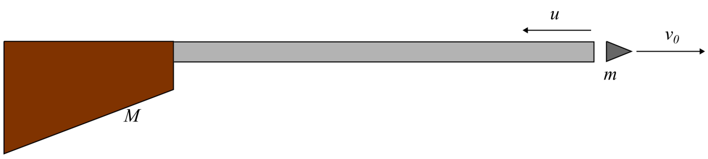
Løsning øving 5

Oppgave 1

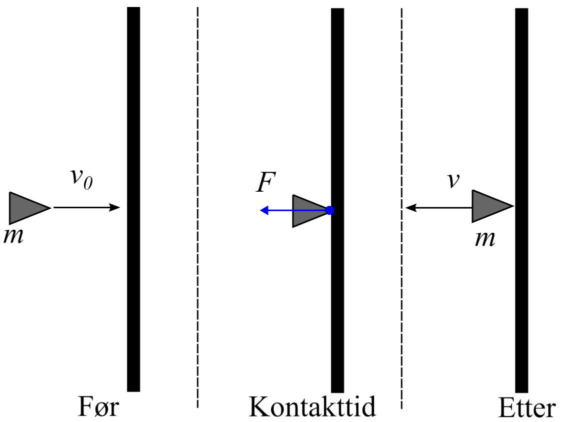
a) La u være rekylfarten til geværet etter at kula har forlatt løpet. Se figuren under.



Bevaring av bevegelsesmengde («eksplosjonsprosess») gir:

$$\sum_{\text{før}} p = \sum_{\text{etter}} p$$
$$0 = mv_0 + Mu$$
$$u = -\frac{m}{M} v_0$$
$$= -\frac{10 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}}{2,0\,\text{kg}} \cdot 700\,\text{m/s}$$
$$= \underline{\underline{3,5\,\text{m/s}}}$$

b) Figuren under viser kula som treffer veggen med fart v_0 og spretter tilbake med uendret fart v. Under kontakttiden τ virker det en konstant kraft F fra veggen på kula.



Impulsloven med $\sum F = F$ (vi kan trygt neglisjere tyngdekraften her) og $\Delta t = \tau$ gir:

$$\sum F \cdot \Delta t = \Delta p$$
$$F \cdot \tau = mv - mv_0$$

Dersom vi velger positiv retning langs sluttfarten, er $v_0 = -v$, og vi får

$$F \cdot \tau = mv - m(-v) = 2mv$$
$$F = \frac{2mv}{\tau}$$
$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 700\,\text{m/s}}{10 \cdot 10^{-3}\,\text{s}}$$
$$= 1,4 \cdot 10^{3}\,\text{N}$$
$$= \underline{\underline{1,4\,\text{kN}}}$$

c) Med den mer realistiske modellen for krafta fra veggen på kula, $F(t) = F_{\text{max}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$, gir impulsloven at (endringen i bevegelsesmengde Δp er akkurat det samme som i forrige oppgave)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt &= \Delta p \\ \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{max}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} dt &= 2mv \\ F_{\text{max}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} dt &= 2mv\end{aligned}$$

Bruker det oppgitte standardintegralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

med $x = t$ og $a = \frac{1}{\tau^2}$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} dt &= \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{\tau^2}}} \\ &= \underline{\tau\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

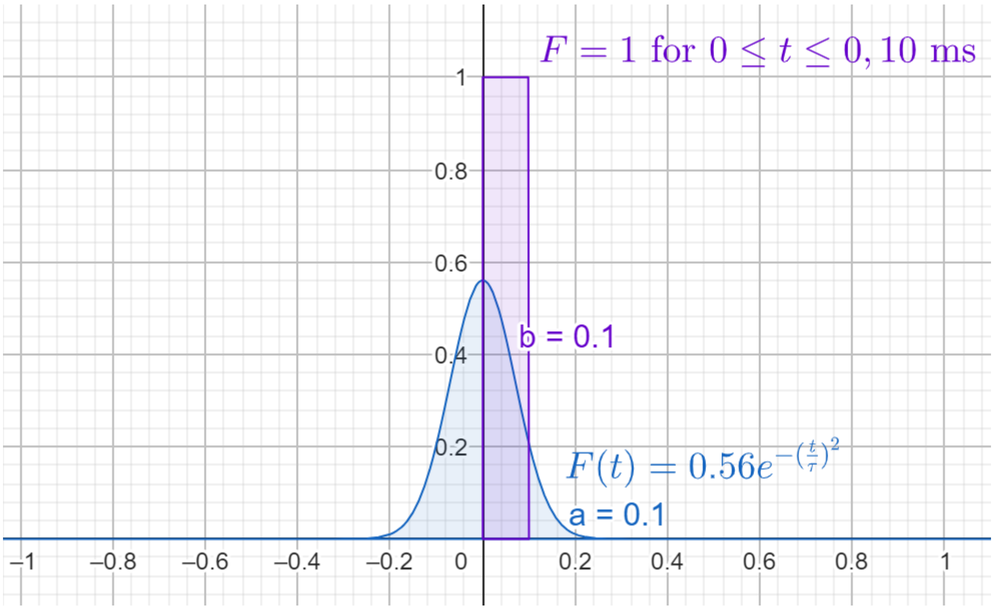
Det gir:

$$\begin{aligned}F_{\text{max}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} dt &= 2mv \\ F_{\text{max}} \cdot \tau\sqrt{\pi} &= 2mv \\ F_{\text{max}} &= \underline{\frac{2mv}{\tau\sqrt{\pi}}}\end{aligned}$$

Her blir

$$\begin{aligned}F_{\text{max}} &= \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \cdot 700\,\text{m/s}}{10 \cdot 10^{-3}\,\text{s} \cdot \sqrt{\pi}} \\ &= 790\,\text{N} \\ &\approx \underline{\underline{0,79\,\text{kN}}}\end{aligned}$$

Kommentar: dersom det virker ulogisk at F_{max} blir mindre enn verdien på den konstante krafta med samme «varighet» τ (nærmere bestemt: F_{max} er en faktor $\frac{790\,\text{N}}{1400\,\text{N}} \approx 0,56$ mindre), skyldes dette at parameteren τ for $F(t) = F_{\text{max}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ **ikke** direkte tilsvarer «kontakttiden» mellom legemene - jf. grafen under.



Størrelsene a og b på figuren angir arealet under de respektive grafene (som blir det samme); dersom man setter $F = 1$, blir $F(t) = 0,56e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$, ut i fra størrelsesforholdet mellom den konstante krafta F og maksimalverdien F_{max}, og begge integralene får verdi 0,1.

I det oppstilte scenariet i oppgaven, skal kula få samme **endring i bevegelsesmengde** i de to tilfellene: Den bytter fartsretning, uten at farten endrer verdi. Fra impulsloven betyr dette at integralet

$$\Delta p = \int_{\text{"varighet"}} F(t)\, dt$$

må ha samme verdi for $F =$ konstant og $F(t) = F_{\text{max}} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ Som grafen viser, gjør en verdi for parameteren $\tau = 0,10\,\text{ms}$ at den variable krafta får en «kontakttid» tilnærmet lik $0,40\,\text{ms}$ - altså 4 ganger **lengre** enn kontakttiden på $0,10\,\text{ms}$ for den konstante kraften.

Fordi $F(t)$ har en lengre effektiv varighet, blir maksimalverdien **mindre** enn den konstante kraften, når Δp skal være den samme. Det er dette f.eks. boksere utnytter når de tar i mot et slag: ved å gjøre kontakttiden lengre (f.eks. ved å flytte seg bakover), blir krafta i slaget mindre.

Oppgave 2

En bil med masse $m_1 = m$ og fart v treffer en annen bil med masse $m_2 = 2m$ som i utgangspunktet er i ro. Etter støtet blir bilene hengende sammen og beveger seg som ett legeme. Vi skal bestemme hvor stor prosentandel av den opprinnelige kinetiske energien som går tapt i kollisjonen.

Bevegelsesmengden er bevart i kollisjonen, og dette gir oss sluttfarten u til felleslegemet etter støtet:

$$\sum_{f\o r} p = \sum_{etter} p$$

$$m_1 v = (m_1 + m_2)\, u$$

$$u = \underline{\frac{m_1}{m_1 + m_2} v}$$

Kinetisk energi før støtet:

$$K_{f\phi r} = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

Kinetisk energi etter støtet:

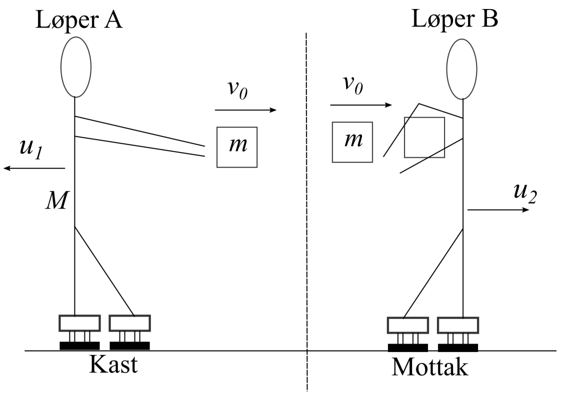
$$K_{etter} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) u^2$$

Prosentvis andel som har gått tapt i kollisjonen

$$\begin{aligned}
\frac{K_{f\phi r} - K_{etter}}{K_{f\phi r}} &= \frac{\frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) u^2}{\frac{1}{2} m_1 v^2} \\
&= \frac{m_1 v^2 - \left(m_1 + m_2\right) u^2}{m_1 v^2} && \text{(Forkorter } \tfrac{1}{2}\text{)} \\
&= \frac{m_1 v^2 - \left(m_1 + m_2\right) \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v^2}{m_1 v^2} && \text{(Setter inn for } u\text{)} \\
&= \frac{m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}}{m_1} && \text{(Forkorter } v^2\text{)} \\
&= 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} && \text{(Forkorter og forenkler)} \\
&= 1 - \frac{m}{m + 2m} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3} \\
&\approx \underline{\underline{67\,\%}} \frac{m}{M + m} v_0
\end{aligned}$$

Oppgave 3

Figuren under viser de to separate prosessene: den ene løperen kaster kassa fra seg, og den andre tar i mot.



a) Farten u_1 til løper A (som er i ro til å begynne med) etter at pakka er kastet til løper B:

$$\begin{aligned}
\sum_{f\phi r} p &= \sum_{etter} p \\
0 &= M u_1 + m v_0 \\
u_1 &= \underline{\underline{-\frac{m}{M} v_0}}
\end{aligned}$$

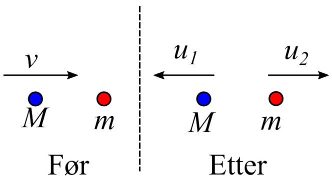
Minustegnet indikerer at løperen går motsatt vei av kassa.

b) Farten til løper B etter å ha mottatt pakka som har startfart v_0 (dette blir et fullstendig uelastisk støt da personen holder fast i pakken):

$$\begin{aligned}\sum_{f\phi r} p &= \sum_{etter} p \\ mv_0 &= (M+m)\,u_2 \\ u_2 &= \underline{\underline{\frac{m}{M+m}v_0}}\end{aligned}$$

Oppgave 4

Et proton med masse $M = 1u$ og fart $v = 1{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$ kolliderer elastisk med et positron med masse $m = \frac{1}{2000}u$ som i utgangspunktet er i ro. Vi skal bestemme protonets fart u_1 og positronets fart u_2 etter støtet. Se figuren under (vi vet i utgangspunktet ingenting om hvorvidt protonet «spretter tilbake» eller hva som skjer - så figuren er bare en illustrasjon av hva som **kan** skje).



Bevaring av bevegelsesmengde gir:

$$\begin{aligned}Mv &= Mu_1 + mu_2 \\ v &= u_1 + \frac{m}{M}u_2 \qquad (1)\end{aligned}$$

Ettersom støtet er elastisk, er kinetisk energi bevart:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Mv^2 &= \frac{1}{2}Mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 \\ v^2 &= u_1^2 + \frac{m}{M}u_2^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

Fra (1)

$$u_1 = v - \frac{m}{M}u_2,$$

som innsatt i (2) gir

$$\begin{aligned}v^2 &= \left(v - \frac{m}{M}u_2\right)^2 + \frac{m}{M}u_2^2 \\ v^2 &= v^2 - 2\frac{m}{M}vu_2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 u_2^2 + \frac{m}{M}u_2^2 \\ 0 &= -2\frac{m}{M}vu_2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 u_2^2 + \frac{m}{M}u_2^2\end{aligned}$$

Faktoriserer høyresiden:

$$u_2\left(-2\frac{m}{M}v + \left(\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M}\right)u_2\right) = 0$$

Denne har løsningene

$$
\begin{aligned}
u_2 &= 0 \vee -2\frac{m}{M}v + \left(\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M}\right)u_2 = 0 \\
u_2 &= 0 \vee u_2 = \frac{2\frac{m}{M}v}{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M}} \\
u_2 &= 0 \vee u_2 = \frac{2v}{\frac{m}{M} + 1}
\end{aligned}
$$

De tilsvarende løsningene for protonets fart u_1 blir da:

$u_2 = 0$:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v - \frac{m}{M}u_2 \\
&= \underline{v}
\end{aligned}
$$

$u_2 = \frac{2v}{\frac{m}{M}+1}$:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v - \frac{m}{M}u_2 \\
&= v - \frac{m}{M} \cdot \left(\frac{2v}{\frac{m}{M} + 1}\right) \\
&= v - \frac{2\frac{m}{M}}{\frac{m}{M} + 1}v \\
&= \underline{\left(1 - \frac{2\frac{m}{M}}{\frac{m}{M} + 1}\right) \cdot v}
\end{aligned}
$$

Løsningene $u_1 = v$ og $u_2 = 0$ kan ikke være en «akseptabel» løsning, ettersom dette betyr at protonet går «rett gjennom» positronet, som blir liggende i ro også etterpå.

Den akseptable løsningen er altså

$$
\underline{u_1 = \left(1 - \frac{2\frac{m}{M}}{\frac{m}{M} + 1}\right) \cdot v \wedge u_2 = \frac{2v}{\frac{m}{M} + 1}}.
$$

Etttersom $\frac{m}{M} = \frac{1}{2000}$, blir tallverdiene

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \left(1 - \frac{2\frac{m}{M}}{\frac{m}{M} + 1}\right) \cdot v \\
&= \left(1 - \frac{2 \cdot \frac{1}{2000}}{\frac{1}{2000} + 1}\right) \cdot v \\
&= 0,999v \\
&\approx v \\
&\approx \underline{1,0 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \frac{2v}{\frac{1}{2000} + 1} \\
&\approx 2v \\
&= \underline{2,0 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}}
\end{aligned}
$$

Etter kollisjonen er altså protonets fart nesten uendret; $u_1 \approx v$. Positronet, som er mye lettere enn protonet, får et kraftig «klink» og farten $u_2 \approx 2v$.