

Matematyka 1

Lista nr 1: „Rachunek zdań. Zdania logiczne. Funktory. Formuły zdaniowe. Tautologia i kontrtautologia. Prawa rachunku zdań”

Zad.1. Które z podanych wyrażeń są zdaniami logicznymi?

- a) Rozwiąż zadanie!
- b) Jutro będzie piękna pogoda.
- c) Czy pójdziesz dzisiaj do kina?
- d) Zamek wawelski w Krakowie był siedzibą polskich królów.
- e) Wieloryb jest ssakiem.
- f) Funkcja f jest rosnąca.
- g) Kwadrat dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej jest liczbą dodatnią.
- h) $2+3 = 6$
- i) $x+2 > 0$

Zad.2. Oceń wartość logiczną następujących zdań.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+n}$ jest liczbą naturalną i $\frac{9^6+81^2 \cdot 9^3}{3^{10}-9^9+27^6} = 90$.
- b) Liczba $\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{29-12\sqrt{5}}$ jest naturalna lub spełniona jest nierówność $3\sqrt{2} < 2\sqrt{3}$.
- c) $3|5 \Leftrightarrow (2|8 \Rightarrow 2|7)$.
- d) $(\sqrt{3} \leq \sqrt{2}) \Rightarrow [((2\sqrt{3})^2 \leq (2\sqrt{2})^2) \vee (-\sqrt{3} \geq -\sqrt{2})]$.
- e) Zero jest niedodatnie i zero jest nieujemne.
- f) Jeśli nieprawdą jest, że $2 < 1$, to $2 < 0$ lub $2 \geq 1$.
- g) Jeżeli liczby 3, 4, 5 są długościami boków trójkąta, to obwód tego trójkąta jest równy 12 i trójkąt ten jest prostokątny.
- h) $\log_{\sqrt{2}} 16$ jest liczbą naturalną, co jest równoważne temu, że jeśli $x \leq y$, to $\log_{\frac{1}{4}} x \geq \log_{\frac{1}{4}} y$.

Zad.3. Sprawdzić, które z podanych formuł są tautologiami/kontrtautologiami rachunku zdań.

- a) $p \Rightarrow (\sim p \vee p)$
- b) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
- c) $\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
- e) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
- f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- g) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
- h) $((p \vee q) \Rightarrow (p \vee \sim q)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$
- i) $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

Zad.4. Sprawdzić, metodą nie wprost, które z podanych formuł są tautologiami rachunku zdań.

- a) $(\alpha \wedge \sim \alpha) \Rightarrow (\alpha \vee \sim \alpha)$
- b) $\sim(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \vee \alpha)$

- c) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
- d) $[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)] \Rightarrow [\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)]$
- e) $\{[(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma] \wedge [(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \sim \gamma]\} \Rightarrow (\sim \alpha \wedge \sim \beta \wedge \sim \gamma)$

Zad.5. Zbadaj czy schematy są regułami wnioskowania

a) $\frac{(\sim q) \Rightarrow r, (\sim q) \Rightarrow (\sim r)}{q}$

b) $\frac{p \Rightarrow q, p \Rightarrow (\sim q)}{\sim q}$

Zad.6. Napisz z jaką regułą wnioskowania związane jest rozumowanie.

- a) Dzisiaj jest pierwszy dzień lipca, a jeśli dzisiaj jest pierwszy dzień lipca, to jutro jest drugi dzień lipca, a więc jutro jest drugi dzień lipca.
- b) Zachodzi $x > 5$, a więc zachodzi $x \geq 5$.
- c) Jeżeli przekształcenie ma trzy nie współliniowe punkty stałe, to każdy punkt płaszczyzny jest punktem stałym tego przekształcenia, to przekształcenie jest tożsamościowe, a więc, jeśli przekształcenie ma trzy nie współliniowe punkty stałe to jest to przekształcenie tożsamościowe płaszczyzny.

Zad.7. Konstruując odpowiednią formułę rachunku zdań sprawdzić, czy prawdziwe jest zdanie:

- a) jeżeli 13 dzieli się przez 2, to z faktu, że 13 nie dzieli się przez 2 wynika, że 13 dzieli się przez 3.
- b) jeżeli $8 > 5$, to warunek $8 \leq 5$ jest równoważny równości $8 = 5$.
- c) jeżeli $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną i nieprawdą jest, że $\sqrt{3}$ jest liczbą mniejszą od 1, to $3^2 = 10$.

Zad.8. Zdefiniować alternatywę, koniunkcję i równoważność za pomocą implikacji i negacji.

Zad.9. Zdefiniować koniunkcję, implikację i równoważność za pomocą alternatywy i negacji.

Zad.10. Zdefiniować alternatywę, implikację i równoważność za pomocą koniunkcji i negacji.

Zad.11. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory punktów, których współrzędne spełniają następujące formuły zdaniowe.

- a) $x^2 + y^2 \leq 4$.
- b) $y + 1 < x$.
- c) $xy > 0$.
- d) $|xy| \leq 0$.
- e) $|x| = |y|$.