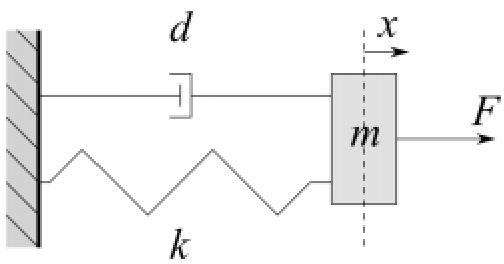
Przedmiot wybieralny VI - Podstawy automatyki	
Zadanie 1: Równania stanu i transmitancja operatorowa. Charakterystyki czasowe układów dynamicznych.	
Jakub Jadwiszczak Marek Kędziera	2019/2020 Informatyka 1st. 3 rok
Data oddania: 18.04.2020	Ocena:

1. **Cel ćwiczenia**

- Formułowanie równań stanu. Przejście z równań różniczkowych do transmitancji operatorowej.

- Wykreślenie charakterystyk czasowych wybranych układów dynamicznych.

2. Wstęp



Rys.1. Schemat układu.

Model układu dynamicznego z rysunku 1 można opisać równaniem różniczkowym:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + d\frac{dx}{dt} + kx = F(t),$$

gdzie m – masa, d – współczynnik tłumienia/tarcia, k – współczynnik sztywności sprężyny, x– przemieszczenie masy, F(t) – siła zewnętrzna, t – czas.

Aby je rozwiązać, należy wprowadzić dodatkową zmienną v (prędkość), dzięki czemu otrzymujemy dwa równania różniczkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F(t) - dv - kx}{m}.$$

Postać ogólna równań stanu to:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

gdzie: $x(t)$ – wektor zmiennych stanu, $\dot{x}(t)$– pochodna (po czasie) wektora stanu, $u(t)$ – wektor wejść, $y(t)$ – wektor wyjść, **A** – macierz stanu, **B** – macierz wejść, **C** – macierz wyjść, **D** – macierz przenoszenia.

Układ z rysunku 1 opisany na podstawie równań różniczkowych:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t),$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}.$$

Transmitancja operatorowa to stosunek transformaty Laplace’a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace’a sygnału wejściowego układu przy zerowych warunkach początkowych. Transmitancja jest częstotliwościowym modelem układu (z jednym wejściem i wyjściem), określonym w dziedzinie s. Stosując transformatę Laplace’a otrzymujemy:

$$ms^2X(s) + dsX(s) + kX(s) = F(s),$$

następnie tworzymy transmitancję operatorową:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{X(s)}{ms^2X(s) + dsX(s) + kX(s)} = \frac{1}{ms^2 + ds + k}.$$

a. Transmitancja operatorowa I-go rzędu:

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

b. Transmitancja operatorowa obiektu różniczkującego rzeczywistego:

$$G(s) = \frac{ks}{Ts + 1}$$

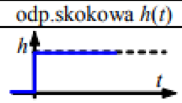
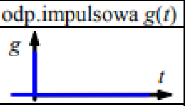
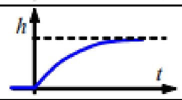
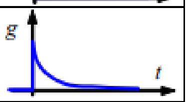
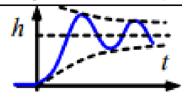
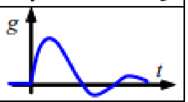
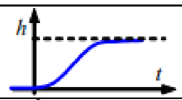
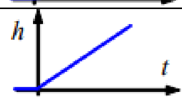
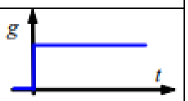
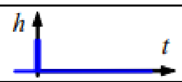
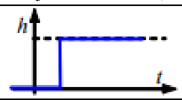
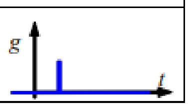
c. Transmitancja operatorowa obiektu całkującego:

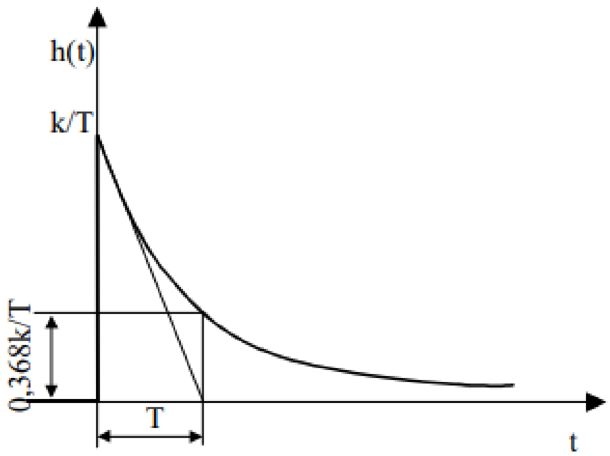
$$G(s) = \frac{1}{Ts}$$

Charakterystyki skokowe i impulsowe wybranych transmitancji operatorowych:

Człon oscylacyjny odpowiada transmitancji operatorowej obiektu iteracyjnego II-go rzędu.

Tab. VI-1. Podstawowe człony dynamiki i ich odpowiedzi czasowe ⓘ[2]

człon	transmitancja $G(s)$	parametry	odp.skokowa $h(t)$	odp.impulsowa $g(t)$
proporcjonalny	K	K – wzmocnienie		
inercyjny	$\frac{K}{Ts+1}$	K – wzmocnienie T – stała czasowa, T>0		
oscylacyjny	$\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	ξ – tłumienie (damping ratio) ω_n – pulsacja drgań własnych nietłumionych (pulsacja własna), undamped natural frequency ω_n>0		
				
całkujący	$\frac{1}{T_i s}$	T_i – czas całkowania		
różniczkujący	$T_d s$	T_d – czas różniczkowania		
opóźniający	e^{-sT_0}	T_0 – czas opóźnienia, T_0>0		



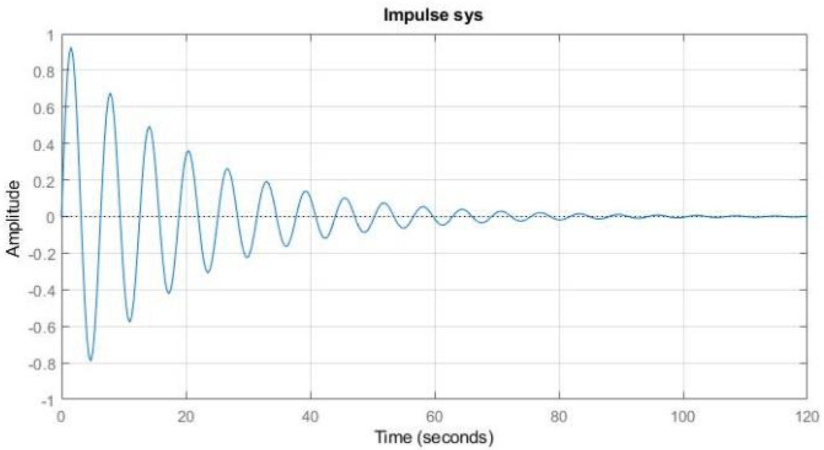
Rys. V.1. Charakterystyka skokowa rzeczywistego członu różniczkującego

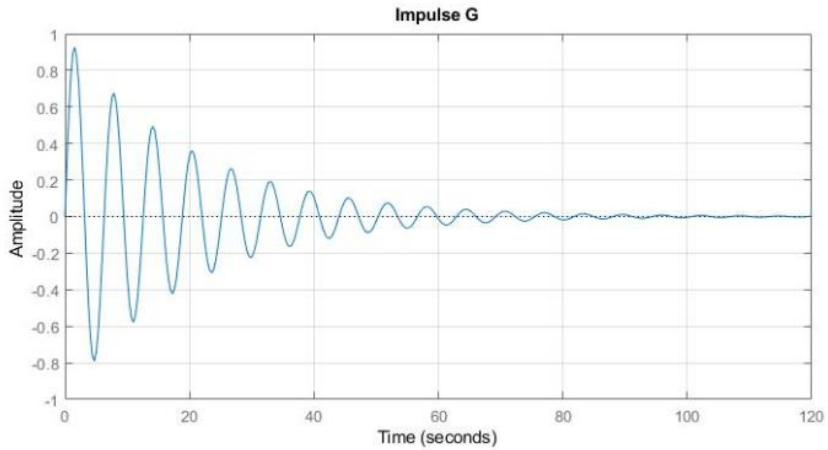
3. Przebieg ćwiczenia:

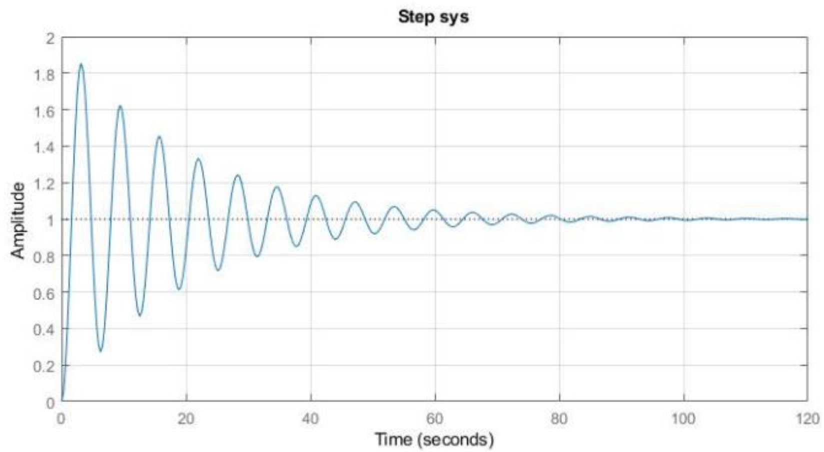
Implementacja programu do wyświetlenia charakterystyk skokowych i impulsowych transmitancji operatorowej oraz modelu stanu dla układu z rys. 1.

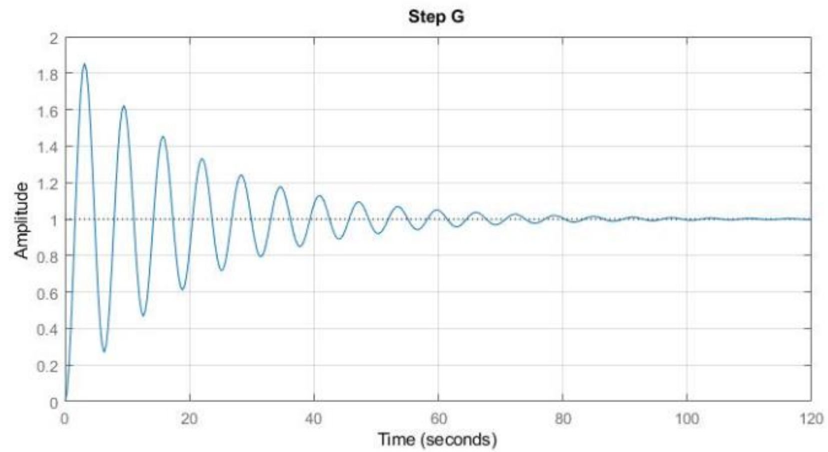
```
clear all
close all
clc

m=1; %masa
d=0.1; %współczynnik tłumienia/tarcia sprężyny
k=1; %współczynnik sztywności sprężyny
F=5; %siła zewnętrzna

A = [0 1; -k/m -d/m];
B = [0 1/m]';
C = [1 0];
D = [0];
sys = ss(A,B,C,D); %tworzy model zmiennych stanu

licznik=1;
mianownik=[m d k];
G=tf(licznik,mianownik);


subplot(2,2,1);
impulse(sys);
title('Impulse sys');
grid on;

subplot(2,2,2);
impulse(G);
title('Impulse G');
grid on;
```

```
subplot(2,2,3);
step(sys);
title('Step sys');
grid on;

subplot(2,2,4);
step(G);
title('Step G');
grid on;
```

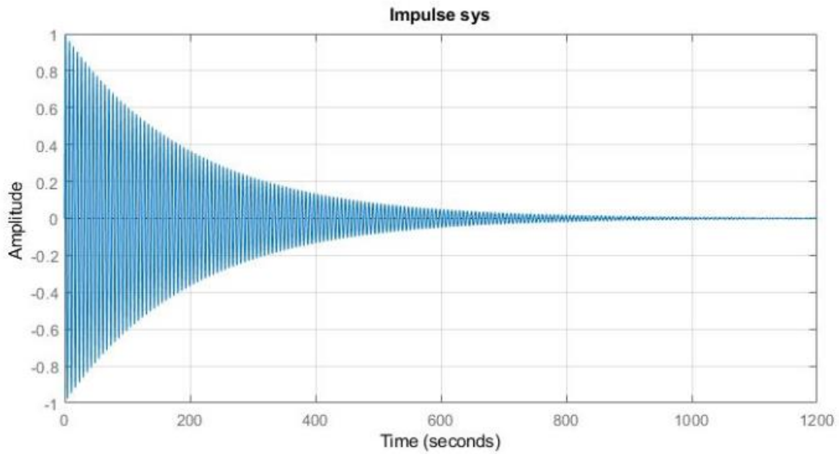

Impulse sys
Amplitude
Time (seconds)

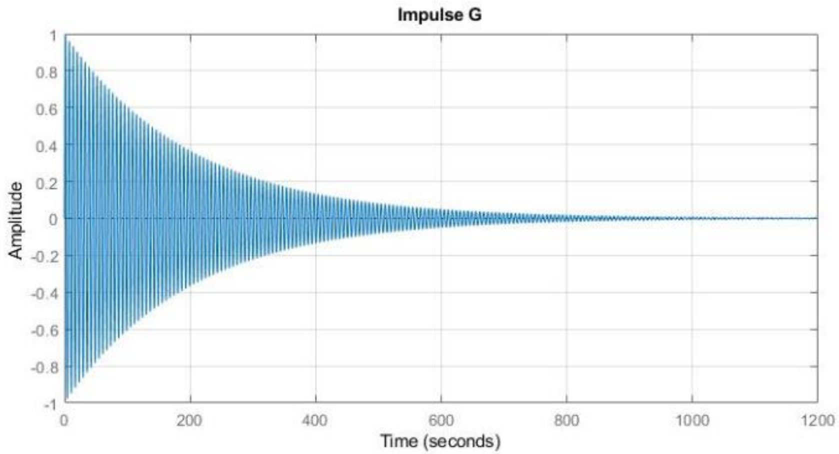

Impulse G
Amplitude
Time (seconds)

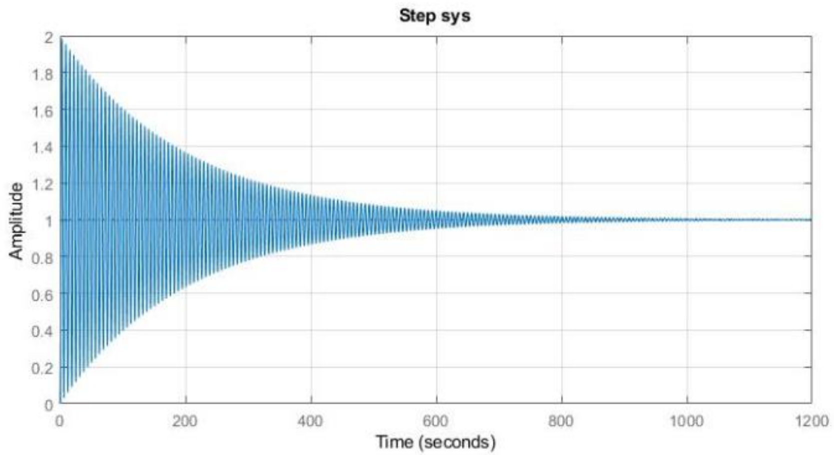

Step sys
Amplitude
Time (seconds)

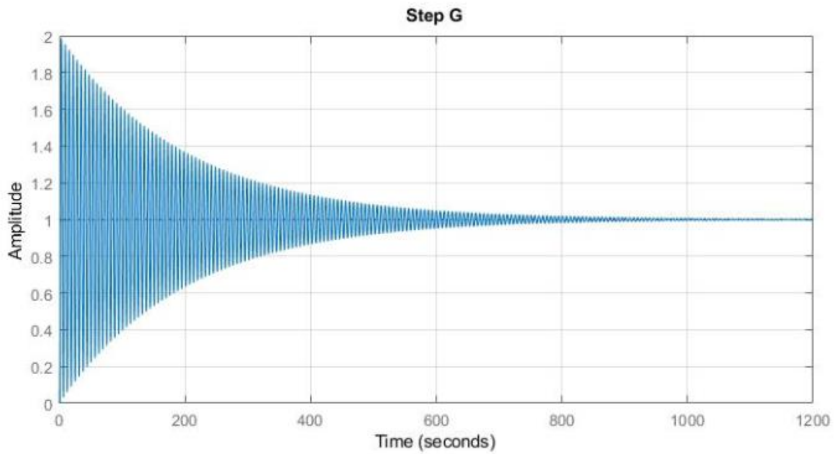

Step G
Amplitude
Time (seconds)

Dla d = 0,01

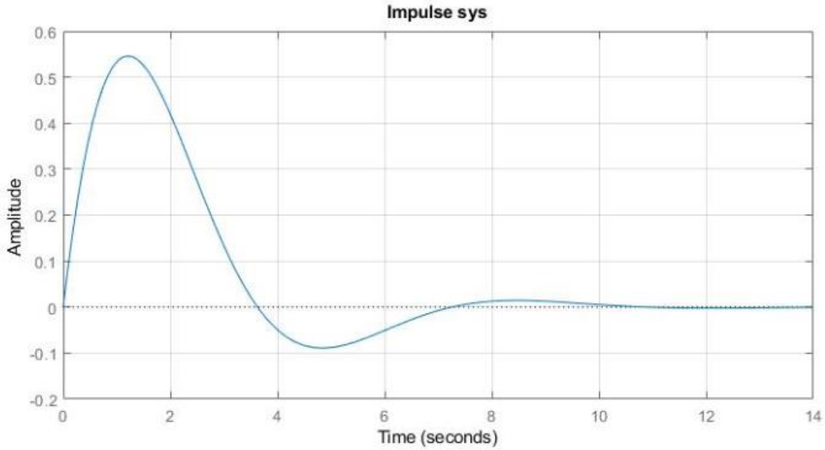

Impulse sys
Amplitude
Time (seconds)

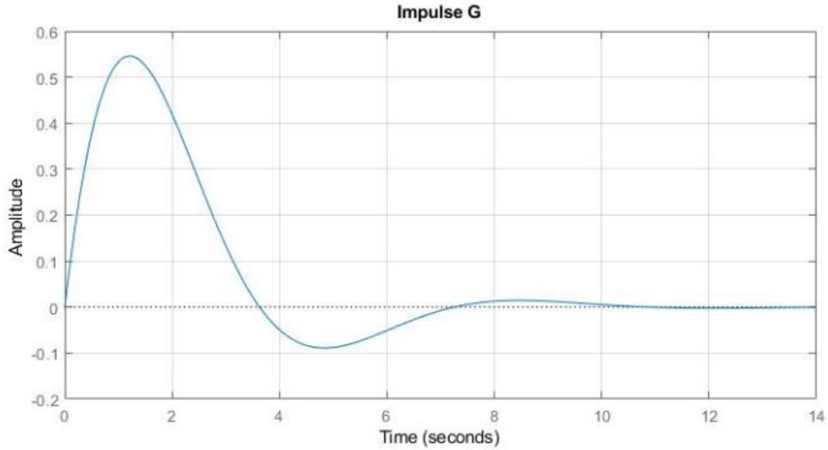

Impulse G
Amplitude
Time (seconds)

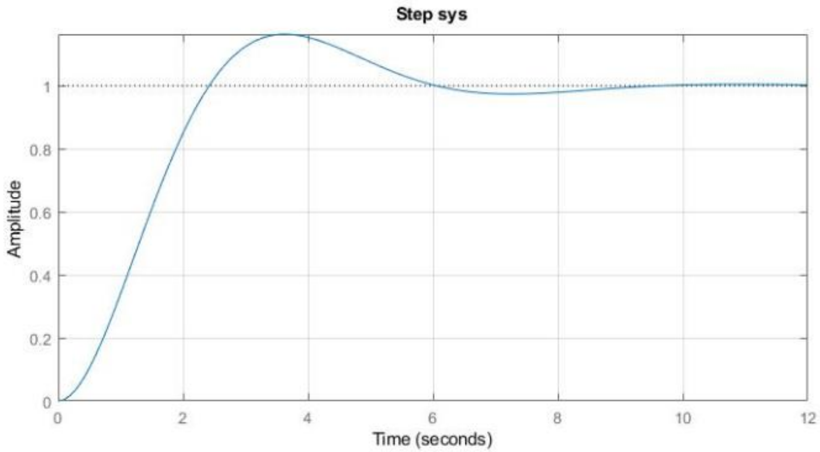

Step sys
Amplitude
Time (seconds)

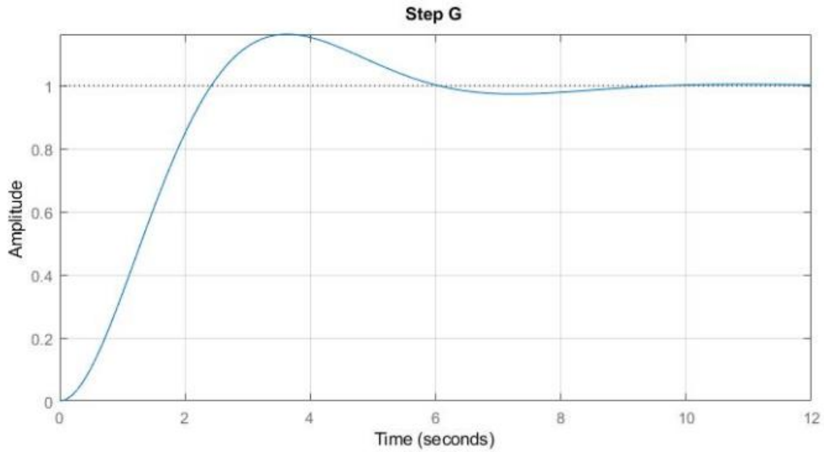

Step G
Amplitude
Time (seconds)

Dla d=1:

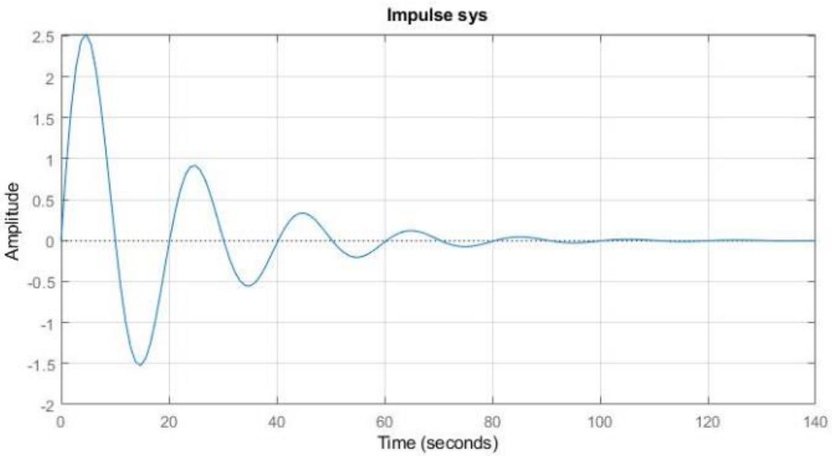

Impulse sys
Amplitude
Time (seconds)

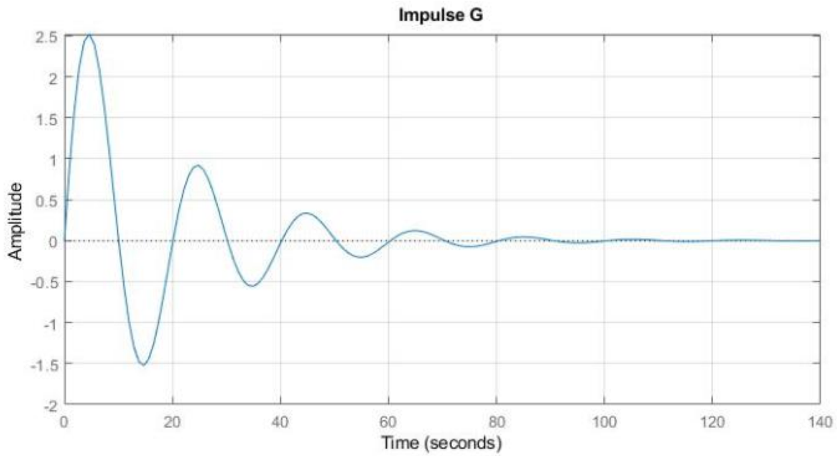

Impulse G
Amplitude
Time (seconds)

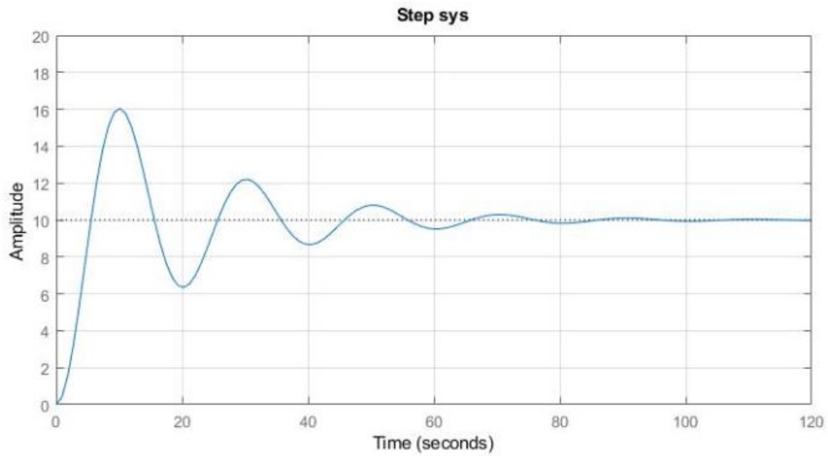

Step sys
Amplitude
Time (seconds)

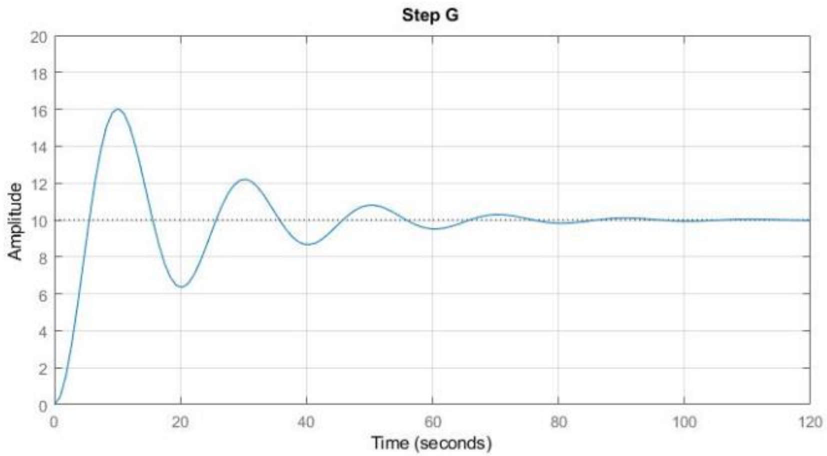

Step G
Amplitude
Time (seconds)

Dla k=0,1:

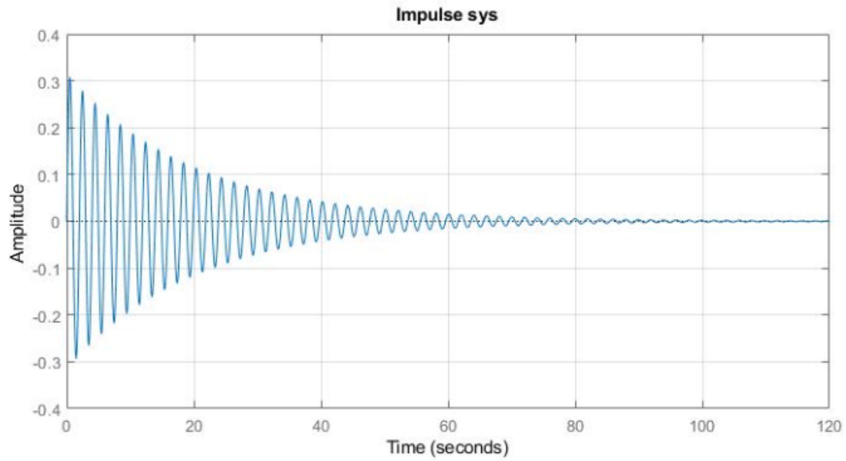

Impulse sys
Amplitude
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
20
40
60
80
100
120
140
Time (seconds)

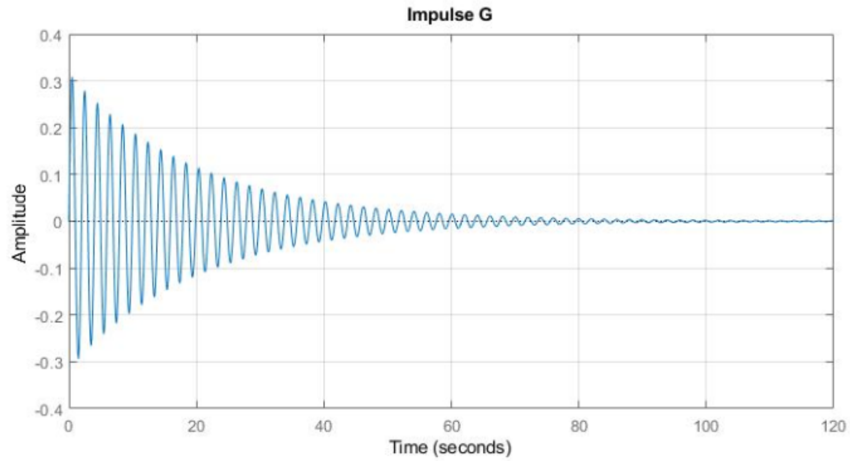

Impulse G
Amplitude
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
20
40
60
80
100
120
140
Time (seconds)

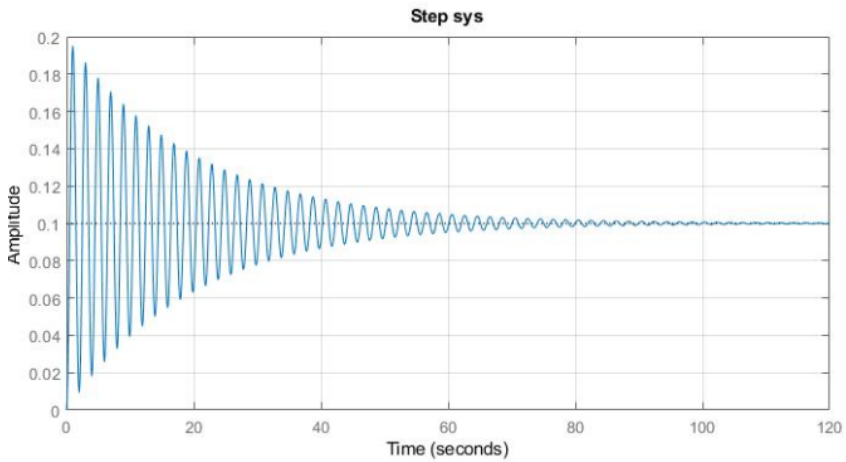

Step sys
Amplitude
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
20
40
60
80
100
120
Time (seconds)

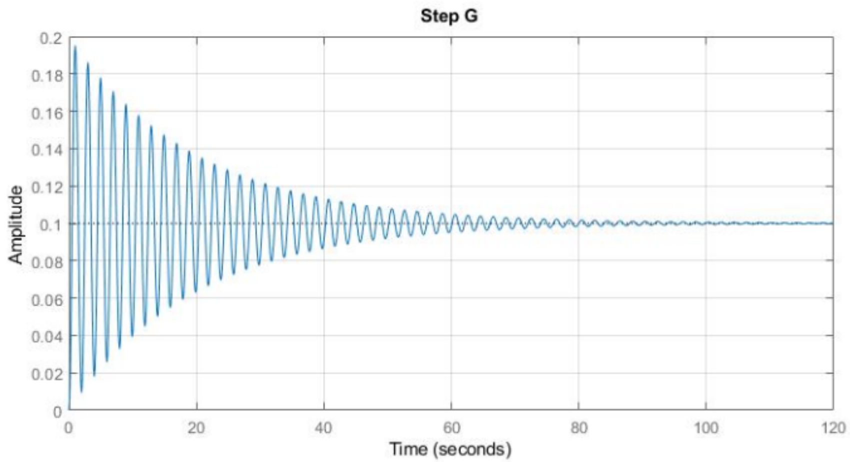

Step G
Amplitude
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
20
40
60
80
100
120
Time (seconds)

Dla k=10:

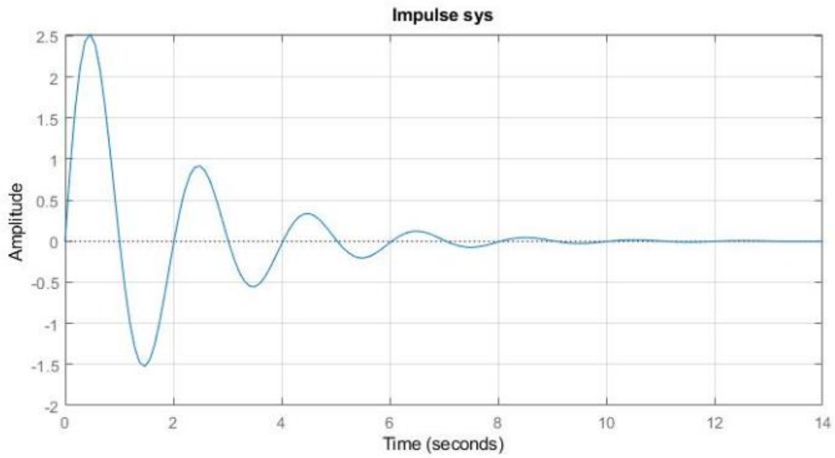

Impulse sys
Amplitude
Time (seconds)
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
0
20
40
60
80
100
120

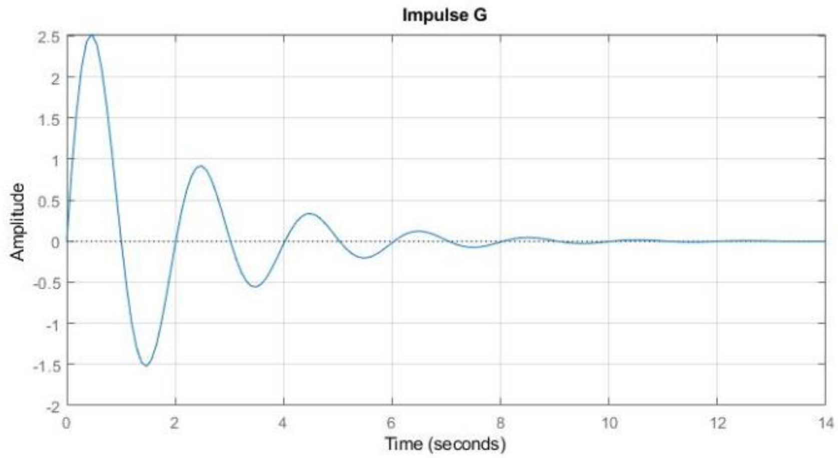

Impulse G
Amplitude
Time (seconds)
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
0
20
40
60
80
100
120

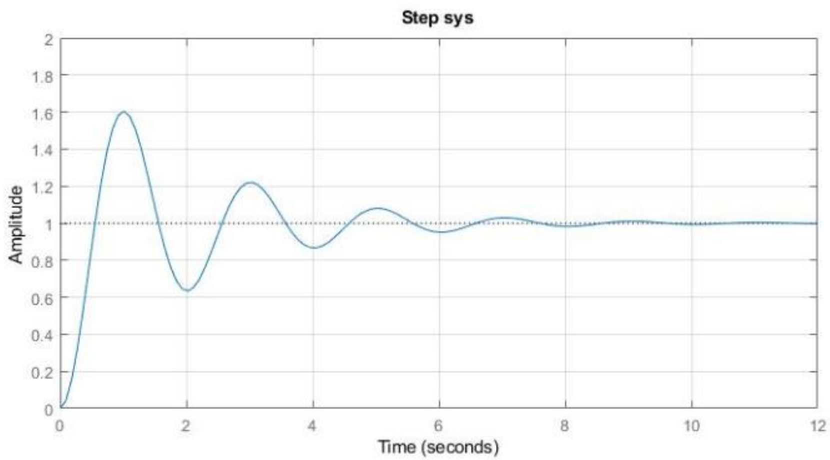

Step sys
Amplitude
Time (seconds)
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
20
40
60
80
100
120

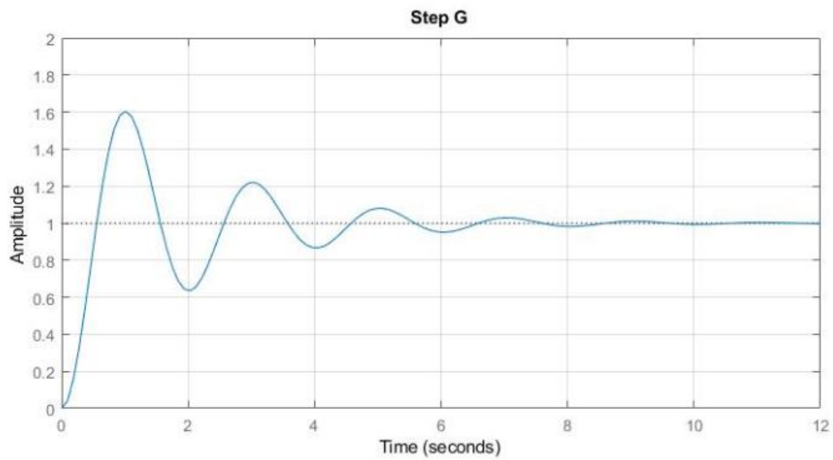

Step G
Amplitude
Time (seconds)
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
20
40
60
80
100
120

Dla m=0,1:

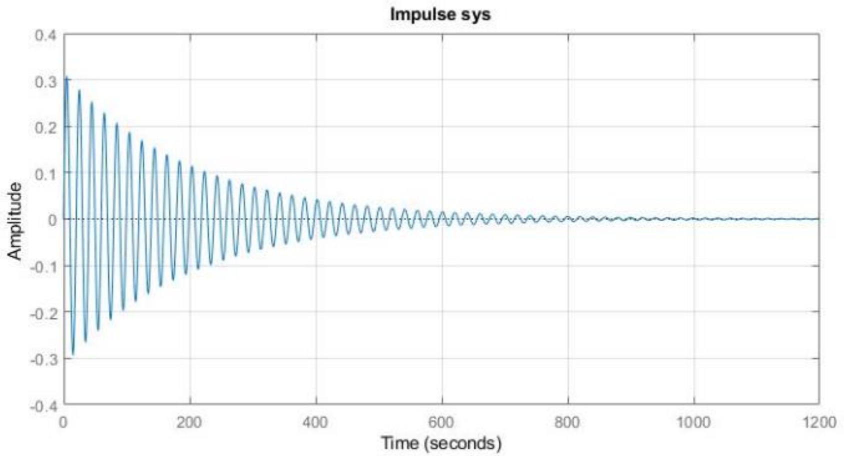

Impulse sys
Amplitude
Time (seconds)

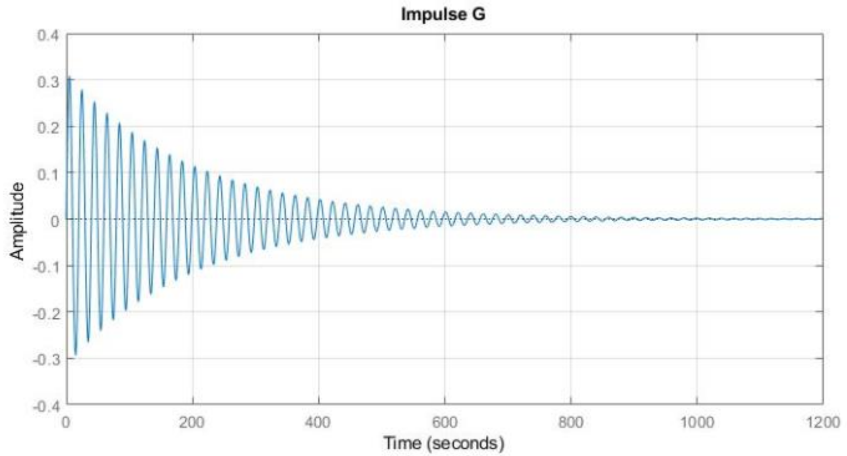

Impulse G
Amplitude
Time (seconds)

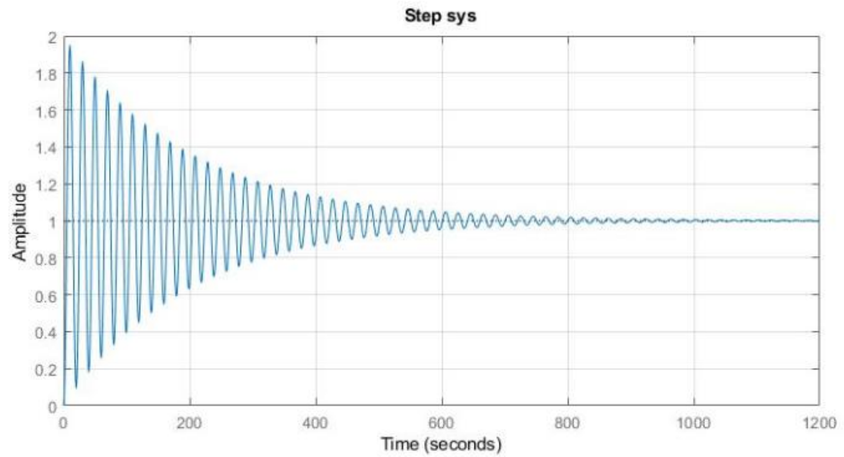

Step sys
Amplitude
Time (seconds)

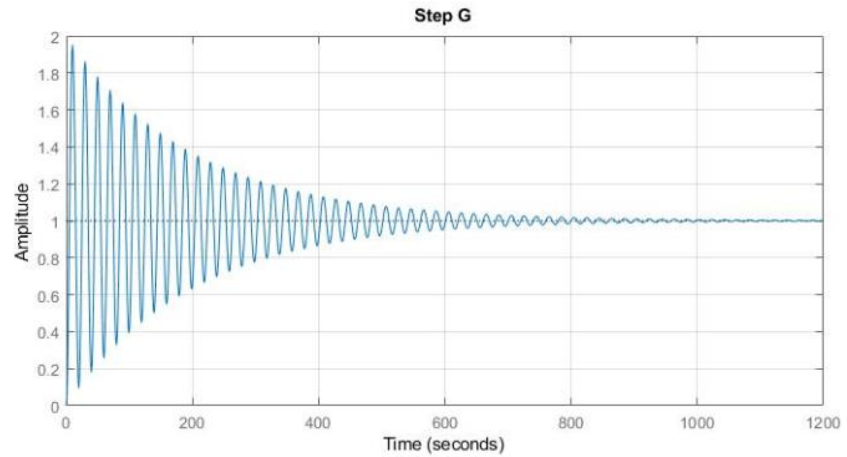

Step G
Amplitude
Time (seconds)

Dla m=10:


Impulse sys
Amplitude
Time (seconds)

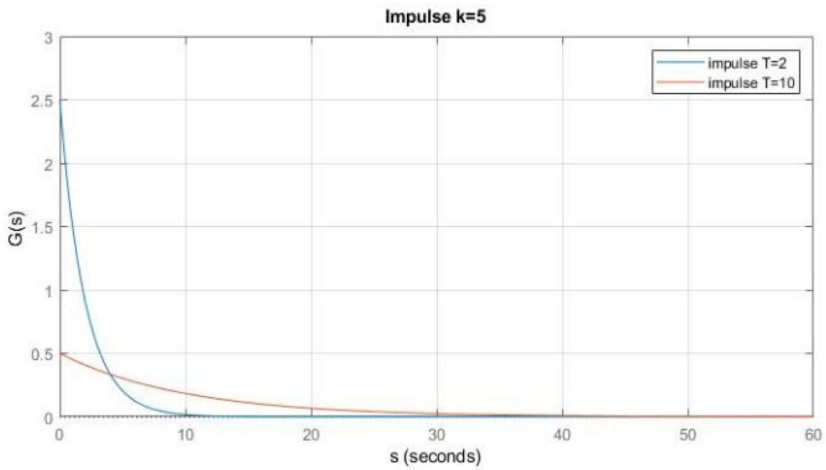

Impulse G
Amplitude
Time (seconds)

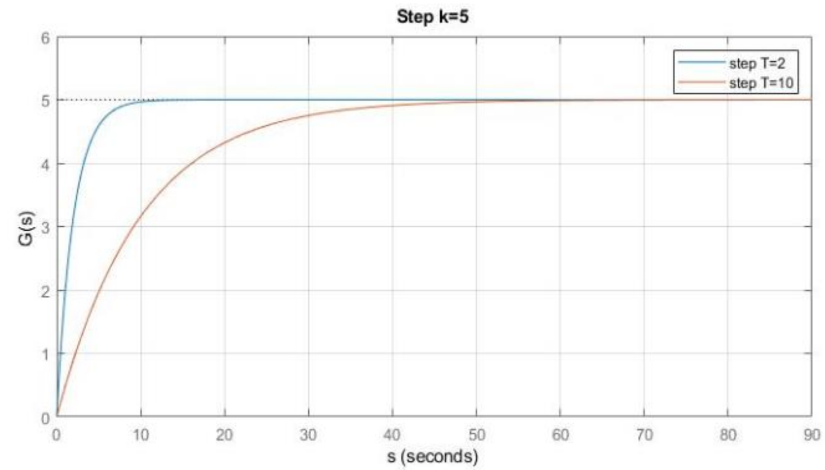

Step sys
Amplitude
Time (seconds)

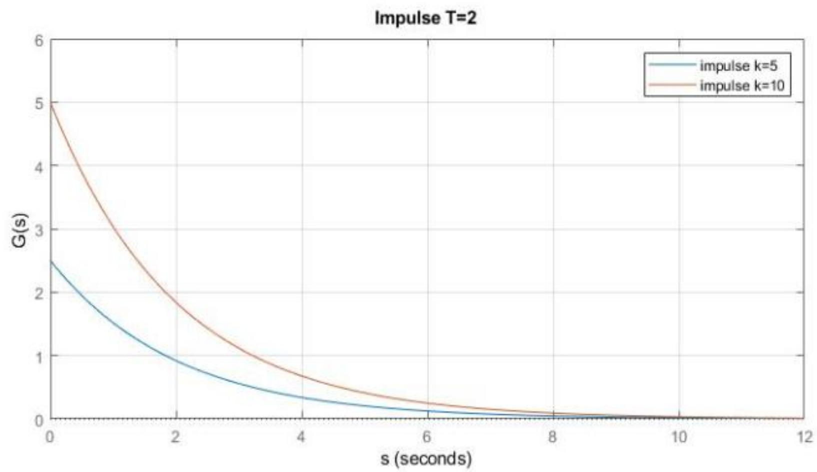

Step G
Amplitude
Time (seconds)

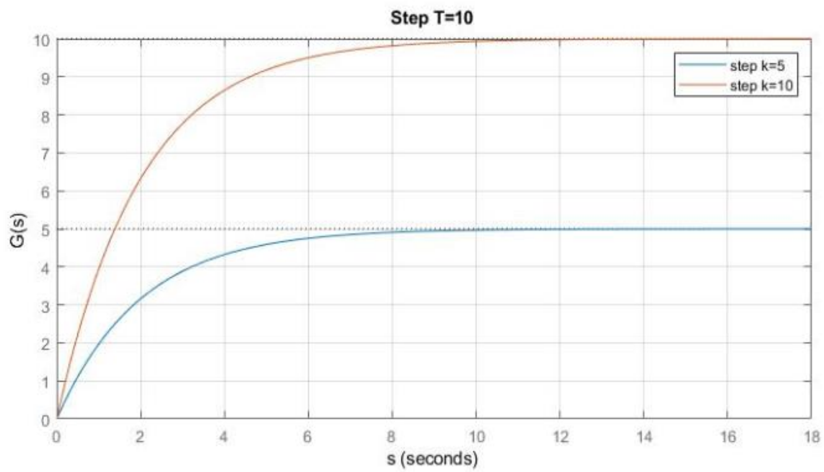
a. **Implementacja i charakterystyki dla transmitancji operatorowej obiektu iteracyjnego I-go rzędu:**

```
clear all
close all
clc

k = 5;
T = 2;

Gt2 = tf(k,[2 1]);
Gt10 = tf(k, [10 1]);
Gk5 = tf(5, [T 1]);
Gk10 = tf(10, [T 1]);

subplot(2,2,1);
impulse(Gt2);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
impulse(Gt10);
title('Impulse k=5')
legend('impulse T=2','impulse T=10');

subplot(2,2,2);
step(Gt2);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
step(Gt10);
title('Step k=5')
legend('step T=2','step T=10');

subplot(2,2,3);
impulse(Gk5);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
impulse(Gk10);
title('Impulse T=2')
legend('impulse k=5','impulse k=10');

subplot(2,2,4);
step(Gk5);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
step(Gk10);
title('Step T=10')
legend('step k=5','step k=10');
```


Impulse k=5
impulse T=2
impulse T=10
G(s)
s (seconds)
0 10 20 30 40 50 60
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3

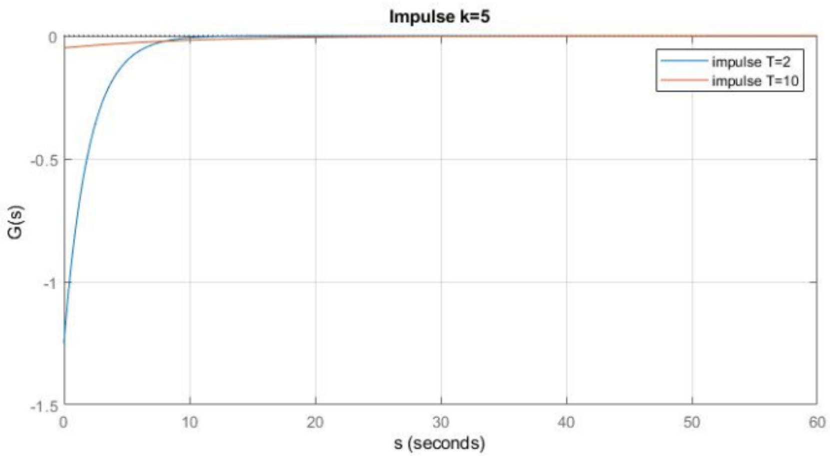

Step k=5
step T=2
step T=10
G(s)
s (seconds)
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
0 1 2 3 4 5 6

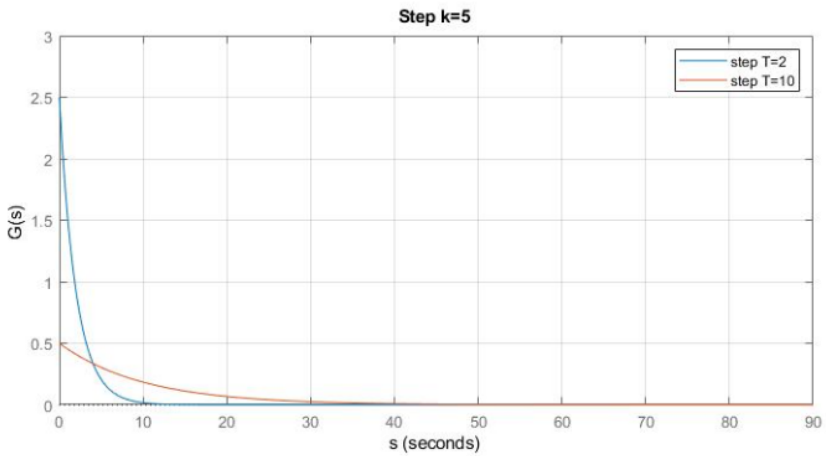

Impulse T=2
impulse k=5
impulse k=10
G(s)
s (seconds)
0 2 4 6 8 10 12
0 1 2 3 4 5 6

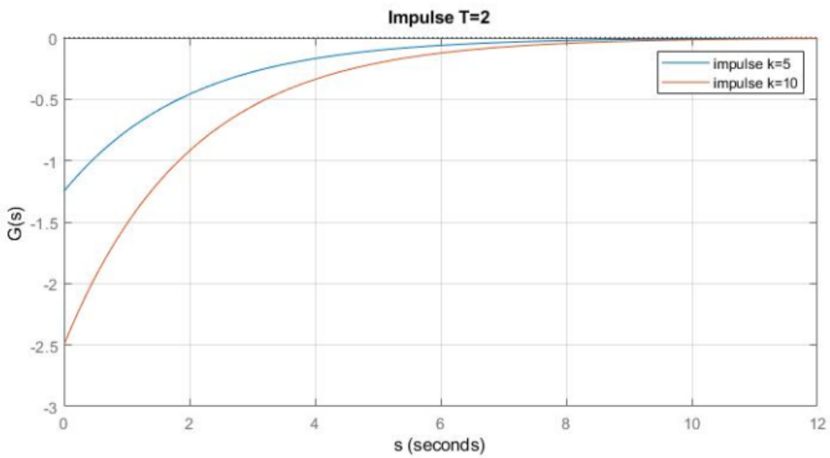

Step T=10
step k=5
step k=10
G(s)
s (seconds)
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

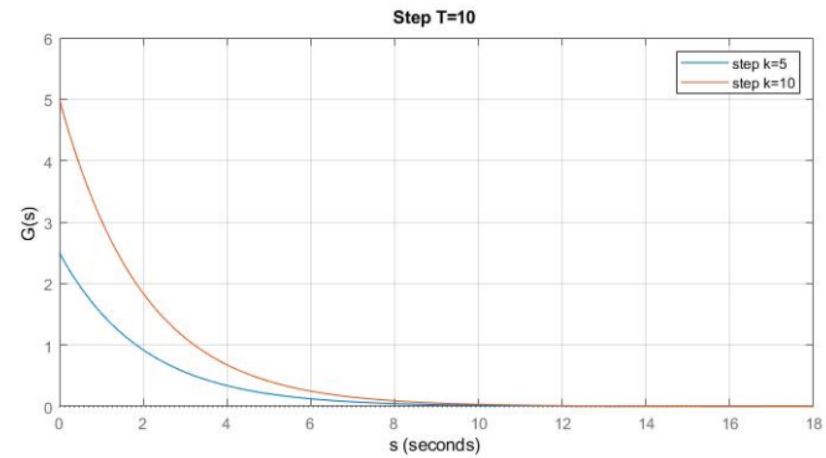
b. **Implementacja i charakterystyki dla transmitancji operatorowej obiektu różniczkującego rzeczywistego:**

```
clear all
close all
clc

k = 5;
T = 2;

Gt2 = tf([k 0],[2 1]);
Gt10 = tf([k 0], [10 1]);
Gk5 = tf([5 0], [T 1]);
Gk10 = tf([10 0], [T 1]);

subplot(2,2,1);
impulse(Gt2);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
impulse(Gt10);
title('Impulse k=5')
legend('impulse T=2','impulse T=10');

subplot(2,2,2);
step(Gt2);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
step(Gt10);
title('Step k=5')
legend('step T=2','step T=10');

subplot(2,2,3);
impulse(Gk5);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
impulse(Gk10);
title('Impulse T=2')
legend('impulse k=5','impulse k=10');

subplot(2,2,4);
step(Gk5);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
step(Gk10);
title('Step T=10')
legend('step k=5','step k=10');
```


Impulse k=5
impulse T=2
impulse T=10
G(s)
s (seconds)
0
-0.5
-1
-1.5
0
10
20
30
40
50
60

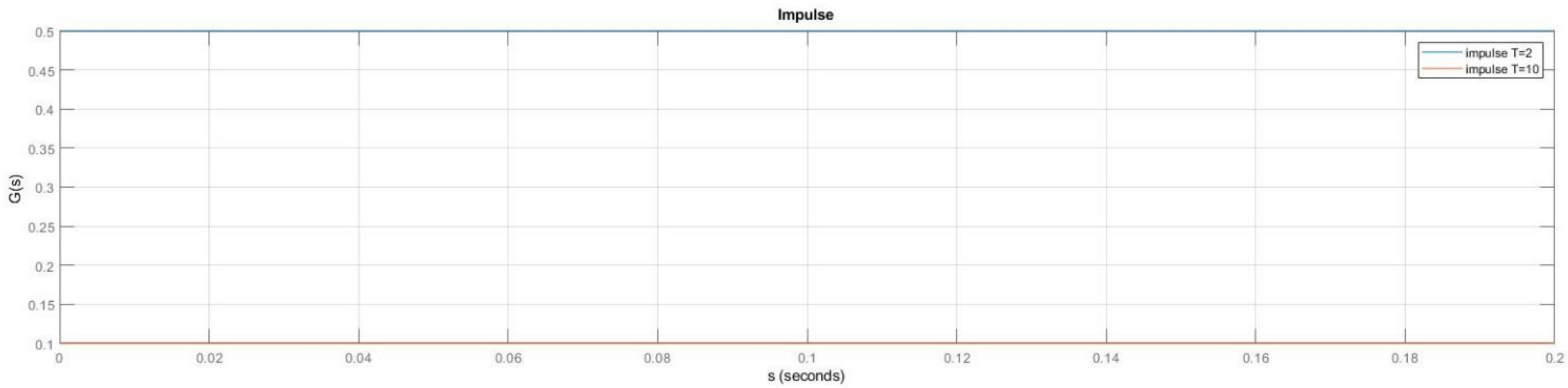

Step k=5
step T=2
step T=10
G(s)
s (seconds)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90

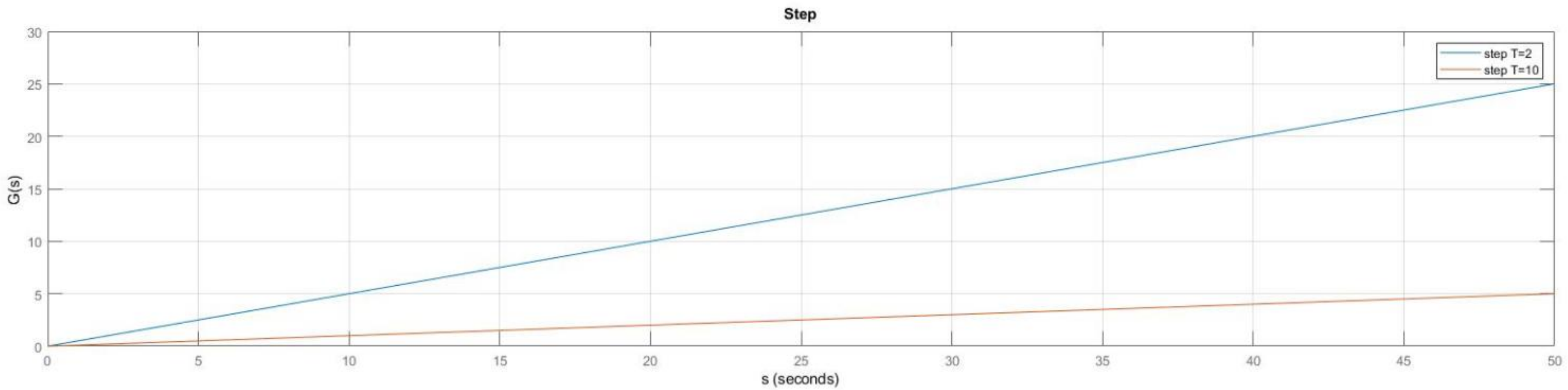

Impulse T=2
impulse k=5
impulse k=10
G(s)
s (seconds)
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
0
2
4
6
8
10
12


Step T=10
step k=5
step k=10
G(s)
s (seconds)
6
5
4
3
2
1
0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

c. Implementacja i charakterystyki dla transmitancji operatorowej obiektu całkującego:

```
clear all
close all
clc

T = 2;

Gt2 = tf(1,[2 0]);
Gt10 = tf(1, [10 0]);

subplot(2,1,1);
impulse(Gt2);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
impulse(Gt10);
title('Impulse')
legend('impulse T=2','impulse T=10');

subplot(2,1,2);
step(Gt2);
xlabel('s');
ylabel('G(s)');
grid on;
hold on;
step(Gt10);
title('Step')
legend('step T=2','step T=10');
```


Impulse
impulse T=2
impulse T=10
G(s)
s (seconds)
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2


Step
step T=2
step T=10
G(s)
s (seconds)
30
25
20
15
10
5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

4. Wnioski:

Wnioski do głównego członu zadania:

Charakterystyki impulsowe i stepowe dla transmitancji operatorowej oraz modelu zmiennych stanu pokrywają się zgodnie z założeniami.

Wnioski związane ze zmianą parametrów:
- im mniejszy współczynnik tarcia tym większa częstotliwość drgań i dłuższy czas drgań do wygaśnięcia,
- im większy współczynnik sztywności sprężyny tym większa częstotliwość drgań i mniejsza amplituda,
- im większa masa tym większa częstotliwość drgań i dłuższy czas drgań do wygaśnięcia.

Wnioski do pozostałych części zadania:

- zad1a – Charakterystyki zgodne z założeniami, przy stałej wartości k maksymalne wartości w charakterystyce stepowej są identyczne niezależnie od wartości parametru T, przy mianie T jest różnica w szybkości osiągnięcia wartości maksymalnej. W przypadku charakterystyk impulsowych różnica jest jedynie w stromości hiperboli, im większe T tym hiperbola łagodniejsza, im większe k tym hiperbola bardziej stroma.

- zad1b – Charakterystyka stepowa – zgodna z oczekiwaniami, charakterystyki impulsowej nie udało nam się znaleźć. Im większe T tym charakterystyki są bardziej łagodne, im większe K tym większa amplituda.

- zad1c – Charakterystyki zgodne z założeniami. Charakterystyka impulsowa jest stałą, a skokowa funkcją liniową. Im mniejsze T tym wartość maksymalna wyższa. W charakterystyce skokowej im mniejsze T tym kąt nachylenia do osi poziomej większy.

5. Literatura/źródła:

http://anna.czemplik.staff.iiar.pwr.wroc.pl/images/Dmodele/s1_cz56.pdf
http://rg1.polsl.pl/kaula/Charakterystyki_czasowe.pdf
https://cdn.pg.edu.pl/documents/184045/282792/Transmitancja%20operatorowa.pdf
https://www.mathworks.com/help/matlab/