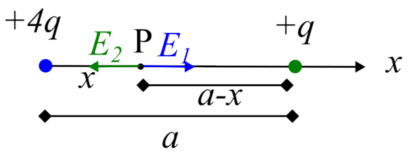
Løsning øving 8

Oppgave 1



Figuren viser et punkt P med koordinat x (med origo ved ladningen $+4Q$), hvor de elektriske feltene fra de to ladningene er like store, slik at nettofeltet blir null. Ut i fra Coulombs lov som gir oss elektrisk felt fra en punktladning, gjelder det altså i dette punktet at

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ \frac{k \cdot 4Q}{x^2} &= \frac{k \cdot Q}{(a-x)^2} \\ \frac{4}{x^2} &= \frac{1}{(a-x)^2} \\ 4(a-x)^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Her kan vi enten gange ut kvadratet, eller vi kan ta kvadratrot på begge sider - vi må da huske på $\pm$-tegn på én av sidene:

$$\begin{aligned} \sqrt{4(a-x)^2} &= \pm\sqrt{x^2} \\ 2(a-x) &= \pm x \\ 2a - 2x &= \pm x \\ 2x \pm x &= 2a \\ x(2 \pm 1) &= 2a \\ x &= \frac{2a}{2 \pm 1} \end{aligned}$$

De to løsningene blir

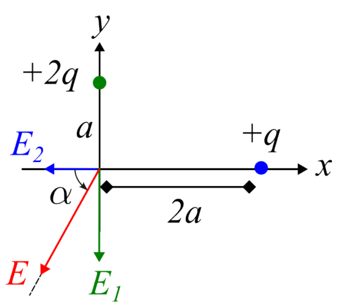
$$x = \frac{2a}{2+1} = \frac{2}{3}a \vee x = \frac{2a}{2-1} = 2a$$

Etter kun én av disse er i samsvar med at punktet ligger mellom de to ladningene, blir den eneste akseptable løsningen

$$x = \underline{\underline{\frac{2}{3}a}}$$

Oppgave 2

Figuren under viser bidragene til det elektriske feltet i origo fra de to ladningene:



Det totale feltet i origo blir lik vektorsummen av bidragene fra de to ladningene. Ladningen $+2q$ bidrar kun i y-retning, mens $+q$ bidrar kun i x-retning. Størrelsen på bidragene er gitt ved Coulombs lov:

$$E_1 = E_{1y} = k \cdot \frac{2q}{a^2}$$
$$E_2 = E_{2x} = k \cdot \frac{q}{(2a)^2} = k \cdot \frac{q}{4a^2}$$

a) Verdien av verdien av det elektriske feltet $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$:

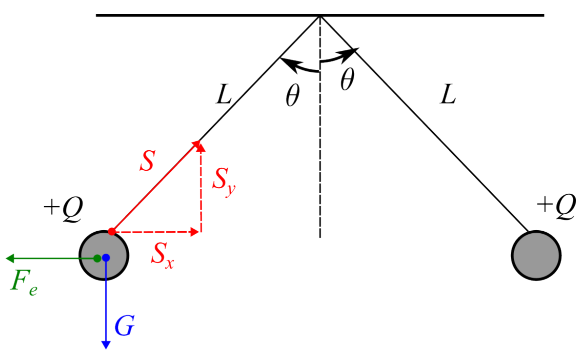
$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_{1y}^2 + E_{2x}^2} \\ &= \sqrt{\left(k \cdot \frac{2q}{a^2}\right)^2 + \left(k, \frac{q}{4a^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{4k^2 \cdot \frac{q^2}{a^4} + k^2 \cdot \frac{q^2}{16a^4}} \\ &= \sqrt{\frac{65}{16} k^2 \cdot \frac{q^2}{a^4}} \\ &= \sqrt{\frac{65}{16}} \cdot \frac{kq}{a^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{65}}{4} \cdot \frac{kq}{a^2}}} \end{aligned}$$

b) Retningen er bestemt av vinkelen α på figuren (dvs. vinkel under negativ x-akse):

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{E_{1y}}{E_{2x}} = \frac{k \cdot \frac{2q}{a^2}}{k \cdot \frac{q}{4a^2}} = 8 \\ \alpha &= \arctan 8 \\ &= 82,9^\circ \\ &\approx \underline{\underline{83^\circ}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Vi tegner inn kreftene som virker på de to ladde kulene som henger i tynne tråder:



På begge kulene virker snordraget S (langs snora); en elektrisk, gjensidig frastøtende kraft F_e, samt tyngden mg.

Ettersom kulene henger i ro, er summe nav kreftene i både x- og y-retning lik null:

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \Rightarrow S_y = mg \\ \Sigma F_x &= 0 \Rightarrow F_e = S_x\end{aligned}$$

Ut i fra figuren er

$$\begin{aligned}S_x &= S_y \tan\theta \\ &= mg\tan\theta \text{ (fordi } S_y = mg),\end{aligned}$$

som kombinert med det overstående gir:

$$F_e = S_x = mg\tan\theta$$

Coulombs lov gir den elektrostatiske kraften mellom kulene, som begge har ladning Q:

$$F_e = \frac{kQ^2}{r^2},$$

der k er Coulombs konstant og r er avstanden mellom kulene. Alt dette gir:

$$\begin{aligned}F_e &= mg\tan\theta \\ \frac{kQ^2}{r^2} &= mg\tan\theta \\ Q^2 &= \frac{mg\tan\theta r^2}{k} \\ Q &= \sqrt{\frac{mg\tan\theta r^2}{k}}\end{aligned}$$

Når lengden av snorene er $L = 1,2\text{m}$ og vinkelen mellom hver snor og vertikalen er $\theta = 25\,^{\circ}$, er avstanden mellom kulene lik

$$r = 2L\sin\theta,$$

som gir følgende ladning på kulene:

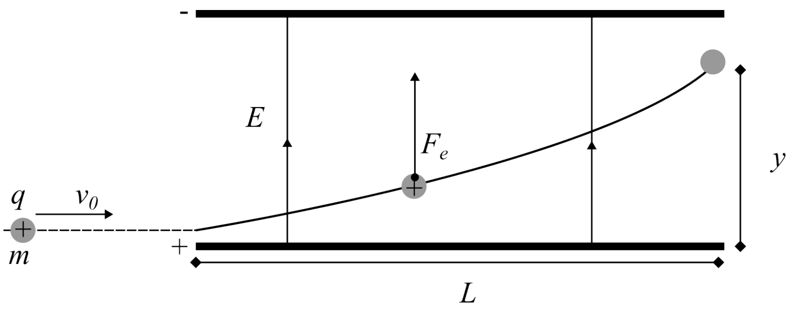
$$\begin{aligned}Q &= \sqrt{\frac{mg\tan\theta\,(2L\sin\theta)^2}{k}} \\ &= \sqrt{\frac{15\cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot\tan 25\,^{\circ}\,(2\cdot 1,2\,\text{m}\cdot\sin 25\,^{\circ})^2}{8,99\cdot 10^9\,\text{Nm}^2/\text{C}^2}} \\ &= \underline{\underline{2,8\cdot 10^{-6}\,\text{C}}}\end{aligned}$$

b) Det elektriske potensialet V i opphengingspunktet får bidrag fra to like ladninger Q i lik avstand L,

$$V = \underline{\underline{2\cdot\frac{kQ}{L}}}$$

Oppgave 4

Figuren under viser kreftene som virker på blekkdråpen mens den beveger seg i det homogene elektriske feltet mellom platene (tyngden kan neglisjeres):



Den elektriske kraften på dråpen via det elektriske feltet virker i vertikalretning (y-retningen på figuren), og er gitt ved

$$F_y = F_e = qE,$$

der E er den elektriske feltstyrken. Newtons 2. lov i y-retning gir

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= ma_y \\ qE &= ma_y \Rightarrow a_y = \frac{qE}{m} \end{aligned}$$

Ser at akselerasjonen i y-retning blir konstant, fordi E-feltet er homogent.

I x-retningen er det ingen krefter som virker, slik at farten der er konstant. Vi skal få til en avbøyning slik at $y = 0,30\,\text{mm} = 0,30 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$ idet dråpen har beveget seg $x = L = 2,0\,\text{cm} = 0,020\,\text{m}$ i x-retning. Tiden vi har "til rådighet" finner vi fra

$$x = v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{0,020\,\text{m}}{20\,\text{m/s}} = \underline{0,0010\,\text{s}}$$

Avbøyningen i y-retning, som altså skjer med konstant akselerasjon, er gitt ved

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}a_y t^2 \text{ (fordi } v_{0y} = 0) \\ y &= \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \text{ (setter inn } a_y) \end{aligned}$$

Finner ladningen som blekkdråpen må ha:

$$\begin{aligned} \frac{qE}{m} &= \frac{2y}{t^2} \\ q &= \frac{m}{E} \cdot \frac{2y}{t^2} \\ q &= \frac{1,4 \cdot 10^{-8}\,\text{kg}}{8,0 \cdot 10^4\,\text{N/C}} \left(\frac{2 \cdot 0,30 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{(0,0010\,\text{s})^2} \right) \\ &= \underline{\underline{1,1 \cdot 10^{-10}\,\text{C}}} \end{aligned}$$