ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA KHOA HỌC - KỸ THUẬT MÁY TÍNH

CẤU TRÚC RỜI RẠC CHO KHMT

Nhóm: Discrete Masters

Bài tập về nhà

SV thực hiện: Nguyễn Thành Lưu – 1813017 (Nhóm trưởng)
Lê Khắc Minh Đăng – 88471475
Bùi Ngô Hoàng Long – 36811334
Lê Bá Thông – 97501334
Hồ Văn Lợi – 12341334

Mục lục

1 DS_propositionallogic.pdf

1.1 Bài tập bắt buộc

1.1.1 Bài tập 1

Đề bài:

Lời giải:

1.1.2 Bài tập 2

Đề bài:

Lời giải:

1.1.3 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

1.1.4 Bài tập 4

Đề bài:

Lời giải:

1.1.5 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải:

1.1.6 Bài tập 6

Đề bài:

Lời giải:

1.1.7 Bài tập 7

Đề bài:

Lời giải:

1.1.8 Bài tập 8

Đề bài:

Lời giải:

1.1.9 Bài tập 9

Đề bài:

Lời giải:

1.1.10 Bài tập 10

Đề bài: Show that these compound propositionals are logically equivalent by developing a series of logical equivalences

a) $\neg(p \to (\neg q \wedge r))$ and $p \wedge (q \vee \neg r)$.
b) $\neg[(p \wedge (q \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)]$ and $\neg p \vee \neg r$.
c) $\neg[[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \to s]$ and $[(p \wedge r) \vee \neg q] \wedge \neg s$.

Lời giải:

a) Ta có:
$\neg(p \to (\neg q \wedge r))$
$\equiv \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge r))$
$\equiv p \wedge \neg(\neg q \wedge r)$
$\equiv p \wedge (q \vee \neg r)$

b) Ta có:
$\neg[(p \wedge (q \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)]$
$\equiv \neg(p \wedge (q \vee r)) \vee \neg(\neg p \vee \neg q \vee r)$
$\equiv (\neg p \vee \neg(q \vee r)) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$
$\equiv \neg p \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
$\equiv ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
$\equiv (\mathbf{T} \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
$\equiv \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
$\equiv \neg p \vee (\neg r \wedge (q \vee \neg q))$
$\equiv \neg p \vee (\neg r \wedge \mathbf{T})$
$\equiv \neg p \vee \neg r$

c) Ta có:
$\neg[[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \to s]$
$\equiv \neg[[(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (r \wedge \neg r)) \vee \neg q] \to s]$
$\equiv \neg[[(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \mathbf{F}) \vee \neg q] \to s]$
$\equiv \neg[[(p \wedge q \wedge r) \vee \mathbf{F} \vee \neg q] \to s]$
$\equiv \neg[[(p \wedge q \wedge r) \vee \neg q] \to s]$
$\equiv \neg[\neg[(p \wedge q \wedge r) \vee \neg q] \vee s]$
$\equiv [(p \wedge q \wedge r) \vee \neg q] \wedge \neg s$
$\equiv [[(p \wedge r) \vee \neg q] \wedge (q \vee \neg q)] \wedge \neg s$
$\equiv [[(p \wedge r) \vee \neg q] \wedge \mathbf{T}] \wedge \neg s$
$\equiv [(p \wedge r) \vee \neg q] \wedge \neg s$

1.1.11 Bài tập 11

Đề bài: You cannot edit a protected Wikipedia entry unless you are an administrator. Express your answer in terms of e: "You can edit a protected Wikipedia entry" and a: "You are an administrator."

Lời giải:

Ta có thể biểu diễn sang: $\neg a \rightarrow \neg e$.

1.1.12 Bài tập 12

Đề bài: You can see the movie only if you are over 18 years old or you have the permission of a parent. Express your answer in terms of m: "You can see the movie," e: "You are over 18 years old," and p: "You have the permission of a parent."

Lời giải:

Ta có thể biểu diễn sang: $\neg(e \vee p) \rightarrow \neg m$.

1.1.13 Bài tập 13

Đề bài: You can graduate only if you have completed the requirements of your major and you do not owe money to the university and you do not have an overdue library book. Express your answer in terms of g: "You can graduate," m: "You owe money to the university," r: "You have completed the requirements of your major," and b: "You have an overdue library book."

Lời giải:

Ta có thể biểu diễn sang: $(m \vee \neg r \vee b) \to \neg g$.

1.1.14 Bài tập 14

Đề bài:

Lời giải:

1.1.15 Bài tập 15

Đề bài:

Lời giải:

1.1.16 Bài tập 16

Đề bài:

Lời giải:

1.1.17 Bài tập 17

2 New_Homework01_Propositional_Logic.pdf

2.1 Bài tập bắt buộc

2.1.1 Bài tập 1

Đề bài:

Lời giải:

2.1.2 Bài tập 2

Đề bài:

Lời giải:

2.1.3 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

2.1.4 Bài tập 4

Đề bài:

Lời giải:

2.1.5 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải:

2.1.6 Bài tập 6

Đề bài:

Lời giải:

2.1.7 Bài tập 7

Đề bài: Find an assignment of the variables p, q, r such that the proposition $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (r \vee p)$ is satisfied. For a bonus 5 points, prove that this assignment is unique.

Lời giải:

Khi p đúng, q đúng và r đúng thì mệnh đề trên thoả mãn.

* Chứng minh bộ ba p, q, r làm cho mệnh đề đúng là duy nhất:
Ta có:
$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (r \vee p)$
$\equiv (p \vee (\neg q \wedge q)) \wedge (q \vee (\neg r \wedge r)) \wedge (r \vee (\neg p \wedge p))$
$\equiv (p \vee \mathbf{F}) \wedge (q \vee \mathbf{F}) \wedge (r \vee \mathbf{F})$
$\equiv p \wedge q \wedge r$
Mệnh đề này đúng khi và chỉ khi cả ba biến p, q, r đều nhận chân trị đúng.
Ta có điều phải chứng minh.

2.1.8 Bài tập 8

Đề bài:

Lời giải:

2.2 Bonus

Bài tập 1.3.12: Show that each conditional statement here is a tautology without using truth tables:

a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$

b) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

c) $[p \wedge (p \to q)] \to q$

d) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

Lời giải:

a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$
$\equiv \neg[\neg p \wedge (p \vee q)] \vee q$
$\equiv p \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee q$
$\equiv ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)) \vee q$
$\equiv (\mathbf{T} \wedge (p \vee \neg q)) \vee q$
$\equiv p \vee \neg q \vee q \equiv p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$

b) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
$\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r)$
$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee r)$
$\equiv (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee r$
$\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$

c) $[p \wedge (p \to q)] \to q$
$\equiv \neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q$
$\equiv \neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee q$
$\equiv \mathbf{T} \vee q \equiv \mathbf{T}$

d) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$
$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee r$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee r$
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$

Bài tập 1.3.16: Show that $p \leftrightarrow q$ and $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ are logically equivalent.

Lời giải:

Ta có :
$p \leftrightarrow q$
$\equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
$\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p)$
$\equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p))$
$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Bài tập 1.3.17: Show that $\neg(p \leftrightarrow q)$ and $p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent.

Lời giải:

Kết hợp kết quả từ câu 16, Ta có:
$\neg(p \leftrightarrow q)$
$\equiv \neg((\neg p \land \neg q) \lor (p \land q))$
$\equiv (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$
$\equiv (\neg q \rightarrow p) \land (p \rightarrow \neg q)$
$\equiv p \leftrightarrow \neg q$

Bài tập 1.3.18: Show that $p \rightarrow q$ and $\neg q \rightarrow \neg p$ are logically equivalent.

Lời giải:

Bảng chân trị:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Theo bảng chân trị, ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 1.3.19: Show that $\neg p \leftrightarrow q$ and $p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent.

Lời giải:

Bảng chân trị:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow \neg q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Theo bảng chân trị, ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 1.3.20: Show that $\neg(p \oplus q)$ and $p \leftrightarrow q$ are logically equivalent.

Bảng chân trị:

p	q	$p \oplus q$	$\neg(p \oplus q)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

Theo bảng chân trị, ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 1.3.21: Show that $\neg(p \leftrightarrow q)$ and $\neg p \leftrightarrow q$ are logically equivalent.

Lời giải:

Kết hợp kết quả từ bài 17 và bài 19, ta có:

$\neg(p \leftrightarrow q)$
$\equiv p \leftrightarrow \neg q$
$\equiv \neg p \leftrightarrow q$

Bài tập 1.3.22: Show that $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ and $p \rightarrow (q \wedge r)$ are logically equivalent.

Lời giải:

Ta có:
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$
$\equiv \neg p \vee (q \wedge r)$
$\equiv p \rightarrow (q \wedge r)$.

Bài tập 1.3.23: Show that $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ and $(p \vee q) \rightarrow r$ are logically equivalent.

Lời giải:

Ta có:
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$
$\equiv r \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\equiv r \vee \neg(p \vee q)$
$\equiv (p \vee q) \rightarrow r$.

Bài tập 1.3.24: Show that $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ and $p \rightarrow (q \vee r)$ are logically equivalent.

Lời giải:

Ta có:
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
$\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$
$\equiv \neg p \vee (q \vee r)$
$\equiv p \rightarrow (q \vee r)$.

Bài tập 1.3.25: Show that $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ and $(p \wedge q) \rightarrow r$ are logically equivalent.

Lời giải:

Ta có:
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
$\equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)$

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r$
$\equiv \neg(p \wedge q) \vee r$
$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r.$

Bài tập 1.3.26: Show that $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$ and $q \rightarrow (p \vee r)$ are logically equivalent.

Lời giải:

Ta có:
$\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$
$\equiv \neg(\neg p) \vee (\neg q \vee r)$
$\equiv \neg q \vee (p \vee r)$
$\equiv q \rightarrow (p \vee r)$

Bài tập 1.3.27: Show that $p \leftrightarrow q$ and $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ are logically equivalent.

Lời giải:

Bảng chân trị:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Theo bảng chân trị, ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 1.3.28: Show that $p \leftrightarrow q$ and $\neg p \leftrightarrow \neg q$ are logically equivalent.

Lời giải:

Ta có:
$p \leftrightarrow q$
$\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\equiv (\neg q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$
$\equiv \neg p \leftrightarrow \neg q.$

Bài tập 1.3.32: Show that $(p \wedge q) \rightarrow r$ and $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ are not logically equivalent.

Lời giải:

Với p, r nhận chân trị False và q nhận chân trị True, ta có:

1. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (\mathbf{F} \wedge \mathbf{T}) \rightarrow \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \equiv \mathbf{T}.$
2. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}) \wedge (\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{F}) \equiv \mathbf{T} \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}.$

Hai giá trị này không tương đương logic với nhau, do đó $(p \wedge q) \rightarrow r$ và $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ không tương đương logic với nhau (đpcm).

Bài tập 1.3.39: Why are the duals of two equivalent compound propositions also equivalent, where these compound propositions contain only the operators $\wedge$, $\vee$, and $\neg$?

Lời giải:

Gọi p và q là hai mệnh đề ghép tương đương, trong đó p và q chỉ chứa các toán tử $\wedge$, $\vee$, và $\neg$. Vì p và q tương đương nhau, nên $\neg p$ và $\neg q$ cũng tương đương nhau. Sử dụng luật De Morgan nhiều lần để đẩy toán tử $\neg$ trong p và q sâu nhất có thể, khi đó, toán tử $\wedge$ sẽ thay bằng $\vee$, **T** thay bằng **F**, và ngược lại. Từ đó, mệnh đề $\neg p$ và $\neg q$ sẽ giống với p^* và q^*, ngoại trừ những mệnh đề đơn vị p_i được thay bằng mệnh đề phủ định của nó. Khi đó p^* và q^* tương đương nhau, vì $\neg p$ và $\neg q$ tương đương nhau.

Bài tập 1.3.40: Find a compound proposition involving the propositional variables p, q, and r that is true when p and q are true and r is false, but is false otherwise.

Lời giải:

Xét mệnh đề $p \wedge q \wedge \neg r$.
Ta có bảng giá trị sau:

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge q \wedge \neg r$
1	1	0	1	1
0	0	1	0	0

Theo bảng giá trị này, ta suy ra được mệnh đề trên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

3 DS_predicatelogic.pdf

3.1 Bài tập bắt buộc

3.1.1 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

3.1.2 Bài tập 4

Đề bài:

Lời giải:

3.1.3 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải:

3.1.4 Bài tập 6

Đề bài:

Lời giải:

3.1.5 Bài tập 7

Đề bài:

Lời giải:

3.1.6 Bài tập 8

Đề bài:

Lời giải:

3.1.7 Bài tập 9

Đề bài:

Lời giải:

3.1.8 Bài tập 10

Đề bài:

Lời giải:

3.1.9 Bài tập 11

Đề bài:

Lời giải:

3.1.10 Bài tập 12

Đề bài:

Lời giải:

3.1.11 Bài tập 13

Đề bài:

Lời giải:

3.1.12 Bài tập 14

Đề bài:

Lời giải:

3.1.13 Bài tập 15

Đề bài:

Lời giải:

3.1.14 Bài tập 16

Đề bài:

Lời giải:

3.1.15 Bài tập 17

Đề bài:

Lời giải:

3.1.16 Bài tập 18

Đề bài:

Lời giải:

3.1.17 Bài tập 19

Đề bài:

Lời giải:

3.1.18 Bài tập 20

Đề bài:

Lời giải:

3.1.19 Bài tập 21

Đề bài:

Lời giải:

3.1.20 Bài tập 22

Đề bài: Prove that if x is irrational, then $1/x$ is irrational.

Lời giải:

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng tồn tại một số vô tỉ x sao cho $1/x$ là số hữu tỉ. Vì $1/x$ là một số hữu tỉ nên tồn tại hai số nguyên $a, b (b \neq 0)$ sao cho :$\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$. Tương đương với $x = \frac{b}{a}$. Suy ra x là số hữu tỉ (mâu thuẫn với x là số vô tỉ).
Vậy ta có điều phải chứng minh.

3.1.21 Bài tập 23

Đề bài: Use a proof by contraposition to show that if $x + y \geq 2$, where x and y are real numbers, then $x \geq 1$ or $y \geq 1$.

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh rằng, nếu $x < 1$ và $y < 1$ thì $x + y < 2$.
Thật vậy, ta có $x < 1$ và $y < 1 \Leftrightarrow x + y < 1 + 1 = 2$.
Phản đảo lại, ta được: nếu $x + y \geq 2$ thì $x \geq 1$ hoặc $y \geq 1$.
Ta có điều phải chứng minh.

3.1.22 Bài tập 24

Đề bài: Show that if n is an integer and $n^3 + 2015$ is odd, then n is even using

a) a proof by contraposition.
b) a proof by contradiction.

Lời giải:

Xét n là một số nguyên
a) Ta sẽ chứng minh rằng nếu n là số lẻ thì $n^3 + 2015$ chẵn.
Thật vậy, nếu n là số lẻ thì tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k + 1$. Khi đó: $n^3 + 2015 = (2k + 1)^3 + 2015 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 2016$ là một số chẵn.
Phản đảo lại, ta được: nếu $n^3 + 2015$ là số lẻ thì n là số chẵn.
Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta sẽ đi chứng minh phản chứng bài toán. Giả sử tồn tại một số n lẻ sao cho $n^3 + 2015$ lẻ. Vì n là số lẻ nên tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k + 1$. Khi đó: $n^3 + 2015 = (2k + 1)^3 + 2015 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 2016$ là một số chẵn (mâu thuẫn với dữ kiện $n^3 + 2015$ lẻ).
Ta có điều phải chứng minh.

3.1.23 Bài tập 25

Đề bài: Prove that if n is an integer and $3n+2$ is even, then n is even using

a) a proof by contraposition.
b) a proof by contradiction.

Lời giải:

Xét n là số một số nguyên
a) Ta sẽ chứng minh rằng nếu n là số lẻ thì $3n+2$ lẻ.
Thật vậy, nếu n là số lẻ thì tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k+1$. Khi đó: $3n+2 = 3(2k+1)+2 = 6k+5$ là một số lẻ.
Phản đảo lại, ta được: nếu $3n+2$ là số chẵn thì n là số chẵn.
Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta sẽ đi chứng minh phản chứng bài toán. Giả sử tồn tại số n lẻ sao cho $3n+2$ chẵn. Vì n là số lẻ nên tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k+1$. Khi đó: $3n+2 = 3(2k+1)+2 = 6k+5$ là một số lẻ (mâu thuẫn với dữ kiện $3n+2$ chẵn).
Ta có điều phải chứng minh.

3.1.24 Bài tập 26

Đề bài: Prove that if n is a positive integer, then n is odd if and only if $5n + 6$ is odd.

Lời giải:

Xét n là số nguyên dương.
Ta đi chứng minh hai chiều như sau:

1. Nếu n lẻ thì $5n + 6$ lẻ.

2. Nếu $5n + 6$ lẻ thì n nguyên lẻ.

* Chiều thứ nhất:
Vì n lẻ nên tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k + 1$. Khi đó $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 10k + 11$ là một số lẻ. Vậy chiều này được chứng minh.

* Chiều thứ hai:
Ta chứng minh rằng nếu n chẵn thì $5n + 6$ chẵn. Vì n chẵn nên tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k$. Khi đó $5n + 6 = 5.2k + 6 = 10k + 6$ là một số chẵn.
Phản đảo lại, ta được: nếu $5n + 6$ là số lẻ thì n là số lẻ. Vậy chiều này được chứng minh.

Ta có điều phải chứng minh.

3.1.25 Bài tập 27

Đề bài: Show that these statements about the integer x are equivalent: (i) $3x + 2$ is even, (ii) $x + 5$ is odd, (iii) x^2 is even.

Lời giải:

Xét n là số nguyên.
Ta sẽ đi chứng minh 2 vị từ sau:

1. $3x + 2$ chẵn khi và chỉ khi $x + 5$ lẻ.
2. $x + 5$ lẻ khi và chỉ khi x^2 chẵn.

* Vị từ 1:

1. Nếu $3x + 2$ chẵn thì $x + 5$ lẻ.
   Ta đi chứng minh rằng nếu $x + 5$ chẵn thì $3x + 2$ lẻ.
   Thật vậy, vì $x + 5$ chẵn nên tồn tại số nguyên k thỏa mãn: $x + 5 = 2k$. Khi đó ta có $3x + 2 = 3(x + 5) - 13 = 6k - 13$ là một số lẻ.
   Phản đảo lại, ta được nếu $3x + 2$ chẵn thì $x + 2$ lẻ.
2. Nếu $x + 5$ lẻ thì $3x + 2$ chẵn.
   Vì $x + 5$ lẻ nên tồn tại số nguyên k thỏa mãn: $x + 5 = 2k + 1$. Khi đó ta có $3x + 2 = 3(x + 5) - 13 = 3(2k + 1) - 13 = 6k - 10$ là một số chẵn.

Vậy ta chứng minh được vị từ 1.

* Vị từ 2:

1. Nếu x^2 chẵn thì $x + 5$ lẻ.
   Ta đi chứng minh rằng nếu $x + 5$ chẵn thì x^2 lẻ.
   Thật vậy, vì $x + 5$ chẵn nên tồn tại số nguyên k thỏa mãn: $x + 5 = 2k$. Khi đó ta có $x^2 = (x + 5 - 5)^2 = (2k - 5)^2 = 4k^2 - 20k + 25$ là một số lẻ.
   Phản đảo lại, ta được nếu x^2 chẵn thì $x + 5$ lẻ.
2. Nếu $x + 5$ lẻ thì x^2 chẵn.
   Vì $x + 5$ lẻ nên tồn tại số nguyên k thỏa mãn: $x + 5 = 2k + 1$. Khi đó ta có $x^2 = (x + 5 - 5)^2 = (2k - 4)^2 = 4(k - 2)^2$ là một số chẵn.

Vậy ta chứng minh được vị từ 2.
Vì (i), (ii), (iii) tương đương nhau nên ta có điều phải chứng minh.

3.1.26 Bài tập 28

Đề bài: Prove that if n is an integer, these four statements are equivalent: (i) n is even, (ii) $n+1$ is odd, (iii) $3n+1$ is odd, (iv) $3n$ is even.

Lời giải:

Xét n là số nguyên.
Ta sẽ chứng minh 2 vị từ sau:

1. n chẵn khi và chỉ khi $n+1$ lẻ.
2. n chẵn khi và chỉ khi $3n$ chẵn.

* Vị từ 1:

1. Nếu n chẵn thì $n+1$ lẻ.
   Vì n chẵn nên tồn tại số nguyên k thỏa: $n = 2k$. Khi đó $n+1 = 2k+1$ là một số lẻ.
2. Nếu $n+1$ lẻ thì n chẵn.
   Vì $n+1$ lẻ nên tồn tại số nguyên k thỏa: $n+1 = 2k+1$. Khi đó $n = n+1-1 = 2k+1-1 = 2k$ là một số chẵn.

Vậy ta chứng minh được vị từ 1.

* Vị từ 2:

1. Nếu n chẵn thì $3n$ chẵn
   Vì n chẵn nên tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k$. Khi đó $3n = 3.2k = 6k$ là một số chẵn.
2. Nếu $3n$ chẵn thì n chẵn
   Ta đi chứng minh rằng nếu n lẻ thì $3n$ lẻ.
   Vì n lẻ nên tồn tại số nguyên k sao cho $n = 2k+1$. Khi đó $3n = 3.(2k+1) = 6k+3$ là một số lẻ.
   Phản đảo lại, ta được: Nếu $3n$ chẵn thì n chẵn.

Vậy ta chứng minh được vị từ 2.
Ta có $3n+1$ lẻ $\equiv 3n$ chẵn $\equiv n$ chẵn $\equiv n+1$ lẻ.
Vậy ta có điều phải chứng minh.

3.1.27 Bài tập 29

Đề bài:

Lời giải:

3.1.28 Bài tập 30

Đề bài:

Lời giải:

3.1.29 Bài tập 31

Đề bài:

Lời giải:

3.1.30 Bài tập 32

Đề bài:

Lời giải:

3.1.31 Bài tập 33

Đề bài:

Lời giải:

3.1.32 Bài tập 34

Đề bài:

Lời giải:

3.1.33 Bài tập 35

Đề bài:

Lời giải:

4 New_Homework02a_Predicate_Logic.pdf

4.1 Bài tập bắt buộc

4.1.1 Bài tập 1

Đề bài:

Lời giải:

4.1.2 Bài tập 2

Đề bài:

Lời giải:

4.1.3 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

4.1.4 Bài tập 4

Đề bài: Use rules of inference to show that if $p \wedge q$, $r \vee s$, and $p \to \neg r$, then s is true.

Lời giải:

We have:

1. $p \wedge q$ (Premise).
2. p (Simplification from (1)).
3. $p \to \neg r$ (Premise).
4. $\neg r$ (Modus pones using (2) and (3)).
5. $r \vee s$ (Premise).
6. s (Disjunctive syllogism using (4) and (5)).

Q.E.D

4.1.5 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải:

4.2 Bonus

Bài tập 1.5.18: Express each of these system specifications using predicates, quantifiers, and logical connectives, if necessary.

a) At least one console must be accessible during every fault condition.

b) The e-mail address of every user can be retrieved whenever the archive contains at least one message sent by every user on the system.

c) For every security breach there is at least one mechanism that can detect that breach if and only if there is a process that has not been compromised.

d) There are at least two paths connecting every two distinct endpoints on the network.

e) No one knows the password of every user on the system except for the system administrator, who knows all passwords.

Lời giải:

a) $P(x)$: Console x can be accessible.
$Q(x)$: x is a fault condition.
Câu trên được viết lại thành: $\forall x Q(x)(\exists y P(y))$.

b) $P(x)$: The e-mail address of x can be retrieved.
$Q(x)$: The archive contains messages sent by x.
Câu trên được viết lại thành: $(\forall x Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y))$.

c) $P(x)$: x is security breach.
$Q(x, y)$: x is a mechanism that can detech security breach y.
$R(x)$: x is the process that has not been compromised.
Câu trên được viết lại thành: $\forall x P(x)((\exists y Q(y, x)) \leftrightarrow (\exists z R(z)))$.

d) $P(x, y, z)$: x and y are connected by z.
Câu trên được viết lại thành: $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow (\exists a \exists b((a \neq b) \rightarrow (P(x, y, a) \wedge P(x, y, b)))))$.

e) $P(x, y)$: x knows the password of y.
$Q(x)$: x is the system administrator.
Câu trên được viết lại thành: $(\forall x(\neg Q(x))(\exists y(\neg P(x, y))) \wedge ((\forall x Q(x)) \rightarrow (\forall y P(x, y)))$.

Câu 1.5.19: Express each of these statements using mathematical and logical operators, predicates, and quantifiers, where the domain consists of all integers.

a) The sum of two negative integers is negative.

b) The difference of two positive integers is not necessarily positive.

c) The sum of the squares of two integers is greater than or equal to the square of their sum.

d) The absolute value of the product of two integers is the product of their absolute values.

Lời giải:

a) $\forall x \forall y(x < 0 \wedge y < 0) \rightarrow (x + y < 0)$.

b) $\exists x \exists y(x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow (x - y \leq 0)$.

c) $\forall x \forall y(x^2 + y^2 \geq (x+y)^2)$.

d) $\forall x \forall y(|x.y| = |x|.|y|)$.

Câu 1.5.20: Express each of these statements using predicates, quantifiers, logical connectives, and mathematical operators where the domain consists of all integers.

a) The product of two negative integers is positive.

b) The average of two positive integers is positive.

c) The difference of two negative integers is not necessarily negative.

d) The absolute value of the sum of two integers does not exceed the sum of the absolute values of these integers.

Lời giải:

a) $\forall x \forall y(x < 0 \land y < 0) \rightarrow (xy > 0)$.

b) $\forall x \forall y(x > 0 \land y > 0) \rightarrow (\frac{x+y}{2} > 0)$.

c) $\exists x \exists y(x < 0 \land y < 0) \rightarrow (x - y \geq 0)$.

d) $\forall x \forall y(|x+y| \leq |x| + |y|)$.

Câu 1.5.21: Use predicates, quantifiers, logical connectives, and mathematical operators to express the statement that every positive integer is the sum of the squares of four integers.

Lời giải:

Domain: Tập số nguyên.
Ta viết lại câu trên thành:
$\forall x(x > 0) \rightarrow (\exists a, b, c, d(x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2))$.

Câu 1.5.22: Use predicates, quantifiers, logical connectives, and mathematical operators to express the statement that there is a positive integer that is not the sum of three squares.

Lời giải:

Domain: Tập số nguyên.
Ta viết lại câu trên thành:
$\exists x(x > 0) \rightarrow (\forall a, b, c(x \neq a^2 + b^2 + c^2))$.

Câu 1.5.23: Express each of these mathematical statements using predicates, quantifiers, logical connectives, and mathematical operators.

a) The product of two negative real numbers is positive.

b) The difference of a real number and itself is zero.

c) Every positive real number has exactly two square roots.

d) A negative real number does not have a square root that is a real number.

Lời giải:

Domain: Tập số thực.

a) $\forall x \forall y (x < 0 \land y < 0) \rightarrow (xy > 0)$.

b) $\forall x (x - x = 0)$.

c) $\forall x (x > 0) \rightarrow ((\exists a \exists b ((a \neq b) \land (a^2 = b^2 = x))) \land (\forall c ((c \neq a) \land (c \neq b)) \rightarrow (c^2 \neq x))$.

d) $\forall x (x < 0) \rightarrow (\forall y (y^2 \neq x))$.

5 New_Homework02b_Proving_methods.pdf

5.1 Bài tập bắt buộc

5.1.1 Bài tập 1

Đề bài:

Lời giải:

5.1.2 Bài tập 2

Đề bài:

Lời giải:

5.1.3 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

5.1.4 Bài tập 4

Đề bài: In the country of Togliristan (where Knights, Knaves, and Togglers live), Togglers will alternate between telling the truth and lying (no matter what other people say). You meet two people, A and B. They say, in order:

A : B is a Knave.
B : A is a Knave.
A : B is a Knight.
B : A is a Toggler.

Determine what types of people A and B are.

Lời giải:

Vì A,B đều có hai câu nói khác nhau nên A và B không thể là Knight được. Ta xét hai trường hợp:

1. A là Knave
   Vì A là Knave nên A luôn nói dối, hay B không thể là Knave hay Knight. Khi đó B sẽ là Toggler.

2. A là Toggler
   Nếu B là Knave thì B luôn nói dối, hay A không thể là Knave hay Toggler (mâu thuẫn). Do đó B là Toggler.

Vậy (A,B) chỉ có thể là (Knave, Toggler) và (Toggler, Toggler).

5.1.5 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải:

5.2 Bonus

6 Homework03a_Sets_Function.pdf

6.1 Bài tập bắt buộc

6.1.1 Bài tập 1

Đề bài:

Lời giải:

6.1.2 Bài tập 2

Đề bài:

Lời giải:

6.1.3 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

6.1.4 Bài tập 4

Đề bài:

Lời giải:

6.1.5 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải:

6.1.6 Bài tập 6

Đề bài:

Lời giải:

6.1.7 Bài tập 7

Đề bài: Let $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, and $C = \{\pi, \phi, i\}$. Define functions $f : A \to B$ and $g : B \to C$ as

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = a \\ 3, & x = b \\ 4, & x = c \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \pi, & x = 1 \\ \phi, & x = 2 \\ i, & x = 3 \\ \pi, & x = 4 \end{cases}$$

Consider each of the functions f, g, $g \circ f$ and determine if they are injective, surjective, or both.

Lời giải:

Xét ánh xạ $f : A \to B$. Ta thấy mọi ảnh của f đều riêng biệt nên f là đơn ánh. f không phải toàn ánh vì với $x = 1$ thì không tồn tại $y \in A$ sao cho $f(y) = 1$. Vậy f là đơn ánh.

Xét ánh xạ $g : B \to C$. Ta thấy mọi phần tử $x \in C$ đều có nghịch ảnh trên B, nên g là toàn ánh. g không phải là đơn ánh vì $g(1) = g(4) = \pi$. Vậy g là toàn ánh.

Xét ánh xạ $g \circ f : A \to C$. Từ hai ánh xạ f và g, ta viết lại ánh xạ $g \circ f : A \to C$ thành:

$$g \circ f = g(f(x)) = \begin{cases} \pi, & f(x) = 1 \\ \phi, & f(x) = 2 \\ i, & f(x) = 3 \\ \pi, & f(x) = 4 \end{cases} = \begin{cases} \phi, & x = a \\ i, & x = b \\ \pi, & x = c \end{cases}$$

Ta thấy mọi ảnh của $g \circ f$ đều phân biệt và mọi ảnh đều có nghịch ảnh tương ứng. Vậy $g \circ f$ là một song ánh.

6.1.8 Bài tập 8

Đề bài:

Lời giải:

6.2 Bonus

7 Homework03b_Sequences.pdf

7.1 Bài tập bắt buộc

7.1.1 Bài tập 1

Đề bài:

Lời giải:

7.1.2 Bài tập 2

Đề bài:

Lời giải:

7.1.3 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

7.1.4 Bài tập 4

Đề bài: Define a sequence $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ as $f_0 = 1$ and for $n \geq 1$, $f_{n+1} = \frac{1}{1+f_n}$. Prove that for $n \geq 0$, $f_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$, where $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ is the Fibonacci sequence.

Lời giải:

Ta đi chứng minh quy nạp rằng $f_n = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$. (1)
Với $n = 0$, ta có: $f_0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{F_1}{F_2}$.
Giả sử đẳng thức (1) đúng với mọi $n = k \in \mathbf{N}, k \geq 0$. Ta chứng minh rằng đẳng thức (1) cũng đúng với $n = k + 1$.
Thật vậy, ta có:
$f_{n+1} = \frac{1}{1+f_n} = \frac{1}{1+\frac{F_{n+1}}{Fn+2}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}+Fn+2} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+3}}$.
Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

7.1.5 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải:

7.2 Bonus

8 Homework03c_Sequences_and_Sums.pdf

8.1 Bài tập bắt buộc

8.1.1 Bài tập 1

Đề bài:

Lời giải:

8.1.2 Bài tập 2

Đề bài:

Lời giải:

8.1.3 Bài tập 3

Đề bài:

Lời giải:

8.1.4 Bài tập 4

Đề bài:

Lời giải:

8.1.5 Bài tập 5

Đề bài:

Lời giải: