Lista zadań nr 2

„Rachunek funkcyjny. Definicja funkcji. Dziedzina i zbiór spełnienia funkcji zdaniowej. Kwantyfikatory. Prawa rachunku funkcyjnego”

Zad.1. Wyznaczyć zakres zmienności (dziedzinę) i zbiór spełniania następujących funkcji zdaniowych:

a) $x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 9 = 0$

c) $|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9$

d) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2} > 0$

e) $4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-2x} = \sqrt{2x-12}$

g) $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$

Zad.2. Wyznacz zbiory spełniania alternatywy i koniunkcji funkcji zdaniowych $\varphi(x)\ i\ \psi(x)$:

a) $\varphi(x): x^2 + 3x + 2 > 0,\qquad \psi(x): x + 2 < 0$

b) $\varphi(x): x^2 + 3x + 2 = 0,\qquad \psi(x): x + 1 < 0$

c) $\varphi(x): x^2 + 2x - 3 < 0,\qquad \psi(x): x - 2 > 0$

d) $\varphi(x): -x^2 + 2x - 2 > 0,\qquad \psi(x): x + 2 < 0$

Zad.3. Wyznaczyć zbiory spełniania implikacji $\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$ i równoważności $\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)$ funkcji zdaniowych $\varphi(x)\ i\ \psi(x)$:

a) $\varphi(x): x^2 + x + 5 > 0,\qquad \psi(x): x + 2 < 0$

b) $\varphi(x): x^2 + 4x < 0,\qquad \psi(x): x - 1 < 0$

c) $\varphi(x): x^2 - 9 > 0,\qquad \psi(x): x - 3 > 0$

d) $\varphi(x): \frac{1}{2x^2} > 8,\qquad \psi(x):\ x^2 + 5x + 4 = 0$

Zad.4. Zbadać, czy następujące pary funkcji zdaniowych są równoważne:

a) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0,\qquad \frac{(x-1)(x-3)}{x+2} > 0$

b) $\sqrt{x+7} > 2x - 1,\qquad x + 7 > (2x-1)^2$

c) $\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3} \geq 0,\qquad \frac{2-x}{x^2-x+1} \geq 0$

d) $\sqrt{(x-1)^2} = 2,\qquad x - 1 = 2$

e) $\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-10x+25} = 10,\qquad |x+2| + |x-5| = 10$

Zad.5. Zbadać, czy funkcje zdaniowe (a) i (b) są równoważne:

1. (a) Nie jest prawdą, że liczba naturalne *k* jest podzielna przez liczbę naturalną *l* i przez liczbę naturalną *m*.

   (b) Nie jest prawdą, że liczba naturalna *k* jest podzielna przez liczbę naturalną *l* lub nie jest prawdą, że liczba naturalna *k* jest podzielna przez liczbę naturalną *m*.

2. (a) Nie jest prawdą, że prosta a jest równoległa do prostej b lub prosta a jest równoległa do prostej c.

(b) Prosta a nie jest równoległa do prostej b i prosta a nie jest równoległa do prostej c.

3. (a) Jeżeli czworokąt ABCD jest prostokątem i ma wszystkie boki tej samej długości, to ABCD jest kwadratem.

(b) Jeżeli czworokąt ABCD jest prostokątem, to z faktu, że czworokąt ABCD ma wszystkie boki tej samej długości wynika, że jest kwadratem.

Zad.6. Korzystając z prawa zaprzeczenia implikacji, podać zaprzeczenia następujących funkcji zdaniowych:

a) Jeżeli liczby naturalne *a* i *b* są parzyste, to suma *a+b* jest liczbą parzystą

b) Jeżeli α i β są kątami ostrymi oraz α + β=90^o, to sin α =cos β i cos α =sin β

c) Jeżeli liczby *a* i *b* są niewymierne, to różnica *a – b* jest liczbą wymierną

d) Jeżeli liczba naturalna *a* jest podzielna przez 2 i 3, to liczba *a* jest podzielna przez 6

Zad.7. Korzystając z prawa kontrapozycji, podać równoważne sformułowania następujących funkcji zdaniowych:

a) Jeżeli liczba pierwsza *p* dzieli liczbę a^2, to liczba p dzieli liczbę naturalną *a*.

b) Jeżeli punkt M należy do dwusiecznej kąta wypukłego AOB, to jego odległości od ramion tego kąta są równe.

c) Jeżeli suma cyfr liczby naturalnej a jest podzielna przez 3, to liczba a jest podzielna przez 3.

Zad.8. Ocenić wartość logiczną następujących zdań:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 > 0]$

b) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{R}\ [x + y = 2]$

c) $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ [n > m]$

d) $\exists x \in \mathbb{R}\quad [\sim(x \neq 0 \Rightarrow x^2 - x \neq 0)]$

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ [(x < x + 1) \Rightarrow (2 > 3)]$

f) $\forall x \in \mathbb{R}\ \left[(x < \sqrt{2}) \vee (x > \sqrt{2})\right]$

g) $\exists x \in \mathbb{R}\quad [x^2 + 1 \geq 0]$

Zad.9. Napisać zdania będące zaprzeczeniem poniższych zdań i ocenić ich wartość logiczną:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ [x^2 \geq 0]$

b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ [x + y = 0]$

c) $\exists x \in \mathbb{R}\ [x^2 = 2x]$

d) $\forall x \in \mathbb{N}\ [x^2 + 1 > 0]$

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ [(x > 2) \vee (x < 2)]$

f) $\forall x \in \mathbb{R}\ [(x^2 > 0) \Rightarrow (x < 0)]$

Zad.10. Zapisać w języku symbolicznym następujące zdania sformułowane w języku naturalnym:

a) Każda liczba rzeczywista jest równa samej sobie

b) Kwadrat liczby wymiernej jest liczbą wymierną

c) Jeżeli dwie liczby całkowite dzielą się wzajemnie jedna przez drugą, to różnią się co najwyżej znakiem

d) Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje większa od niej liczba naturalna

e) Nie istnieje największa liczba naturalna

f) Ciąg (a_n) jest rosnący