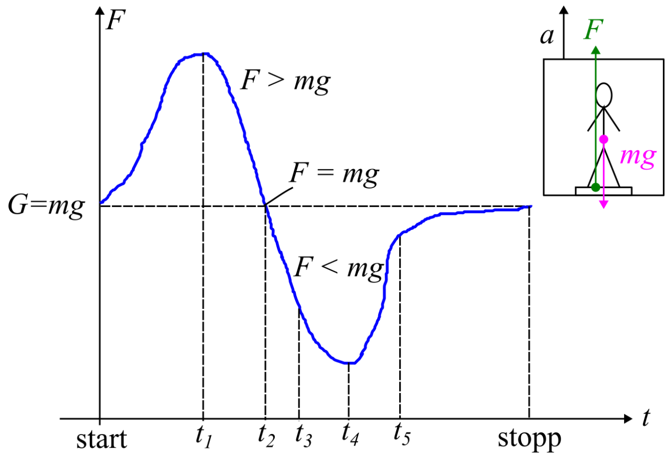
Løsning øving 3

Oppgave 1

De ulike fasene av heisturen er antydet i figuren under.



Ut i fra problemstillingen er det klart at vekta viser personens tyngde $G = mg$ i startsituasjonen.

Farten oppover øker så lenge akselerasjonen oppover er positiv. To vertikale krefter virker på personen inne i heisen: tyngden G og kraften F fra vekta[1]. Newtons 2. lov på personen gir at

$$F - mg = ma,$$

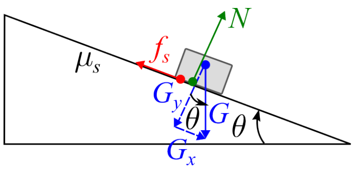
dvs. akselerasjonen er positiv og farten **øker** så lenge $F > mg$. Ut i fra figuren er $F = mg$ ved t_2, dvs. farten er maksimal ved t_2.

Oppgave 2

a) Så lenge klossen ligger i ro på skråplanet, virker det hvilefriksjon $f_s \leq \mu_s N$ på klossen, som hindrer den fra å gli nedover. Så lenge klossen ligger i ro, er $f_s = G_x = mg\sin\theta$. Den **maksimale** hvilefriksjonen - som oppnås idet skråplanvinkelen når sin kritiske verdi θ_0 - er gitt ved

$$f_{s,max} = \mu_s N,$$

der $N = G_y = mg\cos\theta$. Se figuren under.



Klossen i ro, $\theta < \theta_0$

Når vi måler den kritiske vinkelen θ_0 der klossen akkurat begynner å gli, får vi

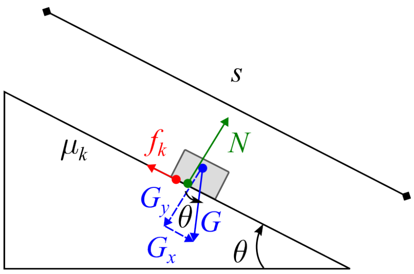
$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta_0 \qquad \text{(Maks. hvilefriksjon)}$$
$$f_s = mg\sin\theta_0 \qquad \text{(Newtons 1. lov)}$$

[1] Vekta viser motkrafta til F; krafta fra personen på vekta, som er like stor og motsatt rettet fra Newtons 3. lov

Kombinert gir dette

$$\begin{aligned}\mu_s mg\cos\theta_0 &= mg\sin\theta_0\\ \mu_s &= \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0}\\ &= \underline{\underline{\tan\theta_0}}\end{aligned}$$

b) Idet $\theta > \theta_0$ og skråplanet blir så bratt at klossen sklir, virker glidefriksjonen $f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$. Vi måler at klossen sklir en strekning s nedover skråplanet i løpet av en tid t. Se figuren under.



Klossen glir, $\theta > \theta_0$

Ettersom $f_k < G_x$, virker en nettokraft nedover, og akselerasjonen a nedover skråplanet blir gitt ved

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma\\ G_x - f_k &= ma\\ mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta &= ma\\ a &= \underline{g\left(\sin\theta - \mu_k\cos\theta\right)}\end{aligned}$$

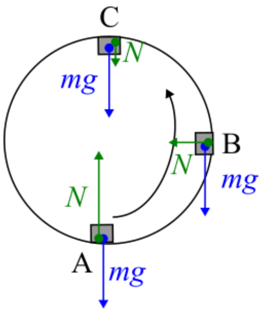
Vi måler at klossen sklir en strekning s i løpet av en tid t. Bevegelseslikningene for konstant akselerasjon gir da

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{2}at^2\\ s &= \frac{1}{2}\cdot g\left(\sin\theta - \mu_k\cos\theta\right)\cdot t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta - \mu_k\cos\theta &= \frac{2s}{gt^2}\\ \mu_k &= \frac{\sin\theta - \frac{2s}{gt^2}}{\cos\theta}\\ \mu_k &= \underline{\underline{\tan\theta - \frac{2s}{gt^2\cos\theta}}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Figuren under viser kreftene som virker på vogna i de ulike punktene i banen: normalkrafta N og vognas tyngde mg.



Ved sirkelbevegelse må det være en nettokraft $\sum F_\perp$ med retning inn mot sentrum av sirkelen med radius r, som besørger sentripetalakselerasjonen $a_\perp = v^2/r$:

$$\sum F_\perp = ma_\perp = m\frac{v^2}{r}.$$

Dersom banefarten varierer, vil det i være en tangentiell nettokraft $\sum F_\parallel = ma_\parallel$ som besørger en baneakselerasjon $a_\parallel$.

Vurderer de ulike påstandene:

A. I punkt A er normalkrafta på vogna like stor som vognas tyngde. **Feil**: Vogna har en sentripetalakselerasjon inn mot sentrum, slik at det må være en nettokraft inn mot sentrum. Dvs. $N > G$.

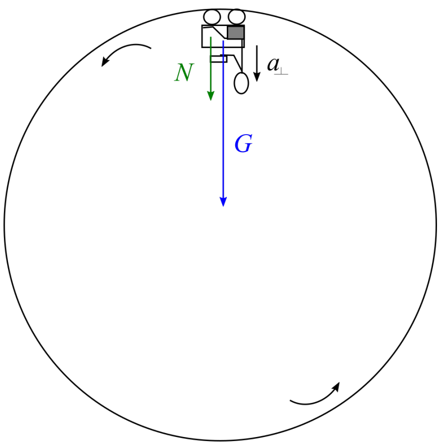
B. I punkt A er normalkrafta på vogna større enn vognas tyngde. **Riktig**: Se over.

C. I punkt B er sentripetalakselerasjonen til vogna lik 0. **Feil**: Så lenge farten $v > 0$, er sentripetalakselerasjonen $a_\perp = v^2/r$ større enn null.

D. I punkt B er den tangentielle akselerasjonen til vogna lik g. **Riktig**: den tangentielle kraftsummen her er $\sum F_\parallel = mg$, slik at $a_\parallel = g$.

E. I punkt C er sentripetalakselerasjonen til vogna lik g. **Feil**: Sentripetalakselerasjonen i C kan være hva som helst, avhengig av hvor stor farten er. Ettersom vogna er i kontakt med underlaget, er $N > 0$ og dermed er sentripetalakselerasjonen større enn g.

b) Skal finne forholdet mellom normalkraft N og personens tyngde i det høyeste punktet i en loop dersom sensorer måler sentripetalakselerasjonen i punktet til $a_\perp = 3g$. Figuren under viser kreftene på personen i det høyeste punktet:



Newtons 2. lov i radiell retning gir

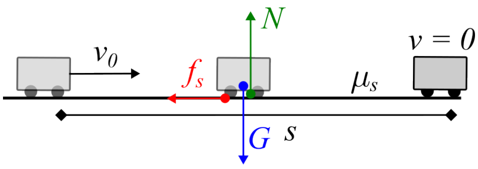
$$\begin{aligned}\sum F &= ma_\perp \\ N + mg &= ma_\perp \\ N &= ma_\perp - mg \\ \frac{N}{mg} &= \frac{a_\perp}{g} - 1 \\ &= \frac{3g}{g} - 1 \\ &= \underline{2},\end{aligned}$$

dvs.

$$N = \underline{\underline{2G}}$$

Oppgave 4

a) Figuren under viser kreftene som virker på bilen under oppbremsingen på horisontalt underlag: tyngden $G = mg$, normalkraften N og (maksimal) statisk friksjon f_s.



Bilens bremselengde s kan bestemmes fra energibevaring: bilens kinetiske energi før oppbremsingen går over til friksjonsarbeidet som friksjonskraften f_s gjør over bremsestrekningen s:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_0^2 &= f_s \cdot s \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \mu_s mg \cdot s && \text{(Vi har maks. hvilefriksjon } f_s = \mu_s N = \mu_s mg\text{)} \\ s &= \frac{v_0^2}{2g\mu_s} \\ &= \frac{\left(\frac{80}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}80} \\ &= 31{,}46\,\mathrm{m} \\ &\approx \underline{\underline{31\,\mathrm{m}}}\end{aligned}$$

b) Vi skal bestemme bilens sluttfart v dersom den har en startfart $v_0 = 90\,\mathrm{km/h}$ bremser med samme friksjonstall over samme strekning som i a). Vi kan bruke bevegelseslikningen

$$v^2 - v_0^2 = 2as,$$

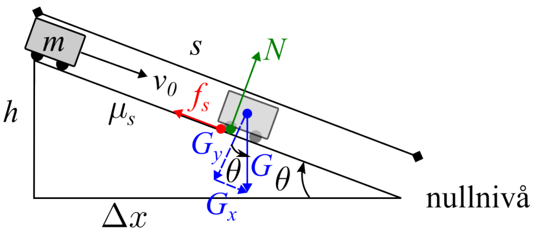
der akselerasjonen a er bestemt fra Newtons 2. lov (positiv retning langs opprinnelig fartsretning);

$$\begin{aligned}\sum F &= ma \\ -f_s &= ma \\ -\mu_s mg &= ma \\ a &= \underline{-\mu_s g}\end{aligned}$$

Dette gir at

$$
\begin{aligned}
v^2 &= 2as + v_0^2 \\
&= -2\mu_s gs + v_0^2 \\
v &= \sqrt{v_0^2 - 2\mu_s gs} \\
&= \sqrt{\left(\frac{90}{3,6}\,\mathrm{m/s}\right)^2 - 2 \cdot 0,80 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 31,5\,\mathrm{m}} \\
&= 11,4\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{41\,\mathrm{km/h}}}
\end{aligned}
$$

c) Figuren under viser kreftene som virker på bilen under oppbremsingen i nedoverbakken: tyngden mg, normalkraften N og (maksimal) statisk friksjon f_s. Et koordinatsystem er valgt slik at x-retningen tilsvarer parallelt med skråplanet, og y-retningen er normalt på.



Som figuren viser er $N = G_y = mg\cos\theta$.

Ut i fra definisjonen av stigningstall/-prosent, er sammenhengen mellom stigningsprosent p og vinkelen θ gitt ved

$$
p = \frac{h}{\Delta x} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} p
$$

Energibevaring: hvis vi velger nullnivå for potensiell energi i punktet der bilen stopper, har bilen i utgangspunktet kinetisk og potensiell energi. Alt dette går over til friksjonsarbeidet som friksjonskraften f_s utfører over bremsestrekningen s:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= f_s \cdot s \\
\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \mu_s mg\cos\theta \cdot s && \text{(Her er } f_s = \mu_s N) \\
\frac{1}{2}mv_0^2 + mg \cdot s\sin\theta &= \mu_s mg\cos\theta \cdot s && \text{(Fra figuren er } h = s\sin\theta) \\
\frac{1}{2}v_0^2 + g \cdot s\sin\theta &= \mu_s g\cos\theta \cdot s \\
s \cdot g\left(\mu_s\cos\theta - \sin\theta\right) &= \frac{1}{2}v_0^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{v_0^2}{2g\left(\mu_s\cos\theta - \sin\theta\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{80}{3,6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}\left(0,80 \cdot \cos\left(\tan^{-1} 0,15\right) - \sin\left(\tan^{-1} 0,15\right)\right)} \\
&= 39,2\,\mathrm{m} \\
&\approx \underline{\underline{39\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}
$$