

实验一 信源熵

一、实验目的

1. 掌握离散信源熵的原理和计算方法；
2. 熟悉 MATLAB 软件的基本操作，练习应用 MATLAB 软件进行信源熵函数曲线的绘制；
3. 理解信源熵的物理意义，并能从信源熵函数曲线图上进行解释其物理意义；
4. 通过实验了解图像数据中所承载的熵，分析不同内容图像的熵的变化。

二、实验原理

1. 离散信源相关的基本概念、原理和计算公式

产生离散信息的信源称为离散信源。离散信源只能产生有限种符号。假定 X 是一个离散随机变量，即它的取值范围 $R = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ 是有限或可数的。设第 i 个变量 x_i 发生的概率为 $p(x_i) = P\{X = x_i\}$ 。定义一个随机事件的自信息量 $I(x_i)$ 为其对应的随机变量 x_i 出现概率对数的负值。即：

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i)$$

定义随机事件 X 的平均不确定度 $H(X)$ 为离散随机变量 x_i 出现概率的数学期望，即：

$$H(X) = \sum_i p(x_i) I(x_i) = -\sum_i p(x_i) \log_2 p(x_i)$$

单位为 bit/符号。

平均不确定度 $H(X)$ 的定义公式与热力学中熵的表示形式相同，所以又把平均不确定度 $H(X)$ 称为信源 X 的信源熵。

必须注意以下几点：

- (1) 某一信源，不管它是否输出符号，只要这些符号具有某些概率特性，必有信源的熵值；熵值是在总体平均上才有意义，因而是个确定值，可写成 $H(X)$ 其中 X 是指随机变量的整体（包括概率分布）。
- (2) 信息量则只有当信源输出符号而被接收者收到后才有意义，这就是给与信息者的信息度量，信息量的值本身也可以是随机量，也可以与接收者的情况有关。

(3) 熵是在平均意义上来表征信源的总体特征的，信源熵是表征信源的平均不确定度，平均自信息量是消除信源不确定度时所需要的信息的量度，即收到一个信源符号，全部解除了这个符号的不确定度。或者说获得这么大的信息量后，信源不确定度就被消除了。信源熵和平均自信息量两者在数值上相等，但含义不同。

(4) 当某一符号 x_i 的概率 $p(x_i)$ 为零时， $p(x_i) \log p(x_i)$ 在熵公式中无意义，为此规定这时的 $p(x_i) \log p(x_i)$ 也为零。当信源 X 只含有一个符号 x 时，必有 $p(x)=1$ ，此时信源熵 $H(X)$ 为零。

例 1，设信源符号集 $X=\{0, 1\}$ ，每个符号发生的概率分别为 $p(0)=p$ ， $p(1)=q$ ， $p+q=1$ ，即信源的概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{bmatrix}$$

则该二元信源的信源熵为：

$$H(X) = -p \log p - q \log q = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

$$\text{即： } H(p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

其中 $0 \leq p \leq 1$

$$p=0 \text{ 时， } H(0) = 0$$

$$p=1 \text{ 时， } H(1) = 0$$

2. MATLAB 二维绘图

例如对函数 $y=f(x)$ 进行绘图，则用 MATLAB 中的命令 `plot(x, y)` 就可以自动绘制出二维图。如果打开过图形窗口，则在最近打开的图形窗口上绘制此图；如果未打开图形窗口，则开一个新的图形窗口绘图。

例 2，在 MATLAB 上绘制余弦曲线图， $y = \cos x$ ，其中 $0 \leq x \leq 2\pi$ 。

`>>x=0:0.1:2*pi;` %生成横坐标向量，使其为使其为 0, 0.1, 0.2, ..., 6.2

`>>y=cos(x);` %计算余弦向量

`>>plot(x,y);` %绘制图形

3. 图像熵

图像熵是一种特征的统计形式，它反映了图像中平均信息量的多少。

灰度图 (Gray Scale Image)，又称灰阶图。即使用黑色调表示物体，即用黑色为基准色，不同的饱和度的黑色来显示图像。把白色与黑色之间按对数关系分为若干等级，称为灰度。灰度分为 256 阶。图像的每一个像素点的灰度都可以用 0-255 之间的数字来表示，一维熵表示图像中灰度分布的聚集特征所包含的信息量。

图像一维熵计算过程：

- (1) 输入一幅彩色图像，并将其转换成灰度图像；
- (2) 统计出图像中每个灰度阶的像素概率，即为信源符号的概率分布；
- (3) 据此，计算出一幅图像的一维熵。

4. 实验可能用到的 Matlab Function（仅供参考）

`imread()`, `imshow()`, `rgb2gray()`, `find()`。

三、实验预习

回答以下问题

1. 离散信源的信息熵是如何计算的？
2. 灰度图像的熵与图片哪些参数有关？如何通过分辨率和像素灰度值计算图像一维熵？

四、实验内容（要求给出程序结果截图，源代码放在.m 文件中）

1. 用 MATLAB 软件绘制二元信源熵函数曲线。
2. 通过 MATLAB 程序实现图像一维熵的计算。要求读取、转换图片，并显示转换前后的图片，统计各阶灰度的概率分布，计算图像一维熵并输出结果，相应图片会提供。完成下述内容：
 - (1) 分别计算大小相同、内容不同的一组图片的一维熵；
 - (2) 分别计算内容相同、大小不同的一组图片的一维熵。

五、实验思考题

1. 信息熵将信息量化，根据实验结果，分析信源熵的物理意义。
2. 依此获得不同图像的一维熵后，对比分析后，请回答：
 - (1) 为什么相同大小的图像其熵不同？当图像大小相同时，什么样的图像熵大一些？
 - (2) 什么样内容的图像，其图像大小不同，但熵的变化不大？

实验二 离散信道容量

一、实验目的

1. 掌握离散信道容量的计算；
2. 理解离散信道容量的物理意义；
3. 练习应用 MATLAB 软件进行二元对称离散信道容量的函数曲线的绘制，并从曲线上理解其物理意义。
4. 使用 MATLAB 实现非对称离散信道的信道容量计算。(扩展实验)

二、实验原理

信道是传送信息的载体即：信号所通过的通道。

信息是抽象的，而信道则是具体的。比如二人间对话，二人间的空气就是信道；打电话，电话线就是信道；看电视，听收音机，收、发间的空间就是信道。

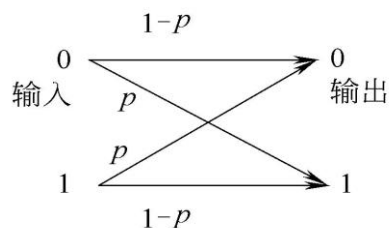
研究信道的目的：在通信系统中研究信道，主要是为了描述、度量、分析不同类型信道，计算其容量，即极限传输能力，并分析其特性。

1. 二元对称信道

二元对称信道（Binary Symmetric Channel, BSC）：二进制离散信道模型有一个允许输入值的集合 $X=\{0, 1\}$ 和可能输出值的集合 $Y=\{0, 1\}$ ，以及一组表示输入和输出关系的条件概率（转移概率）组成。如果信道噪声和其他干扰导致传输的二进制序列发生统计独立的差错，且条件概率对称，即

$$\begin{cases} p(Y=0/X=1) = p(Y=1/X=0) = p \\ p(Y=0/X=0) = p(Y=1/Y=1) = 1-p \end{cases}$$

这种对称的二进制输入、二进制输出的离散信道称作二元对称信道，如下图所示：



信道容量公式：

$$C = \max_{p(i)} I(X, Y) = \max_{p(i)} [H(X) - H(X/Y)]$$

$$\text{其中 } \max_{p(i)} H(X) = -\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} H(X/Y) &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j) \\ &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \end{aligned}$$

已知转移概率为 $p(y_1/x_1) = p(y_2/x_2) = 1-p$ 、 $p(y_2/x_1) = p(y_1/x_2) = p$ ，取 $p(x_1) = p(x_2) = 1/2$ （因为对于对称信道，为达到信道容量，可令信源的概率分布为等概分布），故可求得

$$p(x_1, y_1) = p(x_1)p(y_1/x_2) = (1-p)/2$$

同理可得

$$p(x_2, y_2) = p(x_2)p(y_2/x_2) = (1-p)/2$$

$$p(x_1, y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1) = p/2$$

$$p(x_2, y_1) = p(x_2)p(y_1/x_2) = p/2$$

$$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = (1-p)/2 + p/2 = 1/2$$

$$p(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = (1-p)/2 + p/2 = 1/2$$

所以

$$\begin{aligned} H(X/Y) &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) \log p(x_i/y_j) \\ &= - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \\ &= -[p \log p + (1-p) \log (1-p)] \\ &= H_2(p) \end{aligned}$$

故 BSC 的信道容量为：

$$\begin{aligned} C &= \max I(X, Y) = \max [H(X) - H(X/Y)] = 1 - H_2(p) \\ &= 1 + p \log p + (1-p) \log (1-p) \end{aligned}$$

2. 非对称信道

对称信道的概率转移矩阵的每一行（列）都是其他行（列）的组合，若传输的序列不满足条件概率对称的条件时，则这种离散无记忆信道（Discrete Memoryless Channel, DMC）被称做非对称 DMC。

非对称 DMC 信道容量迭代算法的整体思路（仅供参考，可选用其他迭代算法）：

- (1) 首先要输入信源符号个数、信宿符号个数，输入概率转移矩阵，并设置迭代精度，初始化信源分布，计算初始互信息；
- (2) 迭代计算新的信源概率分布；
- (3) 根据当前信源分布和概率转移矩阵计算输入与输出间的互信息；
- (4) 判断是否满足迭代精度，若不满足，转（2）；若满足迭代精度,则输出此时的信源分布，迭代次数和信道容量（互信息）。

3. 实验可能用到的 Matlab Function（仅供参考）

input(), repmat(), sum()。

三、实验预习

回答以下问题：

1. 什么是二元对称信道？什么是非对称离散无记忆信道？
2. 离散信道的信道容量的定义是什么？

四、实验内容（要求给出程序结果截图，源代码放在.m 文件中）

1. 根据 BSC 的信道容量公式,在 MATLAB 上绘制信道容量 C 与 p 的曲线；
2. 使用 MATLAB 以迭代算法实现非对称 DMC 的信道容量计算，要求输入信源符号个数、信宿符号个数、概率转移矩阵、迭代精度后，仿真程序自动输出信道容量，相应的信源概率分布，迭代次数。(扩展实验)

五、实验思考题

1. 二元对称信道
 - (1) 为什么当 p 为 $1/2$ 时,二元对称信道的信道容量为零? 这反映了什么?
 - (2) 为什么当 p 从 $1/2$ 逐渐增大到 1 时, C 反而逐渐增加,而当 $p=1$ 时达到最大值 1 ?
2. 非对称信道
 - (1) 计算过程中的迭代精度指的是什么,对于计算结果有何影响?
 - (2) 非对称信道的信道容量与其信源符号的分布概率有关吗?为什么?