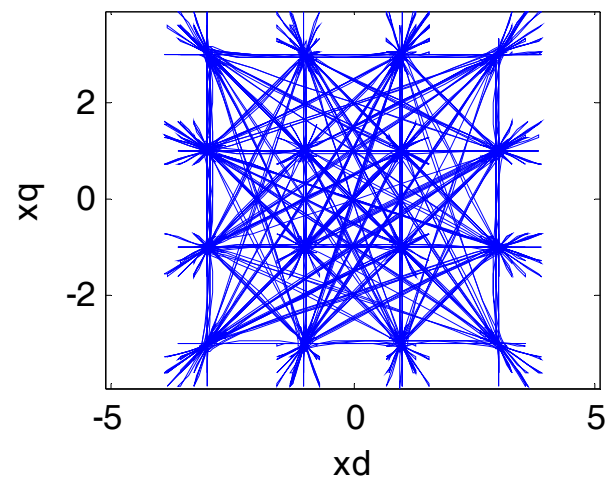
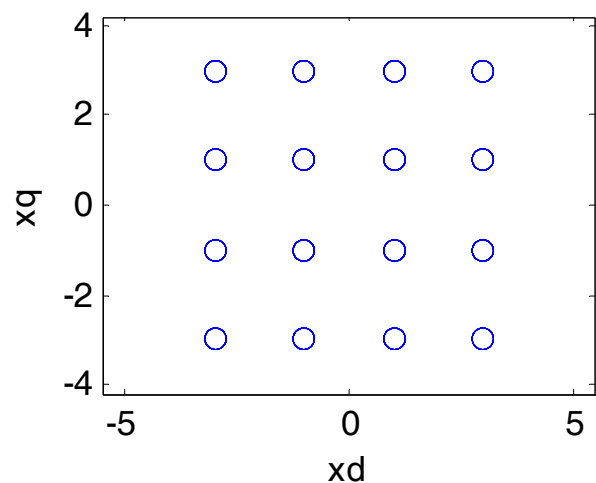
Number of symbols > 500

Number of samples per symbol > 20

Filter bandwidth, $0 < bw < 1$ > 0.2

同相（D轴）和正交（Q轴）的阶数都是4。
脉冲成形滤波器是6阶巴特沃思滤波器。
仿真用滤波器带宽等于符号率的2倍。

4.1 带通信号的低通复包络 时域



时域图中可以清楚的看到4个稳态

4.1 带通信号的低通复包络 频域


$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t)\} \quad \text{其中} \quad \tilde{x}(t) = A(t) \exp[j\phi(t)]$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) \exp(-j2\pi f_0 t)$$



乘以 $\exp(-j2\pi f_0 t)$

$$2x(t) \exp(-j2\pi f_0 t) = \tilde{x}(t) + \tilde{x}^*(t) \exp(-j4\pi f_0 t)$$

化简 $\tilde{x}(t) = 2x(t) \exp(-j2\pi f_0 t) - \tilde{x}^*(t) \exp(-j4\pi f_0 t)$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

因为 $\tilde{x}(t)$ 是一个低通信号(信号的频谱仅在 $f=0$ 附近是非零的)。抽取其低通部分得到:

$$\tilde{x}(t) = LP\{2x(t)\exp(-j2\pi f_0 t) - \tilde{x}^*(t)\exp(-j4\pi f_0 t)\}$$

又因为 $\tilde{x}(t) = 2x(t)\exp(-j2\pi f_0 t) - \tilde{x}^*(t)\exp(-j4\pi f_0 t)$



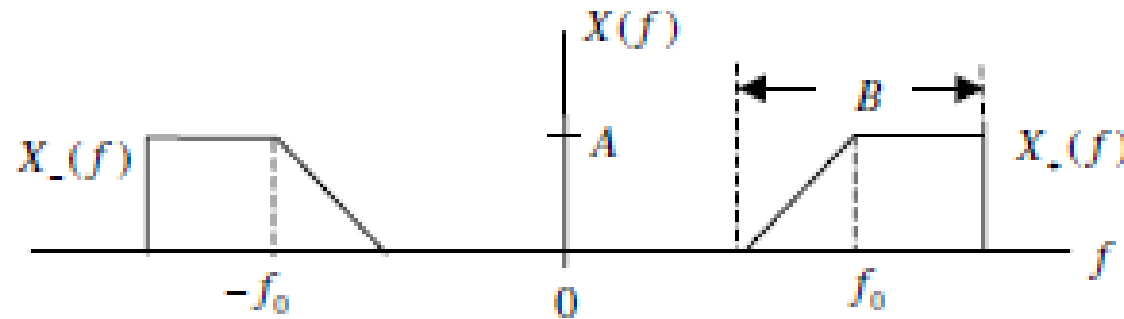
傅里叶变换

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0) - \tilde{X}^*(f + 2f_0)$$

4.1 带通信号的低通复包络 频域

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0) - \tilde{X}^*(f + 2f_0)$$

$X(f)$ 在除了 $f = \pm f_0$ 附近之外的所有地方都为零，其中 $X_+(f)$ 表示 $X(f)$ 的正频率部分， $X_-(f)$ 表示 $X(f)$ 的负频率部分。

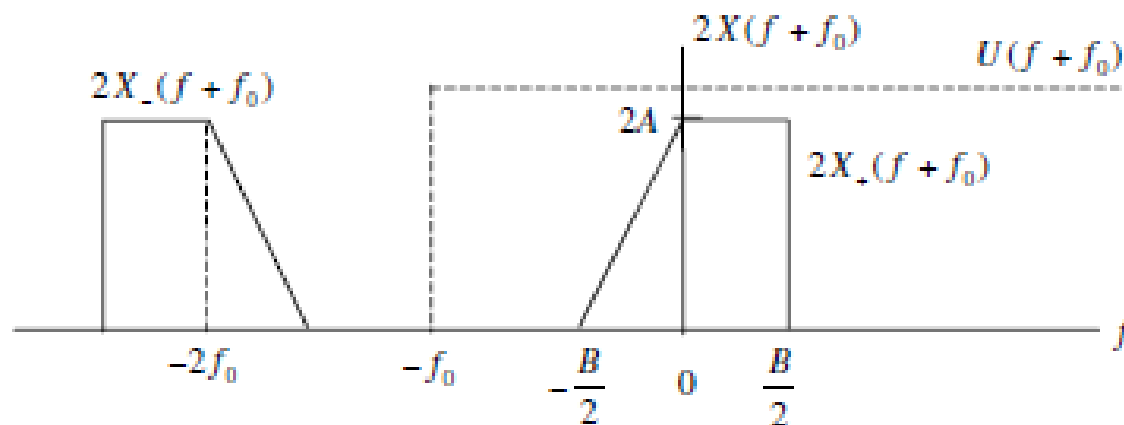


这一项 $\tilde{X}^*(f + 2f_0)$ 对除了在 $f = -f_0$ （即 $X_+(f)$ 左移 $2f_0$ ）和 $f = -3f_0$ （即 $X_-(f)$ 左移 $2f_0$ ）附近之外的所有地方都为零。所以对 $\tilde{X}(f)$ 并不会产生影响。

4.1 带通信号的低通复包络 频域

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0) - \tilde{X}^*(f + 2f_0)$$

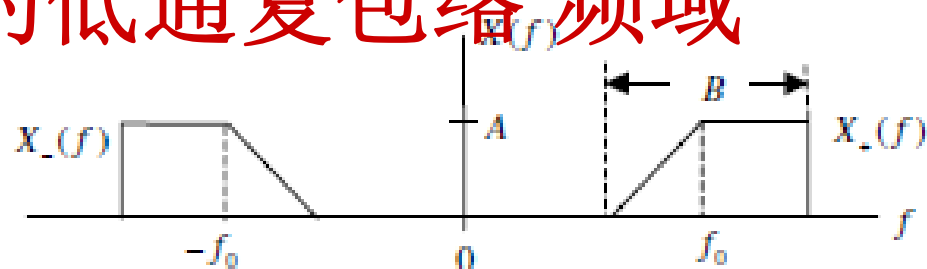
$X(f)$ 在除了 $f = \pm f_0$ 附近之外的所有地方都为零，其中 $X_+(f)$ 表示 $X(f)$ 的正频率部分， $X_-(f)$ 表示 $X(f)$ 的负频率部分。



$X(f + f_0)$ 对除了在 $f = -2f_0$ (即 $X_-(f)$ 左移 f_0) 和 $f = 0$ (即 $X_+(f)$ 左移 f_0) 附近之外的所有地方都为零。所以只有 $X_+(f + f_0)$ 对 $\tilde{X}(f)$ 产生影响。

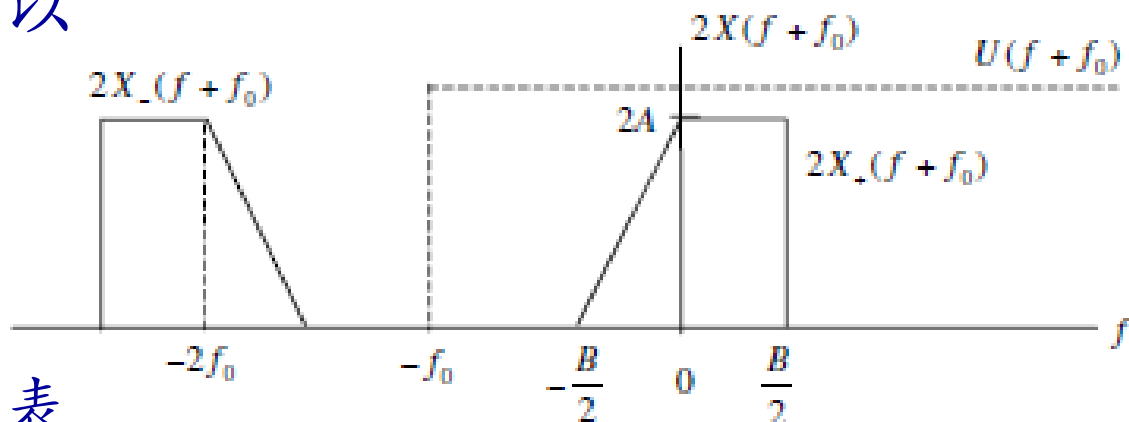
4.1 带通信号的低通复包络 频域

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0) - \tilde{X}^*(f + 2f_0)$$



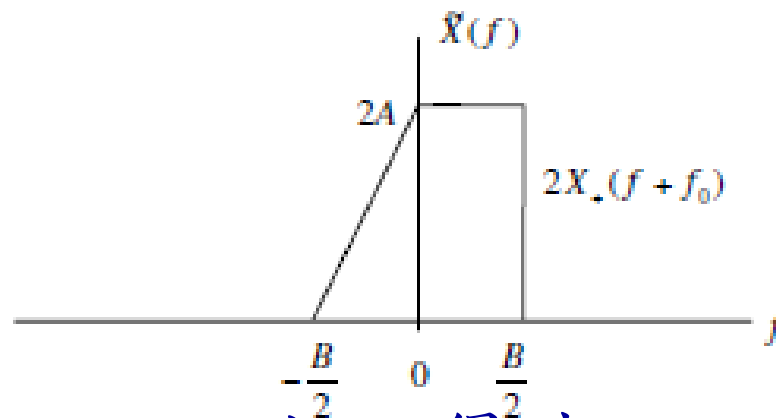
由于是低通部分，所以

$$\tilde{X}(f) = 2X_+(f + f_0)$$



如果用传递函数为
的滤波器来实现低
通滤波器，上式则可表
示为

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0)U(f + f_0)$$



从 $X(f)$ 得到 $\tilde{X}(f)$

4.1 带通信号的低通复包络 频域

同相和正交分量的频谱

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0)U(f + f_0)$$

显然有

$$\tilde{X}(f) = X_d(f) + jX_q(f)$$

用 $-f$ 代替 f 得

$$\tilde{X}(-f) = X_d(-f) + jX_q(-f)$$

因为 $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 是实函数，有

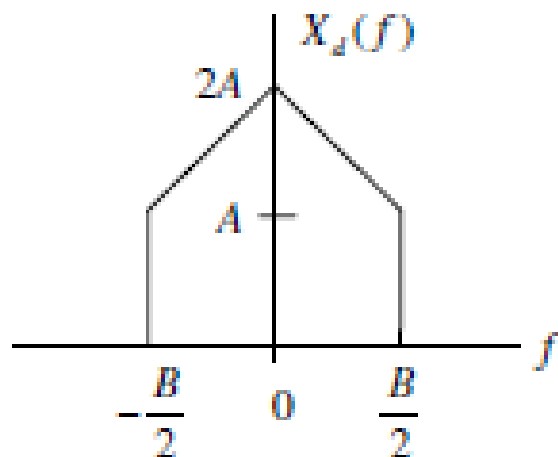
$$X_d(-f) = X_d^*(f) \quad X_q(-f) = X_q^*(f)$$

取复共轭得

$$\tilde{X}^*(-f) = X_d(f) - jX_q(f)$$

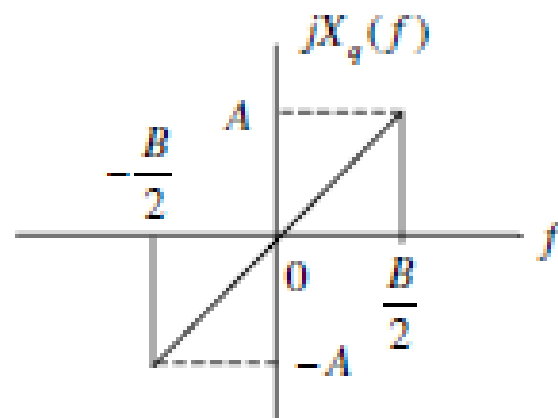
$$\begin{aligned} X_d(f) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f) \right) \\ X_q(f) &= \frac{1}{2j} \left(\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f) \right) \end{aligned}$$

4.1 带通信号的低通复包络 频域



$$X_d(f) = \frac{1}{2} \left(\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f) \right)$$

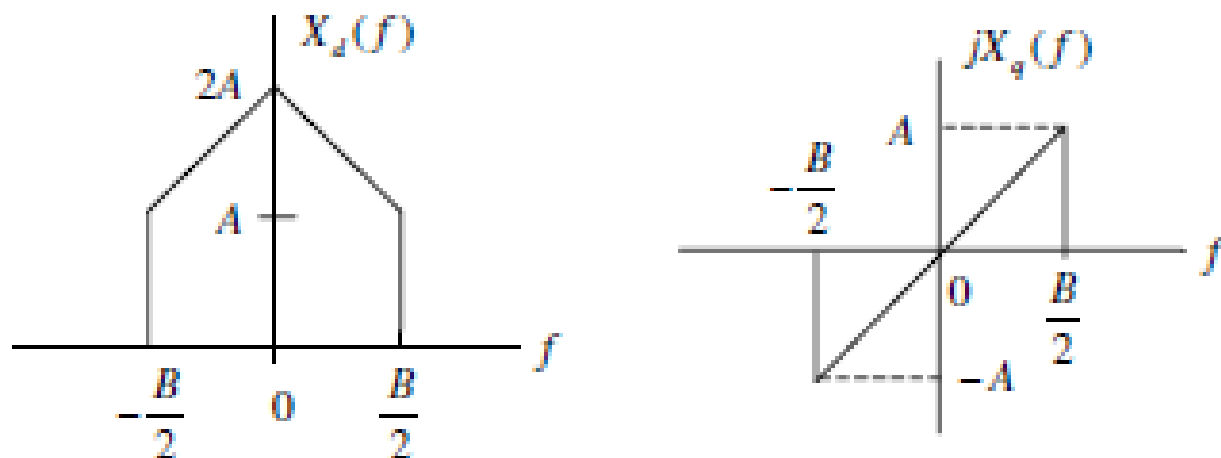
同相分量的频谱 (偶)



$$X_q(f) = \frac{1}{2j} \left(\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f) \right)$$

正交分量的频谱(奇)

4.1 带通信号的低通复包络 频域



实带通信号 $x(t)$ 的频谱 $X(f)$ 关于 f_0 不对称，因此，低通复包络 $\tilde{x}(t)$ 的抽样值取复数值。 $\tilde{x}(t)$ 的实部 $x_d(t)$ 和虚部 $x_q(t)$ 都具有 $B/2$ 的带宽，是实带通信号 $x(t)$ 带宽的一半。因此 $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 必须以每秒大于 $2(B/2) = B$ 个样值的速率来采样，采样操作的结果是每秒至少能产生 $2B$ 个采样。相反，如果 $X(f)$ 关于 f_0 共轭对称， $\tilde{X}(f)$ 就关于 $f=0$ 共轭对称。这样， $\tilde{x}(t)$ 就是实数，而且不用再对正交部分取样了。

4.1 带通信号的低通复包络 频域

从线性系统理论有帕塞瓦尔定理能量守恒，但复包络的能量(或功率)与其相应的带通信号的能量(或功率)并不相同。

$$x(t) = \frac{1}{2} \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t) + \frac{1}{2} \tilde{x}^*(t) \exp(-j2\pi f_0 t)$$

$$|x(t)|^2 = \frac{1}{4} \left| \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t) + \tilde{x}^*(t) \exp(-j2\pi f_0 t) \right|^2$$

$$|x(t)|^2 = \frac{1}{4} [\tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t) + \tilde{x}^*(t) \exp(-j2\pi f_0 t)] \cdot [\tilde{x}^*(t) \exp(-j2\pi f_0 t) + \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t)]$$

$$|x(t)|^2 = \frac{1}{4} [|\tilde{x}(t)|^2 + [\tilde{x}(t)]^2 \exp(j4\pi f_0 t) + [\tilde{x}^*(t)]^2 \exp(-j4\pi f_0 t) + |\tilde{x}(t)|^2]$$

$$E\{|x(t)|^2\} = \frac{1}{2} E\left\{|\tilde{x}(t)|^2\right\}$$

化简



4.1 带通信号的低通复包络 频域

实带通信号 $x(t)$ 的平均功率（也称实功率）是

$$\varepsilon_x = E \left\{ \left| \tilde{x}(t) \right|^2 \right\}$$

低通复包络 $\tilde{x}(t)$ 的功率（也称复功率）是

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = E \left\{ \left| \tilde{x}(t) \right|^2 \right\}$$

可得：

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = 2\varepsilon_x$$

信号的复包络功率是对应的实带通信号功率的2倍



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型

通过使用傅里叶变换，信号的频域表示说明了信号具有确定的能量。带通随机信号也有对应的同相和正交分量的低通表达式。

例如，考虑用下式定义的一个窄带随机过程

$$n(t) = n_d(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ 为均匀分布在 $[-\pi, \pi]$ 之间的任意相位

$$n(t) = R(t) \cos[2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta]$$

$$n(t) = \operatorname{Re} \{ R(t) \exp[j\phi(t)] \exp[j(2\pi f_0 t + \theta)] \}$$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型
与 $n(t)$ 相应的复包络定义为

$$\tilde{n}(t) = R(t) \exp[j\phi(t)]$$

在直角坐标系下 $\tilde{n}(t) = n_d(t) + jn_q(t)$

实包络 $R(t)$ 是

$$R(t) = |\tilde{n}(t)| = \sqrt{n_d^2(t) + n_q^2(t)}$$

$$\phi(t) = \arctan \frac{n_q(t)}{n_d(t)}$$

假定已知 $n(t)$ 的功率谱密度(PSD), 问题是如何确定 $n_d(t)$ 、 $n_q(t)$ 和 $\tilde{n}(t)$ 的功率谱密度。



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型

均值： 由于 $n(t)$ 是一个带通过程，则它是零均值的。从而 $n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 也都是零均值的。因此

$$E \{n(t)\} = E \{n_d(t)\} = E \{n_q(t)\} = 0$$

方差： $n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 有相同的方差(或功率，因为假设该过程是零均值的)，并且这个功率和带通过程的总功率相等，也就是说

$$E \{n^2(t)\} = E \{n_d^2(t)\} = E \{n_q^2(t)\} = N$$

这里的 N 指对应的带通过程总功率。



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型

$n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 的功率谱密度：相等且由 $n(t)$ 的功率谱密度 $S_n(f)$ 确定。表达式如下：

$$S_{n_d}(f) = S_{n_q}(f) = \text{LP} [S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)]$$

$n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 的自相关：遵循维纳-辛钦定理。

$$R_{n_d}(\tau) \leftrightarrow S_{n_d}(f)$$

$$R_{n_q}(\tau) \leftrightarrow S_{n_q}(f)$$

$R_{n_d}(\tau)$ 和 $R_{n_q}(\tau)$ 是 $n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 的自相关函数。



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型

$n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 的互功率谱密度:

$$S_{n_d n_q}(f) = j \text{Lp}[S_n(f - f_0) - S_n(f + f_0)]$$

$n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 的互相关: 遵循维纳-辛钦定理。

$$R_{n_d n_q}(\tau) \leftrightarrow S_{n_d n_q}(f)$$

○



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型

$n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 的互功率谱密度:

$$S_{n_d n_q}(f) = j \text{Lp}[S_n(f - f_0) - S_n(f + f_0)]$$

$n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 的互相关: 遵循维纳-辛钦定理。

$$R_{n_d n_q}(\tau) \leftrightarrow S_{n_d n_q}(f)$$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型

复包络的均值： $E\left\{\tilde{n}(t)\right\}=E\left\{n_d(t)+jn_q(t)\right\}=0$

复包络的方差：

$$\begin{aligned}P_{\tilde{n}} &= E\left\{|\tilde{n}(t)|^2\right\}=E\left\{\left[n_d(t)+jn_q(t)\right]\left[n_d^*(t)-jn_q^*(t)\right]\right\} \\&= E\left\{|n_d(t)|^2\right\}+E\left\{|n_q(t)|^2\right\}\end{aligned}$$

带宽受限的过程

$n_d(t)$ 和 $n_q(t)$ 是不相关的

$$+jE\left\{n_d^*(t)n_q(t)\right\}-jE\left\{n_d(t)n_q^*(t)\right\}$$

$$P_{\tilde{n}}=E\left\{|n_d(t)|^2\right\}+E\left\{|n_q(t)|^2\right\}=P_{n_d}+P_{n_q}$$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

随机带通信号的正交模型

复包络的方差：

$$P_{\tilde{n}} = E \{ |n_d(t)|^2 \} + E \{ |n_q(t)|^2 \} = P_{n_d} + P_{n_q}$$

$$P_{\tilde{n}} = 2E \{ n^2(t) \} = 2N$$

这说明了，带通信号的低通复包络表示具有的功率是对应的实带通信号功率的两倍。

复包络的功率谱密度：

$$S_{\tilde{n}}(f) = S_{n_d}(f) + S_{n_q}(f) = 2S_{n_d}(f)$$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

信噪比

从基本的通信原理可知，接收机输入端的信噪比(SNR)通常是决定系统性能的主要因素。在接收机输入端，信号和噪声都是带通的。假定信号和噪声都是加性的，于是接收机输入信号为

$$z(t) = x(t) + n(t)$$

$x(t)$ 为信号， $n(t)$ 表示噪声。对实带通信号来说，信噪比可定义为：

$$(SNR)_{bp} = \frac{E \{x^2(t)\}}{E \{n^2(t)\}}$$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

信噪比

$$\begin{aligned} (SNR)_{bp} &= \frac{E \left\{ |x^2(t)| \right\}}{E \left\{ |n^2(t)| \right\}} = \frac{\frac{1}{2} E \left\{ |x^2(t)| \right\}}{\frac{1}{2} E \left\{ |n^2(t)| \right\}} \\ &= \frac{E \left\{ \left| \tilde{x}(t) \right|^2 \right\}}{E \left\{ \left| \tilde{n}(t) \right|^2 \right\}} = (SNR)_{lp} \end{aligned}$$

这里 $(SNR)_{bp}$ 和 $(SNR)_{lp}$ 分别指实带通信号和相应的低通复包络的信噪比。

结论：作为标准的仿真方法，可将带通信号(信号和噪声)表示为相应的低通等效信号，且能保持信噪比不变。

4.1 带通信号的低通复包络 频域

例3 信噪比SNR转换

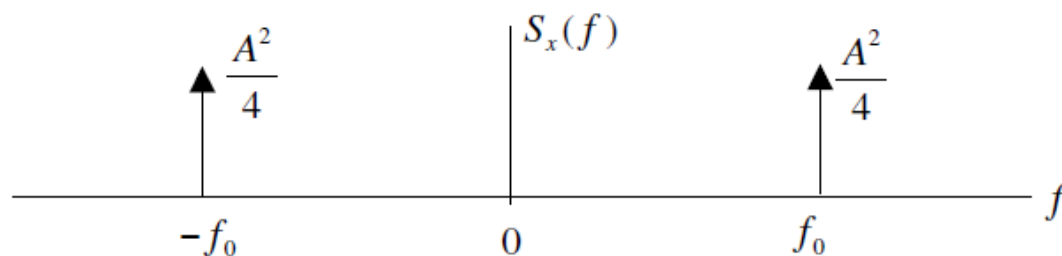
假设一带通信号表示如下：

$$z(t) = x(t) + n(t) = x(t) + n_d(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta)$$

其中 $x(t)$ 为正弦信号 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$

带通信号可表示成 $x(t) = \frac{A}{2} \exp(j2\pi f_0 t) + \frac{A}{2} \exp(-j2\pi f_0 t)$

因而 $x(t)$ 的功率谱密度为 $S_x(f) = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0)$

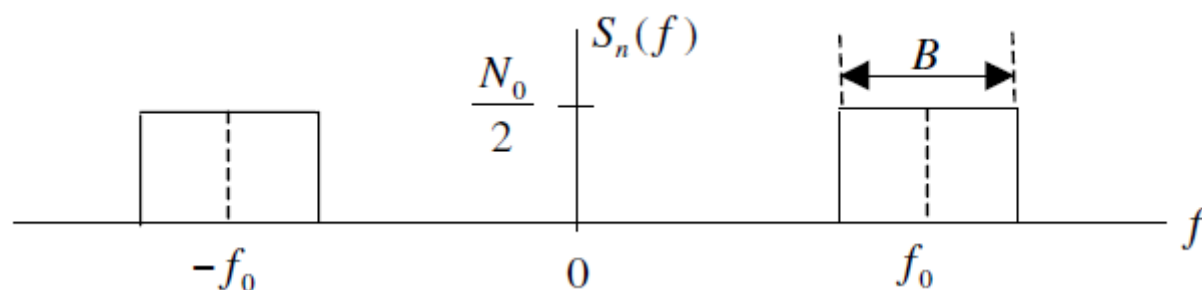


所以实带通信号的总功率： $P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \frac{A^2}{2}$

4.1 带通信号的低通复包络 频域

例3 信噪比SNR转换

噪声的功率谱密度如图所示



所以，总的噪声功率为

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = 2 \left(\frac{N_0}{2} B \right) = N_0 B$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \frac{A^2}{2}$$

带通信噪比: $(SNR)_{bp} = \frac{A^2}{2N_0 B}$

4.1 带通信号的低通复包络 频域

例3 信噪比SNR转换

采用 $x(t)$ 和 $n(t)$ 的低通等效

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

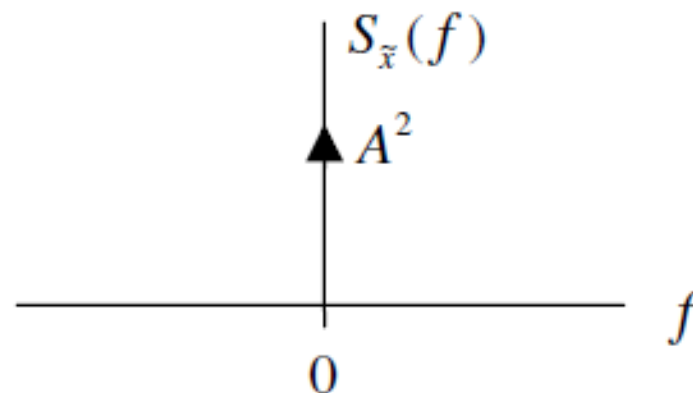
$$x(t) = \operatorname{Re} \{ A \exp(j2\pi f_0 t) \}$$

得到复包络 $\tilde{x}(t) = A$

复包络的功率 $P_{\tilde{x}} = E \{ |\tilde{x}(t)|^2 \} = A^2$

功率谱密度

$$P_{\tilde{x}}(f) = A^2 \delta(f)$$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

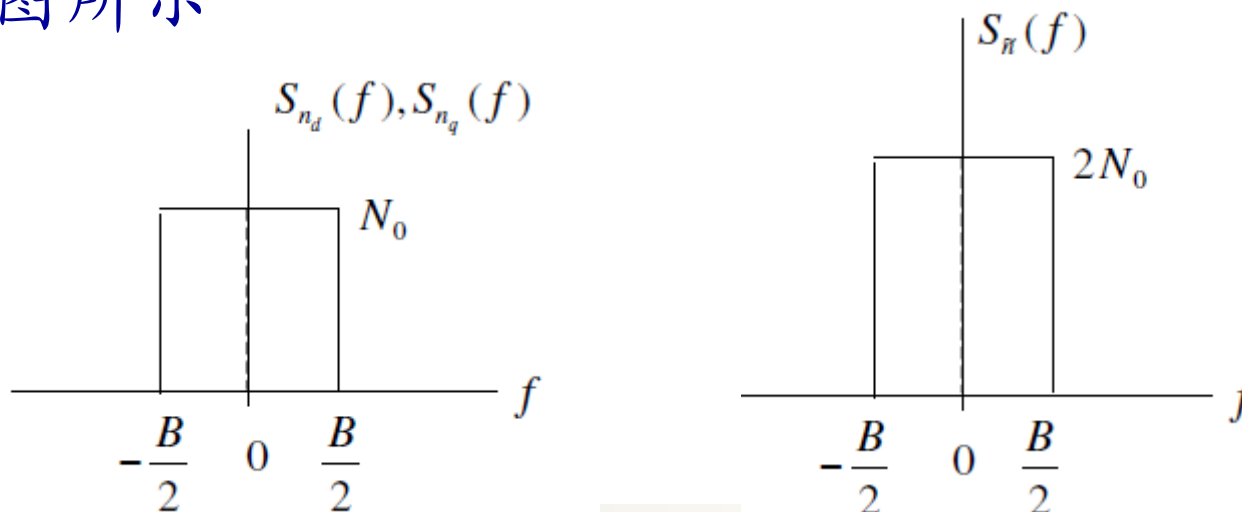
例3 信噪比SNR转换

$n_d(t)$, $n_q(t)$, 以及复包络的功率谱密度和, 可有以下式

$$S_{n_d}(f) = S_{n_q}(f) = \text{LP} [S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)]$$

$$S_{\tilde{n}}(f) = S_{n_d}(f) + S_{n_q}(f) = 2S_{n_d}(f)$$

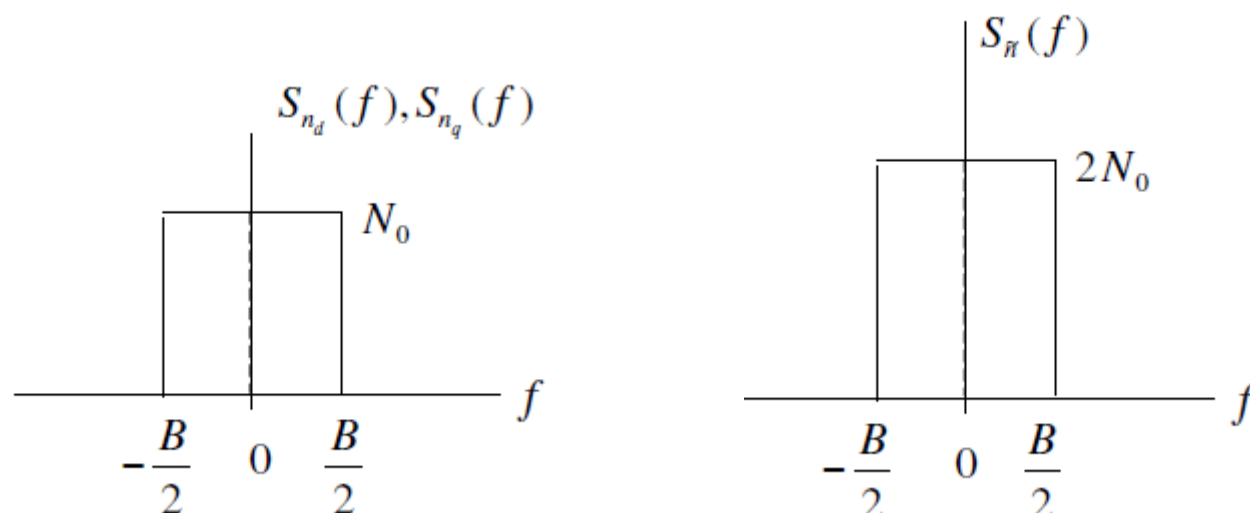
得到如图所示



4.1 带通信号的低通复包络 频域

例3 信噪比SNR转换

$$P_{\tilde{n}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{n}}(f) df = 2N_0B$$



复低通等效的信噪比

$$(SNR)_{lp} = \frac{P_{\tilde{x}}}{P_{\tilde{n}}} = \frac{A^2}{2N_0B}$$

实带通信号的信噪比

$$(SNR)_{bp} = \frac{A^2}{2N_0B}$$



4.1 带通信号的低通复包络 频域

小结:

如果实带通信号的频谱关于 f_0 不对称, 低通复包络取复数。

如果实带通信号的频谱关于 f_0 共轭对称, 则低通复包络频谱关于 $f=0$ 共轭对称, 其包络为实数。

低通复包络信号的实部和虚部都具有 $B/2$ 的带宽, 为实信号带宽的一半。

随机带通信号的低通复包络具有的功率是对应的实带通信号功率的2倍。

实带通信号和相应的低通复包络的信噪比相等。



4.2 线性带通系统

信号  系统

基本的问题是，在假定系统的输入及系统单位冲激响应都表示为低通复包络形式的带通信号这个前提下，如何确定线性系统在时域中的输入输出响应曲线。所得结果将为我们提供一种基于低通模型进行线性系统波形级仿真的方法论。



4.2 线性带通系统

线性时不变系统对于给定输入 $x(t)$,则可用卷积计算输出 $y(t)$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda \triangleq x(t) \circledast h(t)$$

其中 $h(t)$ 是系统的单位冲激响应。

由定义, 线性时不变系统输入的复包络 $\tilde{x}(t)$ 及输出的复包络 $\tilde{y}(t)$, 可定义为

$$x(t) = \text{Re} \{ \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \}$$

$$y(t) = \text{Re} \{ \tilde{y}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \}$$

如果我们要求 $\tilde{x}(t)$ 和 $\tilde{y}(t)$ 之间的关系满足

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda)\tilde{h}(t - \lambda) d\lambda \triangleq \tilde{x}(t) \circledast \tilde{h}(t)$$



4.2 线性带通系统

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda) \tilde{h}(t - \lambda) d\lambda \triangleq \tilde{x}(t) \circledast \tilde{h}(t)$$

带通系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和与其对应的复包络必须满足

$$h(t) = \operatorname{Re} \left\{ 2\tilde{h}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \right\}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \}$$

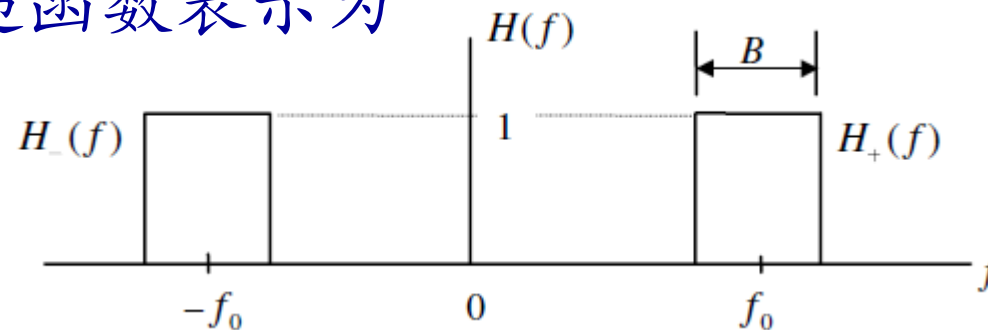
$$y(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{y}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \}$$

倍数2导致了单位增益带通滤波器到单位增益低通滤波器的转换，从而倍数2保持了滤波器的带通增益不变。

4.2 线性带通系统

理想带通滤波器的传递函数表示为

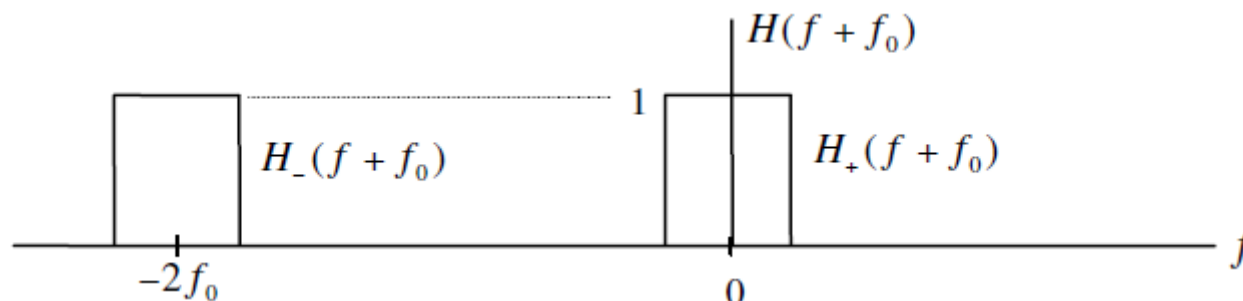
$$H(f) = H_+(f) + H_-(f)$$



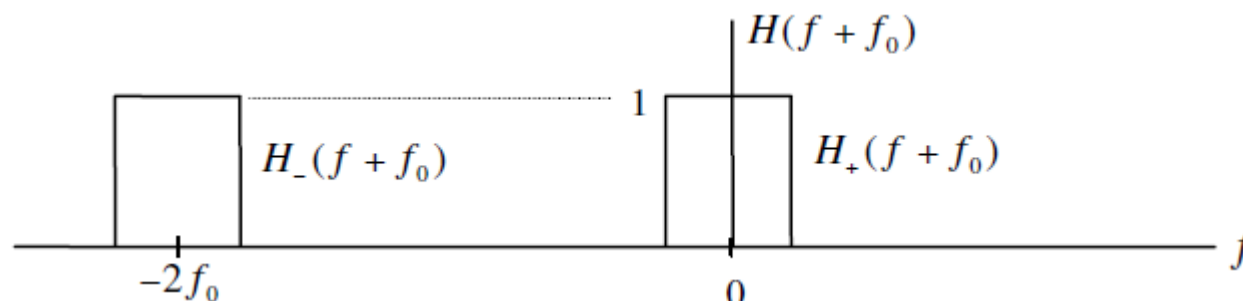
这里的 $H_+(f)$ 和 $H_-(f)$ 分别为带通滤波器传递函数的正频率部分和负频率部分。

用 $f+f_0$ 代替 f , 则有

$$H(f + f_0) = H_+(f + f_0) + H_-(f + f_0)$$

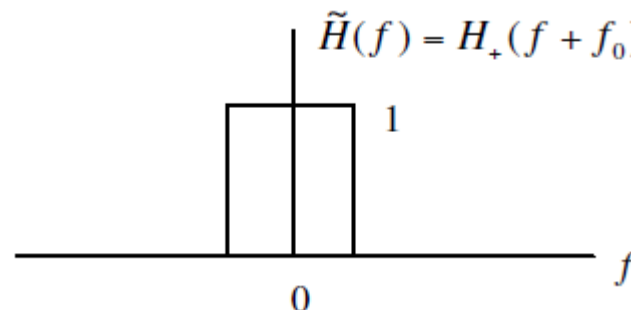


4.2 线性带通系统



很明显 $H_+(f + f_0)$ 是低通因数，并将其定义为 $\tilde{H}(f)$ 。
因此有

$$\tilde{H}(f) = H_+(f + f_0)$$



也可以写成

$$\tilde{H}(f) = H(f + f_0)U(f + f_0)$$

单位增益带通滤波器映射到了单位增益低通滤波器，
因为通过简单的频移就可以从带通滤波器的传递函数的
正频率部分得到 $\tilde{H}(f)$ ，而且不会牵涉幅度的缩放。



4.2 线性带通系统

带通信号的低通复包络表示 和
线性带通系统低通等效表示 的比较

用低通复包络表示带通信号，可得

$$\tilde{X}(f) = 2X(f + f_0)U(f + f_0)$$

用低通等效表示线性带通系统，可得

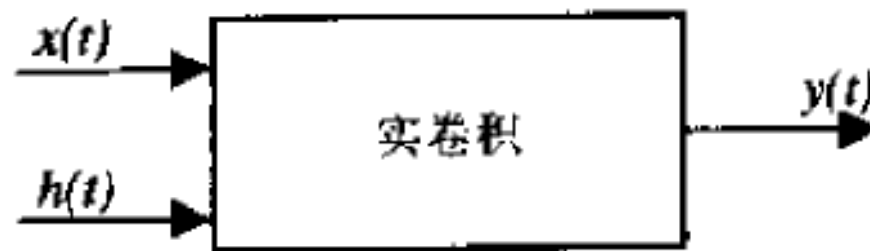
$$\tilde{H}(f) = H(f + f_0)U(f + f_0)$$

除系数2外，这两个等式是等效的

4.2 线性带通系统

给定带通输入信号和系统单位冲激响应在时域上有两种方法可以用于计算线性时不变系统的输出。

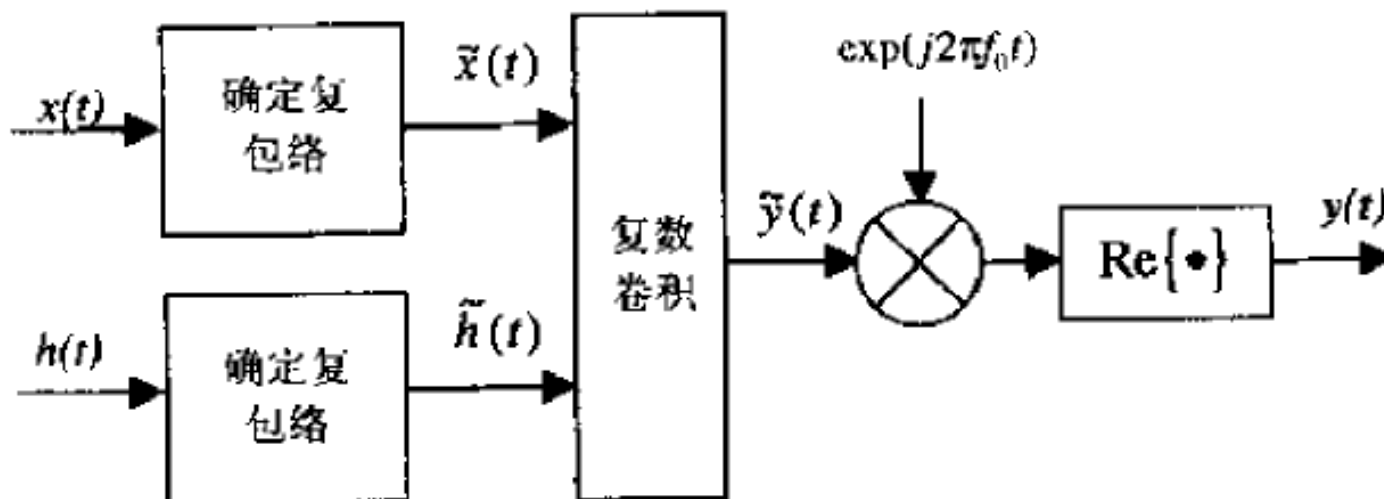
方法一：用带通信号直接进行系统分析



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda \triangleq x(t) \circledast h(t)$$

4.2 线性带通系统

方法二：用复包络信号进行系统分析



$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda) \tilde{h}(t - \lambda) d\lambda \triangleq \tilde{x}(t) \circledast \tilde{h}(t)$$

$$y(t) = \text{Re} \{ \tilde{y}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \}$$



4.2 线性带通系统

方法二：用复包络信号进行系统分析

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda) \tilde{h}(t - \lambda) d\lambda \triangleq \tilde{x}(t) \circledast \tilde{h}(t)$$

$$\tilde{y}(t) = y_d(t) + jy_q(t) = [x_d(t) + jx_q(t)] \circledast [h_d(t) + jh_q(t)]$$

$$\begin{aligned} y_d(t) + jy_q(t) &= [x_d(t) \circledast h_d(t) - x_q(t) \circledast h_q(t)] \\ &\quad + j[x_d(t) \circledast h_q(t) + x_q(t) \circledast h_d(t)] \end{aligned}$$

线性系统输出的同相分量为

$$y_d(t) = x_d(t) \circledast h_d(t) - x_q(t) \circledast h_q(t)$$

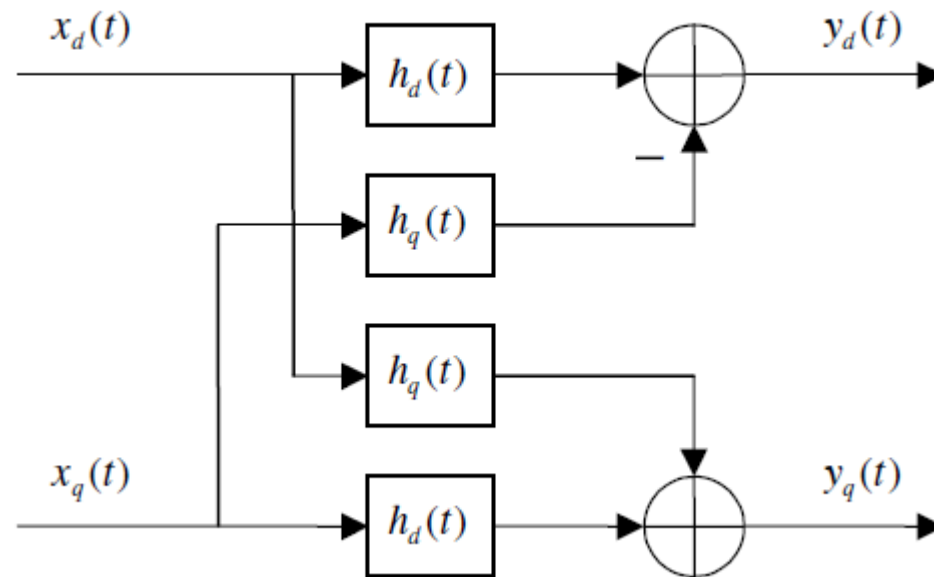
线性系统输出的正交分量为

$$y_q(t) = x_d(t) \circledast h_q(t) + x_q(t) \circledast h_d(t)$$

4.2 线性带通系统

方法二：用复包络信号进行系统分析

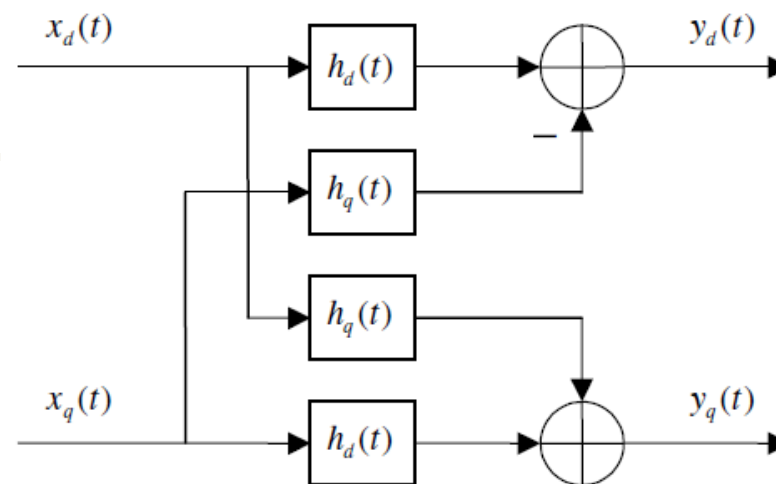
正如两个复数的乘积等效于四个实数的乘积，两个复函数的卷积等效于四个实函数的卷积。用于推导线性带通系统同相分量和正交分量的运算，由如下图所示的运算定义。



线性带通系统的模型

4.2 线性带通系统

试确定带通移相器冲激响应 $h(t)$ 的复包络的同相及正交分量表达式。



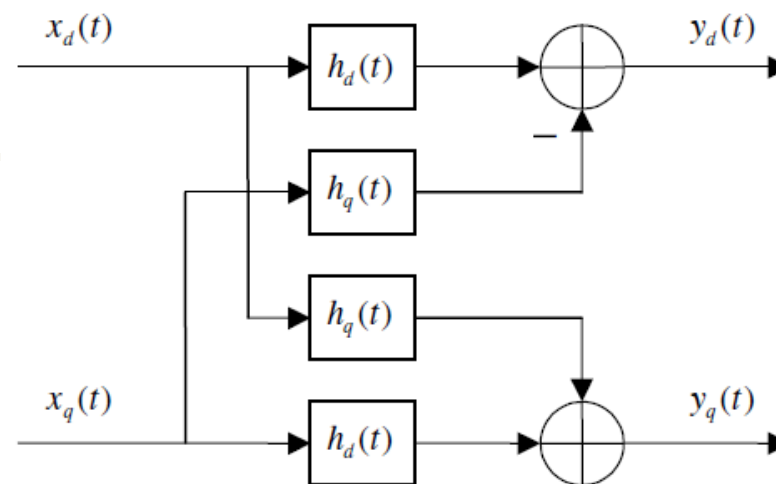
已知系统的输入为 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$
移相器的输出是 $y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta + \phi)$

系统对输入产生了相移。这种模型可以用来表示调制器中的同步错误。

为了使用复低通模型仿真这个器件，必须推导出 $h_d(t)$ 和 $h_q(t)$ 。

4.2 线性带通系统

试确定带通移相器冲激响应 $h(t)$ 的复包络的同相及正交分量表达式。



$$\tilde{x}(t) = A \exp(j\theta)$$

$$\tilde{y}(t) = A \exp(j\theta + j\phi) = \tilde{x}(t) \exp(j\phi)$$

$$[y_d(t) + jy_q(t)] = [x_d(t) + jx_q(t)][\cos\phi + j\sin\phi]$$

$$y_d(t) = x_d(t)\cos\phi - x_q(t)\sin\phi$$

$$y_q(t) = x_d(t)\sin\phi + x_q(t)\cos\phi$$

$$h_d(t) = \cos\phi\delta(t)$$

$$h_q(t) = \sin\phi\delta(t)$$



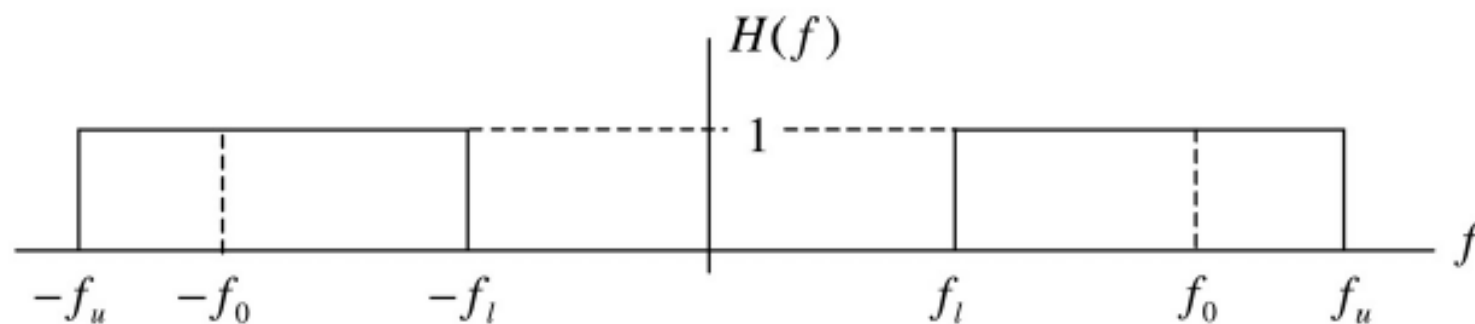
4.2 线性带通系统

为了仿真一个含有带通部分(如带通滤波器)的系统, 我们通常知道传递函数 $H(f)$ 。要为基于 $H(f)$ 的复包络的滤波器建立仿真模型, 必须由带通滤波器的传递函数 $H(f)$ 确定 $h_d(t)$ 和 $h_q(t)$ 。

方法一: 从 $H(f)$ 中得到 $H_d(f)$ 和 $H_q(f)$, 然后对 $H_d(f)$ 和 $H_q(f)$ 作逆变换来确定 $h_d(t)$ 和 $h_q(t)$ 。

方法二: 由 $H(f)$ 得到 $\tilde{H}(f)$, 然后求 $\tilde{H}(f)$ 的逆变换来确定 $\tilde{h}(t)$, 最后根据 $\tilde{h}(t)$ 确定 $h_d(t)$ 和 $h_q(t)$ 。

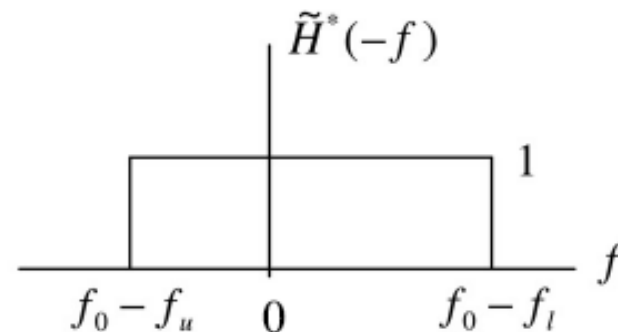
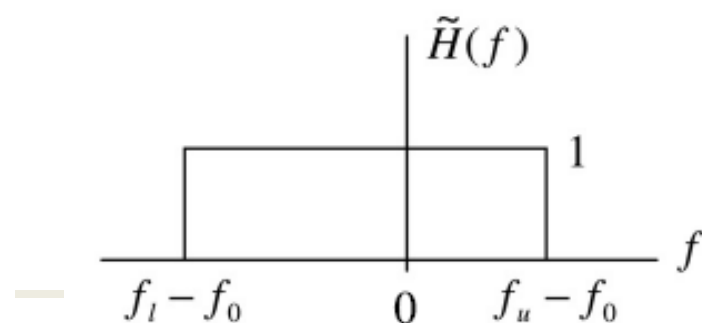
4.2 线性带通系统



无论用哪种方法由 $H(f)$ 来确定 $h_d(t)$ 和 $h_q(t)$ ，首先都要确定 $\tilde{H}(f)$ 。根据定义有

$$\tilde{H}(f) = H_+(f + f_0) = H_d(f) + jH_q(f)$$

$$\tilde{H}(-f) = H_d(-f) + jH_q(-f)$$



4.2 线性带通系统

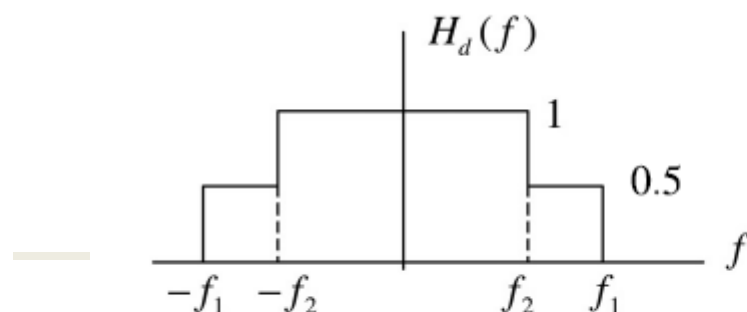
$$\tilde{H}(-f) = H_d(-f) + jH_q(-f)$$

$h_d(t)$ 和 $h_q(t)$ 都是时间的实函数， $H_d(-f)$ 是 $H_d(f)$ 的复共轭

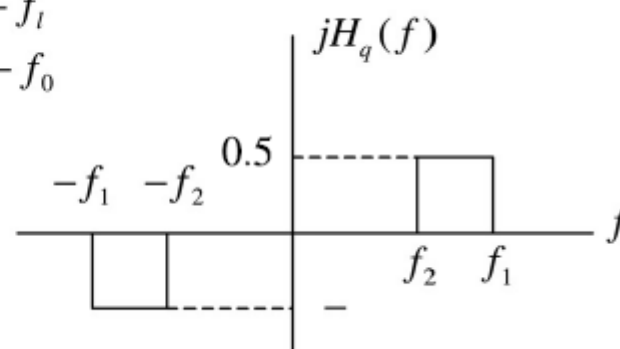
$$\tilde{H}(-f) = H_d^*(f) + jH_q^*(f) \quad \Rightarrow \quad H_d(f) = \frac{1}{2} (\tilde{H}(f) + \tilde{H}^*(-f))$$

$$\tilde{H}^*(-f) = H_d(f) - jH_q(f) \quad \Rightarrow \quad H_q(f) = \frac{1}{j2} (\tilde{H}(f) - \tilde{H}^*(-f))$$

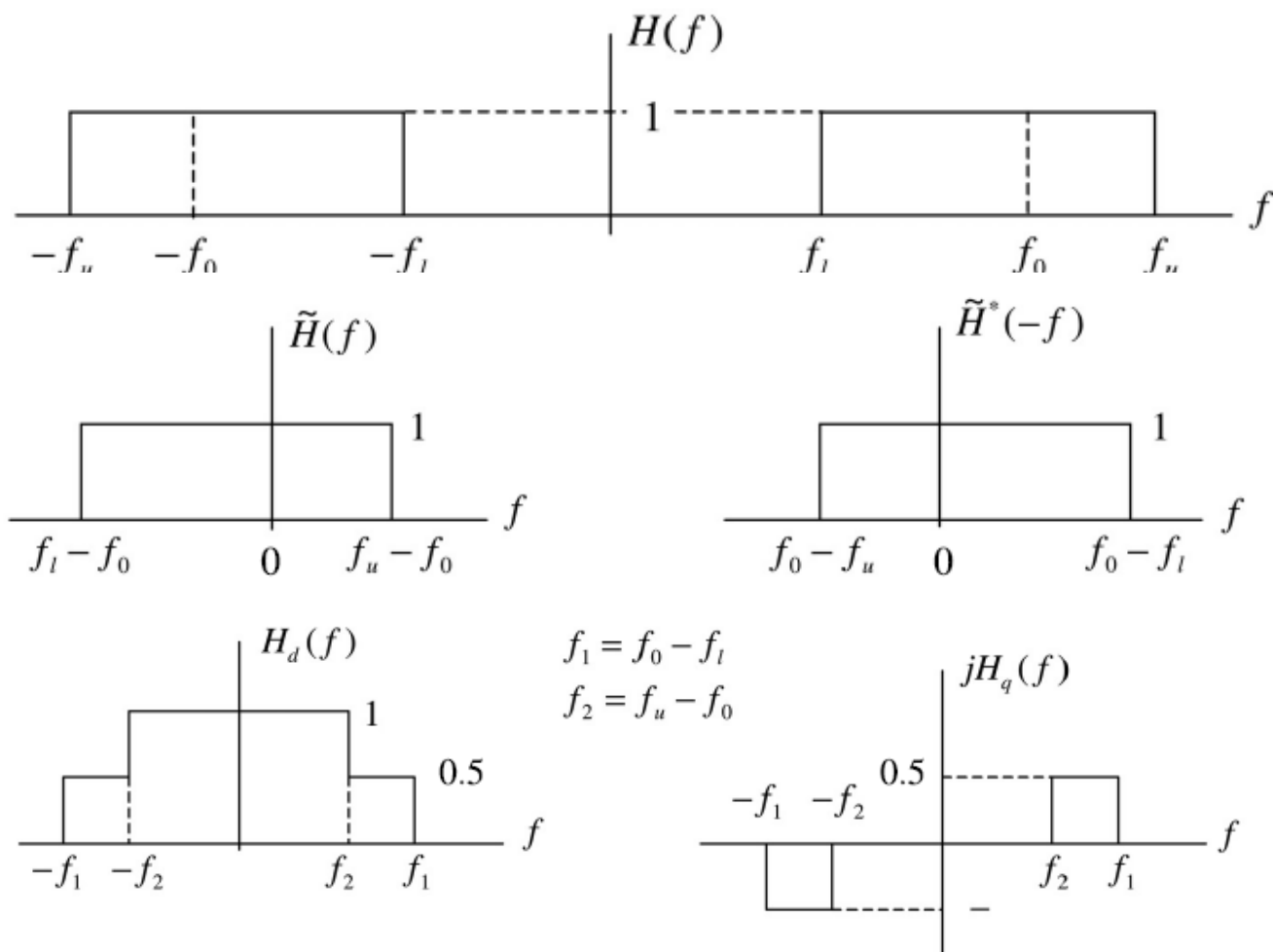
$$\tilde{H}(f) = H_+(f + f_0) = H_d(f) + jH_q(f)$$



$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 - f_l \\ f_2 &= f_u - f_0 \end{aligned}$$



4.2 线性带通系统



如果 $H(f)$ 关于 f_0 共轭对称, 则 $\tilde{H}(f) = \tilde{H}^*(-f)$
 有 $\tilde{H}_q(f) = 0$ 和 $h_q(t) = 0$



4.2 线性带通系统

在实际场合，可以选择 f_0 使得对所有的 t 有

$$\tilde{h}_q(t) \ll \tilde{h}_d(t)$$

在这种情况下， $h_q(t)$ 往往可以忽略，因而冲激响应的复包络可近似成一个实函数而不会导致明显的精度损失。略去 $h_q(t)$ 可将滤波运算的运算负荷减半。

关于 $\tilde{H}(f)$ 关于 $f=0$ 共轭对称(偶幅度谱和奇相位谱)，则 $\tilde{h}(t)$ 是实函数。

- 如果带通滤波器的传递函数 $H(f)$ 关于 f_0 共轭对称，就会出现这种情况。
- 如果滤波器的带宽相对于滤波器的中心频率较小，大部分的滤波器设计很近似地具有这个特性。



4.2 线性带通系统

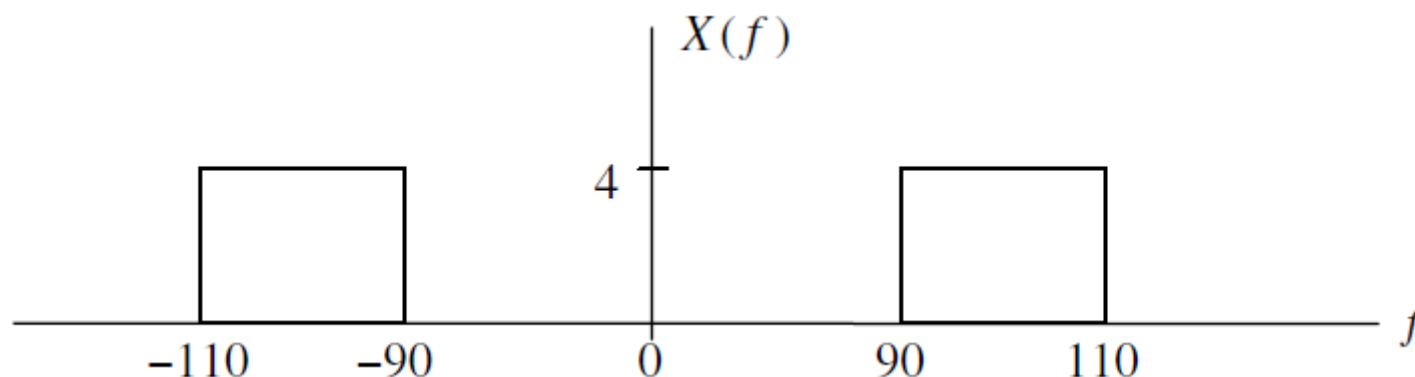
习题1：某角度调制信号定义如下

$$x(t) = 10 \cos [2\pi(100)t + 2 \sin(2\pi(10)t)]$$

- (1) 解析地确定并画出 $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 。
 - (2) 使用MATLAB和FFT变换，确定并画出 $X(f)$ ，要求画出幅度和相位。
 - (3) 使用MATLAB，确定并画出等效低通信号的频谱。
 - (4) 使用MATLAB，确定并画出 $x_d(t)$ 和 $x_q(t)$ 。
 - (5) 比较 (1) 和 (4) 的结果。
-

4.2 线性带通系统

习题2: 信号 $x(t)$ 的傅里叶变换如图所示, 假设对于所有的 f , $X(f)$ 都为正实数。



- (1) 对 $f_0=100$ 的情况, 确定并画出 $X_d(f)$ 和 $x_d(t)$ 。
- (2) 对 $f_0=95$ 的情况, 确定并画出 $X_d(f)$ 和 $x_d(t)$ 。
- (3) 对 $f_0=90$ 的情况, 确定并画出 $X_d(f)$ 和 $x_d(t)$ 。
- (4) 比较并讨论以上结果。