Chứng minh $2 + 3 = 6$.

Lời Giải

Trước hết ta định nghĩa một không gian G* (ta sẽ gọi là không gian phi vector) như sau:

Giả sử V là một tập khác rỗng, K là một trường. V được gọi là không gian G* trên trường K nếu có hai phép toán:

Phép toán trong: (+) $V^2 \to V$

$(u, v) \to u + v$

Phép toán ngoài: $K \times V \to V$

$(\alpha, u) \to \alpha u$

Thỏa mãn các tiên đề sau với mọi u,v,w $\in V$ và $\alpha, \beta \in K$

1) $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2) Tồn tại phần tử **0** thuộc V sao cho $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = \mathbf{0}$
3) $u + v = v + u$
4) $1.u = u$, trong đó 1 được định nghĩa là phần tử đơn vị của K.

Ta giả sử K là một trường, xét $K^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in K; i = 1, \dots, n\}$.

Ta định nghĩa: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1.y_1, \dots, x_n.y_n)$

$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

Dễ dàng kiểm chứng lại hai phép toán này thỏa mãn 4 tiên đề của không gian G*. Vector **0** = (0,…0).

Ta đặt tên các phần tử thuộc không gian trên là I = (I,I,I,….,I) (I thuộc K).

Theo như định nghĩa trên ta có phần tử **2** = (2,2,…,2) và **3** = (3,…,3). Ta có **2** + **3** = (2,…,2) + (3,...3) = (2.3,…,2.3) = (6,…,6) = **6.**

Vậy **2** + **3** = **6** (trong đó **2**,**3** và **6** là các phần tử thuộc một không gian phi vector được định nghĩa như trên)

Cách 2: Giả sử f là 1 hàm số có tập: $R \to R$. Thỏa mãn f(5) = f(6) = const. Để cho đơn giản nhất ta sẽ lấy f là 1 đa thức có degf = 1. Giải hệ phương trình, ta được f(x) = const. Ta sẽ chứng minh 2 + 3 = 6. Thật vậy, tác động f vào 2 vế của phương trình ta được f(2 + 3) = f(6), tương đương với f(5) = f(6) = const. Vậy 2 + 3 = 6 thì suy ra f(5) = f(6). Giả sử ngược lại, ta có f(5) = f(6). Lấy ánh xạ ngược ta được $f^{-1}(5) = f^{-1}(6)$. Tương đương với 5 = 6 hay 2 + 3 = 6. Hoàn tất chứng minh.

(Q.E.D by BQĐ)