

通信系统仿真 第2章 蒙特卡罗方法02

何晨光 哈尔滨工业大学 电子与信息工程学院

Communication Research Center

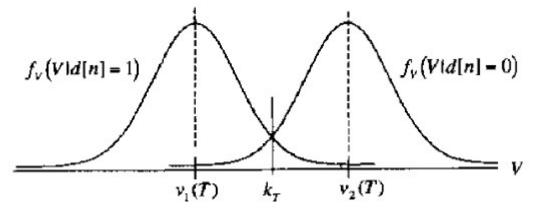


- 1蒙特卡洛方法简史
- 2基本概念
- 3在通信系统中的应用
- 4蒙特卡罗积分
- 5 繁琐通信系统中的应用
- 6 半解析方法



对于AWGN信道,通过采样积分-清除 (integrate-and-dump) 检测器的输出得到所有的充分统计量 V,是一个高斯随机变量,其均值由数据符号决定,方差由信道噪声决定。

在d[n]=0和d[n]=1的条件下,调价概率密度函数如下图所示,其中KT是接收机阈值。



高斯噪声条件下二进制信号的条件概率密度函数



在d[n]=1的条件下的条件差错概率为

$$P_r(E|d[n]=1) = \int_{K_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \exp[-\frac{1}{2\sigma_n^2} (x - v_1(T))^2] dx$$

对于 $P_r(E|d[n]=0)$ 也可以推导出类似的表达式。 从而,系统的差错概率估计

$$P_E = \frac{1}{2} P_r(E | d[n] = 1) + \frac{1}{2} P_r(E | d[n] = 0)$$

所以, 结果牵涉到积分值的估计问题



假设, 我们想求一下积分

$$I = \int_0^1 g(x) dx$$

其中g(x)是一个在积分区域内有界的函数。由基本的概率论,可知函数g(x)的总体均值为

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

其中 $f_X(x)$ 是随机变量X的概率密度函数。如果随机变量X的概率密度函数在区间(0,1)上满足 $f_X(x)=1$,而在其他地方为零,则E[g(x)]=I。因此,如果U是在区间(0,1)上均匀分布的随机变量,那么有 I=E[g(U)]



利用相对频率的观点,可得

$$\lim_{N \to \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} g(U_i) \right] = E[g(U)] = I$$

因此,我们对被积函数进行仿真,再在(0,1)区间上对它进行N次采样,采样点的平均值可以用来估计积分值。

系统蒙特卡罗仿真基本上也是这个思路,因为通常无法获得充分统计量在差错区域内的解析表达式,所以采用系统仿真来产生统计量的采样。

$$\lim_{N \to \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} g(U_i) \right] = E[g(U)] = I$$

可以得到积分的近似 $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}g(U_i)=\hat{I}$

通过对函数g(x)在N个均匀分布的采样点上求值再取平均,就可以实现积分的估计器。

这种方法适合于任何常义积分。通过简单的变量代换,可用蒙特卡罗方法来估算任意区间上的积分。

例如: 积分 $I = \int_a^b f_X(x) dx$

通过变量代换 y=(x-a)/(b-a) 变成标准形式并求得:

$$I = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)y) dy$$



例3: 为了用蒙特卡罗估计π值,只需要找到一个定积分值为π的函数。很容易就可以得到如下积分:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

然后就可以利用 $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}g(U_i)=\hat{I}$ 定义的算法,求解

积分值I,并将所得结果乘以4。

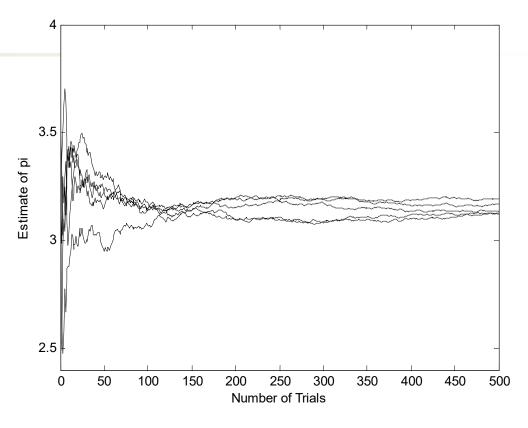
(代码见c207.m)

```
M=5:
                             % Number of experiments
 N=500:
                             % Trials per experiment
 u = rand(N, M);
                             % Generate random numbers
 uu = 1./(1+u.*u):
                             % Define function
 data = zeros(N, M);
                             % Initialize array
 % The following four lines of code determine
 % M estimates as a function of j, 0<j<=N.</p>
 data(1,:) = 4*uu(1,:)

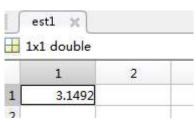
¬ for j=2:N

    data(j,:)=4*sum(uu(1:j,:))/j:
– end
 est = data(N,:)
                             % M estimates of pi
 est1 = sum(est)/M
                          % Average estimate
 plot (data, 'k')
                % Plot results
 xlabel ('Number of Irials')
 ylabel ('Estimate of pi')
```









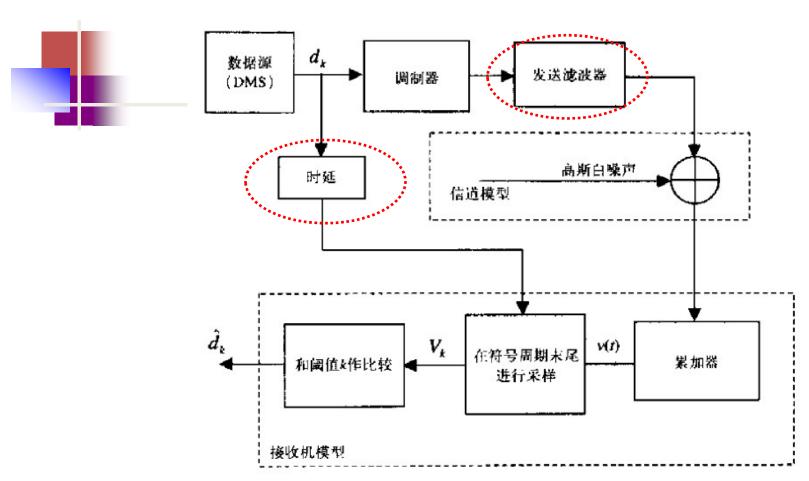


5 繁琐通信系统中的应用

将蒙特卡罗方法用于估计数字通信系统的误比特率时,是让N个采样符号通过系统的仿真模型,并计算产生差错的个数来实现的。假设通过系统仿真模型的N个符号导致了Ne个错误,那么误比特率的估计值为

$$\widehat{P}_E = \frac{N_e}{N}$$

从前面学习可知 \hat{P}_E 是一个随机变量,要获得误比特率的准确估计,估计器必须是无偏的,并且具有最小的方差。小的方差要求有大的N,而这又会导致较长的计算时间。



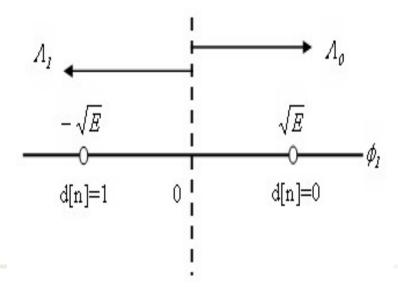
例4:基本框图如图所示。假设为BPSK调制,调制器输出端的滤波器是三阶巴特沃思滤波器,其带宽等于比特率($BW = r_b$),该滤波器会产生码间干扰 (ISI)。仿真的目的是确定由滤波器带来的ISI所增加的误比特率。

5 繁琐通信系统中的应用

BPSK $令A_c=1和k_m=\pi$, 由此可得

$$x_d[n] = cos(\pi d[n]) = \begin{cases} 1, & d[n] = 0 \\ -1, & d[n] = 1 \end{cases}$$
$$x_q[n] = sin(\pi d[n]) = 0$$

BPSK信号的空间表示



信号星座点中的两个信号 点都位于桐乡信道上,在 仿真中我们可以不考虑正 交信道



步骤一: 理论推导

步骤二:确定时延值

步骤三:编写BER子函数

步骤四:编写主函数

步骤二:确定时延

第一个问题就是要确定delay的值。 选定一个Eb/No值,用不同的delay的值对系统进行 仿真,并观察结果。 (代码见c208.m)

```
EbNodB = 6:
                                                  % Eb/No (dB) value
z = 10. (EbNodB/10):
                                                  % convert to linear scale
delay = 0:8:
                                                  % delay vector
BER = zeros(1, length(delay)):
                                                  % initialize BER vector
Errors = zeros(1, length(delay));
                                                  % initialize Errors vector
BER_T = q(sqrt(2*z))*ones(1, length(delay));
                                              % theoretical BER vector
                                                 % 100 errors for ideal (zero ISI) system
N = round(100, /BER T):
                                                  % set filter switch (in=1 or out=0)
FilterSwitch = 1:
for k=1:length(delay)
    [BER(k), Errors(k)] = c209_MCBPSKrun(N(k), z, delay(k), FilterSwitch)
end
semilogy (delay, BER, 'o', delay, BER_T, '-'); grid;
xlabel('Delay'); vlabel('Bit Error Rate');
% End of script file.
```



步骤二: 确定时延

第一个问题就是要确定delay的值。 选定一个Eb/No值,用不同的delay的值对系统进行 仿真,并观察结果。

```
EbNodB = 6;
z = 10. ^(EbNodB/10);
delay = 0:8;
BER = zeros(1,length(delay));
Errors = zeros(1,length(delay));
BER_T = q(sqrt(2*z))*ones(1,length(delay));
N = round(100./BER_T);
FilterSwitch = 1;
for k=1:length(delay)
    [BER(k),Errors(k)] = c10_MCBPSKrun(N(k),z,delend)
semilogy(delay,BER,'o',delay,BER_T,'-'); grid;
xlabel('Delay'); ylabel('Bit Error Rate');
% End of script file.
```

时延从0到8个采样周期依次迭代。因为采样周期依次迭代。因为采样频率为每个符号10次采样,delay的步长为0.1Ts,其中Ts为符号周期。



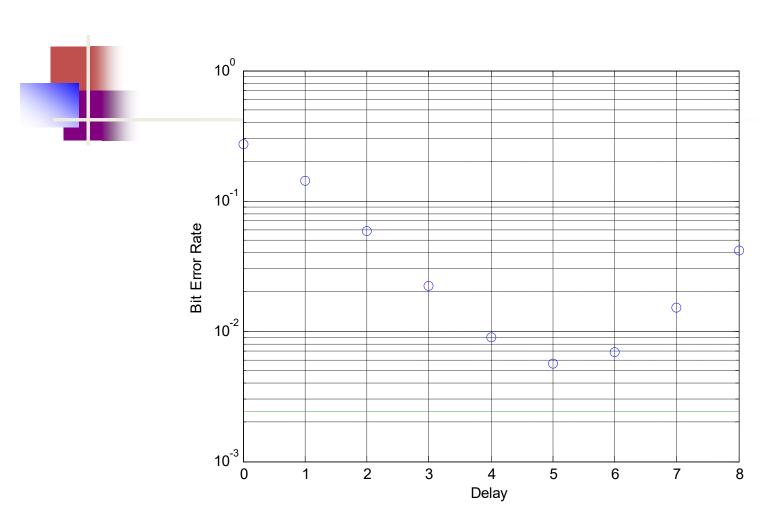
步骤二: 确定时延

选择合适的N值使得有足够多的差错发生,从而保证适当小的估计器误差。

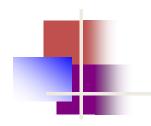
```
BER_I = q(sqrt(2*z))*ones(1, length(delay));
N = round(100./BER_I);
```

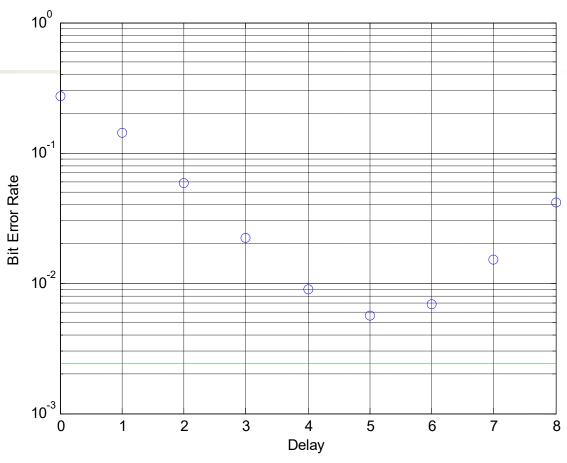
BER_T是AWGN情况下的理论差错概率。

对于一个给定的Eb/No,由于存在ISI和其它干扰,差错发生的次数会增加并超过平均值100。 注意对每一个delay值,同时给出了误比特率的数值和用于计算误比特率的差错次数。这样就可以得出结论:在差错次数足够多的情况下可得到可靠的误比特率估计。



不同的仿真结果用小圆圈表示,作为参考,用实线表示在AWGN信道下无ISI时系统在Eb/No=6dB时的性能。可以发现不正确的选择时延会导致过大的误比特率。





寻找时某延值时的系统有最小的误比特率。如图 发现正确的时延值极有可能在5和6个采样周期之 间。由于时延必须量化到采样周期的整数倍,所 以选择时延为5个采样周期。可以用更高的采样频 率来确定更精确的delay的值。



步骤一: 理论推导

步骤二:确定时延值

步骤三:编写BER子函数

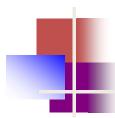
步骤四:编写主函数

```
function [BER, Errors] = MCBPSKrun (N, EbNo, delay, FilterSwitch)
 SamplesPerSymbol = 10;
                                                  % samples per symbol
 BlockSize = 1000;
                                                 % block size
 NoiseSigma = sqrt(SamplesPerSymbol/(2*EbNo)); % scale noise level
 DetectedSymbols = zeros(1, BlockSize);
                                                % initialize vector
 NumberOfBlocks = floor(N/BlockSize):
                                                % number of blocks processed
  [BIx, AIx] = butter(5, 2/SamplesPerSymbol); % compute filter parameters
 [IxOutput, IxFilterState] = filter(BIx, AIx, 0); % initialize state vector
 BRx = ones(1, SamplesPerSymbol); ARx=1;
                                                % matched filter parameters
                                                 % initialize error counter
 Errors = 0:
 % Simulation loop begine here.
for Block=1:NumberOfBlocks
      % Generate transmitted symbols.
      [SymbolSamples, TxSymbols] = random_binary(BlockSize, SamplesPerSymbol);
      % Transmitter filter if desired.
      if FilterSwitch==0
         IxOutput = SymbolSamples;
      else
          [IxOutput, IxFilterState] = filter(BIx, AIx, SymbolSamples, IxFilterState);
      end
```

21

```
function [BER, Errors] = MCBPSKrun (N, EbNo, delay, FilterSwitch)
SamplesPerSymbol = 10;
                                                % samples per symbol
BlockSize = 1000:
                                               % block size
NoiseSigma = sqrt(SamplesPerSymbol/(2*EbNo)); % scale noise level
DetectedSymbols = zeros(1, BlockSize);
                                            % initialize vector
NumberOfBlocks = floor(N/BlockSize):
                                               % number of blocks processed
[BIx, AIx] = butter(5, 2/SamplesPerSymbol); % compute filter parameters
[IxOutput, IxFilterState] = filter(BIx, AIx, 0): % initialize state vector
BRx = ones(1, SamplesPerSymbol): ARx=1:
                                          % matched filter parameters
Errors = 0:
                                               % initialize error counter
```

(代码见c209.m)



function [BER, Errors] = MCBPSKrun (N, EbNo, delay, FilterSwitch)

SamplesPerSymbol = 10;

% samples per symbol

BlockSize = 1000;

% block size

本程序采用块级联(block-serial)的方法: 迭代处理由1000个符号组成的块。

SamplesPerSymbol = 10每符号采样的个数(采样频率) BlockSize = 1000 块数

将SamplesPerSymbol 和BlockSize作为输入参数带入子函数random_binary



数字调制器中一个常用模块: random_binary

```
调制器的基本构建模块
 % File: function random binary
 function [x,bits]=random binary(nbits,nsamples)
                                         是函数random_binary,
 x=zeros(1,nbits*nsamples)
                                         它产生电平值为+1和-1
 bits=round(rand(1,nbits));
                                         的二进制波形,产生的
 for m=1:nbits
                                         比特数以及每比特的采
   for n=1:nsamples
     index=(m-1)*nsamples+n;
                                         样数是该函数的参数。
     x(1,index)=(-1)^bits(m);
   end
 end
 % End of function
例: QPSK调制
x= random_binary(nbits,nsamples)+j*random_binary(nbits,nsamples)
```

4

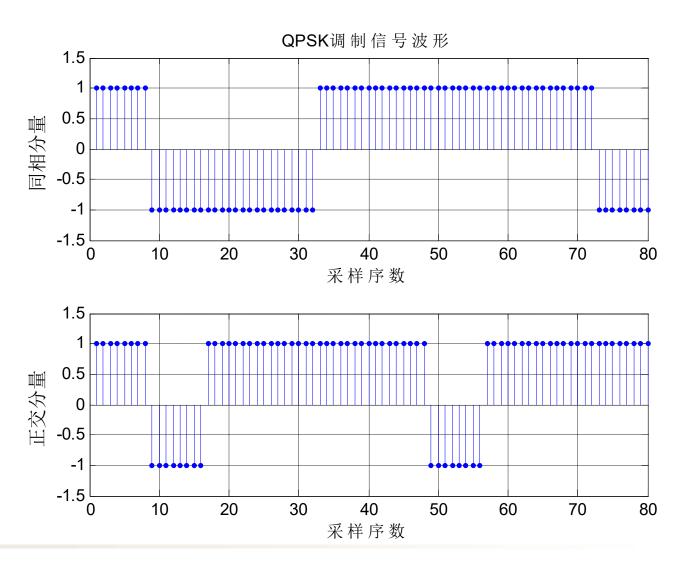
步骤三:编写BER子函数

应用实例:产生一个10比特的QPSK信号,采样频率 为每比特8个采样点

```
nbits = 10; nsamples = 8;
x = random_binary(nbits,nsamples)+i*random_binary(nbits,nsamples);
xd = real(x); xq = imag(x);
subplot(2,1,1)
stem(xd,'.'); grid; axis([0 80 -1.5 1.5]);
xlabel('Sample Index'); ylabel('xd')
subplot(2,1,2)
stem(xq,'.'); grid; axis([0 80 -1.5 1.5]);
xlabel('Sample Index'); ylabel('xq')
```

(代码见c206.m)







NoiseSigma 计算噪声的能量 DetectedSymbols 初始化统计量数组 NumberOfBlocks 实际处理的包个数

Matlab取整函数有: fix, floor, ceil, round.

具体应用方法如下:

fix朝零方向取整

如: fix(-1.3)=-1;

fix(1.3)=1;

floor, 顾名思义,就是地板,所以是取比它小的整数,即朝负无穷方向取整

如: floor(-1.3)=-2;

floor(1.3)=1;

floor(-1.8)=-2;

floor(1.8)=1

Matlab取整函数有: fix, floor, ceil, round.

```
具体应用方法如下:
  ceil,与floor相反,它的意思是天花板,也就是
 取比它大的最小整数,即朝正无穷方向取整
  如ceil(-1.3)=-1;
   ceil(1.3)=2;
   ceil(-1.8) = -1;
   ceil(1.8)=2
  round四舍五入到最近的整数
  round(1.3)=1;round(1.52)=2
```

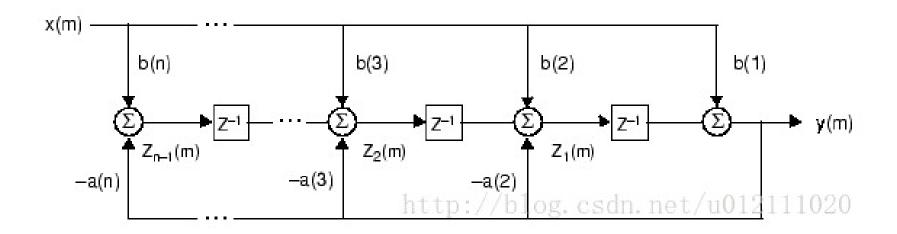


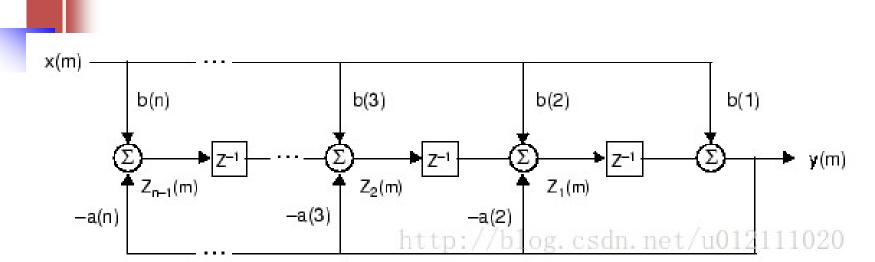
```
function [BER, Errors] = MCBPSKrun (N, EbNo, delay, FilterSwitch)
SamplesPerSymbol = 10;
                                                % samples per symbol
BlockSize = 1000:
                                               % block size
NoiseSigma = sqrt(SamplesPerSymbol/(2*EbNo)); % scale noise level
DetectedSymbols = zeros(1, BlockSize);
                                         % initialize vector
NumberOfBlocks = floor(N/BlockSize):
                                               % number of blocks processed
[BIx, AIx] = butter(5, 2/SamplesPerSymbol); % compute filter parameters
[IxOutput, IxFilterState] = filter(BIx, AIx, 0): % initialize state vector
BRx = ones(1, SamplesPerSymbol): ARx=1:
                                           % matched filter parameters
Errors = 0:
                                                % initialize error counter
```

butter 产生滤波器系数 filter 数据过滤波器后的输出 BRx, ARx 匹配滤波器参数



滤波器是组成通信系统的许多子系统中的重要部分。这些滤波器中的许多是模拟的,为了便于仿真,必须将他们映射为合适的等价数字滤波器。

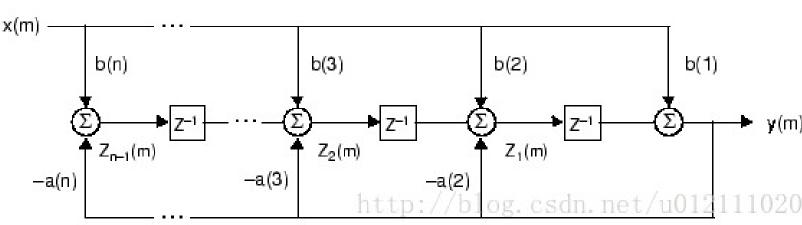




滤波器的系数向量a(分母系数向量)和b(分子系数向量)可以使用Matlab滤波器子程序,如: butter 巴特沃思滤波器 chebyl 切比雪夫1型滤波器 elliptic 椭圆滤波器

确保存放系数a和b的向量保持相同长度,如果这两个向量长度不相等,较短的向量应该进行补领,使 之与较长向量的长度相等





使用Matlab的一个方便之处在与:对于大量不同的模拟滤波器原型,都可以轻易的算出滤波器系数a和b,生成的这些滤波器系数通常会用于Matlab子程序filter (一个为分块处理开发的子程序)

y = filter(b,a,x)

作用:使用由分子和分母系数b和a定义的有理传递函数对输入数据x进行滤波。

```
y = filter(b,a,x)
y = filter(b,a,x,zi)
y = filter(b,a,x,zi,dim)
[y,zf] = filter(___)
```

y = filter(b,a,x) 使用由分子和分母系数 b 和 a 定义的有理传递函数 对输入数据 x 进行滤波。如果 a(1) 不等于 1 ,则 filter 按 a(1) 对滤波器系数进行归一化。因此 ,a(1) 必须是非零值。

- 如果 x 为向量,则 filter 将滤波后数据以大小与 x 相同的向量形式返回。
- 如果 x 为矩阵,则 filter 沿着第一维度操作并返回每列的滤波后的数据。
- 如果 x 为多维数组,则 filter 沿大小不等于1的第一个数组维度进行计算。

```
      y = filter(b,a,x,zi) 将初始条件 zi 用于滤波器延迟。zi 的长度必须等于 max(length(a),length(b))-1。

      y = filter(b,a,x,zi,dim) 沿维度 dim 进行计算。例如,如果 x 为矩阵,则 filter(b,a,x,zi,2) 返回每行滤波后的数据。

      [v,zf] = filter( ) 还使用任一上述语法返回滤波器延迟的最终条件 zf。
```



例5: 移动平均滤波器

移动平均滤波器是用于对噪声数据进行平滑处理的常用方法。此示例使用 filter 函数计算沿数据向量的平均值。

创建一个由正弦曲线数据组成的 1×100 行向量, 其中的正弦曲线被随机干扰所损坏。

```
t = linspace(-pi, pi, 100);
rng default %initialize random number generator
x = sin(t) + 0.25*rand(size(t));
```

(代码见c211.m)



例5: 移动平均滤波器

移动平均值滤波器沿数据移动长度为windowSize的窗口,并计算每个窗口中包含的数据的平均值。以下差分方程定义向量x的移动平均值滤波器:

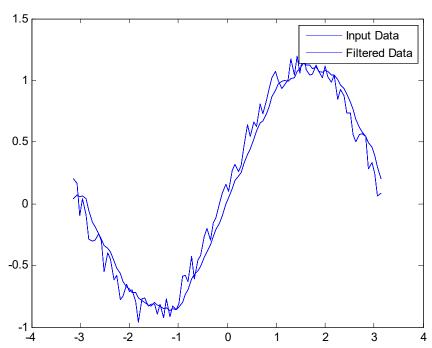
$$y(n) = \frac{1}{windowSize}(x(n) + x(n-1) + \ldots + x(n - (windowSize - 1))).$$

窗口大小为5时,计算有理传递函数的分子和分母系数。

```
windowSize = 5;
b = (1/windowSize)*ones(1, windowSize);
a = 1;
```

例5:移动平均滤波器 求数据的移动平均值,并绘制其对原始数据的图。

```
y = filter(b, a, x);
plot(t, x)
hold on
plot(t, y)
legend('Input Data', 'Filtered Data')
```





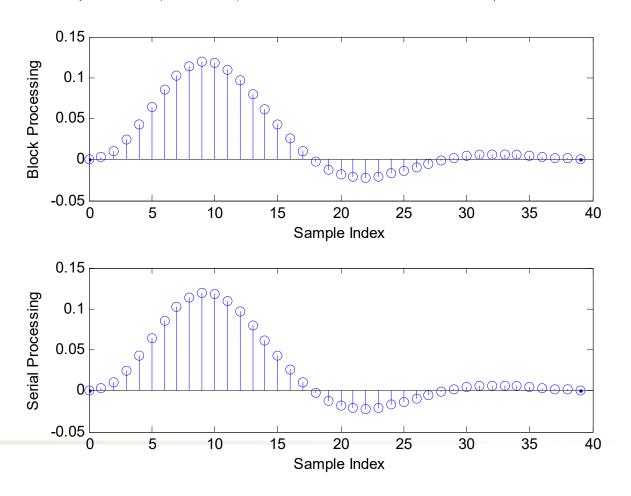
例6: 采用快处理和串行(逐个采样点)处理方法,来确定一个四阶巴特沃思滤波器的冲激响应。

(代码见c212.m)

```
n = 40:
                                   % number of samples
 order = 4;
                                   % filter order
 [b, a] = butter(order, 0.1);
                                   % prototype
 % The following program segment is the block processing implementation.
 in1 = [1, zeros(1, n-1)];
                                   % input vector
 out1 = filter(b, a, in1);
                                   % output vector
 % The following program segment is the sample-by-sample implementation.
 sreg = zeros(1, order+1);
                              % initialize shift register
for k=1:n
    if k==1
                                   % impulse input
       in=1:
    else
                                   Sreg代表长度为order+1的移位寄存器,
       in=0;
                                   order为滤波器阶数
    end
    out = b(1)*in + sreg(1,1);
                                   % determine output
    sreg = in*b - out*a + sreg;
                                % update register
    sreg = [sreg(1, 2: (order+1)), 0]; % shift
    out 2(k) = out:
                                       % create output vector
                                                                             39
 end
```



例:采用快处理和串行(逐个采样点)处理方法,来确定一个四阶巴特沃思滤波器的冲激响应。



```
for Block=1:NumberOfBlocks
                                                         SamplesPerSymbol = 10
     % Generate transmitted symbols.
                                                         BlockSize = 1000
     [SymbolSamples, TxSymbols] = random_binary(BlockSize, SamplesPerSymbol);
     % Transmitter filter if desired.
     if FilterSwitch==0
                                         发送滤波器关闭,则可
        IxOutput = SymbolSamples;
                                         以达到零ISI
     else
        [TxOutput, TxFilterState] = filter(BTx, ATx, SymbolSamples, TxFilterState);
     end
     % Generate channel noise.
     NoiseSamples = NoiseSigma*randn(size(TxOutput));
     %
     % Add signal and noise.
     %
     RxInput = TxOutput + NoiseSamples;
     % Pass Received signal through matched filter.
```

IntegratorOutput = filter(BRx, ARx, RxInput);



```
% Sample matched filter output every SamplesPerSymbol samples,
      % compare to transmitted bit, and count errors.
      %
                                                SamplesPerSymbol = 10
7
      for k=1:BlockSize,
                                                BlockSize = 1000
         m = k*SamplesPerSymbol+delay;
         if (m < length(IntegratorOutput))</pre>
            DetectedSymbols(k) = (1-sign(IntegratorOutput(m)))/2;
            if (DetectedSymbols(k) ~= TxSymbols(k))
               Errors = Errors + 1:
                                            IntegratorOutput 1×10000 double
            end
                                            DetectedSymbols 1×1000 double
         end
                                            TxSymbols
                                                             1 \times 1000 double
      end
- end
-BER = Errors/(BlockSize*NumberOfBlocks); % calculate BER
 % End of function file.
```



sign函数

判断数值的正负

```
>> sign(2)

ans =

1

>> sign(-2)

ans =

-1
```



步骤一: 理论推导

步骤二:确定时延值

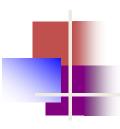
步骤三:编写BER子函数

步骤四:编写主函数

步骤四:编写主函数

确定了delay值,完成子函数的编写,可以变下最后的主程序。

```
% vector of Eb/No (dB) values
 EbNodB = 0:8:
  z = 10. (EbNodB/10):
                              % convert to linear scale
  delay = 5:
                                % enter delay value (samples)
 BER = zeros(1, length(z)); % initialize BER vector
 Errors = zeros(1, length(z)); % initialize Errors vector
                          % theoretical (AWGN) BER vector
 BER I = q(sqrt(2*z));
 N = round(20./BER_I); % 20 errors for ideal (zero ISI) system
 FilterSwitch = 1:
                          % Tx filter out (0) or in (1)
for k=1:length(z)
    N(k) = max(1000, N(k)); % ensure at least one block processed
    [BER(k), Errors(k)] = c10_MCBPSKrun(N(k), z(k), delay, FilterSwitch)
  end
                                                        (代码见c210.m)
  semilogy (EbNodB, BER, 'o', EbNodB, BER I)
 xlabel('E b/N 0 - dB'); ylabel('Bit Error Rate'); grid
 legend('System Under Study', 'AWGN Reference', 0)
 % End of script file.
                                                                          45
```



当对一定取值范围内的多个Eb/No进行蒙特卡罗仿真时,如果对每一个Eb/No值都用同样的N,则基于误比特率估计的差错率会随着Eb/No的增加而减少,所以Eb/No越大时估计得误比特率越不可靠。

$$BER_I = q(sqrt(2*z));$$
 $N = round(20./BER_I);$

把要处理的采样次数设为K/PT, 其中PT是AWGN下的差错概率,可以部分的解决这个问题。

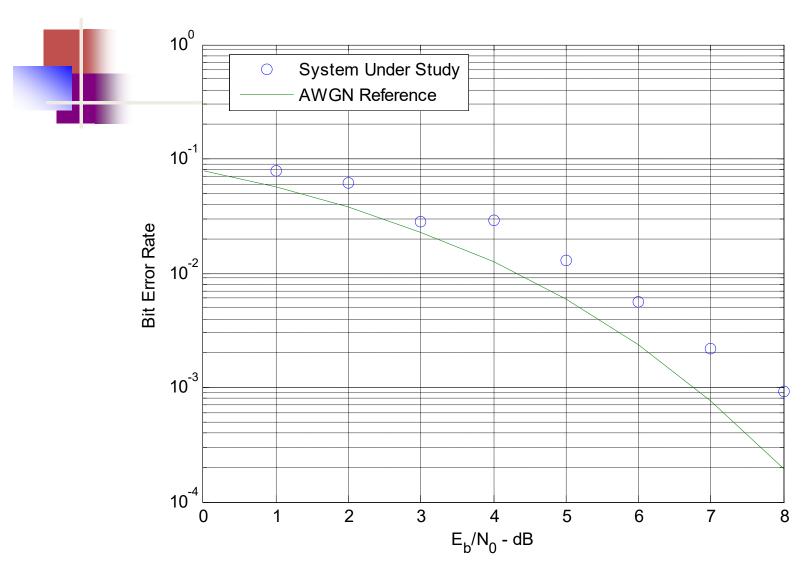


系统中存在一些损伤,如ISI和同步误差等,回到值 仿真的估计值超过理论PT,再一次仿真运行中光查 到的差错次数通常会超过K。

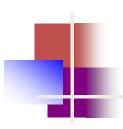
BER_I = q(sqrt(2*z));
N = round(20./BER_I);

如果以目前的方式K=20来确定N,则对充分小的Eb/No,N可能小于1000。由于仿真基于级联采样块的处理,每块由1000个符号组成(10000个采样),我们必须保证N>1000,从而保证仿真至少能处理一个完整的块。如果N<1000,会出现错误的结果。

N(k) = max(1000, N(k)); % ensure at least one block processed



仿真结果用小圆圈表示,理想情况下(零ISI)的误比特率用实线表示。显然,滤波器引起的ISI增大了误比特率。



习题1:使用每个符号20次采样的采样频率,重新运行上面BPSK调制的仿真,这样能否改进时延的估计? 试对你的答案进行解释。用20次采样/符号的采样频率估计误比特率,并和上面例题的10次采样/符号的结果进行比较,作出结果曲线图并简要说明。



习题2: 假设
$$x_d[n] = \cos(\frac{\pi}{6}), \quad d[n] = 0$$

以及
$$x_q[n] = \sin(\frac{\pi}{6}), \quad d[n] = 1$$

仿真二进制PSK系统, 并与例题的结果进行对比



习题3:修改本章中BPSK调制的仿真,使PSK系统的仿真是逐个符号的方式而不是块级联的方式。也就是说,随机二进制数据源产生二进制比特(0或1),重复对应于这些二进制符号的波形样本,以满足给定的采样数/符号指标所需的次数。