Một phương pháp giải cho một hệ phương trình đặc biệt

Bùi Quang Đạt

Ngày 9 Tháng 2 Năm 2023

1. Mở đầu

- Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n = b_n \end{cases}$$

- Giả sử $a_{i,j} \neq 0\ \forall i, j$, chia phương trình thứ i cho a_{i1}, ta được phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}.x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}.x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + \dfrac{a_{n2}}{a_{n1}}.x_2 + \cdots + \dfrac{a_{nn}}{a_{n1}}.x_n = \dfrac{b_n}{a_{11}} \end{cases}$$

- Như vậy mọi hệ phương trình có các hệ số khác 0 đều có thể đưa về phương trình dạng dưới đây(ta sẽ gọi là hệ phương trình chuẩn tắc hay là hệ phương trình monic):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}.x_2 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + a_{n2}.x_2 + \cdots + a_{nn}.x_n = b_n \end{cases}$$

2. Hệ phương trình đặc biệt

- Cho hệ phương trình chuẩn tắc thỏa mãn điều kiện sau được gọi là hệ phương trình đặc biệt:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{13}}{{a_{12}}^2} = \dfrac{a_{23}}{{a_{22}}^2} = \cdots = \dfrac{a_{n3}}{{a_{n2}}^2} = k_2 \\ \dfrac{a_{14}}{{a_{12}}^3} = \dfrac{a_{24}}{{a_{22}}^3} = \cdots = \dfrac{a_{n4}}{{a_{n2}}^3} = k_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dfrac{a_{1n}}{{a_{12}}^{n-1}} = \dfrac{a_{2n}}{{a_{22}}^{n-1}} = \cdots = \dfrac{a_{nn}}{{a_{n2}}^{n-1}} = k_{n-1} \\ a_{12} \neq a_{22} \neq \cdots \neq a_{n2} \end{cases}$$

- Ta xét đa thức P(α) có degP = n - 1 và P(α) có dạng:

$$P(\alpha) = k_{n-1}.x_n.\alpha^{n-1} + k_{n-2}.x_{n-1}.\alpha^{n-2} + \cdots + k_2.x_3.\alpha^2 + x_2.\alpha + x_1$$

- Hệ phương trình tương đương với hệ sau: $\begin{cases} P(a_{12}) = b_1 \\ P(a_{22}) = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots.. \\ P(a_{n2}) = b_n \end{cases}$
- Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho P(α), ta được:

$$\mathrm{P}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i.\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\alpha - a_{j2})}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{i2}-a_{j2})}.$$

- Giá trị của $k_{n-1}.x_n$ sẽ là hệ số của α^{n-1} nên ta có:

$$k_{n-1}.x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{i2} - a_{j2})}$$

<=>

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{k_{n-1}.\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{i2} - a_{j2})}$$

- Tương tự ta có giá trị của x_{n-1}:

$$x_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i.\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{j2}\right)}{k_{n-2}.\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{i2} - a_{j2})}$$

- Tổng quát ta có giá trị của x_{n-k}:

$$x_{n-k} = (-1)^k.\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i.\left(\sum \prod_{j\epsilon\{1,2\dots,n\}\backslash i} a_{j2}\right)}{k_{n-k-1}.\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{i2} - a_{j2})}$$

3. Ví dụ

- Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 27x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 48x_3 = -3 \end{cases}$$

Giải

-Xét đa thức P(α) = $3x_3\alpha^2 + x_2\alpha + x_1$. Có P(2) = 1, P(3) = 5, P(4) = -3.
Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho P(α), ta được:

$$\mathrm{P}(\alpha) = P(2).\frac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{(2-3)(2-4)} + P(3).\frac{(\alpha-2)(\alpha-4)}{(3-2)(3-4)} + P(4).\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{(4-2)(4-3)}.$$

$$x_3 = \frac{P(2)}{3.(2-3)(2-4)} + \frac{P(3)}{3.(3-2)(3-4)} + \frac{P(4)}{3.(4-2)(4-3)} = -2$$

$$x_2 = -\frac{P(2).(3+4)}{3.(2-3)(2-4)} - \frac{P(3).(2+4)}{3.(3-2)(3-4)} - \frac{P(4).(2+3)}{3.(4-2)(4-3)} = 34$$

$$x_1 = \frac{P(2)}{3.(2-3)(2-4)} + \frac{P(3)}{3.(3-2)(3-4)} + \frac{P(4)}{3.(4-2)(4-3)} = -43.$$