05-161026 平出一郎 情報論理演習レポート 4/22 提出分

Ex. 1.16

$\cdot x \sim_f x' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = f(x')$ は同値関係であることを示せ。

(反射的)$f(x) = f(x)$ より $x \sim_f x$.(対称的)$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ ならば $f(x') = f(x) \Leftrightarrow x' \sim_f x$(推移的)$x \sim_f x'$ かつ $x' \sim_f x'' \Leftrightarrow f(x) = f(x') = f(x'')$ より $x \sim_f x''$

$\cdot \sim_f$ が Δ_X に一致する必要十分条件は f が単射であることを示せ。

「$\sim_f$ が Δ_X に一致する」$\Leftrightarrow$ 「 $x \sim_f x' \Leftrightarrow x\Delta_X x'$ 」 $\Leftrightarrow$ 「 $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$ 」$\Leftrightarrow$ 「 f は単射 」

Ex. 1.19

1.$\lesssim \cap \gtrsim$ が同値関係であることを示せ。

(i)$(x,x) \in \lesssim \cap \gtrsim \Leftrightarrow (x \lesssim x \wedge x \gtrsim x)$ これは preoder の定義から従う。

(ii)$(x,y) \in \lesssim \cap \gtrsim \Leftrightarrow (x \lesssim y \wedge x \gtrsim y) \Leftrightarrow (y \lesssim x \wedge y \gtrsim x) \Leftrightarrow (y,x) \in \lesssim \cap \gtrsim$

(iii)$(x,y),(y,z) \in \lesssim \cap \gtrsim \Leftrightarrow (x \lesssim y \wedge x \gtrsim y \wedge y \lesssim z \wedge y \gtrsim z)$

preoder の推移律から

$\Leftrightarrow (x \lesssim z \wedge x \gtrsim z) \Leftrightarrow (x,z) \in \lesssim \cap \gtrsim$

2.「$x \sim x', y \sim y', x \lesssim y \Rightarrow x' \lesssim y'$」を示せ

$x \sim x' \Rightarrow x \lesssim x', y \sim y' \Rightarrow y \lesssim y'$ より

$x \sim x', y \sim y', x \lesssim y \Rightarrow x \lesssim x' \wedge y \lesssim y' \wedge x \lesssim y \Rightarrow x' \lesssim y'$

3. 引き起こされた関係 $\lesssim$ は $X/\sim$ 上の半順序であることを示せ。

(i)$x \lesssim x$ より $[x] \lesssim [x]$

(ii)$[x] \lesssim [y] \wedge [y] \lesssim [x] \Leftrightarrow x \lesssim y \wedge y \lesssim x \Leftrightarrow x \lesssim y \wedge x \gtrsim y \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$ より反対称的

(iii)$[x] \lesssim [y] \wedge [y] \lesssim [z] \Leftrightarrow x \lesssim y \wedge y \lesssim z \Rightarrow x \lesssim z \Leftrightarrow [x] \lesssim [z]$ で推移的

以上より、partial order であることが確かめられた。