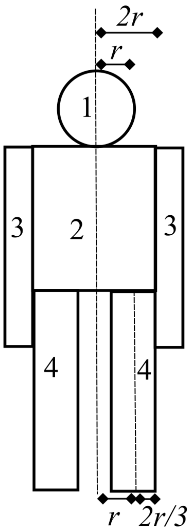
Løsning øving 7

Oppgave 1

a) Gitt følgende primitive modell for menneskekroppen:



1. 5 %: Kuleformet hode med radius r og masse $m_1 = 0,05m$

2. 55 % sylinderformet overkropp med radius $2r$ og masse $m_2 = 0,55m$

3. 5 % hver: Arm formet som tynn stang, i avstand $2r$ fra aksen, hver med masse $m_3 = 0,05m$

4. 15 % hver: Bein formet som massiv sylinder med radius $2r/3$, senterlinje i avstand r fra aksen, hver med masse $m_4 = 0,15m$

La I_1-I_4 angi treghetsmomentene til de respektive delene om den angitte aksen. Vi får:

Hodet (kule med masse m_1 og radius r):

$$I_1 = \underline{\frac{2}{5} m_1 r^2}$$

Overkroppen (sylinder med masse $m_2$og radius $2r$):

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} m_2 (2r)^2 \\ &= \underline{2 m_2 r^2} \end{aligned}$$

Armene (tynne stenger med masse m_3 i avstand $2r$ fra akse):

Her må vi bruke definisjonen av treghetsmoment for en punktmasse (ikke Steiners sats): En tynn stang har null «radius», og dermed null treghetsmoment om en akse gjennom massesenteret som er parallell med symmetriaksen til personen. Hver «bit» av stanga ligger i avstand $2r$ fra aksen, slik at treghetsmomentet til hele stanga om aksen blir

$$\begin{aligned} I_3 &= \text{masse} \cdot \text{avstand}^2 \\ &= m_3 \cdot (2r)^2 \\ &= \underline{4 m_3 r^2} \end{aligned}$$

Treghetsmomentet til hver arm blir altså uavhengig av armas lengde.

Beina (massiv sylinder med masse m_4 med senterlinja i avstand $2r/3$ fra rotasjonsakse):

Hvert bein har treghetsmoment $I_{CM} = \frac{1}{2}m_4\left(\frac{2}{3}r\right)^2$ om en akse gjennom senterlinja. Ettersom senterlinja ligger i avstand $d = r$ fra rotasjonsaksen, blir treghetsmomentet til ett bein om rotasjonsaksen gitt ved Steiners sats:

$$\begin{aligned} I_4 &= I_{CM} + m_4 d^2 \\ &\frac{1}{2}m_4 \cdot \left(\frac{2r}{3}\right)^2 + m_4 r^2 \\ &= \underline{\frac{11}{9}m_4 r^2} \end{aligned}$$

b) Det totale treghetsmomentet blir

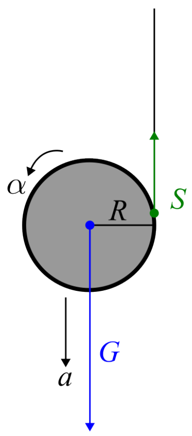
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2I_3 + 2I_4 \\ &= \frac{2}{5}m_1 r^2 + 2m_2 r^2 + 2 \cdot 4m_3 r^2 + 2 \cdot \frac{11}{9}m_4 r^2 \\ &= \frac{2}{5} \cdot 0,05m \cdot r^2 + 2 \cdot 0,55m \cdot r^2 + 8 \cdot 0,05m \cdot r^2 + \frac{22}{9} \cdot 0,15m \cdot r^2 \\ &= 1,89mr^2 \\ &\approx \underline{\underline{1,9mr^2}} \end{aligned}$$

c) For $m = 70\,\mathrm{kg}$ og hodeomkrets $O = 60\,\mathrm{cm}$, blir treghetsmomentet lik

$$\begin{aligned} I &= 1,89mr^2 \\ &= 1,89m \cdot \left(\frac{O}{2\pi}\right)^2 \qquad (\text{Omkrets} = 2\pi r) \\ &= 1,89 \cdot 70\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{0,60\,\mathrm{m}}{2\pi}\right)^2 \\ &= 1,21\,\mathrm{kgm}^2 \\ &\approx \underline{\underline{1,2\,\mathrm{kgm}^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Figuren under viser kreftene som virker på jo-jo-en mens den faller: tyngden G og snordraget S. Massesenteret har en vertikal akselerasjon a, mens den roterer med en vinkelakselerasjon α om massesenteret.



b) Newtons 2. lov for massesenteret:

$$\begin{aligned}\sum F &= Ma\\ G - S &= Ma\\ Mg - S &= Ma\end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon om massesenteret gir

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha\\ S\cdot R &= I\alpha\\ S\cdot R &= I\cdot\frac{a}{R} \qquad \text{(Rullebetingelsen)}\\ S\cdot R &= \frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{a}{R}\\ S &= \frac{1}{2}Ma\end{aligned}$$

Setter inn for S:

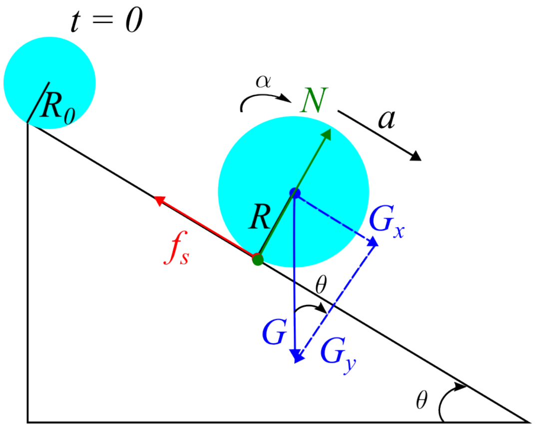
$$\begin{aligned}Mg - S &= Ma\\ Mg - \frac{1}{2}Ma &= Ma\\ \frac{3}{2}Ma &= Mg\\ a &= \underline{\underline{\frac{2}{3}g}}\end{aligned}$$

c) Snordraget S er da gitt ved

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}Ma\\ &= \frac{1}{2}M\cdot\frac{2}{3}g\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}Mg}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

Figuren under viser kreftene som virker på snøballen mens den ruller nedover bakken, på et tidspunkt der radien er $R = R(t)$: tyngden G (dekomponert i G_x langs bakken og G_y normalt på bakken), hvilefriksjonen f_s og normalkraften N.



Newtons 2. lov for massesenteret, langs bakken:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= Ma \\ G_x - f_s &= Ma \\ Mg\sin\theta - f_s &= Ma\end{aligned}$$

Her ligger det i kortene at M varierer med tiden, etter hvert som snøballen vokser seg større.

Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ f_s \cdot R &= I\alpha \\ f_s \cdot R &= \frac{2}{5}MR^2 \cdot \alpha && \text{(Treghetsmoment for kule)} \\ f_s \cdot R &= \frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{a}{R} && \text{(Rullebetingelsen)} \\ f_s &= \frac{2}{5}Ma\end{aligned}$$

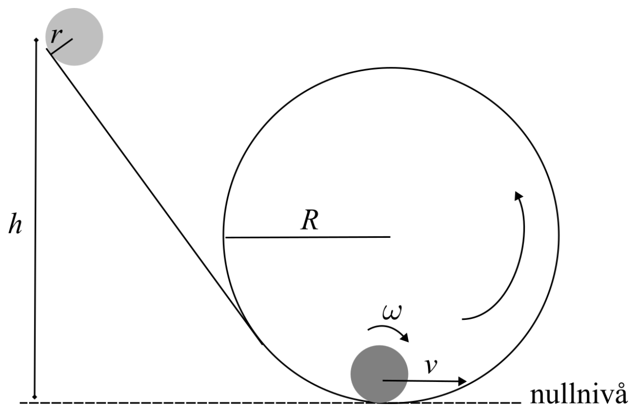
Setter inn for f_s:

$$\begin{aligned}Mg\sin\theta - f_s &= Ma \\ Mg\sin\theta - \frac{2}{5}Ma &= Ma \\ \frac{7}{5}Ma &= Mg\sin\theta \\ a &= \underline{\frac{5}{7}g\sin\theta}\end{aligned}$$

Altså: akselerasjonen er **konstant**, uavhengig av radiusen/massen til snøballen.

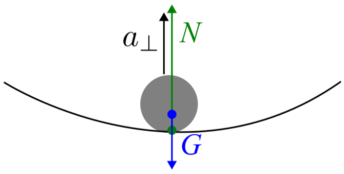
Oppgave 4

a) Bruker bevaring av mekanisk energi til å bestemme kulas fart nederst i loopen (velger nullnivå for potensiell energi i det laveste punktet): potensiell energi på toppen går over til kinetisk energi, i form av translasjon med fart v og rotasjon om massesenteret med vinkelfart ω:



$$
\begin{aligned}
mgh &= \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{translasjon}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{rotasjon}} \\
mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 && \text{(Rullebetingelsen)} \\
gh &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 && \text{(Forkorter)} \\
gh &= \frac{7}{10}v^2 \\
v &= \sqrt{\frac{10}{7}gh} \\
&= \sqrt{\frac{10}{7}g\cdot 3R} \\
&= \underline{\underline{\sqrt{\frac{30}{7}gR}}}
\end{aligned}
$$

b) Figuren under viser kreftene som virker på kula i det laveste punktet: normalkraft N og tyngden G. Ettersom kula har en sentripetalakselerasjon $a_\perp$ inn mot sentrum av loopen, er $N > G$.



Newtons 2. lov i radiell retning:

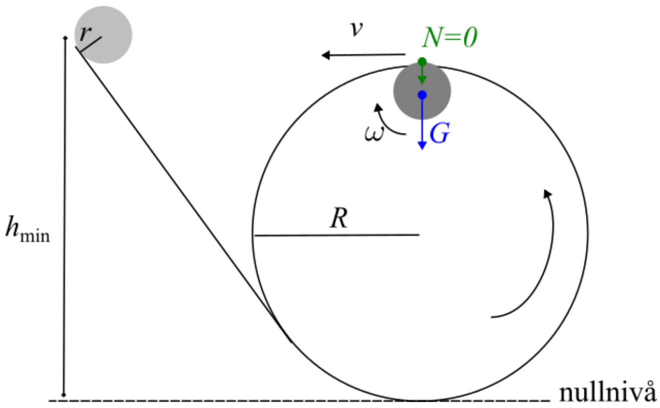
$$
\begin{aligned}
\sum F &= ma_\perp = m\frac{v^2}{R} \\
N - G &= m\frac{v^2}{R} \\
N &= m\frac{v^2}{R} + G \\
&= m\cdot\frac{\frac{30}{7}gR}{R} + mg \\
&= \left(1 + \frac{30}{7}\right)mg \\
&= \underline{\frac{37}{7}mg} \\
&= \underline{\underline{\frac{37}{7}G}}
\end{aligned}
$$

c) Vi skal bestemme den minste starthøyden h_{min} som kula kan slippes fra for å klare en hel loop uten å miste kontakten med underlaget.

I øving 4 kom vi fram til følgende betingelse for minimumsfarten på toppen av loopen (i grense-tilfellet er $N = 0$ på toppen):

$$v = \sqrt{gR} \Rightarrow v^2 = gR.$$

Dette er illustrert på figuren under:



Hvis vi bruker samme nullnivå som i a) får vi følgende energiregnskap ved bevaring av mekanisk energi (på toppen av loopen ligger kula en høyde $2R$ over nullnivået):

$$\begin{aligned}
mgh_{\text{min}} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\cdot 2R \\
mgh_{\text{min}} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 + 2mgR && \text{(Rullebetingelsen)} \\
mgh_{\text{min}} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 + 2mgR \\
gh_{\text{min}} &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 + 2gR && \text{(Forkorter)} \\
gh_{\text{min}} &= \frac{7}{10}v^2 + 2gR \\
gh_{\text{min}} &= \frac{7}{10}\cdot gR + 2gR && \text{(Setter inn for minimumsfarten på toppen)} \\
h_{\text{min}} &= \left(\frac{7}{10} + 2\right)R \\
&= \underline{\underline{\frac{27}{10}R}} \\
&= \underline{\underline{2,7R}}
\end{aligned}$$

På øving 4, der legemet bare gled (dvs. det var ikke noe rulling inne i bildet), fant vi $h_{\text{min}} = \frac{5}{2}R = 2,5R$. Vi trenger altså enda større starthøyde ved rotasjon, fordi noe av den potensielle energien går med til rotasjonskinetisk energi.