TUYỂN TẬP MỘT SỐ BÀI TOÁN HAY VÀ NHỮNG CÁCH PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN

Bùi Quang Đạt, Hoài Đức A

Ngày 6 tháng 12 năm 2020

Lời nói đầu

Trong chương trình học chúng ta đã làm quen với nhiều dạng bài toán như: phương trình, hệ phương trình, bất đẳng thức, xác xuất, hình học…v.v.Với mỗi bài toán, chúng ta có những góc nhìn khác nhau và các cách tiếp cận khác nhau. Là một học sinh khóa K53 của Trường THPT Hoài Đức A, tôi xin mạnh dạn viết lên chuyên đề "Tuyển tập một số bài toán hay và những cách phát triển bài toán" với mục đích cho ta một góc nhìn mới và toàn diện về toán học. Trong tài liệu tôi xin trình bày một số bài toán mà tôi nghĩ ra và những bài toán tôi sưu tầm được có góc nhìn đa chiều. Vì còn chưa có kinh nghiệm nhiều về khả năng diễn đạt và kiến thức nên chắc chắn trong quá trình biên soạn sẽ không thể tránh khỏi những thiếu sót, rất mong bạn đọc và các thầy cô góp ý và nhận xét. Cuối cùng xin cảm ơn mọi người đã ủng hộ và theo dõi tài liệu này.

1.NHỮNG BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TRÒ CHƠI VÀ THỰC TẾ.

Bài 1: Cho n người trên một đường tròn theo thứ tự 1,2,3,…,n. Trò chơi bắt đầu từ người thứ 1, người này sẽ giết người thứ 2, người thứ 3 sẽ giết người thứ 4, cứ tiếp tục theo nguyên tắc người còn sống sẽ giết người ngồi gần người đó nhất theo chiều kim đồng hồ. Hỏi người sống sót cuối cùng mang thứ tự nào ?

(The Josephus Problem)

Về Lịch Sử Bài Toán: Bài toán được đặt tên theo Flavius Josephus, một sử gia người Do Thái. Cuộc bao vây Yodfat đã khiến ông và 40 người lính bị những người lính La Mã vây trong 1 hang động. Họ thà tự tử còn hơn là bị bắt giữ và giải quyết cách tự tử bằng việc bốc thăm. Josuphus và 1 người khác còn sống đến cuối cùng. Và từ đây bài toán ra đời.

Cách Tiếp Cận :

-Chúng ta sẽ giả sử có 6 người. Khi đó chúng ta sẽ có hình 1. Người thứ 1 sẽ giết người thứ 2, người thứ 3 sẽ giết người thứ 4, người thứ 5 sẽ giết người 6. Vì không có người thứ 7 nên Người số 1 sẽ giết người thứ 3, người thứ 5 sẽ giết người thứ 1. Vậy người thứ 5 sẽ là người sống sót cuối cùng.

Ta có bảng sau:

1
6 2
5 3
4

Hình 1

1
5 3

Hình 2

Số người tham gia	Thứ tự người sống sót cuối
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1
9	3
10	5
11	7
12	9
13	11
14	13
15	15

- Nhìn vào bảng ta dễ thấy thứ tự người sống sót cuối cùng luôn là số lẻ bởi vì ta bắt đầu từ người số 1 nên tất cả người ở thứ tự chẵn sẽ bị giết. Ta dễ thấy nếu người tham gia có dạng 2^k thì người sống sót cuối cùng luôn là người số 1. Thật vậy, nếu người chơi có dạng 2^k thì sau khi kết thúc vòng 1, số người chơi giảm đi 1 nửa (bởi số người chẵn bị giết hết). Lúc này số người chơi có dạng 2^{k-1} và cứ tiếp tục ta sẽ chỉ còn người chơi số 1 sống sót cuối cùng.
- Ta để ý mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn:

$$n = 2^k + b \ \ (b < 2^k) \text{ (k lớn nhất)}$$

Vậy nếu người tham gia có dạng $2^k + b$ thì sau b người chết thì số lượng người còn lại là 2^k. Lúc này ai là người bắt đầu lượt thì sẽ là người sống sót cuối cùng.

Giống như ví dụ trên, ta thấy người 1 bắt đầu thì sẽ là người sống sót cuối cùng khi người tham gia có dạng 2^k.

Vậy câu hỏi đặt ra là sau khi b người chết thì người ở thứ tự nào sẽ bắt đầu tiếp ?

-Sau khi b người chết, người ở vị trí 2b + 1 sẽ bắt đầu tiếp. Bởi vì số người mang thứ tự chẵn luôn là người bị giết nên ta có điều như trên. Vậy người thứ 2b +1 sẽ là người sống sót cuối cùng.

Ta ví dụ có 13 người tham gia thì $n = 13 = 2^3+5$. Vậy người sống sót cuối cùng là $2b+1 = 2.5 + 1 = 11$. Nếu $n = 100 = 2^6 + 36$; người sống sót cuối cùng là $2b+1 = 2.36 + 1 = 73$.

-Ta có thể tìm ra người sống sót cuối cùng bằng hệ nhị phân. Ta biểu diễn:

$$n = 2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^1 + 1.$$

Giả sử $n = 40 = 2^5+2^3$. Ta lập bảng tần suất xuất hiện các số từ số có số mũ lớn nhất đến 2^0. Ta có bảng sau:

N= 40	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Tần suất	1	0	1	0	0	0

Ta được : F_{40}= 10100 . Ta đảo số đầu tiên về cuối ta được : A_{40}= 01001. Ta biểu diễn lại tổng theo hệ nhị phân A : $2^4 + 2^0 = 17$. Đây là người sống sót cuối cùng.

Kết Luận : Nếu có $n=2^k+b$ (k là số tự nhiên lớn nhất) người tham gia thì người sống sót cuối cùng là 2b+1 (Trò chơi bắt đầu từ người thứ 1).

Cách Phát Triển Bài Toán : Rõ ràng ta có thể bắt đầu trò chơi từ người bất kỳ. Nếu bắt đầu từ người thứ m ($1<=m<=n$) thì người sống sót cuối cùng là 2b+m ($2b+m<n$). Nếu $2b+m>n$ thì người sống sót cuối cùng là 2b+m-n. Lập luận tương tự như trên.

Ta có thể mở rộng bài toán bằng cách mỗi người có thể giết m người kế tiếp. Hoặc sau mỗi lượt chơi, có thể "hồi sinh" 1 người đã chết từ vị trí cụ thể ….Phần giải của bài toán mở rộng xin giành cho các bạn .

Bài 2 : A và B chơi 1 trò chơi như sau : Mỗi người có thể đọc 1 số hoặc 2 số hoặc 3 số bắt đầu từ 1 (các số là số tự nhiên liên tiếp). Sau khi 1 người đọc xong, người còn lại tiếp tục đọc như quy luật trên với các số kế tiếp . Ai là người đọc đến số 30 là người chiến thắng. Nếu A là người đi trước, hãy tìm chiến thuật để A luôn là người chiến thắng.

(Đạt-K53)

Cách Tiếp Cận : Ta có thể ví dụ 1 lần chơi diễn ra như sau : A đọc 1,2,3 ; B đọc 4,5 ; A:6 ; B:7,8,9 ; A:10,11,12 ; B:13,14 ; A:15 ; B:16,17,18; A:19,20,21; B: 22 ; A: 23,24 ; B: 25,26,27 ; A=28,29,30. Vậy A là người chiến thắng.

-Đây là 1 bài toán khá dễ bởi chúng ta có thể thấy ngay là nếu người chơi đạt được các số 26,22,18,14,10,6,2 thì sẽ chiến thắng. Bởi khi đạt được số 26, người chơi còn lại dù nói mấy số, ta đều có thể đạt được số 30. Lập luận tương tự, ta được các số như trên. Vậy ta tìm các số trên bằng cách nào ?

-Vì mỗi người chỉ có thể đọc tối đa 3 số nên ta chọn các số khoảng cách giữa chúng là 4 và lấy số 30-4k thì ta được các số trên.

Kết luận : Nếu có m số và mỗi người được đọc tối đa k số ($1 \le k < m$; m không chia hết cho k) thì người đi trước luôn là người chiến thắng. Các số mà người đi trước cần đạt tới là :

$$A = \left\{\frac{m}{k+1}\right\} + b.(k+1) \quad \left(0 \le b \le \left[\frac{m}{k+1}\right] - 1; b \in N\right)$$

-Ở đây, ta ký hiệu $\left\{\frac{a}{b}\right\}$ là số dư của a chia cho b ; $\left[\frac{a}{b}\right]$ là phần nguyên của a chia cho b.

- Trong trường hợp $\left\{\frac{a}{b}\right\}=0$ thì người đi sau luôn là người chiến thắng .

Cách Phát Triển : Ta có thể thay đổi bài toán là ai đọc tới số m trước là thua. Khi đó chiến thuật để chiến thắng là chỉ cần đạt tới số m-1 trước đối thủ. Lập luận tương tự như bài trên với m-1. Hoặc ta có thể xem ai là người chọn được nhiều số nguyên tố nhất là người chiến thắng …

Bài 3 : Có m số tự nhiên liên tiếp viết trên bảng bắt đầu từ 1,2,…,m. Hai bạn A và B chơi 1 trò chơi như sau : Bạn A chọn 1 số bất kì trên bảng. Bạn B sẽ hỏi bạn A rằng trong tất cả số ở vị trí chẵn có số của bạn A không. Nếu A trả lời có thì sẽ chuyển hết tất cả số ở vị chẵn lên đầu mà vẫn giữ nguyên thứ tự chúng. Nếu A trả lời không thì sẽ chuyển hết tất cả số ở vị trí chẵn về cuối mà vẫn giữ nguyên thứ tự chúng. Tiếp tục làm như vậy, số của Bạn A sẽ là số đầu tiên sau hữu hạn các bước . Liệu bạn B có thể đoán được số bước tối thiểu để số bạn A chọn là số đầu tiên không ?

(Đạt-K53)

Cách Tiếp Cận : Ta giả sử n=12, ta có dãy số sau :

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

-Giả sử bạn A chọn số 9 thì khi đó số 9 không phải ở vị trí chẵn nên ta chuyển các số ở vị chí chẵn về cuối, ta được dãy mới như sau :

1,3,5,7,9,11,2,4,6,8,10,12

-Tiếp tục, số 9 ở vị trí 5 , tức là ở vị trí lẻ , ta tiếp tục chuyển các số ở vị chẵn về cuối, ta được :

1,5,9,2,6,10,3,7,11,4,8,12

-Tiếp tục, ta được :

1,9,6,3,11,8,5,2,10,7,4,12

-Tiếp tục, ta được :

9,3,8,2,7,12,1,6,11,5,10,4

-Vậy sau 4 bước ta được số 9 ở số đầu tiên. Dù có thực hiện bao nhiêu bước nữa thì số 9 luôn là số đầu tiên nên 4 bước là số bước tối thiểu. Ta có bảng sau:

Số bạn A chọn	Số bước tối thiểu
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	3
8	3
9	4
10	4
11	4
12	4
13	4
14	4

15	4
16	4
17	5
18	5
19	5
20	5
21	5
22	5

-Nhìn vào bảng ta dễ thấy số A chọn và số bước tối thiểu liên quan với nhau theo công thức :

$$a \leq 2^k \ \text{(k là số bé nhất và } k \in N \text{)} \qquad (1)$$

Trong đó : a là số bạn A chọn và k là số cách tối thiểu để số bạn A chọn là số đầu tiên.

-Ta sẽ chứng minh công thức (1). Trước hết ta xét a có dạng 2^k, khi đó M ở vị trí chẵn nên các số ở vị trí chẵn sẽ chuyển lên đầu. Vì tất cả số ở vị trí chẵn chuyển lên đầu nên sẽ có $\frac{m}{2}$ số chẵn ở trên đầu và $\frac{m}{2}$ số lẻ ở cuối. Nên lúc này vị trí của a là 2^{k-1} . Cứ tiếp tục , ta được vị trí của a là $2^0 = 1$ sau k bước. Vậy k là số bước tối thiểu khi a có dạng 2^k.

-Xét $2^{k-1} < a < 2^k$: Ta có a là vị trí bạn A chọn. Sau mỗi bước, ta luôn có thể đảm bảo là số a sẽ thuộc nửa đầu của dãy số vì số a nếu ở vị trí chẵn sẽ chuyển hết số chẵn lên đầu, số a ở vị trí lẻ thì mọi số ở vị trí lẻ sẽ chuyển lên đầu. Nên sau bước đầu tiên , số a sẽ ở vị trí $\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil$ ($\left\lceil\frac{a}{b}\right\rceil$ là ký hiệu phần nguyên lấy trên của a chia cho b). Sau 2 bước đầu, số a ở vị trí $\left\lceil\frac{a}{4}\right\rceil$. Sau k bước, số a ở vị trí $\left\lceil\frac{a}{2^\wedge k}\right\rceil$. Số bước đạt giá trị tối thiểu khi $\left\lceil\frac{a}{2^\wedge k}\right\rceil = 1$ hay $a < 2^k$ (n là số tự nhiên nhỏ nhất) hay a = k . Vậy nếu $2^{k-1} < a < 2^{k+1}$ thì số bước tối thiểu để số a là số đầu tiên là k. Vậy công thức (1) được chứng minh.

Kết Luận : Vậy a là số bạn A chọn và k là số cách tối thiểu để số bạn A chọn là số đầu tiên thì :

$$a \leq 2^k \ \text{(k là số bé nhất và } k \in \text{N).}$$

Bài 4 : Trên bảng đen, viết 2016 dấu cộng (+) và 2017 dấu trừ (-). Cho phép xóa 2 dấu tùy ý và viết thay vào đó dấu cộng nếu 2 dấu đã xóa là như nhau, và dấu trừ trong trường hợp ngược lại. Lặp lại phép toán đó 4032 lần, ta còn lại 1 dấu. Hỏi đó là dấu gì ?

(Tạp chí Pi Tập 1 Số 2)

Cách Tiếp Cận : Ta hãy xem trong cả quá trình nói trên, có cái gì là bất biến không? Tất nhiên để làm toán thì con số vẫn dễ chịu hơn. Ta viết số 1 thay cho mỗi dấu cộng, số -1 thay cho dấu trừ. Khi đó phép toán đã cho tương đương với việc thay hai số tùy ý bằng tích của chúng. Vấn đề bây giờ thật đơn giản. Phép toán của chúng ta không làm thay đổi tích các số đã cho trên bảng. Như vậy, tích các số còn lại trên bảng tại mỗi thời điểm là 1 bất biến. Ở trạng thái xuất phát, tích đó bằng -1, vậy dù ta thực hiện phép toán cho phép theo thứ tự thế nào, dấu cuối cùng còn lại trên bảng là dấu trừ.

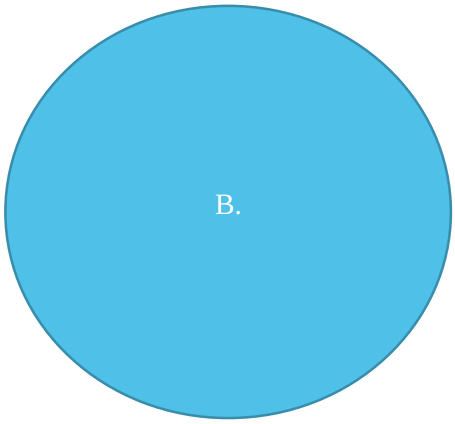
-Ta cũng có thể thay mỗi dấu cộng bằng số 0, mỗi dấu trừ bằng số 1. Khi thực hiện phép toán đã cho, tổng của 2 số bị xóa cùng tính chẵn lẻ với số thay thế cho 2 số đó. Như vậy, tính chắn lẻ của tổng các số trên bảng trong mỗi thời điểm là một bất biến. Ở trạng thái xuất phát, tổng các số trên bảng là số lẻ. Như vậy, khi trên bảng còn lại 1 số thì số đó phải là số 1, tức là dấu còn lại chính là dấu trừ.

Kết Luận : Trong 2 cách giải trên, ta đều dựa vào 1 bất biến nào đó. Trong cách giải thứ nhất,đó là tính không đổi của tích các số đã viết, cách thứ 2 dựa trên sự bất biến của tính chẵn lẻ của tổng các số. Như vậy, chìa khóa để giải bài này chính là tìm ra sự bất biến trong bài.

Bài 5 : Có 1 con chuột đang bơi trong 1 cái ao. Giả sử con chuột ở giữa tâm cái ao. Ở trên bờ, có một con mèo đang rình mò con chuột. Biết rằng vận tốc của con mèo gấp 4 lần vận tốc của con chuột dưới nước và con mèo không thể xuống nước được (nó chỉ đứng được trên bờ ao). Tồn tại hay không 1 chiến thuật giúp con chuột bơi tới bờ mà không bị con mèo bắt ?

(Game Of Cat And Mouse)

Cách Tiếp Cận :



<u>**Bài 6 :**</u> Có 100 người được đánh thứ tự từ 1 đến 100 và có 100 cái rương được được đóng. Người thứ nhất mở tất cả các rương. Người thứ 2 thay đổi trạng thái của các rương ở vị trí chẵn (đóng thành mở, mở thành đóng). Người thứ 3 thay đổi trạng thái của các rương ở vị trí 3,6,9,12,…99. Người thứ 4 thay đổi trạng thái của các rương ở vị trí 4,8,12,…100. Cứ tiếp tục như thế cho đến khi hết 100 người.

Kho báu được cất ở những rương được mở sau khi 100 người thực hiện xong. Hãy tìm những rương đó?

(TED-Ed)

Cách Tiếp Cận : Chúng ta sẽ tìm những người có thể thay đôi trạng thái của những rương cố định. Ví dụ ở rương số 6, người thứ 1 mở nó, rồi tiếp tục người thứ 2 đóng nó, người thứ 3 mở nó và cuối cùng người thứ 6 đóng nó. Từ đây, chúng ta có thể dễ dàng kết luận rằng vị trí của những người có thay đổi trạng thái của 1 rương nào đó phải là các ước của số ghi trên rương đó. Chúng ta thấy ước của 6 là 1,2,3,6 nên những người ở vị trí này sẽ thay đổi trạng thái của rương 6. Dễ dàng thấy nếu số lượng ước số là số chẵn thì rương đó sẽ đóng, số lượng ước số là lẻ thì rương đó sẽ mở. Hầu hết các rương đều có ước số là chẵn vì các ước số thường ghép cặp với nhau. Ví dụ 6 = 1.6 = 2.3 do đó 6 có số ước số là chẵn. Từ đây, chúng ta có thể suy ra các số có số ước số là lẻ phải là các số chính phương bởi vì chúng có 1 ước số mà khi nhân với bằng số bình phương. Ví dụ ở rương số 9, người thứ 1 sẽ mở, người thứ 3 sẽ đóng, người thứ 9 sẽ mở. Vì thế, mỗi rương mang số chính phương sẽ duy trì trạng thái mở. Vậy kho báu ở các rương 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100.

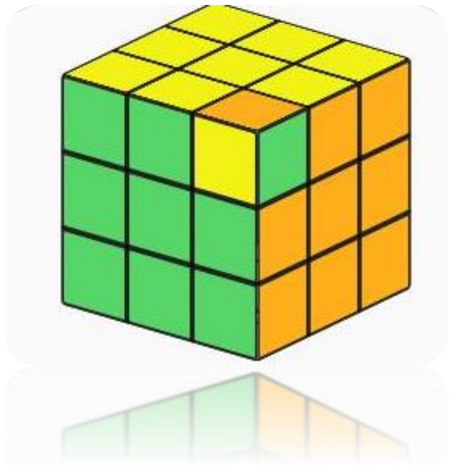
-Chúng ta cũng có thể tính được số lượng rương chứa kho báu :

$$1 \le k \le \sqrt{n} \quad (\text{k} \in N)$$

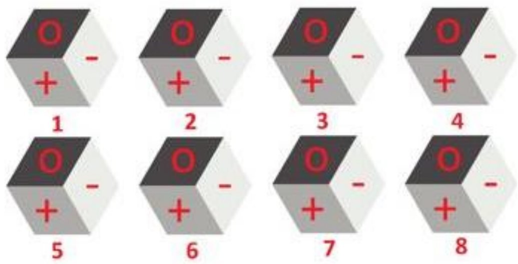
Với n là tổng số rương và k là số lượng rương chứa kho báu.

Cách Phát Triển : Chúng ta có thể thay câu hỏi là hãy tìm số rương chỉ được chạm 2 lần. Tức là hãy tìm các số có 2 ước chung. Các số đó chính là số nguyên tố. Chúng ta có thể thay đổi trạng thái mở và đóng bằng số 1 và 0, khi đó chúng ta sẽ được dãy nhị phân và từ đây chúng ta có thể phát triển 1 số bài toán tin học …

Bài 7 : Chứng minh rằng từ trạng thái bên dưới, sau 1 số hữu hạn bước xoay, ta không thể đưa rubik về trạng thái hoàn chỉnh (biết rằng 3 mặt phía sau ở trạng thái đúng).



Cách Tiếp Cận: Một khối rubik có tất cả 8 viên ở vị trí góc, các viên này không thể hoán vị với các viên ở vị trí cạnh. Mỗi viên góc có 3 mặt chứa màu, ta sẽ gán cho mỗi mặt đó 1 trong 3 cực: +,- và o.

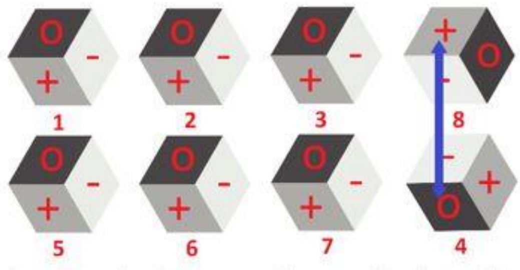


Ta sẽ gọi đây là trạng thái ban đầu của 8 viên góc đối với rubik. Khi 1 viên tự lật tại chỗ khiến cực o chuyển đến cực +, ta nói viên đó tự xoay 120°. Ngược lại nếu viên đó tự lật tại chỗ khiến cực o chuyển đến cực -, ta nói viên đó xoay -120°. Vậy ở trạng thái ban đầu, tổng các góc tự quay bằng 0.

Giả sử sau 1 số bước quay nhất định, ta hoán vị được 2 viên i và j ($j,i \in N, 1 \leq i,j \leq 8$). Xét

TH1: Mặt io hoán vị với mặt jo, trong trường hợp này 2 viên i và j chỉ di chuyển mà không lật, do đó tổng các quay là không đổi và bằng 0.

TH2: Mặt io hoán vị với mặt j+, khi đó viên i tự xoay -120° và viên j tự xoay 120° .



Vậy tổng các góc tự xoay bằng 120° + (-120°) =0.

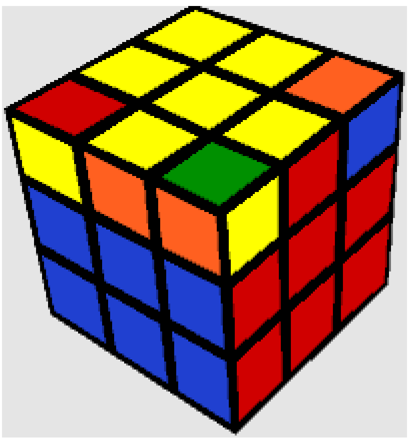
TH3: Mặt io hoán vị với mặt j-, xét tương tự trường hợp 2 ta có tổng các góc tự xoay bằng 0.

Tóm lại, khi hoán vị hai viêng góc bất kì, tổng các góc tự quay luôn bằng 0. Đối với chuỗi hoán vị của n viên, ta có thể chia ra thành các hoán vị 2 viên liên tiếp. Ví dụ chuỗi hoán vị $(1-) \rightarrow (2\ +) \rightarrow (3\ o) \rightarrow (4\ +) \rightarrow (1-)$ *có thể* tách lần lượt thành từng cặp hoán vị $(1\ -) \rightarrow (2\ +); (1\ -) \rightarrow (3\ o); (1\ -) \rightarrow (4\ +)$ và cho diễn ra lần lượt.

Như vậy mọi chuỗi hoán vị n viên đều có thể tách n-1 hoán vị 2 viên. Do đó tổng các góc tự quay sau khi hoán vị n viên là (n-1).0=0.

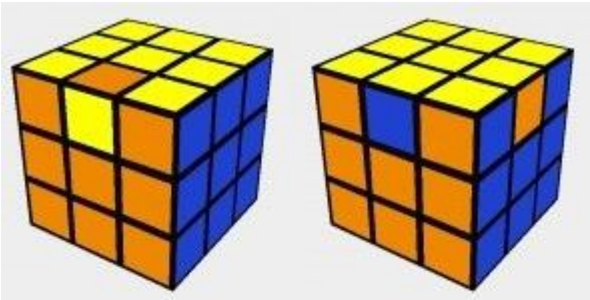
Kết Luận : Với mọi cách xoay hữu hạn bước, tổng các góc tự quay luôn luôn bằng 0°. Trong hình của đề bài, ta có thấy 1 góc duy nhất tự quay -120°, như vậy không tồn tại một cách xoay hữu hạn nào để đưa từ trạng thái hoàn chỉnh của rubik đến trạng thái trong hình, hay ngược lại, không tồn tại một cách xoay hữu hạn bước đưa rubik từ trạng thái trong hình trở về trạng thái hoàn chỉnh.

-Chúng ta có thể xoay các góc sao cho tổng các góc tự xoay bằng 0 thì luôn có thể đưa rubik về trạng thái ban đầu. Trừ 1 vài trường hợp như hình sau :



-Rõ ràng các góc tự xoay của hình trên có tổng bằng -360° nhưng vì các góc có tính hoán vị nên ta dễ dàng chuyển các góc trên về các góc có tổng bằng 0. Vậy chúng ta có thể kết luận rằng, nếu các góc tự xoay có tổng bằng $2k\pi$ thì chúng ta luôn có thể đưa cục rubik về trạng thái ban đầu.

-Chúng ta có thể đặt vấn đề với các cạnh của rubik. Dưới đây là 2 trạng thái về cạnh mà không thể đưa về rubik hoàn chỉnh:



Bài 8: Từ trạng thái hoàn chỉnh của rubik, chứng minh rằng khi ta lặp đi lặp lại 1 số hữu hạn các bước, rubik sẽ trở lại trạng thái hoàn chỉnh của nó.

(Đạt-K53)

Cách Tiếp Cận : Ta gọi các góc của rubik là $x_1, x_2, \ldots, x_8$, các cạnh là $y_1, y_2, \ldots, y_8$. Sau khi ta thực hiện 1 số hữu hạn các bước, sẽ có sự hoán vị giữa các góc và các cạnh (hoặc không có sự hoán vị với một vài góc và cạnh). Ta gọi vị trí góc x_i là vị trí trung gian. Khi đó sau khi thực hiện 1 số hữu hạn bước quay, góc x_i sẽ chuyển vị trí sang vị trí của góc x_j (i và j có thể bằng nhau) và góc x_j sẽ chuyển tới vị trí của góc x_k…Như vậy, các góc sẽ hoán vị cho nhau tạo thành vòng kín. Cứ tiếp tục thực hiên các bước như trên, các góc sẽ lần lượt hoán vị và quay trở về trạng thái hoàn chỉnh. Sau mỗi lần hoán vị, các góc có thể tự xoay nhưng vì các góc hoán vị theo vòng kín nên tổng các góc tự xoay bằng 0. Tương tự với các cạnh, ta có được điều phải chứng minh.

Bài 9: