

Løsning øving 10

Oppgave 1

Kobber og aluminium har resistivitet på hhv. $\rho_{\text{Cu}} = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ og $\rho_{\text{Al}} = 2,65 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Skal bestemme forholdet mellom diametrene d_1 og d_2 av kobber- og aluminiumslederen for at kablene skal ha samme resistans per lengdeenhet.

Resistansen i en leder med lengde l og tverrsnitt A (og diameter d) er gitt ved

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow \frac{R}{l} = \frac{\rho}{A} = \frac{\rho}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Betingelsen om identisk resistans per lengdeenhet for de to lederne gir altså likningen

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{\text{Cu}}}{\pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2} &= \frac{\rho_{\text{Al}}}{\pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} \\ \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 &= \frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Cu}}} \\ \frac{d_2}{d_1} &= \sqrt{\frac{\rho_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Cu}}}} \\ &= \sqrt{\frac{2,65 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}}{1,68 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}}} \\ &= \underline{\underline{1,26}} \end{aligned}$$

Aluminiumslederen må altså ha 26 % større diameter enn kobberlederen.

Oppgave 2

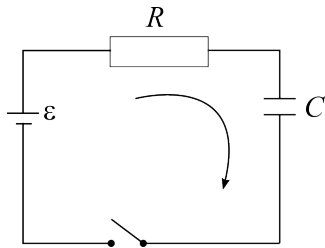
Resistansen av en strømleder med lengde L , tverrsnitt A og resistivitet ρ er gitt ved

$$R = \frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R}{L} = \rho \cdot \frac{1}{A}.$$

Dvs. resistans per lengde $\frac{R}{L}$ er omvendt proporsjonal med ledertverrsnittet. Fra et tverrsnitt $A_1 = 16 \text{ mm}^2$ til $A_2 = 4,0 \text{ mm}^2$ reduseres arealet med en faktor $\frac{1}{4}$, dvs. resistansen per lengde blir 4 ganger så stor.

Oppgave 3

a) Gitt kretsen under:



Tidskonstanten τ for en slik ren RC -krets er gitt ved

$$\begin{aligned}\tau &= RC \\ &= 1,0 \cdot 10^6 \Omega \cdot 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ F} \\ &= \underline{\underline{5,0 \text{ s}}}\end{aligned}$$

Tidskonstanten er et mål på hvor raskt kondensatoren opp- og utlades gjennom motstanden.

b) Strømmen gjennom motstanden som funksjon av tid er gitt ved

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

slik at strømmen etter 10 s er lik

$$\begin{aligned}I(10) &= \frac{30 \text{ V}}{1,0 \cdot 10^6 \Omega} \cdot e^{-\frac{10 \text{ s}}{5,0 \text{ s}}} \\ &= 4,06 \cdot 10^{-6} \text{ A} \\ &\approx \underline{\underline{4,1 \mu\text{A}}}\end{aligned}$$

c) Vi skal bestemme tiden det tar før kondensatoren er ladet opp til 80 % av full kapasitet, dvs. av maksimal ladning som den kan holde. Ladningen på kondensatoren som funksjon av tid er gitt ved

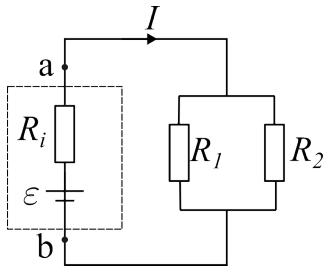
$$q(t) = Q \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

der $Q = C\varepsilon$ er den maksimale ladningen. Vi skal altså løse likningen

$$\begin{aligned}q(t) &= 0,80Q \\ Q \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) &= 0,80Q \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0,80 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0,20 \\ -\frac{t}{\tau} \ln e &= \ln 0,20 && (\text{Tar ln på begge sider}) \\ t &= -\tau \ln 0,20 \\ &= -5,0 \text{ s} \cdot \ln 0,20 \\ &= 8,05 \text{ s} \\ &\approx \underline{\underline{8,1 \text{ s}}}\end{aligned}$$

Oppgave 4

Gitt kretsen under:



a) Ekvivalent resistans R for kretsen finnes ved å først finne resistansen i parallellkoblinga:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_p} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \\ R_p &= \frac{1}{\frac{1}{220\,\Omega} + \frac{1}{330\,\Omega}} \\ &= 132\,\Omega \\ &\approx \underline{\underline{0,13\,\text{k}\Omega}}\end{aligned}$$

Resistansen R for hele kretsen blir da

$$\begin{aligned}R &= R_i + R_p \\ &= 1,0\,\Omega + 132\,\Omega \\ &= 133\,\Omega \\ &\approx \underline{\underline{1,3 \cdot 10^2\,\Omega}}\end{aligned}$$

b) Strømmen I i kretsen er gitt fra Ohms lov:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= IR \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} \\ I &= \frac{9,0\,\text{V}}{133\,\Omega} \\ &= 0,0677\,\text{A} \\ &\approx \underline{\underline{68\,\text{mA}}}\end{aligned}$$

c) Polspenningen mellom a og b (dvs. spenningen som batteriet er i stand til å levere til den ytre kretsen, etter at noe går “tapt” over den indre motstanden), blir fra Kirchoffs 2. lov gitt ved

$$\begin{aligned}\varepsilon - R_i I &= 9,0\,\text{V} - 1,0\,\Omega \cdot 0,0677\,\text{A} \\ &= 8,93\,\text{V} \\ &\approx \underline{\underline{8,9\,\text{V}}}\end{aligned}$$

d) Elektrisk effekt produsert i kretsen: vi kan finne denne på minst to måter:

Effekt levert av batteriet til kretsen (indre og ytre motstand)

$$\begin{aligned}P &= \varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{R} \\&= 9,0 \text{ V} \cdot 0,0677 \text{ A} \\&= \frac{(9,0 \text{ V})^2}{133 \Omega} \\&= 0,609 \text{ W} \\&\approx \underline{\underline{0,61 \text{ W}}}\end{aligned}$$

Effekt utviklet i motstandene (indre og ytre):

$$\begin{aligned}P &= R_i I^2 + R_p I^2 \\&= (R_i + R_y) I^2 \\&= (1,0 \Omega + 132 \Omega) \cdot (0,0677 \text{ A})^2 \\&\approx \underline{\underline{0,61 \text{ W}}}\end{aligned}$$