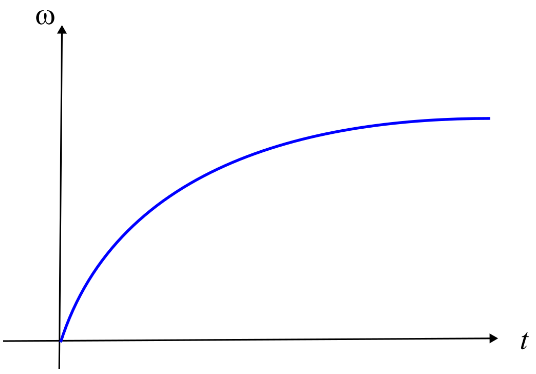
Løsning øving 6

Oppgave 1

a) Vi har gitt følgende graf for vinkelfarten $\omega(t)$:

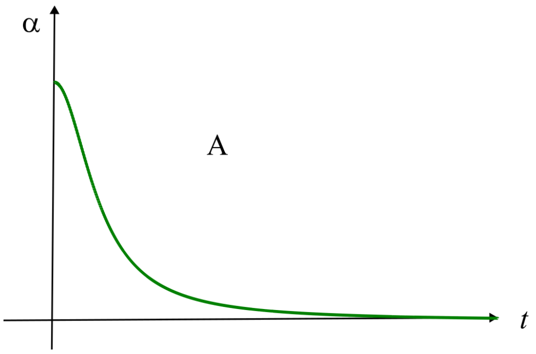


Sammenhengen mellom ω og vinkelakselerasjonen α er gitt ved

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

dvs. α er stigningstallet til grafen for $\omega(t)$.

Vi skal altså finne en graf som er positiv for $t = 0$ (ettersom $\omega(t)$ stiger i starten), og som etterhvert avtar og går mot 0, i det grafen for ω flater ut. Grafen som har disse egenskapene er graf A:



b) Dersom n angir antall omdreininger for akselen, blir den tilsvarende roterte vinkelen θ lik

$$\theta = n \cdot 2\pi \Rightarrow n = \underline{\underline{\frac{\theta}{2\pi}}}$$

c) Rotert vinkel θ er gitt fra sammenhengen

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \int \omega(t)\, dt.$$

Her er vinkelfarten gitt ved

$$\omega(t) = (10 \text{ rad/s})(1 - e^{-\left(\frac{t}{0{,}50 \text{ s}}\right)^2}),$$

slik at rotert vinkel i tidsrommet fra $t_1 = 0$ til $t_2 = 10\,\mathrm{s}$ blir gitt ved

$$\begin{aligned}\theta &= \int_{t_1}^{t_2} (10 \text{ rad/s})(1 - e^{-(\frac{t}{0{,}50 \text{ s}})^2})dt \\ &= (10 \text{ rad/s}) \int_{t_1}^{t_2} (1 - e^{-(\frac{t}{0{,}50 \text{ s}})^2})dt.\end{aligned}$$

Integralet kan beregnes numerisk i Python:

```
#Importerer nødvendige pakker
import numpy as np
import math
import scipy.integrate as integrate

#Definerer funksjonen omega(t) som skal integreres
def omega(t):
    omega=10*(1-math.exp(-(t/0.5)**2))
    return omega

#Beregner integralet av funksjonen fra t1 til t2, som blir lik
#rotert vinkel i radianer
t1=0
t2=10
vinkel,usikkerhet=integrate.quad(omega,t1,t2)
#n = antall rotasjoner= rotert vinkel i radianer/2 pi
n=vinkel/(2*math.pi)
print(n)
```

Dette gir resultatet

$$\begin{aligned}n &= 15,2 \\ &\approx \underline{\underline{15}}\end{aligned}$$

d) Gitt at vinkelakselerasjonen $\alpha(t) = bt$, finner vi hhv. vinkelfart og rotert vinkel ved

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \int \alpha(t)\,dt \\ &= \int bt dt \\ &= \underline{b \cdot \frac{1}{2}t^2 + C_1}\end{aligned}$$

Med startbetingelsen $\omega(0) = 0$, blir

$$0 = b \cdot 0 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

og vinkelfarten blir

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \frac{1}{2}bt^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1,0\,\mathrm{rad/s^3}\right) \cdot t^2 \\ &= \underline{\underline{0,50\,\mathrm{rad/s^3} \cdot t^2}}\end{aligned}$$

Rotert vinkel θ finnes fra

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \int \omega(t)\,dt \\ &= \int \frac{1}{2}bt^2 dt \\ &= \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{3}t^3 + C_2 \\ &= \underline{\frac{1}{6}bt^3 + C_2}\end{aligned}$$

Startbetingelsen $\theta(0) = 0$ gir

$$0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0,$$

slik at rotert vinkel blir

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{1}{6}bt^3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1,0\,\mathrm{rad/s^3} \cdot t^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{6}\,\mathrm{rad/s^3} \cdot t^3}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Vinkelakselerasjonen når hjulet spinnes i gang fra $\omega_0 = 0$ til $\omega = 90\,\mathrm{rpm}$ i løpet av $\Delta t = 5,0\,\mathrm{s}$ blir

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \\ &= \frac{90\,\mathrm{rpm} - 0}{5,0\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{90 \cdot \frac{2\pi}{60}\,\mathrm{rad/s}}{5,0\,\mathrm{s}} \\ &= 1,88\,\mathrm{rad/s^2} \\ &\approx \underline{\underline{1,9\,\mathrm{rad/s^2}}}\end{aligned}$$

Her er det brukt at

$$1\,\mathrm{rpm} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{60\,\mathrm{s}} = \frac{2\pi}{60}\,\mathrm{rad/s}.$$

b) Gitt at svinghjulet gjennomgår følgende prosess:

1. Jevn økning fra 0 til 90 rpm i løpet av $5,0$ s

2. Konstant rotasjonshastighet i 60 s

3. Hjulet bremses jevnt til stillestående i løpet av $5,0$ s.

Vi skal bestemme antall omdreininger hjulet har rotert i denne perioden, dvs. vi skal bestemme rotert vinkel θ. La θ_1, θ_2 og θ_3 være rotert vinkel i hhv. fase 1, 2 og 3 opplistet over. Vi får:

Fase 1: Konstant vinkelaks. $\alpha_1 = 1,88\,\mathrm{rad/s^2}$ fra $\omega_0 = 0$ til $\omega_1 = 90\,\mathrm{rpm}$

Her kan vi bruke en bevegelseslikning for konstant vinkelakselersjon (fra formelarket):

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 = 2\alpha_1\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\alpha_1}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\left(90 \cdot \frac{2\pi}{60}\,\text{rad/s}\right)^2 - 0}{2 \cdot 1,88\,\text{rad/s}^2} \\ &= \underline{23,6\,\text{rad}}\end{aligned}$$

Fase 2: Konstant vinkelhastighet $\omega_2 = \omega_1 = 90\,\text{rpm}$ i tidsrom $\Delta t = 60\,\text{s}$

Rotert vinkel her blir (i analogi med $x = vt$)

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \omega_2 \Delta t \\ &= 90 \cdot \frac{2\pi}{60}\,\text{rad/s} \cdot 60\,\text{s} \\ &= \underline{180\pi\,\text{rad}}\end{aligned}$$

Fase 3: «Motsatt» av fase 1, dvs. konstant vinkelaks. $\alpha_3 = -\alpha_1 = -1,88\,\text{rad/s}^2$ fra $\omega_2 = 90\,\text{rpm}$ til $\omega_3 = 0$

Kan bruke samme bevegelseslikning som fase 1:

$$\omega_3^2 - \omega_2^2 = 2\alpha_3\theta_3 \Rightarrow \theta_3 = \frac{\omega_3^2 - \omega_2^2}{2\alpha_3}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{0 - \left(90 \cdot \frac{2\pi}{60}\,\text{rad/s}\right)^2}{2 \cdot (-1,88\,\text{rad/s}^2)} \\ &= \underline{23,6\,\text{rad}}\end{aligned}$$

Total rotert vinkel θ blir altså

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3,$$

og det totale antall omdreininger n som hjulet gjør blir da

$$\begin{aligned}n &= \frac{\theta}{2\pi} \\ &= \frac{2 \cdot 23,6\,\text{rad} + 180\pi\,\text{rad}}{2\pi} \\ &= 97,5 \\ &\approx \underline{\underline{98}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

Farten som sykkelen triller bortover underlaget med, tilsvarer farten v_{CM} til hjulets massesenter. Ettersom hjulet ruller uten å gli mot underlaget, er sammenhengen mellom v_{CM} og hjulets vinkelfart ω gitt ved

$$v_{\text{CM}} = \omega R,$$

der R er hjulets radius. Hjulet har diameter $D = 2R = 29\,\text{tommer}$, der $1\,\text{tomme} = 2{,}54\,\text{cm} = 0{,}0254\,\text{m}$. Vi finner at

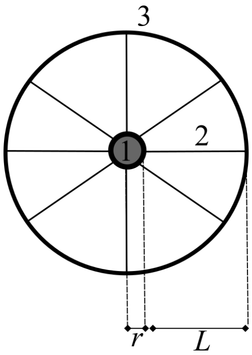
$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v_{\text{CM}}}{R} \\ &= \frac{v_{\text{CM}}}{\frac{D}{2}} \\ &= 2\frac{v_{\text{CM}}}{D} \\ &= 2 \cdot \frac{30\,\text{km/h}}{29 \cdot 0{,}0254\,\text{m}} \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{30}{3{,}6}\,\text{m/s}}{29 \cdot 0{,}0254\,\text{m}} \\ &= \underline{22{,}6\,\text{rad/s}}\end{aligned}$$

Antall omdreininger per minutt blir da

$$\begin{aligned}22{,}6\,\text{rad/s} \cdot \frac{60\,\text{s/min}}{2\pi\,\text{rad/omdreininger}} &= 215{,}8\,\text{omdreininger/min} \\ &\approx \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^2\,\text{omdreininger/min}}}\end{aligned}$$

Oppgave 4

Vi har gitt følgende modell for et sykkelhjul (uten dekk):



Vi bestemmer treghetsmomentene av de ulike delene for å finne hjulets totale treghetsmoment I om en akse gjennom hjulets sentrum.

1. Nav: Massiv sylinder med masse m_1 og radius r. Fra formelark:

$$\underline{I_1 = \frac{1}{2}m_1r^2}$$

2. Eiker: Tynn stang masse m_2 og lengde L. Ettersom disse roterer om en akse utenfor eiken, bruker vi Steiners sats til å finne treghetsmomentet I_2 for hver eike. Massesenteret til hver eike

ligger i avstand $d = \frac{L}{2} + r$ fra aksen:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \underbrace{\frac{1}{12} m_2 L^2}_{\text{om CM}} + m_2 d^2 \\
&= \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \left(\frac{L}{2} + r \right)^2 \\
&= m_2 \left(\frac{1}{12} L^2 + \left(\frac{L}{2} + r \right)^2 \right)
\end{aligned}
$$

3. Felg: Tynnvegget sylinder med masse m_3 og radius $r + L$:

$$I_3 = \underline{m_3 (r + L)^2}$$

Totalt treghetsmoment:

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + 8 I_2 + I_3 \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2} m_1 r^2 + 8 \cdot m_2 \left(\frac{1}{12} L^2 + \left(\frac{L}{2} + r \right)^2 \right) + m_3 (r + L)^2}}
\end{aligned}
$$