Цифровая обработка сигналов

ПМ, ИСиТ (I курс, магистратура)

Список литературы

- *Särkkä S.* Bayesian Filtering and Smoothing. Cambridge University Press, 2013.
- *Doucet A., Johansen A. M.* A tutorial on particle filtering and smoothing: fifteen years later (2011).
- *Chen Z.* Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond. Statistics 182 (1), 1–69, 2003.
- *Ristic B. et al.* Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications. Artech House, 2004.
- *Schön T.* Solving Nonlinear State Estimation Problems Using Particle Filters – An Engineering Perspective. Tech. report, 2010.

Список литературы

- *Thrun S., Burgard W., Fox D.* 2005. Probabilistic Robotics (Intelligent Robotics and Autonomous Agents). The MIT Press.
- Курс «Robot mapping» Фрайбургского университета
  Страница курса
  Видеолекции на YouTube
- Kalman and Bayesian Filters in Python
- *Chopin N., Papaspiliopoulos O.* 2020. An Introduction to Sequential Monte Carlo. Springer Series in Statistics.
  Sequential Monte Carlo in Python

Модель пространства состояний aka скрытая марковская модель (HMM)

Уравнение динамики и модель наблюдения:

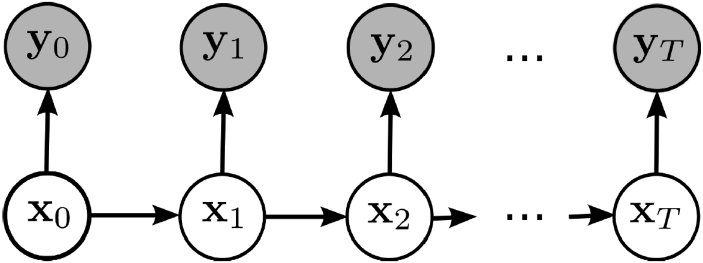
Пусть $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{n_y}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k) \\ \mathbf{y}_k &= h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k), \end{aligned}$$

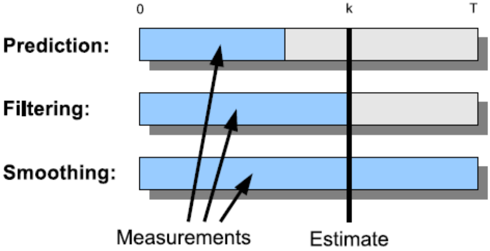
где $\{\mathbf{v}_i\}$, $\{\mathbf{w}_i\}$ – последовательности независимых с. в., не зависящие также друг от друга. Другими словами заданы распределения

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\sim p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) \\ \mathbf{y}_k &\sim p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_0 &\sim p(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Скрытые марковские модели (Hidden Markov Models)



Некоторые целевые распределения:



Обозначим $\mathbf{y}_{1:k} := \{\mathbf{y}_i,\ i = 1, ..., k\}$. Рассмотрим распределение

$$p(\mathbf{x}_{k+n}|\mathbf{y}_{1:k}). \qquad (1)$$

- Если $n > 0$, то распределение (1) называется прогнозным.
- Если $n = 0$, то (1) называется распределением фильтрации.
- Если $n < 0$, то распределение (1) называется сглаживающим.

Основные допущения:

- $\{\mathbf{x}_k,\ k = 1, 2, ...\}$ является марковским процессом
$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{1:k-1}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}).$$
- Условная независимость наблюдений:
$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_{1:k}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k).$$

Байесовская фильтрация

Формальное решение задачи нахождения распределения фильтрации $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ сводится к следующим двум шагам:

- Прогноз:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_{k-1} \qquad (2)$$

- Коррекция:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \frac{1}{Z_k}p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}), \qquad (3)$$

  где нормировочная константа определяется следующим образом

$$Z_k = \int p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k. \qquad (4)$$

Линейная гауссовская модель

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}, && (5)\\
\mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k, && (6)
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_{\mathrm{k}-1})$, $\mathbf{r}_k \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{\mathrm{k}})$.
Иными словами

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) &= \mathrm{N}(\mathbf{x}_{\mathrm{k}}|\mathbf{A}_{\mathrm{k}-1}\mathbf{x}_{\mathrm{k}-1}, \mathbf{Q}_{\mathrm{k}-1})\\
p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) &= \mathrm{N}(\mathbf{y}_{\mathrm{k}}|\mathbf{H}_{\mathrm{k}}\mathbf{x}_{\mathrm{k}}, \mathbf{R}_{\mathrm{k}})\\
p(\mathbf{x}_0) &= \mathrm{N}(\mathbf{x}_0|\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0).
\end{aligned}
$$

В рамках рассматриваемой линейной гауссовской модели все основные распределения остаются нормальными

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \mathrm{N}(\mathbf{x}_\mathrm{k}|\mathbf{m}_\mathrm{k}^-, \mathbf{P}_\mathrm{k}^-) \\
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) &= \mathrm{N}(\mathbf{x}_\mathrm{k}|\mathbf{m}_\mathrm{k}, \mathbf{P}_\mathrm{k}) \\
p(\mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) &= \mathrm{N}(\mathbf{y}_\mathrm{k}|\mathbf{H}_\mathrm{k}\mathbf{m}_\mathrm{k}^-, \mathbf{S}_\mathrm{k}).
\end{aligned}$$

Параметры распределений (векторы средних и матрицы ковариаций) находятся по некоторой рекуррентной процедуре (фильтр Калмана).

Пусть известно распределение фильтрации на предыдущем шаге, т. е.

$$p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{x}_{\mathrm{k}-1}|\mathbf{m}_{\mathrm{k}-1}, \mathbf{P}_{\mathrm{k}-1})$$

Тогда оптимальная оценка на следующем шаге находится по следующей схеме:

- Прогноз:

$$\mathbf{m}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{m}_{k-1} \tag{7}$$
$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \tag{8}$$

- Коррекция:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \tag{9}$$
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T\mathbf{S}_k^{-1} \tag{10}$$
$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{m}_k^-) \tag{11}$$
$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T. \tag{12}$$

Необходимые свойства многомерного нормального распределения:

Пусть

$$\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P}) \quad (13)$$

$$\mathbf{y}|\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{u}, \mathbf{R}) \quad (14)$$

Тогда совместное распределение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и маргинальное распределение компоненты $\mathbf{y}$ определяется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{H}\mathbf{m} + \mathbf{u} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}\mathbf{P} & \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \end{bmatrix}\right) \quad (15)$$

$$\mathbf{y} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{H}\mathbf{m} + \mathbf{u}, \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\right) \quad (16)$$

Необходимые свойства многомерного нормального распределения:

Пусть случайный вектор $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ имеет совместное нормальное распределение

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right), \tag{17}$$

тогда маргинальные и условные распределения определяются следующим образом:

$$\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{a}, \mathbf{A}) \tag{18}$$

$$\mathbf{y} \sim \mathrm{N}(\mathbf{b}, \mathbf{B}) \tag{19}$$

$$\mathbf{x}|\mathbf{y} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}), \mathbf{A} - \mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\right) \tag{20}$$

$$\mathbf{y}|\mathbf{x} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{b} + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \mathbf{B} - \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\right). \tag{21}$$

Пусть $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{x}_{\mathrm{k-1}}|\mathbf{m}_{\mathrm{k-1}}, \mathbf{P}_{\mathrm{k-1}})$. По свойству 1

$$p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k-1}\\ \mathbf{x}_k\end{bmatrix}\middle|\mathbf{m}', \mathbf{P}'\right), \tag{22}$$

где

$$\mathbf{m}' = \begin{pmatrix}\mathbf{m}_{k-1}\\ \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{m}_{k-1}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}' = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_{k-1} & \mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^T\\ \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1} & \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}\end{pmatrix}.$$

Далее в силу свойства 2

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{x}_{\mathrm{k}}|\mathbf{m}_{\mathrm{k}}^-, \mathbf{P}_{\mathrm{k}}^-),$$

где

$$\mathbf{m}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{m}_{k-1}, \qquad \mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Доказано, что $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathrm{N}(\mathbf{x}_\mathrm{k}|\mathbf{m}_\mathrm{k}^-, \mathbf{P}_\mathrm{k}^-)$. По свойству 1

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k|\mathbf{y}_{1:k-1}) = \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \mathbf{y}_k\end{bmatrix}\middle|\mathbf{m}'', \mathbf{P}''\right), \tag{23}$$

где

$$\mathbf{m}'' = \begin{pmatrix}\mathbf{m}_k^-\\ \mathbf{H}_k\mathbf{m}_k^-\end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}'' = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_k^- & \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T\\ \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^- & \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k\end{pmatrix}.$$

Далее в силу свойства 2

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = \mathrm{N}(\mathbf{x}_\mathrm{k}|\mathbf{m}_\mathrm{k}, \mathbf{P}_\mathrm{k}),$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}[\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{m}_k^-]\\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-.\end{aligned}$$

Пример:

Пусть состояние системы определяется вектором

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} p_t \\ v_t \\ a_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{t+1} &= \begin{pmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ v_t \\ a_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^3/6 \\ T^2/2 \\ T \end{pmatrix} \mathbf{w}_t, \;\; \mathbf{w}_t \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{Q}_\mathrm{t}) \\
y_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ v_t \\ a_t \end{pmatrix} + \mathbf{e}_t, \;\; \mathbf{e}_t \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{R}_\mathrm{t})
\end{aligned}$$

Пример:

Пусть состояние системы определяется вектором

$$\mathbf{x}_k = [x_k, y_k,\, \dot{x}_k,\, \dot{y}_k,\, \ddot{x}_k,\, \ddot{y}_k]^T.$$

Модель динамики (дискретная версия равноускоренного движения):

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{Q},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T & 0 & T^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T & 0 & T^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример:

Модель наблюдения:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{R},$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нелинейное преобразование случайных величин:

Пусть $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P})$. Рассмотрим с. в

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Можно записать $\mathbf{x} = \mathbf{m} + \delta\mathbf{x}$, где $\delta\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{P})$. Тогда

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{m} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{m}) + \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})\delta\mathbf{x} + \ldots, \tag{24}$$

где $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})$ – матрица Якоби:

$$[\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})]_{i,j} = \left.\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}}. \tag{25}$$

Линейное приближение:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{m}) + \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})\delta\mathbf{x}. \tag{26}$$

Линейное приближение:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{m}) + \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})\delta\mathbf{x}.$$

Аппроксимация математического ожидания:

$$\mathbb{E}[\mathbf{g}(\mathbf{x})] \approx \mathbb{E}[\mathbf{g}(\mathbf{m}) + \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})\delta\mathbf{x}] = \mathbf{g}(\mathbf{m}). \tag{27}$$

Аппроксимация матрицы ковариаций:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[\mathbf{g}(\mathbf{x})] \approx \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})\mathbf{P}\mathbf{G}_{\mathbf{x}}^{T}(\mathbf{m}). \tag{28}$$

Нелинейное преобразование случайных величин (аддитивный шум):

Пусть $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P})$, $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$.
Тогда параметры совместного распределения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\mu}_L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_L \\ \mathbf{C}_L^T & \mathbf{S}_L \end{bmatrix} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_L &= \mathbf{g}(\mathbf{m}) \\ \mathbf{S}_L &= \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}) \mathbf{P} \mathbf{G}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{m}) + \mathbf{Q} \\ \mathbf{C}_L &= \mathbf{P} \mathbf{G}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{m}). \end{aligned}$$

Нелинейное преобразование случайных величин (неаддитивный шум):

Пусть $\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P})$, $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$.
Тогда параметры совместного распределения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\mu}_L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_L \\ \mathbf{C}_L^T & \mathbf{S}_L \end{bmatrix} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_L &= \mathbf{g}(\mathbf{m}, \mathbf{0}) \\ \mathbf{S}_L &= \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m}) \mathbf{P} \mathbf{G}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{m}) + \mathbf{G}_{\mathbf{q}}(\mathbf{m}) \mathbf{Q} \mathbf{G}_{\mathbf{q}}^T(\mathbf{m}) \\ \mathbf{C}_L &= \mathbf{P} \mathbf{G}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{m}), \end{aligned}$$

$$[\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{m})]_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}, \mathbf{q}=\mathbf{0}}, \quad [\mathbf{G}_{\mathbf{q}}(\mathbf{m})]_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}, \mathbf{q}=\mathbf{0}}.$$

Расширенный фильтр Калмана (Extended Kalman Filter), аддитивная модель шума

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1}, && (29)\\
\mathbf{y}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k, && (30)
\end{aligned}
$$

Идея заключается в линеаризации нелинейных функций от случайных величин и последующей аппроксимации их числовых характеристик, т. е.

$$
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \approx \mathrm{N}(\mathbf{x}_\mathrm{k}|\mathbf{m}_\mathrm{k}, \mathbf{P}_\mathrm{k}).
$$

EKF (аддитивный шум)

Обозначим через $\mathbf{F_x}$ и $\mathbf{H_x}$ матрицы Якоби для вектор-функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ соотвественно.

- Прогноз:

$$\mathbf{m}_k^- = \mathbf{f}(\mathbf{m}_{k-1}) \tag{31}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F_x}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_\mathbf{x}^T(\mathbf{m}_{k-1}) + \mathbf{Q}_{k-1}. \tag{32}$$

- Коррекция:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H_x}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_\mathbf{x}^T(\mathbf{m}_k^-) + \mathbf{R}_k \tag{33}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_\mathbf{x}^T(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{S}_k^{-1} \tag{34}$$

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-)) \tag{35}$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T. \tag{36}$$

Расширенный фильтр Калмана (Extended Kalman Filter), неаддитивная модель шума

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{q}_{k-1}), \tag{37}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k), \tag{38}$$

Идея заключается в линеаризации нелинейных функций от случайных величин и последующей аппроксимации их числовых характеристик, т. е.

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \approx \mathrm{N}(\mathbf{x}_\mathrm{k}|\mathbf{m}_\mathrm{k}, \mathbf{P}_\mathrm{k}).$$

EKF (неаддитивный шум)

Обозначим через $\mathbf{F_x}(\mathbf{m})$, $\mathbf{F_s}(\mathbf{m})$ и $\mathbf{H_x}(\mathbf{m})$, $\mathbf{H_q}(\mathbf{m})$ матрицы Якоби для вектор-функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ относительно переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{s}$ соотвественно и вычисленные в точке $\mathbf{x} = \mathbf{m}$, $\mathbf{s} = \mathbf{0}$.

- Прогноз:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k^- &= \mathbf{f}(\mathbf{m}_{k-1}, \mathbf{0}) \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{F_x}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F_x}^T(\mathbf{m}_{k-1}) + \mathbf{F_q}(\mathbf{m}_{k-1})\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{F_q}^T(\mathbf{m}_{k-1}). \end{aligned}$$

- Коррекция:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &= \mathbf{H_x}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{P}_k^-\mathbf{H_x}^T(\mathbf{m}_k^-) + \mathbf{H_r}(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{R}_k\mathbf{H_r}^T(\mathbf{m}_k^-) \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H_x}^T(\mathbf{m}_k^-)\mathbf{S}_k^{-1} \\ \mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{m}_k^-, \mathbf{0})) \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^T. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \sim \mathrm{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P})$, $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$.
Тогда параметры совместного распределения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\mu}_U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_U \\ \mathbf{C}_U^T & \mathbf{S}_U \end{bmatrix} \right)$$

могут быть аппроксимированы с помощью выбора так называемых сигма точек.
Обозначим далее через $\sqrt{\mathbf{P}}$ матрицу удовлетворяющую соотношению

$$\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{P}}\sqrt{\mathbf{P}}^T,$$

что соотвествует разложению Холецкого для положительно определенной матрицы $\mathbf{P}$.

1. Формируется набор из $2n+1$ сигма-точек:

$$\mathcal{X}^{(0)} = \mathbf{m} \tag{39}$$

$$\mathcal{X}^{(i)} = \mathbf{m} + \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}}\right]_i \tag{40}$$

$$\mathcal{X}^{(i+n)} = \mathbf{m} - \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}}\right]_i, \quad i = 1, ..., n \tag{41}$$

где $[]_i$ означает столбец i матрицы.

2. $$\mathcal{Y}^{(i)} = \mathbf{g}(\mathcal{X}^{(i)}), \qquad i = 0, ..., 2n. \tag{42}$$

3. $$\boldsymbol{\mu}_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathcal{Y}^{(i)} \tag{43}$$

$$\mathbf{S}_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{Y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_U)(\mathcal{Y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_U)^T + \mathbf{Q} \tag{44}$$

$$\mathbf{C}_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{X}^{(i)} - \mathbf{m})(\mathcal{Y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_U)^T \tag{45}$$

Unscented Transform

$$
\begin{aligned}
W_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{n+\lambda} \\
W_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1-\alpha^2+\beta^2) \\
W_i^{(m)} &= \frac{1}{2(n+\lambda)}, \quad i = 1, ..., 2n \\
W_i^{(c)} &= \frac{1}{2(n+\lambda)}, \quad i = 1, ..., 2n \\
\lambda &= \alpha^2(n+\kappa) - n.
\end{aligned}
$$

Unscented Kalman Filter (UKF): прогноз

- Формируется набор сигма-точек:

$$\mathcal{X}_{k-1}^{(0)} = \mathbf{m}_{k-1} \tag{47}$$

$$\mathcal{X}_{k-1}^{(i)} = \mathbf{m}_{k-1} + \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}\right]_i \tag{48}$$

$$\mathcal{X}_{k-1}^{(i+n)} = \mathbf{m}_{k-1} - \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}}\right]_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{49}$$

- $$\tilde{\mathcal{X}}_k^{(i)} = \mathbf{f}(\mathcal{X}_{k-1}^{(i)}), \quad i = 0, \ldots, 2n. \tag{50}$$

- $$\mathbf{m}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \tilde{\mathcal{X}}_k^{(i)} \tag{51}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\tilde{\mathcal{X}}_k^{(i)} - \mathbf{m}_k^-)(\tilde{\mathcal{X}}_k^{(i)} - \mathbf{m}_k^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \tag{52}$$

- Формируется набор сигма-точек:

$$\mathcal{X}_k^{-(0)} = \mathbf{m}_k^- \tag{53}$$

$$\mathcal{X}_k^{-(i)} = \mathbf{m}_k^- + \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}_k^-}\right]_i \tag{54}$$

$$\mathcal{X}_k^{-(i+n)} = \mathbf{m}_k^- - \sqrt{n+\lambda}\left[\sqrt{\mathbf{P}_k^-}\right]_i, \quad i = 1, ..., n \tag{55}$$

- $$\tilde{\mathcal{Y}}_k^{(i)} = \mathbf{h}(\mathcal{X}_k^{-(i)}), \quad i = 0, ..., 2n. \tag{56}$$

- $$\boldsymbol{\mu}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \tilde{\mathcal{Y}}_k^{(i)} \tag{57}$$

$$\mathbf{S}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\tilde{\mathcal{Y}}_k^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_k)(\tilde{\mathcal{Y}}_k^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_k)^T + \mathbf{R}_k \tag{58}$$

$$\mathbf{C}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_k^{-(i)} - \mathbf{m}_k^-)(\tilde{\mathcal{Y}}_k^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_k)^T. \tag{59}$$

Unscented Kalman Filter (UKF): коррекция

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{S}_k^{-1} && (60)\\
\mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\mu}_k) && (61)\\
\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T. && (62)
\end{aligned}$$

Напомним, что для распределения фильтрации справедливо

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \propto p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k-1})p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k), \tag{63}$$

Основная задача заключается в аппроксимации распределения фильтрации и его характеристик, таких, например, как апостериорное среднее

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}] = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) d\mathbf{x}_k \tag{64}$$

Существенная выборка (importance sampling)

Пусть $\mathbf{X} \propto \pi(\mathbf{x})$, тогда

$$A = \mathbb{E}[f(\mathbf{X})] = \int f(\mathbf{x}) \frac{\pi(\mathbf{x})}{\int \pi(\mathbf{u}) d\mathbf{u}} d\mathbf{x} = \frac{\int f(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int \pi(\mathbf{u}) d\mathbf{u}} = \frac{\int f(\mathbf{x}) \frac{\pi(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int \frac{\pi(\mathbf{u})}{q(\mathbf{u})} q(\mathbf{u}) d\mathbf{u}}$$

Пусть $x_1, ..., x_N$ – выборка из вспомогательного распределения q. Для оценки параметра A справедливо выражение

$$\widehat{A} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_i f(x_i), \tag{65}$$

где

$$\tilde{w}_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^{N} w_j}, \qquad w_i = \frac{\pi(x_i)}{q(x_i)}. \tag{66}$$

Sampling Importance Resampling (SIR)

Алгоритм:

1. Генерировать выборку $\{x_i\}_{i=1}^N$ из вспомогательного распределения $q(x)$ и рассчитать веса

$$w_i = \frac{\pi(x_i)}{q(x_i)}, \quad i = 1, \ldots, N$$

2. Нормировка весов:

$$\tilde{w}_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^N w_j}, \quad i = 1, \ldots, N$$

3. Ресэмплинг: для каждого $i = 1, \ldots, N$ сгенерировать x_i по схеме выбора с возвращением в соответствии с распределением $\tilde{w}_j, \quad j = 1, \ldots, N$.

Ресэмплинг:

Алгоритм:

1. Сгенерировать последовательность $\{u_k\}_{k=1}^N$:

$$u_k = \frac{(k-1)+\tilde{u}}{N}, \quad \tilde{u} \sim U[0,1]$$

2. Рассчитывается число копий частицы x_i

$$n_i = \# \left\{ u_k : \; u_k \in \left(\sum_{s=1}^{i-1} \tilde{w}_s, \sum_{s=1}^{i} \tilde{w}_s \right) \right\}$$

Вернемся к задаче фильтрации:

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)}{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}. \tag{67}$$

Тогда

$$\underbrace{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})}_{\pi(\mathbf{x}_t)} \propto \underbrace{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)}_{w(\mathbf{x}_t)}\underbrace{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}_{q(\mathbf{x}_t)} \tag{68}$$

Основная задача состоит в том, чтобы генерировать выборку из целевого распределения $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$.

Фильтр частиц (particle filter):

- Начальный набор частиц генерируется из заданного начального распределения $\mathbf{x}_0^i \sim p(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, ..., N$.
- Предположим, что в момент $t-1$ имеет место выборка из целевого распределения $\{\mathbf{x}_{t-1}^i\}$.
- Прогнозное распределение:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) &= \int p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \mathbb{E}_{t-1|t-1}[p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})] \qquad (69) \\ &\approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^i) \qquad (70) \end{aligned}$$

Фильтр частиц (particle filter):

Следовательно новый набор частиц $\{\mathbf{x}_t^i\}$ может быть получен из предыдущего набора $\{\mathbf{x}_{t-1}^i\}$ следующим образом:

$$\mathbf{x}_t^i \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^i), \;\; i = 1, ..., N \tag{71}$$

т. е.

$$\mathbf{x}_t^i = f_t(\mathbf{x}_{t-1}^i, v_t^i), \;\; i = 1, ..., N \tag{72}$$

где v_t^i – реализация шумовой компоненты. Веса частиц находятся из модели наблюдения (правдоподобие):

$$w_t^i = p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^i), \;\; i = 1, ..., N \tag{73}$$

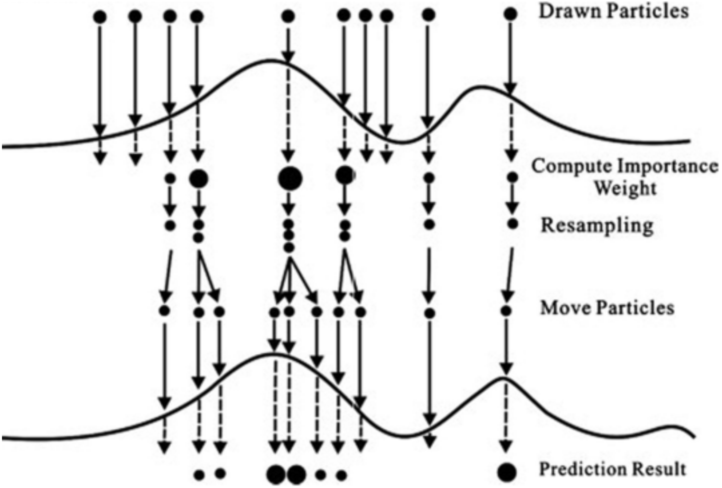
После нормировки весов и процедуры ресэмплинга получается выборка из целевого распределения: $\{\mathbf{x}_t^i\}$.

Bootstrap particle filter:

Алгоритм:

1. Инициализация частиц: $\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^N$, $t = 1$
2. Обновление частиц:
$$\mathbf{x}_t^i \sim p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^i), \;\; i = 1, ..., N$$
3. Расчет и нормировка весов частиц:
$$w_t^i = p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^i), \;\; i = 1, ..., N,$$
$$\tilde{w}_t^i = \frac{w_t^i}{\sum_{j=1}^N w_t^j}, \;\; i = 1, ..., N$$
4. Ресэмплинг
5. $t = t + 1$, переход к шагу 2.

Схема алгоритма:



Ранее в качестве вспомогательного распределения использовалось $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$. Теперь предположим, что частицы генерируются из другого распределения, которое, в том числе, может зависеть от текущего наблюдения $\mathbf{y}_t$:

$$q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_t).$$

Пусть на предыдущем шаге имеется взвешенная выборка из целевого распределения

$$\{w_{t-1}^i, \mathbf{x}_{t-1}^i\}_{i=1}^N.$$

Новый набор частиц генерируется из вспомогательного распределения

$$\mathbf{x}_t^i \sim q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^i, \mathbf{y}_t), \quad i = 1, ..., N.$$

Алгоритм:

1. Инициализация частиц: $\{\mathbf{x}_0^i\}_{i=1}^N \sim p(\mathbf{x}_0)$, $w_0^i = 1/N$; $t = 1$
2. Обновление частиц:
$$\mathbf{x}_t^i \sim q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}^i, \mathbf{y}_t), \;\; i = 1, ..., N$$
3. Расчет и нормировка весов частиц:
$$w_t^i = \frac{p(\mathbf{x}_t^i|\mathbf{x}_{t-1}^i)p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^i)}{q(\mathbf{x}_t^i|\mathbf{x}_{t-1}^i, \mathbf{y}_t)} w_{t-1}^i,$$
$$w_t^i = \frac{w_t^i}{\sum_{j=1}^N w_t^j}, \;\; i = 1, ..., N$$
4. Ресэмплинг (при необходимости)
5. $t = t + 1$, переход к шагу 2.

Фильтр частиц: общий случай

Стадия ресэмплинга может выполняться не на каждой итерации, а когда выполняется следующее условие

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} (w_t^i)^2} \leq N_{th}, \tag{74}$$

где N_{th} – некоторое пороговое значение.

Пусть модель пространства-состояний задана следующим образом:

$$
\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{u}_{k-1}) &= N(\mathbf{x}_k|\mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{u}_{k-1})\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{u}_{k-1}))\\
p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k) &= N(\mathbf{y}_k|\mathbf{H}_k(\mathbf{u}_k)\mathbf{x}_k,\mathbf{R}_k(\mathbf{u}_k))\\
p(\mathbf{u}_k|\mathbf{u}_{k-1}) &= \{\text{ любая форма }\}
\end{aligned}
$$

При этом

$$
p(\mathbf{u}_k,\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) = p(\mathbf{u}_k|\mathbf{y}_{1:k})p(\mathbf{x}_k|\mathbf{u}_k,\mathbf{y}_{1:k}), \tag{75}
$$

где первое распределение в правой части аппроксимириуется с помощью фильтра частиц, а второе – находится с помощью фильтра Калмана

Rao-Blackwellized particle filter (RBPF)

Алгоритм RBPF:

Пусть имеется набор частиц с предыдущего шага $\left\{w_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{m}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{P}_{k-1}^{(i)},\ i = 1, ..., N\right\}$

1. Выполнить шаг прогноза для каждой частицы $i = 1, ..., N$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_k^{-(i)} &= \mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{u}_{k-1}^{(i)})\mathbf{m}_{k-1}^{(i)} \\
\mathbf{P}_k^{-(i)} &= \mathbf{A}_{k-1}(\mathbf{u}_{k-1}^{(i)})\mathbf{P}_{k-1}^{(i)}\mathbf{A}_{k-1}^T(\mathbf{u}_{k-1}^{(i)}) + \mathbf{Q}_{k-1}(\mathbf{u}_{k-1}^{(i)}).
\end{aligned}$$

2. Сгенерировать $\mathbf{u}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{u}_k|\mathbf{u}_{k-1}^{(i)})$, $i = 1, ..., N$
3. Рассчитать вес частицы:

$$w_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{u}_k^{(i)}, \mathbf{y}_{1:k-1}) = N(\mathbf{y_k}|\mathbf{H}_k(\mathbf{u_k}^{(i)})\mathbf{m}_k^{-(i)}, \mathbf{S}_k^{(i)})$$

где

$$\mathbf{S}_k^{(i)} = \mathbf{H}_k(\mathbf{u_k}^{(i)})\mathbf{P}_k^{-(i)}\mathbf{H}_k^T(\mathbf{u_k}^{(i)}) + \mathbf{R}_k(\mathbf{u_k}^{(i)}) \tag{76}$$

Rao-Blackwellized particle filter (RBPF)

Алгоритм RBPF:

4. Выполнить шаг коррекции для каждой частицы $i = 1, ..., N$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_k^{(i)} &= \mathbf{P}_k^{-(i)} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{u_k}^{(i)}) [\mathbf{S}_k^{(i)}]^{-1} \\
\mathbf{m}_k^{(i)} &= \mathbf{m}_k^{-(i)} + \mathbf{K}_k^{(i)} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k (\mathbf{u_k}^{(i)}) \mathbf{m}_k^{-(i)}) \\
\mathbf{P}_k^{(i)} &= \mathbf{P}_k^{-(i)} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{S}_k^{(i)} [\mathbf{K}_k^{(i)}]^T .
\end{aligned}
$$

Rao-Blackwellized particle filter (RBPF)

Оценки:

$$\mathbb{E}[\mathbf{u}_k | \mathbf{y}_{1:k}] = \sum_{i=1}^{N} w_k^{(i)} u_k^{(i)};$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}] = \sum_{i=1}^{N} w_k^{(i)} \mathbf{m}_k^{(i)}.$$

Список литературы

- M. Kok, J. D. Hol and T. B. Schön (2017). Using Inertial Sensors for Position and Orientation Estimation. Foundations and Trends in Signal Processing: Vol. 11: No. 1-2, pp 1-153. doi: 10.1561/2000000094
- T. D. Barfoot. State Estimation for Robotics. Cambridge University Press. 2017.
- J. Sola. Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter. ArXiv abs/1711.02508 (2017) https://arxiv.org/pdf/1711.02508.pdf
- Курс «Sensor fusion» Линчёпингского университета Страница курса

Кватернионы:

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 \cdot \mathbf{i} + q_2 \cdot \mathbf{j} + q_3 \cdot \mathbf{k},$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

Пусть $\mathbf{p} = (p_0, p_v)^T$, $\mathbf{q} = (q_0, q_v)^T$

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_0 q_0 - (p_v, q_v) \\ p_0 q_v + q_0 p_v + p_v \times q_v \end{pmatrix} = \mathbf{p}^L \mathbf{q} = \mathbf{q}^R \mathbf{p}, \tag{77}$$

$$\mathbf{p}^L = \begin{pmatrix} p_0 & -p_v^T \\ p_v & p_0 \mathbf{I}_3 + [p_v \times] \end{pmatrix}, \ \mathbf{q}^R = \begin{pmatrix} q_0 & -q_v^T \\ q_v & q_0 \mathbf{I}_3 - [q_v \times] \end{pmatrix}$$

$$[q_v \times] = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кватернионы и вращение в пространстве:

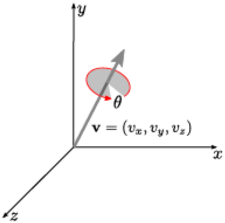
Пусть $\mathbf{q}$ – единичный кватернион ($||\mathbf{q}|| = 1$), тогда

$$\mathbf{q} = \left(\cos\frac{\theta}{2}, v\sin\frac{\theta}{2}\right), v \in \mathbb{R}^3, ||v|| = 1. \qquad (78)$$

Формула поворота вокруг оси v на угол θ:

$$p' = R(p, v, \theta) = \mathbf{q} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} \otimes \mathbf{q}^*, \qquad (79)$$

где $\mathbf{q}^* = (q_0, -q_v)^T$ – сопряженный кватернион.



Кватернионы и вращение в пространстве:

Пусть система координат B получена вращением системы координат A вращением вокруг оси v на угол θ, тогда

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p^B \end{pmatrix} = R(p^A, v, -\theta) = \mathbf{q}_{A \to B} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ p_A \end{pmatrix} \otimes \mathbf{q}^*_{A \to B}, \tag{80}$$

где $\mathbf{q}_{A \to B} = \left(\cos\frac{\theta}{2}, -v \sin\frac{\theta}{2}\right)$.

Динамика изменения ориентации:

Ориентация тела в момент времени t описывается единичным кватернионом $q(t) = (q_0(t), q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$. Пусть $\omega(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t)), \omega_z(t))^T$ – угловая скорость объекта, тогда динамика изменения ориентации описывается следующим законом

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2} q \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \Omega(\omega) q = \frac{1}{2} \Xi(q) \omega, \end{aligned} \qquad (81)$$

где

$$\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi(q) = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Динамика изменения ориентации:

Предполагается, что угловая скорость ω_k, регистрируемая в моменты времени $t_k = kT$, где T – шаг дискретизации, наблюдается на фоне гауссовского шума w_k с заданной матрицей ковариаций.

$$
\begin{aligned}
q_{k+1} &= e^{\frac{T}{2}\Omega(\omega_k + w_k)} q_k && (82) \\
&\approx (I_{4\times 4} + \frac{1}{2}\Omega(\omega_k)T)q_k + \frac{T}{2}\Xi(q_k)w_k. && (83)
\end{aligned}
$$

Модель наблюдения:

$$y_{a,k} = Q^T(q_k)(g^0 + F_k) + \delta_{a,k} + e_k^a,$$

где $g^0 = (0, 0, g)^T$, g – ускорение свободного падения; F_k – внешняя сила, воздействующая на объект (можно допустить ее отсутствие); $\delta_{a,k}$ – смещение; e_k^a – гауссовский шум с заданной матрицей ковариаций; $Q(q)$ – матрица поворота, соответствующая кватерниону q

Под задачей сглаживания понимается вычисление распределения $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:T})$ для $k < T$.
Формальное решение:

- $$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k}) = \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})d\mathbf{x}_k; \qquad (84)$$

- $$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:T}) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k}) \int \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:T})}{p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{1:k})} d\mathbf{x}_{k+1}. \qquad (85)$$

Рассматривается линейная модель пространства состояний. В этом случае

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:T}) = N(\mathbf{x}_k|\mathbf{m}_k^s, \mathbf{P}_k^s).$$

Процедура сглаживания сводится к двум шагам:

RTS smoothing

1. Проход вперед (фильтр Калмана): на каждом шаге k находятся $\mathbf{m}_k, \mathbf{P}_k$.
2. Проход назад: $k = T-1, ..., 1$

$$\mathbf{m}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{m}_k, \quad (86)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k, \quad (87)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k^T [\mathbf{P}_{k+1}^-]^{-1}, \quad (88)$$

$$\mathbf{m}_k^s = \mathbf{m}_k + \mathbf{G}_k [\mathbf{m}_{k+1}^s - \mathbf{m}_{k+1}^-], \quad (89)$$

$$\mathbf{P}_k^s = \mathbf{P}_k + \mathbf{G}_k [\mathbf{P}_{k+1}^s - \mathbf{P}_{k+1}^-] \mathbf{G}_k^T \quad (90)$$

Обучение линейных моделей пространства состояний:

- Рассматривается стационарная модель:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}, \tag{91}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k, \tag{92}$$

  где $\mathbf{x}_0 \sim \mathrm{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{r}_k \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$.
- Параметры: $\boldsymbol{\Theta} = \{\mathbf{A}, \mathbf{H}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0\}$.
- Зафиксируем вектор наблюдений $\mathbf{Y} = y_{1:T}$. Оценки параметров находятся с помощью метода максимального правдоподобия:

$$p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\Theta}) \to \max_{\boldsymbol{\Theta}}$$

Рассмотрим функцию правдоподобия:

$$p(\mathbf{Y}|\mathbf{\Theta}) = \int p(\mathbf{Y}, \mathbf{X}|\mathbf{\Theta}) d\mathbf{X} \tag{93}$$

Алгоритм:

- Начальное значение $\mathbf{\Theta}_0$
- Шаг E: Находится $Q(\mathbf{\Theta}|\mathbf{\Theta}_t) = \mathbb{E}_{\mathbf{X}|\mathbf{Y},\mathbf{\Theta}_t}\left[\ln p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}|\mathbf{\Theta})\right]$
- Шаг M: $\mathbf{\Theta}_{t+1} = \arg\max_{\mathbf{\Theta}} Q(\mathbf{\Theta}|\mathbf{\Theta}_t)$. Переход на шаг E.

Алгоритм:

- Начальное значение $\boldsymbol{\Theta}_0$
- Шаг E: запускается RTS-сглаживание для текущего набора параметров $\boldsymbol{\Theta}_t$. Рассчитываются вспомогательные матрицы:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} &= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{P}_k^s + \mathbf{m}_k^s[\mathbf{m}_k^s]^T, \quad \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{P}_{k-1}^s + \mathbf{m}_{k-1}^s[\mathbf{m}_{k-1}^s]^T \\
\mathbf{B} &= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{y}_k[\mathbf{m}_k^s]^T, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{P}_k^s\mathbf{G}_{k-1}^T + \mathbf{m}_k^s[\mathbf{m}_{k-1}^s]^T \\
\mathbf{D} &= \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T.
\end{aligned}
$$

- Шаг M: Новые оценки параметров вычисляются по следующим формулам

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{m}}_0 &= \mathbf{m}_0^s, \quad \widehat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0^s + (\mathbf{m}_0^s - \mathbf{m}_0)(\mathbf{m}_0^s - \mathbf{m}_0)^T; && (94) \\
\widehat{\mathbf{A}} &= \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}^{-1}, \quad \widehat{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{C}\widehat{\mathbf{A}}^T; && (95) \\
\widehat{\mathbf{H}} &= \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}, \quad \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{D} - \mathbf{B}\widehat{\mathbf{H}}^T. && (96)
\end{aligned}
$$

Ковариационная и корреляционная функция стационарных случайных процессов

Пусть $\{X_t\}$ – стационарный (в широком смысле) случайный процесс.

- Ковариационная и корреляционные функции:

$$\gamma_x(h) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{t+h}, X_t) \tag{97}$$

$$R_x(h) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}. \tag{98}$$

- Выборочные оценки:

$$\widehat{\gamma}_x(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h}(x_{t+h} - \overline{x})(x_t - \overline{x}), \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\widehat{R}_x(h) = \frac{\widehat{\gamma}_x(h)}{\widehat{\gamma}_x(0)}.$$

Взаимная корреляционная функция (cross correlation)

Пусть $\{X_t,\, Y_t\}$ – центрированный стационарный (в широком смысле) случайный процесс.

- Взаимная ковариационная (корреляционная) функция:

$$R_{xy}(h) = \mathbb{E}\left[X_t Y_{t+h}\right]. \tag{99}$$

- Выборочная оценка:

$$\widehat{R}_{xy}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-h} x_t y_{t+h}.$$

Список литературы

- Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002.
- Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
- Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов. Практический подход. М.: Вильямс, 2008.
- Prandoni P, Vetterli M. Signal Processing for Communications. EPFL Press, 2008.
- Ingle V. K., Proakis J. G. Digital Signal Processing Using MATLAB. Cengage Learning, 2010.

Список литературы

- URL: http://www.dsplib.ru/
- B. Osgood. Курс «The Fourier Transform and its Applications» Стэнфордского университета Страница курса
- R. Radke. Курс «Digital Signal Processing» YouTube Playlist

Ряды Фурье:

Пусть x – периодический сигнал, т. е. $x(t+T) = x(t), \forall t$.

Комплексная форма:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \ \omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{100}$$

где коэффициенты c_k определяются следующим образом:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-ik\omega t}dt \tag{101}$$

$$c_k = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)dt}_{\frac{a_k}{2}} - i \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)dt}_{\frac{b_k}{2}}$$

$$c_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2},$$

Если x – вещественная функция, то $c_{-k} = \overline{c_k}$. После некоторых преобразований ряд Фурье может быть записан в следующем виде

Тригонометрическая форма:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\right), \tag{102}$$

где коэффициенты

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)dt \tag{103}$$

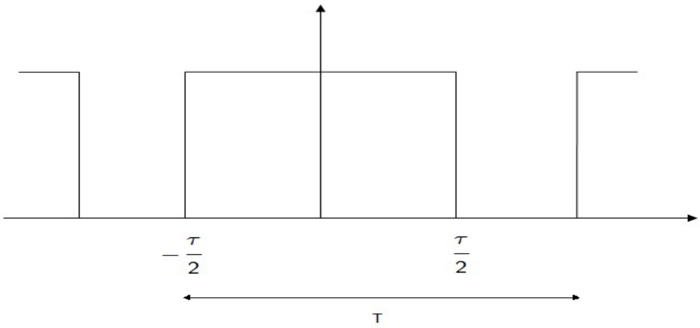
Ряды Фурье: амплитудный и фазовый спектр

Тригонометрическая форма:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k). \tag{104}$$

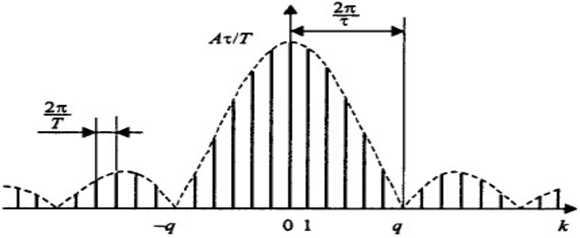
- $\{A_1, A_2, ...\}$ – амплитудный спектр
- $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ – фазовый спектр

Пример: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов длительности τ



$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = \frac{2A}{q} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}}, \quad q = \frac{T}{\tau}$$

Пример: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов длительности τ



Частный случай $q = 2$ – меандр:

$$a_k = \begin{cases} A, & k = 0, \\ 0, & k = 2m \\ \frac{2A}{\pi k}, & k = 4m + 1, \\ -\frac{2A}{\pi k}, & k = 4m - 1 \end{cases}$$

- Пилообразный сигнал:
  $x(t) = \frac{2A}{T}(t - kT),\ (k - 1/2)T \leq t \leq (k + 1/2)T$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = -\frac{2A}{\pi k}(-1)^k$$

- Периодическая последовательность треугольных импульсов:
  $x(t) = A\left(1 - 4\frac{|t-kT|}{T}\right),\ (k - 1/2)T \leq t \leq (k + 1/2)T$

$$a_k = \frac{4A}{(\pi k)^2}\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ \frac{8A}{(\pi k)^2}, & k = 2m + 1 \end{cases}$$

Сходимость:

- Сходимость в среднеквадратичном смысле:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \left| x(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \right|^2 dt = 0 \qquad (105)$$

- Поточечной сходимости, вообще говоря нет. Кроме того в точках разрыва первого рода функции x наблюдается так называемый *эффект Гиббса*, заключающийся в том, что на примыкающих к разрыву участках амплитуды пульсаций частичных сумм ряда Фурье не уменьшаются с ростом числа суммируемых гармоник.

Пусть x – непериодическая функция

ПФ и обратное ПФ

$$\mathcal{F}(x) = X(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{106}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(X) = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{107}$$

Наводящие рассуждения:

Разложим функцию x на отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}kt} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

Обозначим $X_T(u) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-iut} dt$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$,
$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$. Далее при $T \to \infty$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(\omega_k) e^{i\omega_k t} \Delta\omega_k \approx \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Преобразование Фурье: амплитудный и фазовый спектр

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

- $A(\omega) = |X(\omega)|$ – амплитудный спектр
- $\varphi(\omega) = \operatorname{Arg}(X(\omega))$ – фазовый спектр

Замечание:

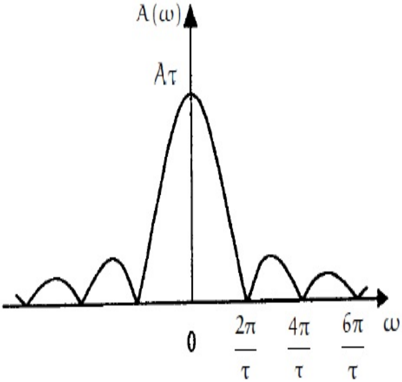
Если x – вещественный сигнал, то $X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$, а значит $A(\omega)$ – четная функция, а $\varphi(\omega)$ – нечетная.

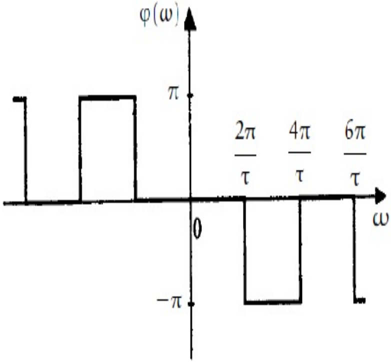
Пример: прямоугольный импульс длительности τ

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \frac{\tau}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega t} dt = A \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = A\tau \cdot \operatorname{sinc}(\omega\tau/2) \end{aligned}$$

Пример: амплитудный и фазовый спектр прямоугольного импульса длительности τ





Пример: ПФ sinc-функции:

$$x(t) = A\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} A\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} e^{-i\omega t} dt = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\cos(\omega t) dt \\
&= \frac{AT}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{T}\right)t}{t} dt - \frac{AT}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{T}\right)t}{t} dt \\
&= \begin{cases} AT, & |\omega| \le \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}
\end{aligned}$$

Свойства ПФ:

- Линейность:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$$

- Задержка по времени:

$$x(t-\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)e^{-i\omega\tau}$$

- Сдвиг по частоте:

$$e^{i\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega-\omega_0)$$

- Изменение масштаба:

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Свойства ПФ:

- ПФ свертки двух сигналов:

$$y(t) = x * h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)H(\omega)$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}d(t-\tau) \\ &= X(\omega)H(\omega) \end{aligned}$$

- Спектр произведения сигналов:

$$x(t)h(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X * H(\omega)$$

- Равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \qquad (109)$$

Дельта-функция Дирака

δ-функция

- $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

Фильтрующее свойство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0).$$

Следовательно

$$\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$$

Кроме того, $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$, откуда $A \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi A\delta(\omega)$

- Гармонический сигнал $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} e^{i\varphi_0} e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} e^{-i\varphi_0} e^{-i(\omega+\omega_0)t} dt \\
&= A\pi e^{i\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0) + A\pi e^{-i\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)
\end{aligned}
$$

- Произвольный T-периодический сигнал $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$, следовательно в силу линейности ПФ

$$
X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)
$$

Гребенка Дирака:

Рассмотрим периодическую последовательность дельта-функций:

$$\text{III}(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \tag{110}$$

Эту функцию можно разложить в ряд Фурье:

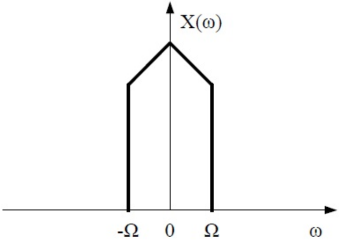
$$c_k = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \delta(t - kT) e^{-i\frac{2\pi}{T}kt} = \frac{1}{T}$$

Следовательно

$$\text{III}(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}kt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \tag{111}$$

Дискретизация непрерывного сигнала:

Пусть сигнал $x(t)$ имеет финитный (ограниченный спектр), т. е. $X(\omega) = 0$, $|\omega| > \Omega$



Под дискретизацией понимается умножение исходного непрерывного сигнала $x(t)$ на "дискретизирующую" функцию, например, гребенку Дирака:

$$x_d(t) = x(t)\,\text{Ш}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \tag{112}$$

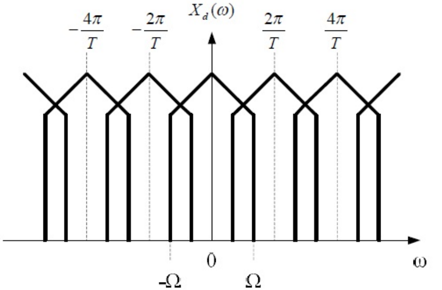
Дискретизация непрерывного сигнала:

Разложим гребенку Дирака в ряд Фурье:

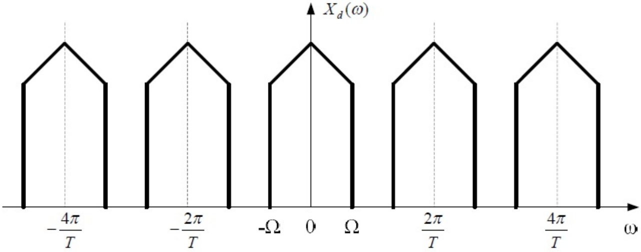
$$x_d(t) = x(t)\,\text{III}(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)e^{i\frac{2\pi k}{T}t}, \tag{113}$$

где T – шаг дискретизации. В силу свойств ПФ

$$x_d(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_d(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \tag{114}$$



Перекрытие спектров (aliasing):

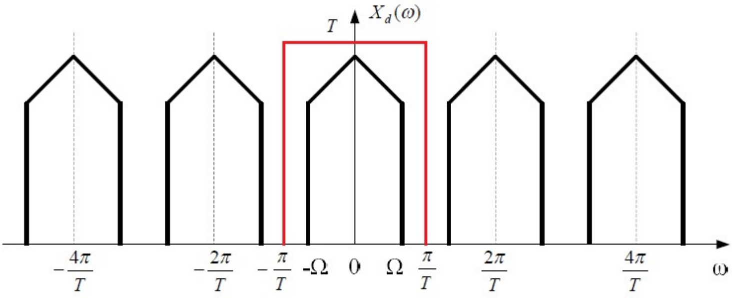


Чтобы перекрытия спектров не происходило, нужно выбрать шаг дискретизации T таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\omega_s := \frac{2\pi}{T} > 2\Omega, \tag{115}$$

где ω_s – угловая частота дискретизации (соответствующая линейная частота дискретизации $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$)

Восстановление исходного аналогового сигнала:



Чтобы восстановить исходный аналоговый сигнал, необходимо пропустить цифровой сигнал через фильтр с полосой от $-\Omega$ до Ω, т. е. умножить $X_d(\omega)$ на прямоугольную функцию

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{116}$$

Восстановление исходного аналогового сигнала:

Поскольку $H(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} h(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$ (см. формулу 108) В силу свойств ПФ

$$X_d(\omega)H(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_d(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-(t-kT))h(\tau)d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h(t-kT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-kT)\right)$$

Теорема отсчетов (sampling theorem):

Теорема (Котельников, Найквист, Шеннон, Уиттекер):

Любой непрерывный (аналоговый) сигнал $x(t)$ с финитным спектром может быть без потерь восстановлен по своим дискретным отсчетам $x(kT)$, взятым с интервалом T, удовлетворяющим неравенству $T < \frac{1}{2f}$, где f – максимальное значение частоты в спектре сигнала ($\Omega = 2\pi f$):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right) \tag{117}$$

Дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)

Пусть $x[n],\ n \in \mathbb{Z}$ – дискретный (цифровой) сигнал

ДВПФ:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{118}$$

ДВПФ является непрерывной функцией частоты ω с периодом 2π:

$$X(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n}e^{-i2\pi n} = X(\omega)$$

$\Rightarrow$ достаточно знать поведение $X(\omega)$ на одном периоде $w \in [-\pi, \pi]$.

Обратное ДВПФ

Исходный сигнал может быть восстановлен по следующей формуле:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{i\omega n}d\omega. \tag{119}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{i\omega n}d\omega &= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-i\omega k}e^{i\omega n}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(n-k)}d\omega = 2\pi\cdot x[n], \end{aligned}$$

где было учтено, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(n-k)}d\omega = \begin{cases} 2\pi, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

ДВПФ: амплитудный и фазовый спектр

- $$X(\omega) = |X(\omega)|e^{i\angle X(\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |X(\omega)| \text{ – амплитудный спектр} \\ \angle X(\omega) \text{ – фазовый спектр} \end{cases}$$
- Амплитудный спектр часто выражают в децибелах (дБ)
$$|X(\omega)|_{\text{дБ}} = 20\lg|X(\omega)| \tag{120}$$
- Для вещественного сигнала, амплитудный спектр $|X(\omega)|$ – четная функция

Сходимость ДВПФ

Обозначим

$$X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x[n] e^{-i\omega n}$$

- Равномерная сходимость:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \Rightarrow \sup_{\omega} |X(\omega) - X_N(\omega)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

- Сходимость в среднеквадратичном:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_N(\omega)|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Примеры:

- Единичный импульс $x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-i\omega n} = 1$$

- Экспоненциальный импульс: $x[n] = a^n u[n]$, $|a| \leq 1$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-i\omega}}$$

Примеры:

- Прямоугольный импульс: $x[n] = \begin{cases} 1, & n = -M \dots M \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$X(\omega) = \sum_{n=-M}^{M} e^{-i\omega n} = e^{i\omega M} \sum_{n=0}^{2M} e^{-i\omega n}$$
$$= e^{i\omega M} \frac{1 - e^{-i\omega(2M+1)}}{1 - e^{-i\omega}} = \frac{\sin \omega \frac{2M+1}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

- Пусть $X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi i n} e^{i\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\pi} \mathrm{sinc}(\omega_c n)$$

Свойства ДВПФ:

- Линейность:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$$

- Сдвиг по времени:

$$x[n-k] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)e^{-i\omega k}$$

- Сдвиг по частоте:

$$e^{i\omega_0 n}x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega-\omega_0)$$

- Обращение времени:

$$x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$$

- Равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Доказательство равенства Парсеваля:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega n} d\omega \right)^* \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega n} \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}$$

ДВПФ свертки:

- $x[n] * h[n] := \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)H(\omega)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]e^{-i\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{-i\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-i\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-i\omega m} = X(\omega)H(\omega)$$

- Произведение сигналов:

$$x[n]h[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\phi)H(\omega-\phi)d\phi$$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

Пусть $x[n]$ – периодическая последовательность с периодом N, т. е. $x[n+N]=x[n]$.

ДПФ:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,...,N-1 \tag{121}$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n=0,...,N-1 \tag{122}$$

Замечание:

Для дискретного сигнала конечной длины $X[k]=X(w)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

$$X[k]=|X[k]|e^{i\angle X[k]} \Rightarrow \begin{cases} |X[k]| \text{ – амплитудный спектр} \\ \angle X[k] \text{ – фазовый спектр} \end{cases}$$

ДПФ: наводящие рассуждения

- Рассмотрим ДВПФ:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\omega nT}$$

Значения $\omega_k = \frac{2\pi k}{T \cdot N}$, $k = 0, ..., N-1$ образуют разбиение интервала $\left(0, \frac{2\pi}{T}\right)$. Тогда

$$X[k] := X(\omega_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

- Связь с рядами Фурье:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi}{T}kt}dt \approx \frac{1}{N\Delta t}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i\frac{2\pi}{N\Delta t}kn\Delta t}\Delta t \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$

ДПФ: значения абсолютных частот

- Пусть $F_s = \frac{1}{T}$ – частота дискретизации
- Разрешение по частоте:

$$\Delta f = \frac{F_s}{N}, \qquad \Delta\omega = 2\pi\frac{F_s}{N} \tag{123}$$

- Значения абсолютных частот:

$$f_k = k\Delta f, \qquad \omega_k = k\Delta\omega, \qquad\qquad k = 0, ..., N-1 \tag{124}$$

Обратное ДПФ:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, ..., N-1$$

Действительно,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-i\frac{2\pi}{N}km}e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(m-n)k} = \frac{1}{N}Nx[n] = x[n],$$

где было учтено, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(m-n)k} = \begin{cases} N, \ n = m \\ 0, \ n \neq m \end{cases} \qquad (125)$$

Различные варианты нормировки ДПФ:

- Пусть $x[n]$ – вещественная периодическая последовательность. Тогда ее амплитудный спектр равен $|X[k]|$ с точностью до множителя

$$\begin{cases} 1/N, & k = 0 \\ 2/N, & k \neq 0 \end{cases}$$

- Рассмотрим непрерывное ПФ сигнала $x(t)$ длительности τ:

$$X(\omega) = \int_0^{\tau} x(t) e^{-i\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-iwnT} T$$

Следовательно,

$$X(\omega_k) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot X[k]$$

ДПФ в матричной форме:

Обозначим

$$\underline{x} = \Big[x[0], ..., x[N-1]\Big]^T \in \mathbb{C}^N; \underline{X} = \Big[X[0], ..., X[N-1]\Big]^T \in \mathbb{C}^N$$

Тогда ДПФ может быть записано в матричной форме:

$$\underline{X} = F\underline{x}, \tag{126}$$

где матрица преобразования имеет следующую структуру

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N}} & e^{-\frac{4\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-\frac{4\pi i}{N}} & e^{-\frac{8\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-\frac{6\pi i}{N}} & e^{-\frac{12\pi i}{N}} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)} & e^{-\frac{2\pi i}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-\frac{2\pi i}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N\times N}$$

Свойства ДПФ:

- Периодичность: $X[k+N] = X[k]$
- Линейность
- Циклический сдвиг по времени:

$$x[(n-m) \mod N] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X[k]e^{-i\frac{2\pi}{N}mk}$$

- Симметрия: пусть $x[n]$ – вещественный сигнал, тогда

$$X[N-k] = X[-k] = \overline{X[k]},$$

т. е. спектр является сопряженно-симметричным относительно $N/2$ (вторая половина – "зеркальное" отражение первой)

Свойства ДПФ:

- Равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

- Циклическая свертка:

$$y[n] = x \circledast h[n] := \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[(n-m) \bmod N] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X[k]H[k]$$

$$\begin{aligned} Y[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[(n-m) \bmod N]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{n=0}^{N-1} h[(n-m) \bmod N]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-i\frac{2\pi}{N}km} H[k] = X[k]H[k] \end{aligned}$$

Циклическая свертка в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} h[0] & h[N-1] & h[N-2] & \dots & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[N-1] & \dots & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \dots & h[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] & \dots & h[0] \end{pmatrix}}_{\text{Циркулянт (circulant matrix)}} \cdot \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

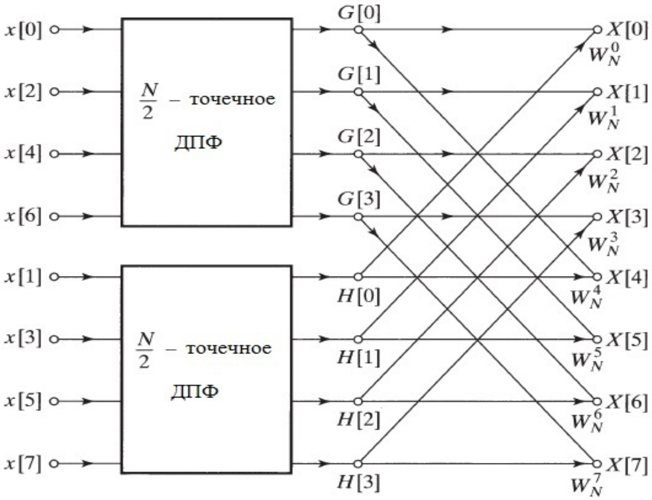
Быстрое преобразование Фурье (Fast Fourier Transform): прореживание по времени

Обозначим $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$.

- Прореживание по времени (decimation on time):

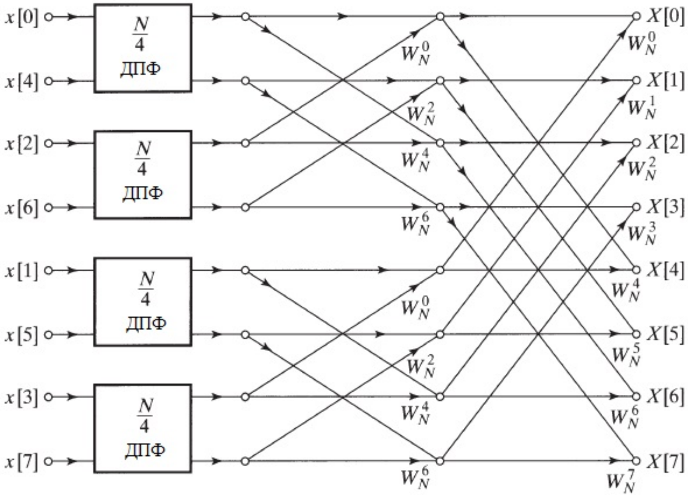
$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \\
&= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \\
&= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} \\
&= G[k] + W_N^k H[k], \qquad k = 0, ..., N-1
\end{aligned}
$$

Схема БПФ:



x[0]
x[2]
x[4]
x[6]
x[1]
x[3]
x[5]
x[7]
N/2 – точечное ДПФ
N/2 – точечное ДПФ
G[0]
G[1]
G[2]
G[3]
H[0]
H[1]
H[2]
H[3]
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
W_N^4
W_N^5
W_N^6
W_N^7

Схема БПФ:



x[0]
x[4]
x[2]
x[6]
x[1]
x[5]
x[3]
x[7]
N/4 ДПФ
N/4 ДПФ
N/4 ДПФ
N/4 ДПФ
W_N^0
W_N^2
W_N^4
W_N^6
W_N^0
W_N^2
W_N^4
W_N^6
W_N^0
W_N^1
W_N^2
W_N^3
W_N^4
W_N^5
W_N^6
W_N^7
X[0]
X[1]
X[2]
X[3]
X[4]
X[5]
X[6]
X[7]

БПФ: вычисления по схеме «бабочка»

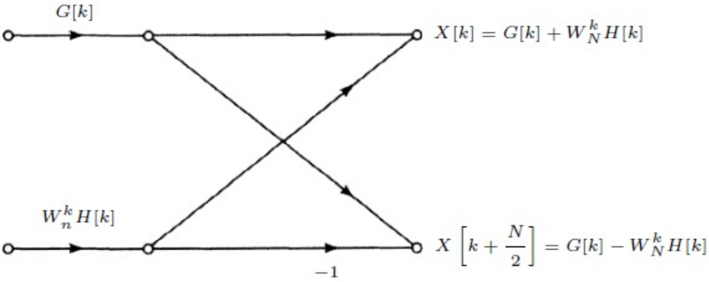
Легко показать, что $G\left[k+\frac{N}{2}\right]=G[k]$, $H\left[k+\frac{N}{2}\right]=H[k]$, $k=0,...,N/2-1$. Кроме того,

$$W_N^{k+\frac{N}{2}}=W_N^k W_N^{\frac{N}{2}}=-W_N^k$$

Следовательно

$$X[k] = G[k]+W_N^k H[k], \quad k=0,...,N/2-1 \tag{127}$$

$$X\left[k+\frac{N}{2}\right] = G[k]-W_N^k H[k], \quad k=0,...,N/2-1 \tag{128}$$



Алгоритм БПФ по основанию 2:

- Пусть $N = 2^m$, тогда при делении исходной последовательности пополам дойдем до двухточечного ДПФ:
$$\begin{aligned} X[0] &= x[1] + x[0] \\ X[1] &= x[1] - x[0] \end{aligned} \tag{129}$$
В этом случае говорят, что алгоритм БПФ по основанию 2 (2-RADIX)
- Оценка сложности: $O(N \cdot \log_2 N)$, т. к. на каждом из $\log_2 N$ уровней требуется произвести N операций сложений и умножений.

БПФ: прореживание по частоте

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left[n + \frac{N}{2}\right] W_N^{k\left(n+\frac{N}{2}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] W_N^{nk} + (-1)^k x\left[n + \frac{N}{2}\right] W_N^{nk} \right), \quad k = 0, \dots, N-1
\end{aligned}
$$

Далее рассмотрим четные и нечетные спектральные отсчеты:

$$
\begin{aligned}
X[2k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\
X[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right) W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1
\end{aligned}
$$

Быстрое обратное ДПФ:

Поскольку

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn},$$

то

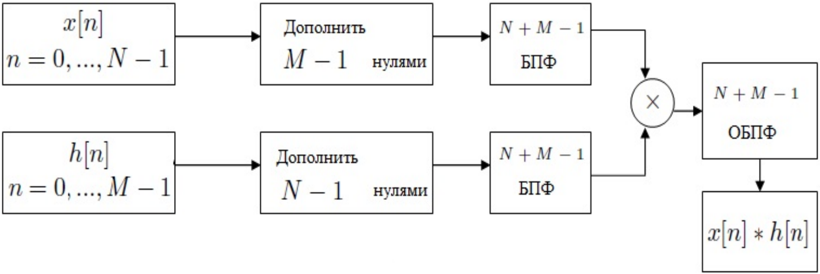
$$x^*[n] = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}}_{\text{ДПФ для } X^*[k]} \tag{130}$$

Следовательно исходный сигнал может быть найден следующим образом:

$$x[n] = \frac{1}{N}\mathrm{FFT}\left(X^*[k],\ k = 0, ..., N-1\right)^* \tag{131}$$

Быстрое вычисление линейной свертки:

Пусть заданы два сигнала конечной длины $x[0], ..., x[N-1]$ и $h[0], ..., h[M-1]$. Тогда их линейная свертка может быть вычислена через циклическую по следующей схеме:



Уменьшение разрешения ДПФ:

Рассмотрим ДВПФ сигнала конечной длительности N:

$$X_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\omega n}$$

Добавим к сигналу $L - N$ нулей справа (zero padding). Тогда

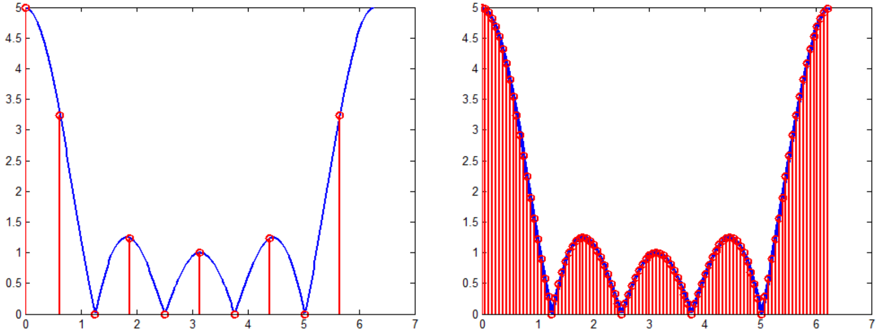
$$X_L(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\omega n} = X_N(\omega),$$

т. е. ДВПФ не изменится. При этом для ДПФ справедливо

$$X_L[k] = X_L\left(\frac{2\pi k}{L}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{L}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i\frac{2\pi}{L}kn} = X_N\left(\frac{2\pi k}{L}\right),$$

следовательно изменилось только разрешение по частоте $\Delta f = \frac{F_s}{L}$

Пример:



Различение гармоник с близкими частотами:

Пусть f_1, f_2 – частоты гармоник, присутствующие в сигнале, такие, что

$$\Delta f < |f_1 - f_2| < 2\Delta f.$$

Для улучшения различения гармоник исходный сигнал следует дополнить нулями до длины L:

$$L \geq \frac{F_s}{|f_1 - f_2| - \Delta f}. \tag{132}$$

В этом случае разрешение по частота ДПФ будет

$$\Delta \tilde{f} = \frac{F_s}{L}$$

Растекание спектра (spectrum leakage):

Рассмотрим непрерывный сигнал $x(t) = \cos(\omega_0 t) w(t)$, где $w(t)$ – прямоугольная оконная функция:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau] \\ 0, & t \notin [0, \tau] \end{cases}$$

В силу свойств ПФ

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} W(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} W(\omega + \omega_0)$$

Для прямоугольного окна функция W имеет вид

$$W(\omega) = \tau \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

и лепестковую структуру с шириной главного лепестка $\frac{4\pi}{\tau}$.

Растекание спектра (spectrum leakage):

Пусть $x[n]$ – дискретная периодическая последовательность. Точное выделение гармоник с частотами f_i возможно только в том случае, если они кратны частотному разрешению ДПФ $\Delta f = F_s/N$, т. е.

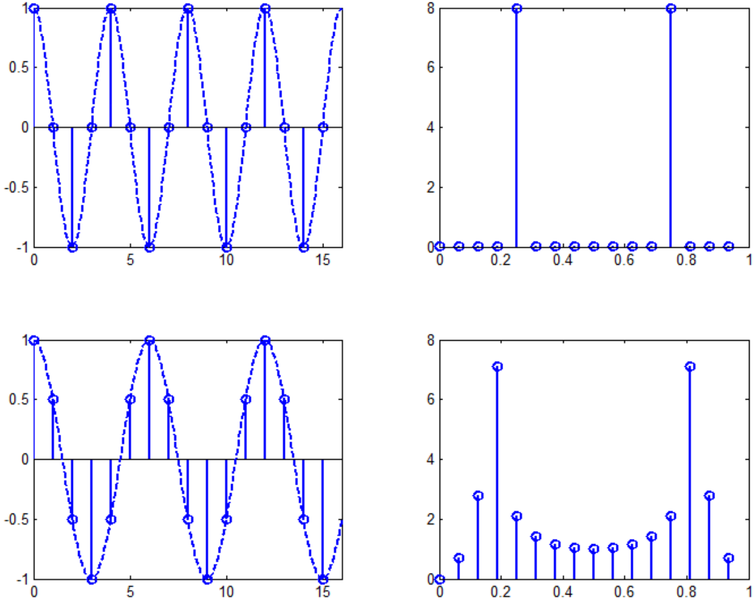
$$f_i = m\Delta f, \ \ m = 0, ..., N-1$$

Это условие, в свою очередь, выполнено, когда на интервале NT последовательности $x[n]$ укладывается целое число периодов T_i, т. е. отношение

$$\frac{NT}{T_i} = \frac{Nf_i}{F_s} \tag{133}$$

является целым числом. В случае, если это условие не выполняется наблюдается эффект растекания спектра.

Пример:



Использование весовых функций (окон)

Для уменьшения эффекта растекания спектра при ДПФ применяют весовые функции (окна). Сигнал домножается на функцию $w[n]$, $n = 0, ..., N-1$, которая должна спадать к нулю по краям анализируемого сегмента сигнала:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n]e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \tag{134}$$

Наиболее известными весовыми функциями являюся функции Хэмминга, Ханна, Кайзера, Блэкмана и др.

Характеристики весовых (оконных) функций:

Для удобства произведем нормировку

$$w[n] = \frac{w[n]}{\sum\limits_{n=0}^{N-1} w[n]}.$$

В этом случае амплитудный спектр мощности $(20 \cdot \lg |W[k]|)$ будет иметь максимум 0 дБ на нулевой частоте.

- Коэффициент ослабления:

$$\beta = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]$$

  Для прямоугольного окна равен единице

- $\Delta F_{0,5}$ – ширина главного лепестка по уровню -3 дБ
- ΔF_0 – ширина главного лепестка по нулевому уровню
- $\gamma_{\max}$ – максимальный уровень боковых лепестков

Правила выбора оконной функции:

- Следует выбирать такую оконную функцию, уровень боковых лепестков спектра которой меньше динамического диапазона сигнала
- Если задано разрешение по частоте df и выбрана оконная функция, то необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$df > \Delta F_0 \Delta f, \tag{135}$$

  где ΔF_0 – нормированная ширина главного лепестка оконной функции, $\Delta f = \frac{F_s}{N}$ – разрешение по частоте ДПФ

Выделение полезного сигнала на фоне шума:

Пусть $x[n] = \cos(2\pi f n T)$ – полезный сигнал, наблюдаемый на фоне шума (аддитивная смесь) $r[n]$:

$$y[n] = x[n] + r[n].$$

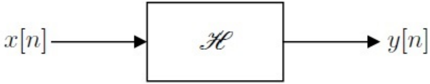
Пусть $Y[k],\ k = 0, ..., N-1$ – ДПФ наблюдаемого сигнала. Отбор спектральных компонент полезного сигнала может быть осуществлен на основании нескольких критериев, например:

1. $$\frac{|Y[k]|}{\max |Y[k]|} > \varepsilon_1$$

2. $$\frac{|Y[k]|^2}{\widetilde{P}} > \varepsilon_2, \qquad \widetilde{P} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |Y[k]|^2$$

Линейные дискретные системы (ЛДС), инвариантные к сдвигу по времени:

Под *системой* понимается некоторое преобразование сигнала:



Система $\mathscr{H}$ называется линейной, если выполнено следующее условие

$$\mathscr{H}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \tag{136}$$

Система $\mathscr{H}$ является инвариантной к сдвигу по времени (стационарной), если

$$\mathscr{H}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0] \tag{137}$$

Импульсная характеристика (impulse response) системы:

Рассмотрим единичный импульс $\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$

Определение:

Импульсной характеристикой (ИХ) линейной системы называется выходная реакция на единичный импульс:

$$h[n] := \mathscr{H}\{\delta[n]\} \tag{138}$$

Тогда для любого входного сигнала

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathscr{H}\{x[n]\} = \mathscr{H}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathscr{H}\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = x[n] * h[n] \end{aligned}$$

Свойства линейных систем:

1. Однозначно определяется импульсной характеристиков: выходной сигнал представляет собой свертку входного с ИХ
2. Коммутативность: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
3. Дистрибутивность: $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
4. Ассоциативность: $x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * h_1[n] * h_2[n]$

Секционная свертка

Пусть ИХ ЛДС имеет конечную длину M. Реакция ЛДС на входящий сигнал $x[n]$ рассчитывается как линейная свертка с ИХ:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n-m]$$

В случае если длина воздействия (входящей последовательности) велика или заранее неизвестна, она разбивается на смежные секции длины L:

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n+kL], & n = 0, ..., L-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{139}$$

Ясно, что

$$x[n] = \sum_k x_k[n-kL] \tag{140}$$

Метод перекрытия с суммированием (overlap add (OLA) method):

Итоговая линейная свертка формируется на основе коротких сверток:

$$y[n] = \left(\sum_k x_k[n-kL]\right) * h[n] = \sum_k \left(x_k[n-kL] * h[n]\right)$$
$$= \sum_k y_k[n-kL], \quad (141)$$

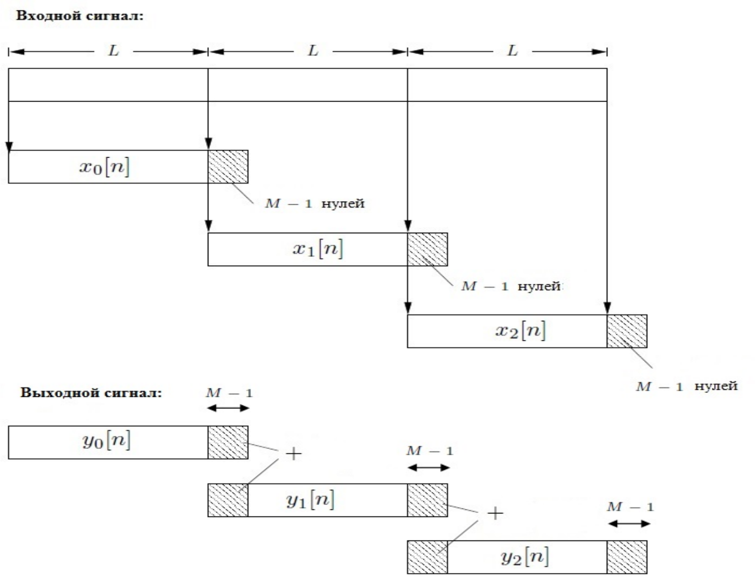
где

$$y_k[n] = h[n] * x_k[n] \quad (142)$$

Каждая свертка $y_k[n]$ будет иметь длину $L+M-1$ и может быть рассчитана с помощью БПФ.

URL: https://www.youtube.com/watch?v=v50IMrrWG4E

Схема метода перекрытия с суммированием:



Физически реализуемые системы:

Система является физически реализуемой (causal system), если $y[n]$ не зависит от $x[n+k]$, $k > 0$. Поскольку

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k],$$

то для физически реализуемых систем $h[k] = 0$, $k < 0$. ЛДС описывается разностным уравнением

$$y[n] = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x[n-j] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k] \tag{143}$$

Типы ЛДС:

Различают два вида ЛДС:

- Рекурсивные ЛДС, реакция которых зависит от текущего и предшествующих отсчетов воздействия и предшествующих отсчетов реакции, т. е.

  $$a_k \neq 0, \quad \text{хотя бы для одного значения } k$$

  Имеют бесконечную ИХ: БИХ ЛДС (IIR – Infinite Impulse Response)

- Нерекурсивные ЛДС, реакция которых зависит только от текущего и предшествующих отсчетов воздействия, т. е.

  $$a_k = 0, \quad \text{для всех } k$$

  Обладают конечной импульсной характеристикой: КИХ ЛДС (FIR – Finite Impulse Response), причем

  $$h[n] = b_n \tag{144}$$

Частотная характеристика (frequency response) ЛДС:

Комплексной частотной характеристикой (КЧХ) ЛДС называется ДВПФ ее ИХ:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-i\omega n} = |H(\omega)|e^{i\angle H(\omega)} \tag{145}$$

- $|H(\omega)|$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)
- $\angle H(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ)

Если $y[n] = \mathscr{H}\{x[n]\}$, то

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{146}$$

Физический смысл частотной характеристики:

Пусть на вход ЛДС поступает комплексная синусоида $x[n] = e^{i\omega_0 n}$. Тогда реакция ЛДС

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}\left\{e^{i\omega_0 n}\right\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{i\omega_0 (n-k)} \\
&= e^{i\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-i\omega_0 k} \\
&= H(\omega_0) e^{i\omega_0 n} = |H(\omega_0)| e^{i(\omega_0 n + \angle H(\omega_0))}
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathscr{H}\left\{\cos(\omega_0 n + \varphi)\right\} = |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 n + \varphi + \angle H(\omega_0)) \qquad (147)$$

Физический смысл ФЧХ:

Поскольку

$$\mathscr{H}\left\{\cos(\omega_0 n + \varphi)\right\} = |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 n + \varphi + \angle H(\omega_0)),$$

то соответствующий временной сдвиг выходного сигнала

$$\Delta t = -\frac{\angle H(\omega_0)}{\omega_0}$$

Фазовой задержкой (phase delay) называется следующая функция

$$\tau_\phi(\omega) = -\frac{\angle H(\omega)}{\omega}, \tag{148}$$

Линейная ФЧХ. Групповая задержка:

Пусть $\angle H(\omega) = -c\omega$. Предположим также, что $|H(\omega)| = 1$, тогда

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)e^{-ic\omega}.$$

Следовательно

$$y[n] = x[n-c],$$

т. е. реакция ЛДС представляет собой задержанный по времени исходный сигнал.
Групповой задержкой (ГЗ) называется производная ФЧХ:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(\omega) \qquad (149)$$

Для линейной ФЧХ $\tau_g(\omega) = \text{const}$.

Два представления КЧХ:

- $H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\theta_1(\omega)}$, где $\theta_1(\omega) = \mathrm{Arg} H(\omega)$
- $H(\omega) = A(\omega)e^{i\theta_2(\omega)}$, где $A(\omega)$ – вещественная функция (не обязательно положительная). В этом случае $\theta_2(\omega)$ не будет иметь скачков в зависимости от знака $A(\omega)$

Пример:

$$H(\omega) = e^{-i\omega(N-1)/2}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Основные виды фильтров:

- Фильтры нижних частот (ФНЧ; low-pass filter), пропускающие частоты, меньшие некоторой частоты среза ω_c (cutoff frequency)
- Фильтры верхних частот (ФВЧ; high-pass filter), пропускающие частоты большие некоторой частоты ω_c
- Полосовые фильтры (ПФ; band-pass filter), пропускающие частоты в некотором диапазоне от ω_1 до ω_2
- Режекторные фильтры (РФ; band-stop filter), пропускающие все частоты, кроме лежащих в некотором диапазоне от ω_1 до ω_2
- Всепропускающие фильтры (ВФ; all-pass filter) изменяют только фазы спектральных составляющих входного сигнала

Для дискретного сигнала $x[n]$ Z-преобразование определяется следующим образом:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{150}$$

Связь с ДВПФ:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{i\omega}} \tag{151}$$

Пусть $z = re^{i\omega}$, тогда $X(z)$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] r^{-n}| < \infty \tag{152}$$

Обратное Z-преобразование:

Исходная последовательность может быть найдена по формуле

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint X(z) z^{n-1} dz, \tag{153}$$

где интегрирование производится по произвольному замкнутому контуру из области сходимости, охватывающему начало координат.

Свойства Z-преобразования:

- Линейность:

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$$

- Задержка по времени:

$$x[n - n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

- Изменение масштаба:

$$a^n x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z/a)$$

- Свертка:

$$x[n] * h[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)H(z)$$

Пример:

- Правосторонний экспоненциальный сигнал $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

Ряд сходится, когда $|z| > |a|$, и в этом случае

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}$$

Пример:

- Пусть $x[n] = r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$

$$X(z) = \frac{r \sin \omega_0 z^{-1}}{1 - (2r\cos\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r.$$

Описание ЛДС в Z-области:

Z-преобразование ИХ ЛДС

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \tag{154}$$

называется *передаточной* функцией (transfer function).
Z-преобразования для воздействия и реакции ЛДС связаны соотношением

$$Y(z) = X(z)H(z). \tag{155}$$

Пусть ЛДС описывается разностным уравнением

$$y[n] = \sum_{j=0}^{N-1} b_j x[n-j] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k]. \tag{156}$$

Применив Z-преобразование к обеим частям уравнения, получим

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_{N-1} z^{-(N-1)}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{M-1} z^{-(M-1)}} \tag{157}$$

Нули и полюсы передаточной функции:

Разложив числитель и знаменатель на множители, передаточную функцию можно записать в следующем виде

$$H(z) = b_0 \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \cdots (1 - z_{N-1} z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \cdots (1 - p_{M-1} z^{-1})}, \qquad (158)$$

где z_i – нули передаточной функции ($H(z_i) = 0$), p_i – полюсы передаточной функции ($H(p_i) \to \infty$)

На практике, чтобы найти ИХ дробно-рациональную функцию $H(z)$ раскладывают на сумму простых дробей.

Геометрическая интерпретация АЧХ:

КЧХ может быть получена из передаточной функции как

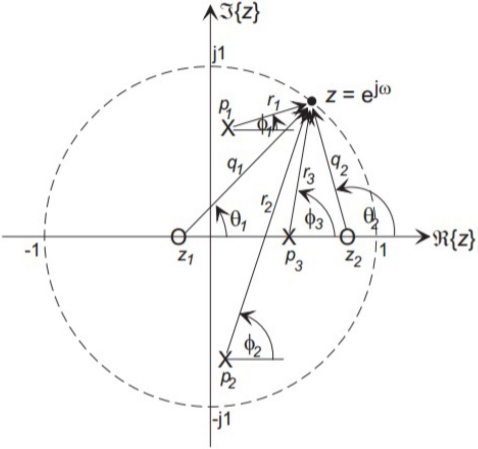
$$H(\omega) = H(z)\Big|_{z=e^{i\omega}} = b_0 \frac{\prod\limits_{k=1}^{N-1} (1 - z_k e^{-i\omega})}{\prod\limits_{k=1}^{M-1} (1 - p_k e^{-i\omega})} \tag{159}$$

Тогда АЧХ представима в следующем виде:

$$|H(\omega)| = |b_0| \frac{\prod\limits_{k=1}^{N-1} |1 - z_k e^{-i\omega}|}{\prod\limits_{k=1}^{M-1} |1 - p_k e^{-i\omega}|} = |b_0| \frac{\prod\limits_{k=1}^{N-1} |e^{i\omega} - z_k|}{\prod\limits_{k=1}^{M-1} |e^{i\omega} - p_k|} = |b_0| \frac{\prod\limits_{k=1}^{N-1} q_k}{\prod\limits_{k=1}^{M-1} r_k}, \tag{160}$$

где q_k – длины векторов, направленных от нулей передаточной функций к точке $z = e^{i\omega}$; r_k – длины векторов, направленных от полюсов передаточной функций к точке $z = e^{i\omega}$

Пример:



На частоте ω:

$$H(\omega) = |b_0| \frac{q_1 q_2}{r_1 r_2 r_3}$$

Расчет КИХ фильтров (на примере ФНЧ):

Пусть задана требуемая КЧХ:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{161}$$

Соответствующая ИХ

$$h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \tag{162}$$

Следовательно идеальный ФНЧ физически нереализуем

Напомним, что (физически реализуемый) КИХ-фильтр определяется уравнением

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x[n-k], \tag{163}$$

где коэффициенты $b_k = h[k]$. Предположим далее, что N – нечетное число и положим $M = \frac{N-1}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{2M} h[n] e^{-i\omega n} = e^{-i\omega M} \sum_{n=0}^{2M} h[n] e^{-i(n-M)\omega} \\ &= e^{-i\omega M} \left[h[M] + \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-i(n-M)\omega} + \sum_{n=M+1}^{2M} h[n] e^{-i(n-M)\omega} \right] \end{aligned}$$

Условия линейной ФЧХ:

Предположим далее, что ИХ является симметричной, т. е. $h[n] = h[N-1-n]$ $(h[M-n] = h[M+n])$. Тогда

$$H(\omega) = e^{-i\omega M}\left[h[M] + \sum_{n=0}^{M-1} h[n]\underbrace{\left(e^{i(n-M)\omega} + e^{-i(n-M)\omega}\right)}_{2\cos(n-M)\omega}\right]$$

Таким образом

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-i\omega M}, \tag{164}$$

где

$$A(\omega) = h[M] + \sum_{n=0}^{M-1} 2h[n]\cos(n-M)\omega \tag{165}$$

Условия линейной ФЧХ:

По аналогии рассматривается случай, когда N – четное:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-i\omega M},$$

где

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h[n]\cos(n-M)\omega \tag{166}$$

Рассмотрим случай нечетной симметрии $h[n] = -h[N-1-n]$. Для нечетного N (в этом случае $h[M] = 0$)

$$H(\omega) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \omega M\right)} \left[\sum_{n=0}^{M-1} 2h[n] \sin(M-n)\omega \right] \tag{167}$$

Для четного N

$$H(\omega) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \omega M\right)} \left[\sum_{n=0}^{N/2-1} 2h[n] \sin(M-n)\omega \right] \tag{168}$$

Четыре типа КИХ-фильтров с линейной ФЧХ:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)} \tag{169}$$

- Тип I: N – нечетное, $h[n] = h[N-1-n]$

$$A(\omega) = h\left[\frac{N-1}{2}\right] + 2\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h[n]\cos\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right),$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

- Тип II: N – четное, $h[n] = h[N-1-n]$

$$A(\omega) = 2\sum_{n=0}^{N/2-1} h[n]\cos\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right), \quad \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

Отметим, что $A(\pi) = 0$

Четыре типа КИХ-фильтров с линейной ФЧХ:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)} \tag{170}$$

- Тип III: N – нечетное, $h[n] = -h[N-1-n]$

$$A(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h[n]\sin\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad \theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$

  Отметим, что $A(0) = 0$, $A(\pi) = 0$

- Тип IV: N – четное, $h[n] = -h[N-1-n]$

$$A(\omega) = 2\sum_{n=0}^{N/2-1} h[n]\sin\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad \theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$$

  Отметим, что $A(0) = 0$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} = \frac{1}{z^{N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{N-n-1}$$

Следовательно у КИХ-фильтров нет полюсов, кроме тривиального полюса $z = 0$ кратности $N-1$. Если коэффициенты $h[n]$ вещественные, то передаточная функция $H(z)$ имеет комплексно сопряженные нули. Кроме того, нетрудно получить, что

$$z^{-(N-1)} H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-(N-n-1)}.$$

Если при этом $h[n] = \pm h[N-1-n]$, то

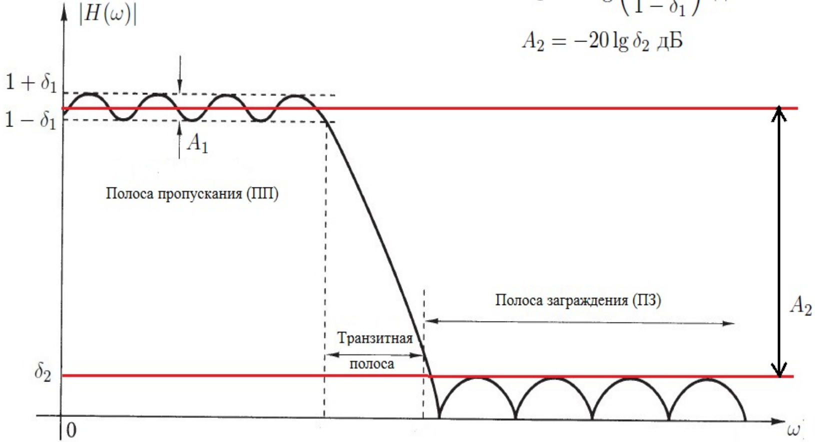
$$z^{-(N-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z), \tag{171}$$

а значит $H(z)$ и $H(z^{-1})$ имеют одинаковые нули, откуда очевидным образом следует, что если z_0 – нуль $H(z)$, то $\frac{1}{z_0}$ – также нуль $H(z)$.

Спецификация требований к КИХ-фильтрам (на примере ФНЧ):

$$A_1 = 20\lg\left(\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}\right)\ \text{дБ}$$

$$A_2 = -20\lg\delta_2\ \text{дБ}$$



Метод оконного взвешивания:

Пусть задана идеальная КЧХ ФНЧ:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases} \tag{172}$$

Положим

$$h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad |n| \le M \tag{173}$$

Тогда соответствующая КЧХ:

$$H(\omega) = \sum_{n=-M}^{M} h[n] e^{-i\omega n} \tag{174}$$

представляет собой частичную сумму ряда Фурье, а значит будет наблюдаться *эффект Гиббса*

Метод оконного взвешивания:

Чтобы получить физически реализуемый фильтр нужна задержка:

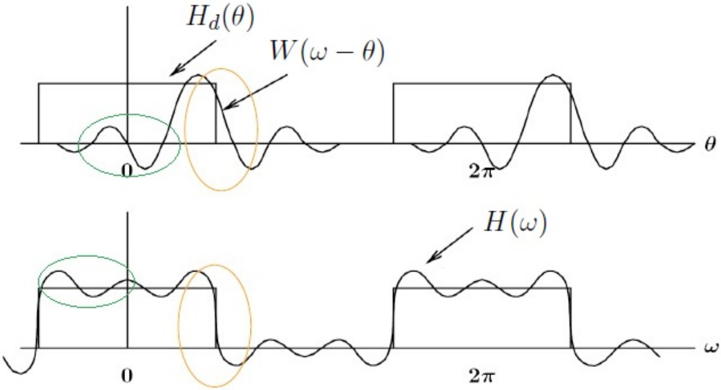
$$\widetilde{h}[n] = h[n - M], \tag{175}$$

где $N - 1 = 2M$ – порядок фильтра. В этом случае получим линейную ФЧХ.

Усечение ИХ идеального фильтра соответствует умножению на прямоугольную функцию. Чтобы устранить пульсацию в полосах пропускания и заграждения, имея при этом по возможности меньший порядок фильтра, можно использовать другие оконные функции.

Влияние характеристик оконной функции:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W(\omega - \theta) d\theta$$



Метод оконного взвешивания:

- Частота среза находится в середине транзитной полосы:

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$

- Ширина транзитной полосы определяется шириной главного лепестка спектра оконной функции
- Отклонения в ПП и ПЗ примерно одинаковы $\delta_1 \simeq \delta_2$ и зависят от уровня боковых лепестков спектра оконной функции

Характеристики некоторых оконных функций:

Окно	Ширина главного лепестка	Уровень боковых лепестков дБ,	$A = -20\lg\delta$, дБ
Прямоугольное	$4\pi/N$	-13	-21
Хэмминга	$8\pi/N$	-43	-53
Ханна	$8\pi/N$	-32	-44
Блэкмана	$12\pi/N$	-58	-74

Пусть задана спецификация ФНЧ $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$; $\omega_p = 0.2\pi$; $\omega_s = 0.3\pi$ ($\omega_c = 0.25\pi$). Поскольку $A_2 = 20\lg\delta_2 = -40$ дБ, можно выбрать окно Ханна.

Ширина транзитной полосы равна $\omega_s - \omega_p = 0.1\pi$, следовательно минимальная длина фильтра может быть найдена из неравенства

$$\frac{8\pi}{N} \leq 0.1\pi \Leftrightarrow N \geq 80$$

Пусть $H_d(\omega)$ – требуемая КЧХ с линейной ФЧХ:

$$H_d(\omega) = A_d(\omega)e^{i(k_1+k_2\omega)} \tag{176}$$

Осуществим дискретизацию $H_d(\omega)$ на равномерной сетке:

$$H[k] := H_d(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, \quad k = 0, ..., N-1 \tag{177}$$

Тогда соответствующие отчеты ИХ могут быть вычислены с помощью обратного ДПФ:

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]e^{i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, ..., N-1 \tag{178}$$

Ошибка аппроксимации при методе частотной выборки:

Пусть идеальная КЧХ $H_d(\omega)$ аппроксимируется КЧХ с КИХ:

$$H(\omega) = \sum_{n=-M}^{M} h[n]e^{-i\omega n}$$

Пусть далее ошибка определяется следующим выражением

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |H(\omega_k) - H_d(\omega_k)|^2, \;\; \omega_k = \frac{2\pi k}{L}, \;\; L > 2M \qquad (179)$$

В силу теоремы Парсеваля

$$E = \sum_{n=-(L-1)/2}^{(L-1)/2} |h[n] - h_d[n]|^2 \qquad (180)$$

Ошибка аппроксимации при методе частотной выборки:

Поскольку

$$E = \sum_{n=-M}^{M} |h[n] - h_d[n]|^2 + 2 \sum_{n=M+1}^{(L-1)/2} |h_d[n]|^2,$$

то для минимизации ошибки следует выбрать $h[n] = h_d[n]$ $n = -M...M$. После временной задержки в M отсчетов, полученный КИХ-фильтр становится физически реализуемым с линейной ФЧХ.

Переопределенные СЛАУ (Overdetermined systems):

Рассматривается система линейных уравнений:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}, m > n, \tag{181}$$

т. е. число уравнений больше числа неизвестных. Такие системы, как правило, несовместны. На практике находят решения в смысле метода наименьших квадратов (МНК): под решением понимается вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, минимизирующий выражение

$$J(\mathbf{x}) = ||\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}||^2 \tag{182}$$

МНК-решение:

Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= (\mathbf{y}-\mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{y}-\mathbf{H}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^T\mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = -2\mathbf{H}^T\mathbf{y} + 2\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{x} \tag{183}$$

Если матрица $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ обратима (верно, когда матрица $\mathbf{H}$ имеет полный ранг), то оптимальное значение определяется следующим образом:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y} \tag{184}$$

Замечание:

- *Если* $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, *то* $\mathbf{x} = (\mathbf{H}^*\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*\mathbf{y}$
- *Матрица* $(\mathbf{H}^*\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^*$ *называется псевдообратной матрицей в смысле Мура-Пенроуза к прямоугольной матрице* $\mathbf{H}$.

Расчет КИХ-фильтров на основе МНК (Least square filter design):

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |H(\omega_k) - H_d(\omega_k)|^2 = \sum_{k=0}^{L-1} |A(\omega_k) - A_d(\omega_k)|^2, \qquad (185)$$

где ω_k вообще говоря, не обязательно равномерно распределены на $[0, 2\pi]$. Рассмотрим тип I фильтров с линейной ФЧХ:

$$A(\omega_k) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h[n] \cos \omega_k (M-n) + h[M], \quad k = 0, ..., L-1, \qquad (186)$$

где $M = \frac{N-1}{2}$. Уравнения (186) можно записать в матричной форме.

Расчет КИХ-фильтров на основе МНК:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A(\omega_0) \\ A(\omega_1) \\ \vdots \\ A(\omega_{L-1}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos\omega_0 M & 2\cos\omega_0(M-1) & \dots & 1 \\ 2\cos\omega_1 M & 2\cos\omega_1(M-1) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\cos\omega_{L-1} M & 2\cos\omega_{L-1}(M-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[M] \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}}$$

Тогда ошибка может быть записана в следующем виде:

$$E = ||\mathbf{F}\mathbf{h} - \mathbf{a}_d||^2, \tag{187}$$

где $\mathbf{h} = (h[0], ..., h[M])^T$, $\mathbf{a}_d = (A_d(\omega_1), ..., A_d(\omega_{L-1}))^T$.
Оптимальные в смысле МНК коэффициенты ИХ определяются следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{h}} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{a}_d. \tag{188}$$

Рассмотрим взвешенную ошибку

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} W_k |A(\omega_k) - A_d(\omega_k)|^2. \tag{189}$$

С помощью весовых коэффициентов можно в некотором смысле регулировать ошибку в различных областях частотной области. Ошибка можно записать в виде квадртата нормы:

$$E = ||\mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{F}\mathbf{h} - \mathbf{d})||^2, \tag{190}$$

где $\mathbf{W} = \mathrm{diag}(W_0, ..., W_{L-1})$. По аналогии оптимальные в смысле взвешенного МНК коэффициенты ИХ определяются следующим образом:

$$\widehat{\mathbf{h}} = (\mathbf{F}^T\mathbf{W}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{W}\mathbf{d}. \tag{191}$$

Расчет КИХ-фильтров методом наилучшей равномерной (чебышевской) аппроксимации :

Пусть задана весовая функция W:

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1}, & \omega \in [0, \omega_p] \\ 1, & \omega \in [\omega_s, \pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{192}$$

Обозначим $\Omega = [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$. Рассмотрим далее функцию

$$E(\omega) = W(\omega)(H_d(\omega) - H(\omega)). \tag{193}$$

Если выполнено

$$\max_{\omega \in \Omega} |E(\omega)| < \delta_2, \tag{194}$$

то требования к ФНЧ соблюдены.

Метод равномерной (чебышевской) аппроксимации (equiripple filter) :

Для КИХ-фильтров с линейной ФЧХ первого типа:

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos k\omega, \quad a_k = \begin{cases} h[M], \ k = 0 \\ 2h[M-k], \ k = 1, ..., M \end{cases} \tag{195}$$

Требуется решить оптимизационную задачу:

$$\min_{a_k} \left[\max_{\omega \in \Omega} |E(\omega)| \right] = \min_{a_k} \left[\max_{\omega \in \Omega} \left| W(\omega) \left(A_d(\omega) - \sum_{k=0}^{M} a_k \cos k\omega \right) \right| \right] \tag{196}$$

Использование тригонометрических многочленов:

Многочлены Чебышева:

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x) \tag{197}$$

Легко показать, что

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x), \ \ m \geq 1 \end{cases}$$

Тогда выражение $A(\omega)$ можно записать в следующем виде:

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cos^k \omega = \sum_{k=0}^{M} b_k x^k \Big|_{x=\cos\omega} \tag{198}$$

Наилучшее равномерное приближение многочленами:

$$E(\omega) = W(\omega)(A_d(\omega) - A(\omega)).$$

Теорема (Чебышевский альтернанс):

Для того, чтобы многочлен $A(\omega)$ наилучшим образом приближал $A_d(\omega)$ на некотором компактном множестве Ω необходимо и достаточно, чтобы на множестве Ω нашлась по крайней мере одна система из $M+2$ точек $\omega_1 < \dots < \omega_{M+2}$, таких что

$$E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1})$$

$$|E(\omega_i)| = \max_{\omega\in\Omega} |E(\omega)|$$

Оптимальные коэффициенты находятся с помощью алгоритма замены Ремеза.

$$E(\omega) = A_d(\omega) - \sum_{k=0}^{M} a_k \cos k\omega$$

Пусть $T_0 = \{\omega_1, ..., \omega_{M+2}\} \in [0, \pi]$.

Алгоритм:

1. Решается система линейных уравнений

$$A_d(\omega_j) = \sum_{k=0}^{M} a_k \cos k\omega_j + (-1)^j \delta \;\; j = 1, ..., M+2 \qquad (199)$$

относительно $\{a_k,\, k = 0, ..., M\}$ и δ.

2. Вычисляется максимум ошибки $\delta_m = \max |E(\omega)|$ (на практике функция $E(\omega)$ вычисляется на более плотной сетке частот)
3. Если $\delta_m > \delta$, то обновляем набор частот $T_{m+1} = \{\omega_1, ..., \omega_{M+2}\}$ (например, берутся локальные экстремумы функции $E(\omega)$) и возвращаемся к шагу 1.

Определение порядка фильтра:

Рекоменуют использовать следующую эмпирическую формулу для определения порядка фильтра:

$$N = \frac{-20\lg\sqrt{\delta_1\delta_2} - 13}{14.6(f_s - f_p)} + 1 \qquad (200)$$

Если спецификация требований не выдержана, то порядок следует увеличить и повторить процедуру расчета КИХ-фильтра заново.

Преимущества и недостатки КИХ-фильтров:

Преимущества:

- Возможна линейная ФЧХ
- Эффективные алгоритмы расчета коэффициентов
- Всегда устойчивы

Недостатки:

- Часто требуется большой порядок, чтобы были выдержены условия спецификации требований.
- Групповая задержка может оказаться достаточно большой

БИХ-фильтры:

Разностное уравнение:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b[m]x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a[k]y[n-k] \qquad (201)$$

Передаточная функция:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{M} b[n]z^{-n}}{\sum\limits_{n=0}^{N} a[n]z^{-n}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Линейная ФЧХ принципиально невозможна (т. к. ИХ бесконечна, нет симметрии)
- Спецификация требований может быть соблюдена для сравнительно небольшого порядка фильтра.

Обозначим $L = M + N$. Идеальная КЧХ $H_d(\omega)$ дискретизируется на равномерной сетке частот:

$$H[k] = H_d(\omega_k)\Big|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{L+1}} = \frac{A[k]}{B[k]}, \quad k = 0, ..., L \tag{202}$$

Тогда соотношение

$$B[k] = H[k]A[k], \ \ k = 0, ..., L$$

будет соответствовать циклической свертке:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_0 & h_L & h_{L-1} & \dots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_L & \dots & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_L & & \dots & & h_0 \end{bmatrix}}_{h[0:L]=\mathrm{IFFT}(H[0:L])} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

В компактной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(L+1)\times(L+1)}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{M+1}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N+1}$. Очевидно, что последние $L-N$ элементов каждой строки матрицы $\mathbf{H}$ умножаются на нули, тогда

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^{(L+1)\times(N+1)}$. Далее

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{h}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}^* \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{H}_1 \in \mathbb{R}^{(M+1)\times(N+1)}$, $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{R}^{L-M}$, $\mathbf{H}_2 \in \mathbb{R}^{(L-M)\times N}$

Выпишем последние $L-M$ уравнений

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{H}_2\mathbf{a}^*.$$

Откуда (предполагая, что существует $\mathbf{H}_2^{-1}$)

$$\mathbf{a}^* = -\mathbf{H}_2^{-1}\mathbf{h}_1, \tag{203}$$

Первые $M+1$ уравнений дают

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}_1\mathbf{a}. \tag{204}$$

Если $L > M+N$, то получим переопределенную систему уравнений для $\mathbf{a}^*$:

$$\mathbf{a}^* = -[\mathbf{H}_2^T\mathbf{H}_2]^{-1}\mathbf{H}_2^T\mathbf{h}_1. \tag{205}$$

Расчет БИХ-фильтров по аналоговому прототипу:

АЧХ аналогового ФНЧ аппроксимируется следующими выражениями:

- Фильтры Баттерворта:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2(\Omega/\Omega_c)^{2N}} \qquad (206)$$

- Фильтры Чебышева:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^2(\Omega/\Omega_c)}, \qquad (207)$$

  где T_n – многочлен Чебышева порядка n.

- Эллиптические фильтры:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 R_n^2(\Omega/\Omega_c, \xi)}, \qquad (208)$$

  где R_n – рациональная эллиптическая функция порядка n

Во всех формулах ϵ – параметр, определяющий величину пульсаций АЧХ в полосе пропускания.

Расчет БИХ-фильтров по аналоговому прототипу: билинейное преобразование

Передаточная функция аналогового фильтра определяется как преобразование Лапласа ИХ:

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-st} dt \tag{209}$$

Подходящий аналоговый фильтр с передаточной функцией $H_a(s)$ преобразуется в цифровой фильтр с передаточной функцией $H(z)$, например, с помощью *билинейного преобразования*:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad z = \frac{2 + sT}{2 - sT} \tag{210}$$

Нетрудно показать, что частоты аналогового и соответствующего цифрового фильтров связаны следующим соотношением:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}. \tag{211}$$

Определение:

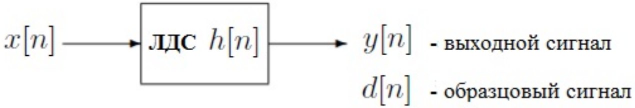
Адаптивный фильтр (АФ) – это цифровой фильтр с самонастраивающимися характеристиками.
АФ состоит из двух компонент:

- Цифровой фильтр (например, КИХ-фильтр)
- Алгоритм адаптации

АФ стоит применять, если

- характеристики фильтра должны быть переменными, чтобы адаптироваться к меняющимся условиям;
- полоса шумовых сигналов неизвестна или меняется со временем;
- существует спектральное перекрытие сигнала и шума

Адаптивная фильтрация:



Выходной сигнал фильтра равен

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k].$$

Ошибка воспроизведения образцового сигнала равна

$$e[n] = d[n] - y[n] \tag{212}$$

Задача заключается в том, чтобы найти коэффициенты фильтра, которые обеспечивают минимизацию ошибки $e[n]$.

Дополнительно предположим, что $x[n]$ и $d[n]$ являются стационарными случайными процессами. Обозначим вектор коэффициентов ИХ

$$\mathbf{h} = \left[h[0], ..., h[M-1]\right]^T$$

и вектор отсчетов входного сигнала

$$\mathbf{x}_n = \left[x[n], x[n-1], ..., x[n-M+1]\right]^T.$$

Тогда выражение для ошибки можно записать в виде

$$e[n] = d[n] - \mathbf{h}^T \mathbf{x}_n.$$

В качестве критерия оптимальности используется минимизация среднеквадратичной ошибки (МСКО) (анг. аббревиатура MMSE – Minimal Mean Square Error):

$$J(\mathbf{h}) = \mathbb{E}\left[e^2[n]\right] \tag{213}$$

Выражение для СКО может быть переписано в следующем виде

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{h}) &= \mathbb{E}\Big[d^2[n] - 2\mathbf{h}^T\mathbf{x}_n d[n] + \mathbf{h}^T\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{h}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[d^2[n]\Big] - 2\mathbf{h}^T\mathbb{E}\Big[\mathbf{x}_n d[n]\Big] + \mathbf{h}^T\mathbb{E}\Big[\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\Big]\mathbf{h} \\
&= \sigma_d^2 - 2\mathbf{h}^T\mathbf{p} + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h},
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{p} = \mathbb{E}\Big[\mathbf{x}_n d[n]\Big]$ – вектор-столбец взаимных корреляций между n-ым отсчетом образцового сигнала и входным вектором $\mathbf{x}_n$; $\mathbf{R} := \mathbf{R}_{xx} = \mathbb{E}\Big[\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\Big]$ – корреляционная матрица входного сигнала.

Окончательно СКО примет вид

$$J(\mathbf{h}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{h}^T\mathbf{p} + \mathbf{h}^T\mathbf{R}\mathbf{h} \tag{214}$$

Данное выражение представляет собой квадратичную форму относительно $\mathbf{h}$ и имеет единственный минимум, для нахождения которого нужно приравнять к нулю вектор градиента

$$\nabla J(\mathbf{h}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}} = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{h} = \mathbf{0} \tag{215}$$

Таким образом, получаем условие оптимального фильтра, называемое уравнением *Винера–Хопфа (Wiener–Hopf)* или *нормальным уравнением*

$$\mathbf{R}\mathbf{h} = \mathbf{p} \tag{216}$$

Фильтр Винера: уравнение Винера-Хопфа

$$\sum_{i=0}^{M-1} h[i]r[i-k] = p[k] \tag{217}$$

$$\begin{bmatrix} r[0] & r[1] & r[2] & \dots & r[M-1] \\ r[1] & r[0] & r[1] & \dots & r[M-2] \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ r[M-1] & & \dots & & r[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p[0] \\ p[1] \\ \vdots \\ p[M-1] \end{bmatrix},$$

где $p[k] := r_{xd}[k] = \mathbb{E}\Big[x[n-k]d[n]\Big]$ – взаимная корреляция (cross correlation); $r[k] := r_{xx}[k] = \mathbb{E}\Big[x[n]x[n-k]\Big]$ – автокорреляционная функция.

Оптимальные коэффициенты фильтра определяются как решения уравнения Винера–Хопфа:

$$\mathbf{h}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \tag{218}$$

Уравнение Винера-Хопфа в частотной области:

Нормальное уравнение:

$$\sum_{i=0}^{M-1} h[i]r[i-k] = p[k] \tag{219}$$

В силу стационарности $r[i-k] = r[k-i]$, поэтому данное уравнение представляет собой свертку. Привенив ДВПФ к обеим частям уравнения, получим

$$H(\omega)S_{xx}(\omega) = S_{xd}(\omega), \tag{220}$$

откуда частотная характеристика оптимального фильтра

$$H(\omega) = \frac{S_{xd}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}, \tag{221}$$

где S_{xx} – спектральная плотность входного сигнала, S_{xd} – взаимная спектральная плотность между входным и образцовым сигналами.

Некоторые частные случаи:

- Если $d[n] = x[n]$, то говорят о задаче фильтрации
- Если $d[n] = x[n+m]$, $m > 0$ то говорят о задаче прогноза
- Если $d[n] = x[n-m]$, $m > 0$ то говорят о задаче сглаживания

Шумоподавление с помощью фильтра Винера:

На вход в систему поступает зашумленный сигнал

$$x[n] = d[n] + \eta[n] \tag{222}$$

Предполагается, что шум η не коррелирует с полезным сигналом и представляет собой стационарный случайный процесс с нулевым средним. Нетрудно показать, что в этом случае

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{dd} + \mathbf{R}_{\eta\eta}. \tag{223}$$

Кроме того,

$$\mathbf{p} = \mathbb{E}\Big[\mathbf{x}_n d[n]\Big] = \mathbb{E}\Big[(\mathbf{d}_n + \boldsymbol{\eta}_n) d[n]\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbf{d}_n d[n]\Big] =: \mathbf{r}_d, \tag{224}$$

где $\mathbf{d}_n = \Big[d[n], d[n-1], ..., d[n-M+1]\Big]$, $\mathbf{r}_d$ – автокорреляционный вектор образцового сигнала. Тогда оптимальный фильтр определяется

$$\mathbf{h}^* = (\mathbf{R}_{dd} + \mathbf{R}_{\eta\eta})^{-1} \mathbf{r}_d \tag{225}$$

Особенности применения фильтра Винера:

Практическое применение фильтров Винера ограничено по следующим причинам:

- Автокорреляционная матрица $\mathbf{R}$ и вектор взаимной корреляции $\mathbf{p}$, как правило, априори неизвестны. Следовательно их нужно оценивать по выборочным реализациям.

$$\hat{r}_{xx}[k] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x[i]x[i+k].$$

- Требуется обращение матриц
- Для нестационарных сигналов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{p}$ будут меняться со временем, а значит $\mathbf{h}^*$ придется вычислять многократно.

Адаптивный фильтр минимальной среднеквадратичной ошибки (LMS – Least Mean Squares)

Алгоритм основан на поиске минимума функции $J(\mathbf{h})$ методом наискорейшего спуска

$$\mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_n - \frac{\mu}{2}\nabla J(\mathbf{h}_n) = \mathbf{h}_n + \mu(\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{h}_n), \tag{226}$$

где $\mu > 0$ – размер шага. При этом необходимо знать значения матрицы $\mathbf{R}$ и вектора $\mathbf{p}$. На практике доступны лишь оценки этих параметров. Простейшими оценками являются мгновенные значения корреляционной матрицы и вектора взаимных корреляций:

$$\hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T \tag{227}$$

$$\hat{\mathbf{p}}_n = d[n]\mathbf{x}_n. \tag{228}$$

С учетом выражений для оценок итерационная процедура принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{n+1} &= \mathbf{h}_n + \mu \mathbf{x}_n (d[n] - \mathbf{x}_n^T \mathbf{h}_n) \\ &= \mathbf{h}_n + \mu e[n] \mathbf{x}_n. \end{aligned} \tag{229}$$

Последнее выражение известно как алгоритм Уидроу–Хоффа (Widrow–Hoff). Его модификацией является нормированный фильтр (NLMS), в котором коэффициент μ на каждом шаге рассчитывается по следующей формуле

$$\mu_n = \frac{\mu_0}{\mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n + \varepsilon}, \tag{230}$$

где $0 < \mu_0 < 2$, $\varepsilon > 0$ – малая константа.

Адаптивный фильтр на основе рекурсивного МНК (РМНК) (RLS – Recursive Least Squares)

Пусть образцовый выходной сигнал связан с входным сигналом следующей регрессионнной моделью

$$d[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] + e[n] \tag{231}$$

$$\begin{bmatrix} d[0] \\ d[1] \\ \vdots \\ d[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] & x[-1] & \dots & x[-M+1] \\ x[1] & x[0] & \dots & x[-M+2] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & \dots & & x[N-M] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e[0] \\ e[1] \\ \vdots \\ e[N-1] \end{bmatrix}$$

В компактной форме:

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{h} \tag{232}$$

Задача заключается в том, чтобы на основе входного сигнала $\{x[n]\}$ и образцового сигнала $\{d[n]\}$ найти коэффициенты ИХ $\{h[0], ..., h[M-1]\}$, оптимальные в смысле МНК

$$J(\mathbf{h}) = \sum_{i=0}^{N-1} e^2[i] = (\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{h})^T(\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{h}) \longrightarrow \min_{\mathbf{h}}$$

Оптимальное решение определяется следующим выражением:

$$\mathbf{h}^* = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{d} \tag{233}$$

Отметим, что $\mathbf{A}^T\mathbf{A}/N$ дает оценку корреляционной матрицы сигнала, полученную путем временного усреднения одной реализации эргодического процесса. Кроме того,

$$\mathbf{A}^\mathbf{T} = \left[\mathbf{x}_0 \ \mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_{N-1}\right],$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T \tag{234}$$

РМНК: экспоненциальное забывание (exponential forgetting):

Если учитывать предшествующие отсчеты входного сигнала с экспоненциально уменьшаемым весом, то критерий оптимальности модифицируется:

$$J(\mathbf{h}) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{N-1-i} e^2[i],$$

где $0 < \lambda \leq 1$ – коэффициент забывания. При этом оптимальное решение

$$\mathbf{h}^*_{N-1} = \mathbf{\Phi}^{-1}_{N-1} \mathbf{z}_{N-1}, \tag{235}$$

где

$$\mathbf{\Phi}_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{N-1-i} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T, \qquad \mathbf{z}_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{N-1-i} \mathbf{x}_i d[i] \tag{236}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_n &= \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-1-i} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T + \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \\
&= \lambda \mathbf{\Phi}_{n-1} + \mathbf{x}_n \cdot 1 \cdot \mathbf{x}_n^T
\end{aligned}
$$

Тождество Шермана–Моррисона–Вудбери (Sherman–Morrison–Woodbury)

$$
(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}. \quad (237)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_n^{-1} &= (\lambda \mathbf{\Phi}_{n-1} + \mathbf{x}_n \cdot 1 \cdot \mathbf{x}_n^T)^{-1} \\
&= \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1}\mathbf{x}_n \left(\mathbf{x}_n^T \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1}\mathbf{x}_n + 1 \right)^{-1} \mathbf{x}_n^T \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1} \\
&= \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1} - \frac{\frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1}\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1}}{1 + \mathbf{x}_n^T \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Phi}_{n-1}^{-1}\mathbf{x}_n}
\end{aligned}
$$

Обозначим $\mathbf{P}_n = \mathbf{\Phi}_n^{-1}$. Доказано следующее рекуррентное соотношение

$$\mathbf{P}_n = \frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{n-1} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{K}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1}, \tag{238}$$

где вектор коэффициентов усиления (Gain vector)

$$\mathbf{K}_n = \frac{\frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n}{1 + \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n} \tag{239}$$

Заметим также, что

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n\mathbf{x}_n. \tag{240}$$

По аналогии нетрудно получить, что

$$\mathbf{z}_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i}\mathbf{x}_i d[i] = \lambda\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{x}_n d[n].$$

С учетом полученных формул можно записать рекуррентное соотношение для коэффициентов оптимального фильтра

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}_n^* &= \mathbf{P}_n\mathbf{z}_n = \lambda\mathbf{P}_n\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{P}_n\mathbf{x}_n d[n] \\
&= \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{z}_{n-1} - \mathbf{K}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{P}_n\mathbf{x}_n d[n] \\
&= \mathbf{h}_{n-1}^* - \mathbf{K}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{h}_{n-1}^* + \mathbf{K}_n d[n] \\
&= \mathbf{h}_{n-1}^* + \mathbf{K}_n\xi_n, \qquad \xi_n = d[n] - \mathbf{x}_n^T\mathbf{h}_{n-1}^* \qquad (241)
\end{aligned}
$$

РМНК:

Алгоритм:

1. Находится вектор коэффициентов усиления

$$\mathbf{K}_n = \frac{\frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n}{1 + \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{x}_n} \tag{242}$$

2. Вычисляется ошибка с предыдущей итерации

$$\xi_n = d[n] - \mathbf{x}_n^T\mathbf{h}_{n-1}^* \tag{243}$$

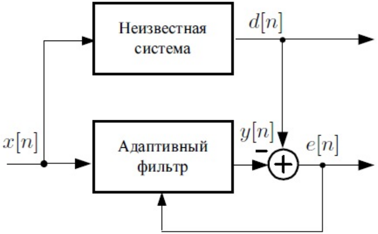
3. Обновляется вектор оптимальных коэффициентов

$$\mathbf{h}_n^* = \mathbf{h}_{n-1}^* + \mathbf{K}_n\xi_n, \tag{244}$$

4. Пересчет обратной матрицы

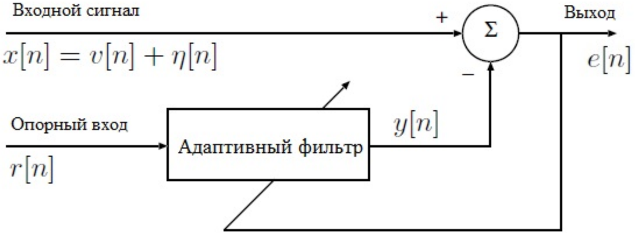
$$\mathbf{P}_n = \frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{n-1} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{K}_n\mathbf{x}_n^T\mathbf{P}_{n-1} \tag{245}$$

Идентификация систем:



Под *идентификацией* системы понимается определение её характеристик.
При прямой идентификации входной сигнал является общим для исследуемой системы и адаптивного фильтра, а выходной сигнал системы является образцовым сигналом для адаптивного фильтра.

Адаптивное шумоподавление:



Опорный вход представляет собой образец шумового сигнала, коррелированный с исходным шумом η и некоррелированный с полезным сигналом. В качестве образцового сигнала используется аддитивная смесь полезного сигнала с шумом.

В этом случае ошибка

$$e[n] = x[n] - y[n] = v[n] + \eta[n] - y[n] \tag{246}$$

будет являться оценкой полезного сигнала. При этом легко показать, что в предположении некоррелированности полезного сигнала и шума

$$\mathbb{E}\left[e^2[n]\right] = \mathbb{E}\left[v^2[n]\right] + \mathbb{E}\left[(\eta[n] - y[n])^2\right] \tag{247}$$

Кроме того,

$$\min \mathbb{E}\left[e^2[n]\right] = \mathbb{E}\left[v^2[n]\right] + \min \mathbb{E}\left[(\eta[n] - y[n])^2\right], \tag{248}$$

т. е. минимизация общей мощности выходного сигнала АФ максимизирует выходное отношение сигнал/шум (SNR: Signal to Noise Ratio)

Оконное (кратковременное) преобразование Фурье (STFT: Short-Time Fourier Transform):

Для дискретного сигнала $x[n]$ оконное ПФ определяется следующим образом:

$$X(m, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] w[n-m] e^{-i\omega n}, \qquad (249)$$

где $w[n]$ – оконная функция (например, прямоугольная).
В результате получили частотно-временное представление сигнала.
Спектрограмма – графическое представление $|X(m, \omega)|^2$.

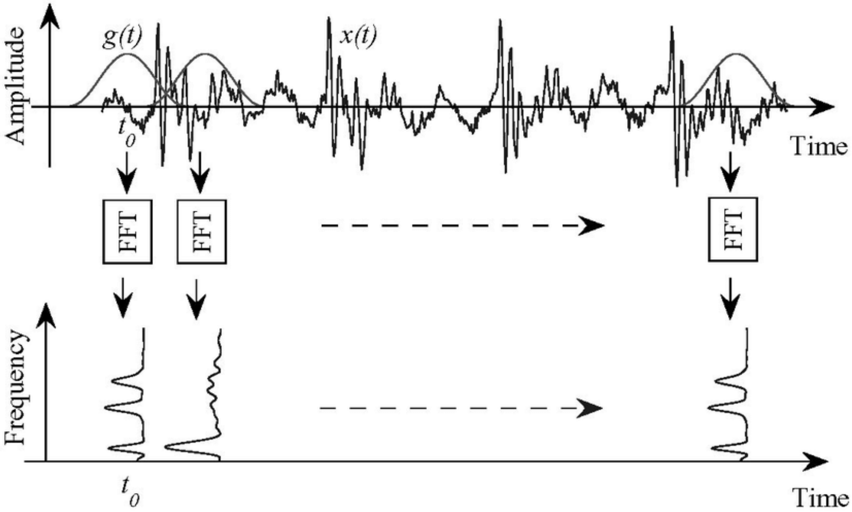
Оконное преобразование Фурье:

На практике оконное ПФ рассчитывается с помощью ДПФ:

$$X[m,k] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n+mS]w[n]e^{-i\frac{2\pi}{L}kn}, \ \ k = 0, ..., L-1 \qquad (250)$$

где $w[n]$ – оконная функция длины L, S – параметр, влияющий на перекрытие (hop size)

Схема STFT:



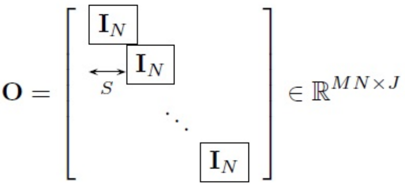
Исходный сигнал $x[n]$ делится на M перекрывающихся секций длины N. Пусть далее

$$\underline{x}_m = \Big[x[mS], x[mS+1], ..., x[mS+N-1]\Big]^T \in \mathbb{C}^N \tag{251}$$

обозначает секцию m исходного сигнала $(m = 0, ..., M-1)$. Эти M перекрывающихся секций (напомним, что S – сдвиг следующей секции относительно предыдущей) содержат $J = (M-1)S + N$ отсчетов исходного сигнала. Пусть

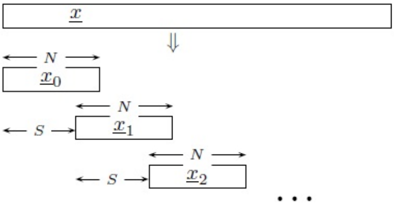
$$\underline{x} = \Big[x[0], x[1], ..., x[J-1]\Big]^T \in \mathbb{C}^J. \tag{252}$$

Матричная запись оконного ПФ:



Разбиение на секции в матричной формулировке:

$$[\underline{x}_0^T, \underline{x}_1^T, \dots, \underline{x}_{M-1}^T] = \mathbf{O}\underline{x}. \tag{253}$$



Матричная запись оконного ПФ:

Каждая секция $\underline{x}_m$ умножается на оконную функцию $w[n]$ такой же длины. Затем полученная последовательность дополняется $K-N$ нулями и вычисляет K-точечное ПФ $X_m[k],\ k=0,...,K-1$. В матричной нотации

$$\underline{X}_m = \Big[X_m[0],...,X_m[K-1]\Big]^T = \mathbf{FPW}\underline{x}_m \in \mathbb{C}^K, \qquad (254)$$

где

$$\mathbf{W} = \operatorname{diag}\left(w[0],...,w[N-1]\right) \in \mathbb{R}^{N\times N}, \qquad (255)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}_{(K-N)\times N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times N}, \qquad (256)$$

$$\mathbf{F} = \left[e^{-iw_k n}\right]_{k,n=0,...,K-1} \in \mathbb{C}^{K\times K}. \qquad (257)$$

Матричная запись оконного ПФ:

Обозначим

$$\underline{X} = \left[\underline{X}_0^T, \underline{X}_1^T, ..., \underline{X}_{M-1}^T\right]^T \in \mathbb{C}^{MK} \qquad (258)$$

$$\begin{aligned} \underline{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{FPW} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{FPW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \underline{x}_{M-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{H}\underline{x}, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{I}_M \otimes (\mathbf{FPW}))\mathbf{O}, \end{aligned} \qquad (259)$$

где $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_{ij}\mathbf{B}]_{i,j}$ – произведение Кронекера

Обращение оконного ПФ:

В общем случае получается переопределенная система линейных уравнений

$$\mathbf{H}\underline{x} = \underline{X}, \;\; \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{MK \times J} \tag{260}$$

МНК-решение которой имеет следующий вид

$$\widehat{\underline{x}} = (\mathbf{H}^{*}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}\underline{X} \tag{261}$$

Поскольку для ДПФ $\mathbf{F}^{*}\mathbf{F} = K\mathbf{I}_K$ (т. е. $\mathbf{F}^{*} = K\mathbf{F}^{-1}$), то выражение для $\widehat{\underline{x}}$ окончательно записывается в следующей форме

$$\widehat{\underline{x}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{O}^{*}(\mathbf{I}_M \otimes (\mathbf{W}\mathbf{P}^{*}\mathbf{F}^{-1}))\underline{X} \tag{262}$$

Обращение оконного ПФ:

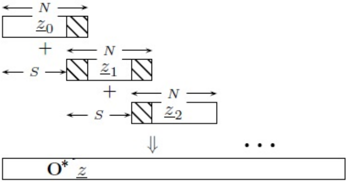
$$\underline{\widehat{x}} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{O}^{*}(\mathbf{I}_M \otimes (\mathbf{W}\mathbf{P}^{*}\mathbf{F}^{-1}))\underline{X}, \qquad (263)$$

где

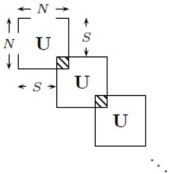
$$\mathbf{D} = \mathbf{H}^{*}\mathbf{H} = \mathbf{O}^{*}(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{W}^2)\mathbf{O} \qquad (264)$$

Шаг	Действие
1)$\mathbf{F}^{-1}$	обратное ДПФ от $\underline{X}_m$
2)$\mathbf{P}^{*}$	Берутся первые N отсчетов $\mathbf{F}^{-1}\underline{X}_m$
3)$\mathbf{W}$	Умножение на весовую функцию
4)$\mathbf{I}_M\otimes$	Проделать шаги 1-3 для всех M секций
5)$\mathbf{O}^{*}$	Суммирование секций с перекрытием
6)$\mathbf{D}^{-1}$	Окончательная нормировка

Обращение оконного ПФ: суммирование с перекрытием



$\mathbf{O}^* \underline{z}$: суммирование векторов с перекрытием



$\mathbf{O}^* (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{U})\mathbf{O}$: суммирование матриц с перекрытием

Обозначим $\underline{z} = \left[\underline{z}_0^T, ..., \underline{z}_{M-1}^T\right]^T \in \mathbb{C}^{MN}$. Операция $\mathbf{O}^* \underline{z}$ на шаге 5 означает суммирование с перекрытием секций $\underline{z}_m$, $m = 0, ..., M-1$. Кроме того, матрица $\mathbf{U} = \mathbf{W^2}$ является диагональной, а значит и матрица $\mathbf{D} = \mathbf{O}^*(\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{W}^2)\mathbf{O}$ также является диагональной.

Метод спектрального вычитания (spectral subtraction) для очистки речевых сигналов

Модель зашумленного сигнала

$$x[n] = s[n] + w[n], \tag{265}$$

где шум $w[n]$ предполагается стационарным (в смысле постоянства частотных характеристик).
Пусть известна оценка амплитудного спектра шума $\hat{W}[n,k]$.
Очистка от шума заключается в вычитании оценки амплитудного спектра шума из спектра наблюдаемого сигнала:

$$|\hat{S}[n,k]|^a = |X[n,k]|^a - |\hat{W}[n,k]|^a \tag{266}$$

Фазовый спектр оставляется без изменений. Тогда

$$\hat{S}[n,k] = G[n,k]X[n,k], \quad G[n,k] = \left(\max\left(1 - \frac{|\hat{W}[n,k]|^a}{|X[n,k]|^a}, 0\right)\right)^{1/a} \tag{267}$$

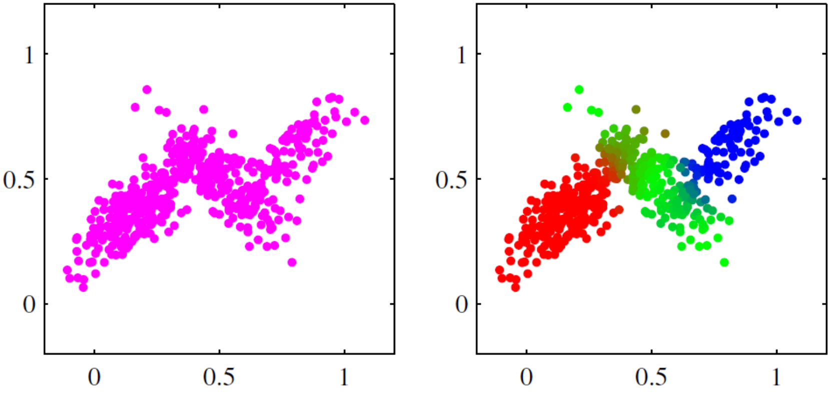
Модель наблюдения на основе смеси гауссовских распределений (GMM – Gaussian Mixture Model)

- GMM:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k N(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k), \qquad \sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1. \tag{268}$$

- Пусть имеется выборка $\mathbf{X} = \{X_1, ..., X_N\}$. Требуется оценить вектор неизвестных параметров $\Theta = \{\pi_k, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k,\ k = 1, ..., K\}$.
- Задача оценки неизвестных параметров может быть решена с использованием EM-алгоритма.

Выделение компонент смесей гауссовских распределений:



- Bishop,C. Pattern Recognition and Machine Learning. — Springer, 2006.

EM-алгоритм

Пусть имеется выборка $\mathbf{X} = \{X_1, ..., X_N\}$ из распределения π_θ Требуется найти оценку неизвестного параметра θ. Дополнительно предположим, что имеются скрытые переменные $\mathbf{Z}$. Рассмотрим функцию правдоподобия:

$$L(\theta) = P(\mathbf{X}|\theta) = \sum_{\mathbf{z}} P(\mathbf{X}, \mathbf{z}|\theta) \tag{269}$$

Алгоритм:

- Начальное значение θ_0
- Шаг E: Находится $Q(\theta|\theta_n) = \mathbb{E}_{\mathbf{Z}|\mathbf{X},\theta_n}\left[\ln P(\mathbf{X}, \mathbf{Z}|\theta)\right]$
- Шаг M: $\theta_{n+1} = \arg\max_\theta Q(\theta|\theta_n)$. Переход на шаг E.

EM-алгоритм для смеси гауссовских распределений

- Пусть z_{nk} – бернуллиевская случайная величина, равная единице в случае, если наблюдение n было получено от компоненты k смеси.
- Логарифм правдоподобия:

$$\ln P(\mathbf{X}, \mathbf{Z} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\pi}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} z_{nk} \left(\ln \pi_k + \ln N(\mathbf{x}_n | \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \right), \tag{270}$$

- Математическое ожидание логарифма правдоподобия:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Z}} \left[\ln P(\mathbf{X}, \mathbf{Z} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\pi}) \right] = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \gamma(z_{nk}) \left(\ln \pi_k + \ln N(\mathbf{x}_n | \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \right), \tag{271}$$

где

$$\gamma(z_{nk}) = \mathbb{P}(z_{nk} = 1 | \mathbf{X}) = \frac{\pi_k N(\mathbf{x_n} | \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)}{\sum_{k=1}^{K} \pi_k N(\mathbf{x_n} | \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)}.$$

EM-алгоритм для смеси гауссовских распределений

Алгоритм:

- Начальные значения параметров $\Theta_0 = (\boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\Sigma}^0)$.
- Шаг E:

$$\gamma(z_{nj}) = \frac{\pi_j N(\mathbf{x_n}|\boldsymbol{\mu}_j, \boldsymbol{\Sigma}_j)}{\sum_{k=1}^{K} \pi_k N(\mathbf{x_n}|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)}.$$

- Шаг M:

$$\boldsymbol{\mu}_j = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \gamma(z_{nj})\mathbf{x}_n}{\sum\limits_{n=1}^{N} \gamma(z_{nj})}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_j = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} \gamma(z_{nj})(\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu}_j)(\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\mu}_j)^T}{\sum\limits_{n=1}^{N} \gamma(z_{nj})};$$

$$\pi_j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \gamma(z_{nj}).$$

- *Ali H. Sayed.* Fundamentals of Adaptive Filtering. Wiley - IEEE Press, 2003.
- *Fredrik Gustafsson.* Adaptive Filtering and Change Detection. Wiley, 2000.
- *Simon Haykin.* 1996. Adaptive Filter Theory (3rd Ed.). Prentice-Hall, Inc.

- *Philipos C. Loizou*. 2013. Speech Enhancement: Theory and Practice (2nd ed.). CRC Press, Inc.
- *Jacob Benesty, M. Mohan Sondhi, and Yiteng (Arden) Huang*. 2007. Springer Handbook of Speech Processing. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- *Thomas Quatieri*. 2001. Discrete-Time Speech Signal Processing: Principles and Practice (First ed.). Prentice Hall Press.

- *Alvares et al.* Digital Signal Processing with Kernel Methods. Wiley-IEEE Press, 2018.
- *Sergios Theodoridis.* 2015. Machine Learning: A Bayesian and Optimization Perspective (1st ed.). Academic Press, Inc.
- *Aapo Hyvärinen.* Unsupervised Machine Learning, Lecture notes. 2015.
- *Saeed V. Vaseghi.* 2006. Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction. John Wiley & Sons, Inc.
- *Diniz et al.* Signal processing theory and machine learning. Academic Press library in signal processing, volume 1. Academic Press, 2014.