1 束の定義を述べよ

半順序集合 $(X, \leq)$ であって、以下の条件を満足するもの

- 最大元 $\top_X$ が存在する。
- 最小元 $\bot_X$ が存在する。
- 任意の $x, y \in X$ に対して、$x \wedge y, x \vee y$ が存在する。

2 $X = \{0, 1, 2\}$ のとき $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ の濃度を示せ

$|X| = 3$ なので $|\mathcal{P}(X)| = 2^3 = 8$。したがって、$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))| = 2^8 = 256$

3 $X \neq \emptyset$ とする。$\emptyset \to X, X \ \to \emptyset$ は存在するか

二項関係を考えると $\emptyset \times X = \emptyset, X \times \emptyset = \emptyset$ であり、前者では $\emptyset$ には元が存在しないゆえ任意の元の行き先が定まっているので、関数 $\emptyset \to X$ は存在し、また $|\mathcal{P}(\emptyset \times X)| = 1$ なので一意である。後者では X の元の行きさきが定まっていないので関数 $X \to \emptyset$ は存在しない。

4 $\mathcal{P}(X \times Y) \cong (\mathcal{P}(Y))^X$ を示せ

$f : \mathcal{P}(X \times Y) \to (\mathcal{P}(Y))^X$ を $f(S) = ((X \ni) x \mapsto \{y | (x, y) \in S\})$、$g : (\mathcal{P}(Y))^X \to \mathcal{P}(X \times Y)$ を $g(F) = \{(x, y) | y \in F(x)\}$ でさだめると、

任意の $S \in \mathcal{P}(X \times Y)$ に対し $(S \subseteq X \times Y)$、$(g \circ f)(S) = g(f(S)) = \{(x, y) | y \in (f(S))(x)\} = \{(x, y) | y \in \{y' | (x, y') \in S\}\} = \{(x, y) | (x, y) \in S\} = S$ であるので、$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})}$

任意の $F \in (\mathcal{P}(Y))^X, x \in X$ に対して $((f \circ g)(F))(x) = (f(g(F)))(x) = (f(\{(x, y) | y \in F(x)\}))(x) = \{y | (x, y) \in \{(x, y) | y \in F(x)\}\} = \{y | y \in F(x)\} = F(x)$ であるので、$f \circ g = \mathrm{id}_{(\mathcal{P}(\mathrm{Y}))^{\mathrm{X}}}$

以上より $g = f^{-1}$ で同型が言える。