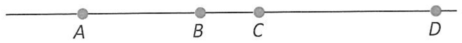
7. Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty

Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona

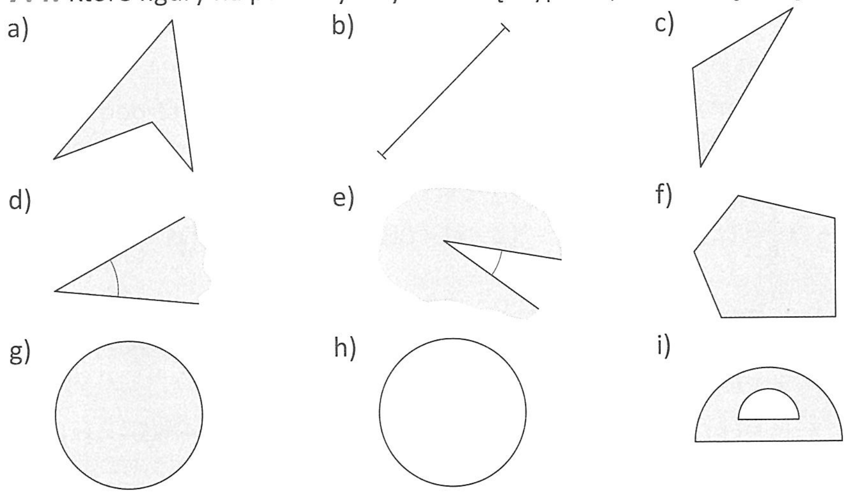
7.1. Punkty C i D dzielą odcinek AB na takie trzy odcinki AC, CD i DB, dla których $|AC| : |CD| : |DB| = 5 : 8 : 3$. Wiedząc, że $|CD| = 32$ cm, oblicz długość odcinka AB i DB.

7.2. Punkt C należy do odcinka AB. Środkiem odcinka AC jest punkt D, a środkiem odcinka BC jest punkt E. Oblicz długość odcinka AB, wiedząc, że $|DE| = 11$ cm.

7.3. Punkty A, B, C, D należą do jednej prostej i są położone jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że $|AD| = 12$ cm, $|AC| = 6$ cm i $|BD| = 8$ cm, oblicz długości odcinków AB, BC, CD.



7.4. Które figury na poniższym rysunku są wypukłe, a które są wklęsłe?



7.5. Które z podanych figur są figurami ograniczonymi?

a) półpłaszczyzna
b) wielokąt
c) koło
d) suma dwóch prostych równoległych
e) odcinek
f) kąt

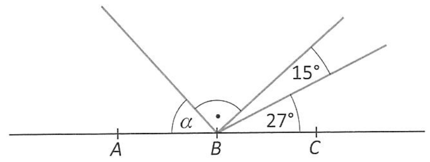
7.6. Dwie półproste o wspólnym początku, wyznaczają dwa kąty: wklęsły i wypukły. Wyznacz miary tych kątów wiedząc, że różnią się o 100°.

7.7. Z punktu A prowadzimy cztery różne półproste: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$. Z czterech kątów: BAC, CAD, DAE, EAB każdy następny jest dwa razy większy od poprzedniego. Wyznacz te kąty.

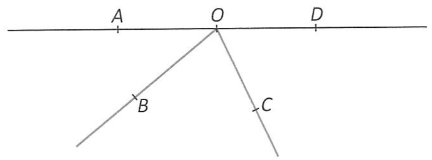
7.8. Wyznacz miary kątów AOB i BOC, wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle BOC| = 225°$ i przedłużenie półprostej OA dzieli kąt BOC w stosunku $1 : 3$. Rozpatrz dwa przypadki.

7.9. Przez wierzchołek kąta: a) rozwartego, b) ostrego AOB poprowadzono dwie proste prostopadłe do ramion. Oblicz $|\sphericalangle AOB|$, wiedząc, że te proste tworzą kąt ostry 25°.

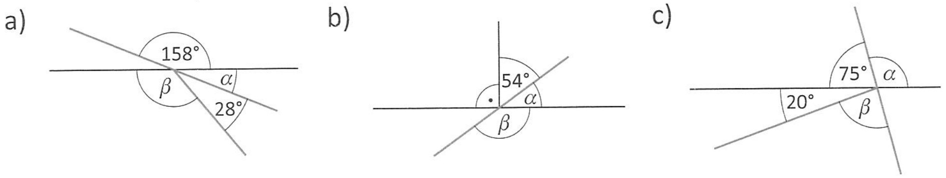
7.10. Oblicz α, wiedząc, że punkty A, B, C są współliniowe.



7.11. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOC| = 115°$, $|\sphericalangle DOB| = 140°$, oblicz $|\sphericalangle AOB|$, $|\sphericalangle BOC|$ i $|\sphericalangle COD|$.



7.12. Oblicz α i β:



7.13. Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery kąty wypukłe, z których jeden jest osiem razy większy od kąta do niego przyległego. Wyznacz miary tych kątów.

7.14. Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery kąty wypukłe, przy czym różnica kątów przyległych wynosi 44°. Wyznacz miary tych kątów.

7.15. Miarę kąta wyrażoną w minutach i sekundach wyznacz w stopniach według wzoru:

$$23'51'' = \frac{23°}{60} + \frac{51°}{3600} = \frac{23° \cdot 60}{60 \cdot 60} + \frac{51°}{3600} = \frac{1431°}{3600} = 0{,}3975°$$

a) $9'18''$
b) $54'36''$
c) $48'45''$
d) $32'6''$

7.16. Miarę kąta wyrażoną w stopniach zapisz za pomocą minut i sekund.

a) $0{,}41°$ b) $0{,}24°$ c) $0{,}68°$ d) $0{,}74°$

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta

7.17. Narysuj trzy proste k, l, m, których punkty przecięcia są wierzchołkami trójkąta. Zaznacz na zewnątrz tego trójkąta punkt A. Wyznacz odcinki, których długości są odległościami punktu A od prostych k, l, m.

7.18. Odległość między dwiema prostymi równoległymi k i l jest równa 7 cm. Punkt A leży w odległości 4 cm od prostej k. Jaka jest odległość punktu A od prostej l? Rozważ dwa przypadki.

7.19. Narysuj odcinek AB o długości 6 cm.

a) Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj symetralną tego odcinka.

b) W jakiej odległości od punktów A, B znajduje się punkt P należący do symetralnej odcinka AB, jeżeli jego odległość od tego odcinka jest równa 4 cm?

7.20. Narysuj odcinek. Za pomocą cyrkla i linijki podziel go na cztery równe części.

7.21. Dany jest odcinek AB oraz punkty: C_1, C_2, C_3, C_4 i C_5 spełniające następujące warunki:

a) $|C_1A| = \frac{20}{9}$ i $|C_1B| = 2\frac{2}{9}$

b) $|C_2A| = \frac{3}{2}$ i $|C_2B| = 1{,}(5)$

c) $|C_3A| = \sqrt{6}$ i $|C_3B| = 2\sqrt{3}$

d) $|C_4A| = 2\sqrt{2}$ i $|C_4B| = \sqrt{8}$

e) $|C_5A| = \sqrt{3} - 1$ i $|C_5B| = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Które z punktów C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 należą do symetralnej odcinka AB?

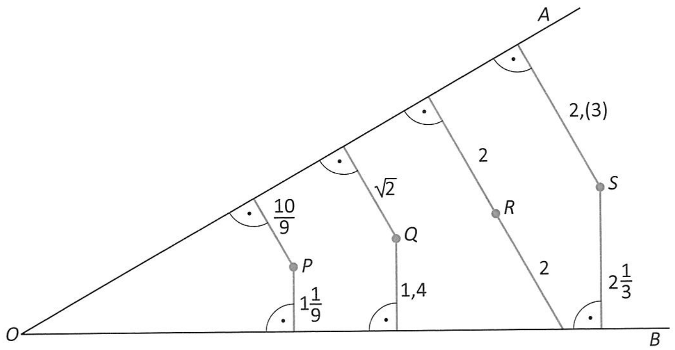
7.22. Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj kąt o mierze 90°. Następnie:

a) skonstruuj dwusieczną tego kąta

b) oblicz, w jakiej odległości od ramion kąta prostego znajduje się punkt P należący do dwusiecznej tego kąta, jeżeli jego odległość od wierzchołka kąta jest równa $\sqrt{8}$.

7.23. Narysuj dowolny kąt rozwarty, którego miara jest mniejsza od 180°. Następnie za pomocą cyrkla i linijki podziel ten kąt na 4 równe kąty o wspólnym wierzchołku.

7.24. Które spośród punktów P, Q, R, S należą do dwusiecznej kąta AOB?



7.25. Skonstruuj symetralne boków trójkąta różnobocznego:

a) ostrokątnego b) prostokątnego c) rozwartokątnego.

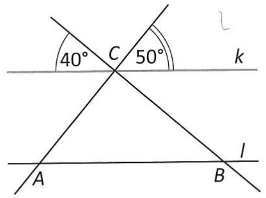
Czy dwusieczne kątów tych trójkątów zawierają się w symetralnych ich boków?

7.26. Skonstruuj dwusieczne kątów trójkąta równobocznego. Czy dwusieczne kątów tego trójkąta zawierają się w symetralnych jego boków?

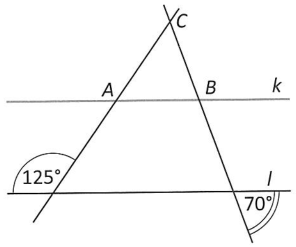
Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w trójkącie

7.27. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC, korzystając z danych na rysunkach oraz wiedząc, że $k \parallel l$:

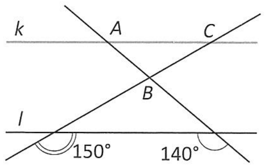
a)



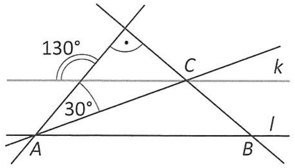
b)



c)



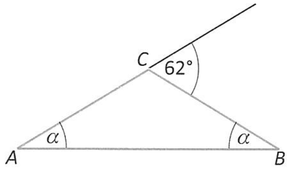
d)



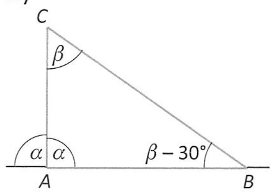
7.28. Z punktu leżącego na zewnątrz kąta ABC o mierze 41° poprowadzono dwie proste: jedną równoległą do BC, a drugą prostopadłą do AB. Wyznacz miarę kąta między tymi prostymi.

7.29. Wyznacz kąty trójkąta ABC na rysunku poniżej.

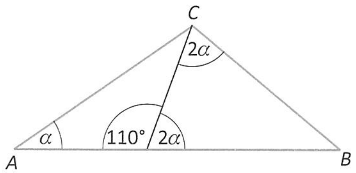
a)



b)

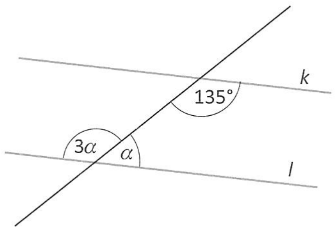


c)

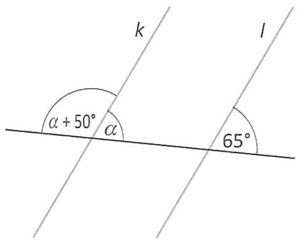


7.30. Wykaż, że proste k i l na rysunku poniżej są równoległe.

a)

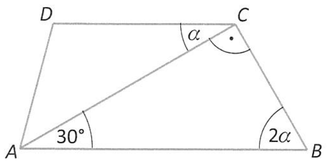


b)

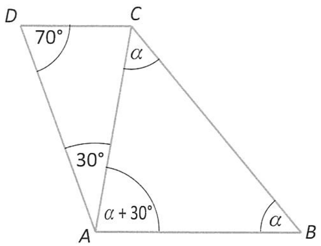


7.31. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ na rysunku poniżej jest trapezem.

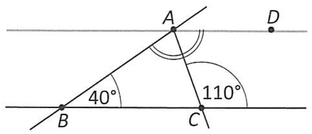
a)



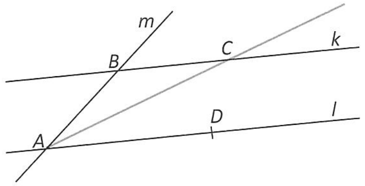
b)



7.32. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A, B, C, D (zobacz rysunek obok). Prosta AB tworzy z prostą BC kąt 40°, zaś kąt przyległy do kąta ACB ma 110°. Wykaż, że jeśli półprosta AC jest dwusieczną kąta BAD, to prosta AD jest równoległa do prostej BC.



7.33. Prosta m przecina dwie równoległe proste k, l odpowiednio w punktach B i A. Na prostej k zaznaczono punkt C w taki sposób, że $|BC| = |AB|$ (zobacz rysunek obok). Wykaż, że półprosta $\overrightarrow{AC}$ jest dwusieczną kąta DAB.



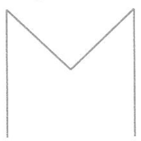
7.34. W trójkącie ABC dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie B_1. Przez punkt B_1 prowadzimy równoległą do BC, przecinającą bok AB w punkcie C_1. Wykaż, że $|B_1C_1| = |BC_1|$.

7.35. W kątach przyległych ABC, DBC poprowadzono dwusieczne i prostą, równoległą do AD, która przecina te dwusieczne odpowiednio w punktach E i F, zaś ramię BC przecina w punkcie K. Wykaż, że $|EK| = |KF|$.

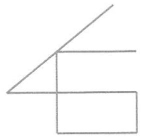
Wielokąt. Wielokąt foremny. Suma kątów w wielokącie

7.36. Które z poniższych figur są łamanymi, które są łamanymi zwyczajnymi, a które łamanymi zwyczajnymi zamkniętymi? Odpowiedź uzasadnij.

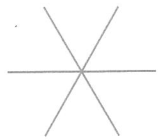
a)



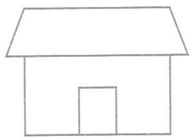
b)



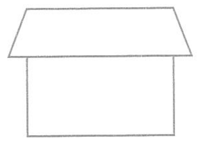
c)



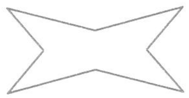
d)



e)



f)



7.37. Wyznacz liczbę przekątnych:

a) sześciokąta b) ośmiokąta c) piętnastokąta.

7.38. W jakim wielokącie liczba przekątnych jest:

a) trzy razy większa od liczby boków
b) pięć i pół raza większa od liczby boków
c) osiem razy większa od liczby boków.

7.39. Na brzegu jeziora mieszkało 16 rybaków. Mroźną zimą, gdy gruba tafla lodu pokryła jezioro, rybacy, odwiedzając się nawzajem, wydeptali ścieżki tak, że domy dowolnych dwóch rybaków były połączone ścieżką. Ile było ścieżek?

7.40. Na przyjęciu spotkało się 20 osób. Ile nastąpiło powitań, jeśli każda osoba przywitała się z każdą inną osobą?

7.41. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych:

a) sześciokąta b) siedmiokąta c) dwunastokąta.

7.42. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

a) ośmiokąta foremnego b) osiemnastokąta foremnego.

7.43. Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego jest równy 150°. Jaki to wielokąt?

7.44. W pięciokącie kąty wewnętrzne kolejno mają się do siebie jak 1 : 3 : 3 : 4 : 4. Oblicz miary tych kątów. Czy ten pięciokąt jest wypukły?

7.45. Kąt zewnętrzny wielokąta foremnego jest równy 18°. Ile przekątnych ma ten wielokąt?

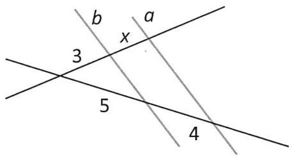
7.46. W jakim wielokącie wypukłym stosunek sumy miar kątów wewnętrznych do sumy miar wszystkich kątów zewnętrznych jest równy:

a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{15}{4}$?

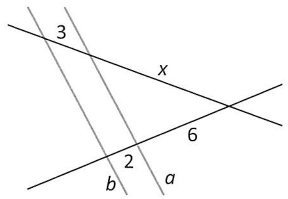
Twierdzenie Talesa

7.47. Na rysunkach poniżej proste a i b są równoległe. Oblicz x.

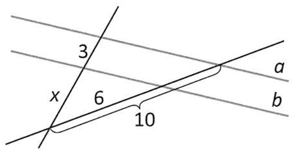
a)



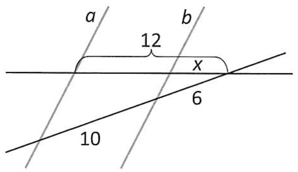
b)



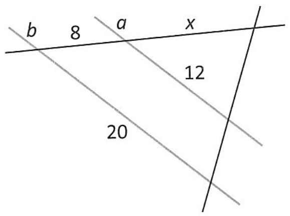
c)



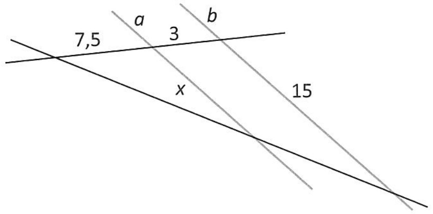
d)



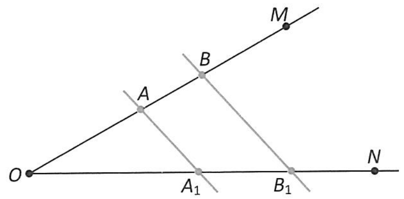
e)



f)



7.48. Ramiona kąta MON przecięto prostymi równoległymi AA_1 i BB_1, jak na rysunku poniżej:



Oblicz:

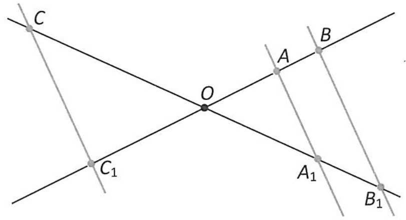
a) $|AB|$, jeśli $|OA| = 17$ cm, $|OA_1| = 2$ dm, $|OB_1| = 49$ cm

b) $|OA|$, jeśli $|OB| = 10{,}5$ cm, $|OA_1| = 38$ mm, $|A_1B_1| = 0{,}95$ dm

c) $|OB_1|$, jeśli $|OA| = 16$ cm, $|AB| = 4{,}8$ dm, $|A_1B_1| = 0{,}4$ m

d) $|A_1B_1|$, jeśli $|OA| = 6{,}3$ cm, $|AB| = 8{,}7$ cm, $|OB_1| = 22{,}5$ cm.

7.49. Proste AB i A_1B_1 przecięto prostymi równoległymi AA_1, BB_1 i CC_1, jak na rysunku poniżej:



Oblicz:

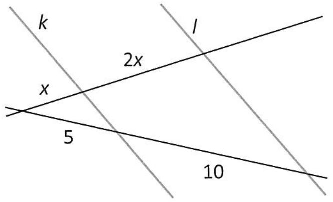
a) $|CC_1|$, jeśli $|C_1O| = 4$ cm, $|OA| = 3$ cm, $|AA_1| = 2$ cm

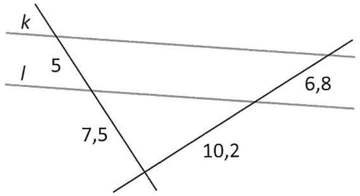
b) $|OC_1|$, jeśli $|OA_1| = 1{,}8$ dm, $|AC_1| = 11{,}2$ dm, $|OC| = 5{,}4$ dm

c) $|OB|$, jeśli $|CC_1| = 4$ dm, $|BB_1| = 56$ cm, $|C_1B| = 1{,}2$ m

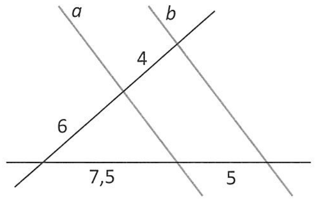
d) $|CA_1|$, jeśli $|AA_1| = 2$ cm, $|BB_1| = 5$ cm, $|A_1B_1| = 4{,}5$ cm, $|CC_1| = 4$ cm.

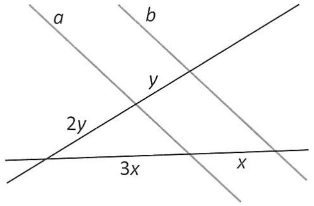
D **7.50.** Wykaż, że proste k i l na rysunku poniżej są równoległe.



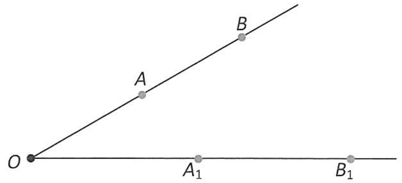


7.51. Czy na rysunku poniżej proste a i b są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

a) 

b) 

7.52. Na jednym z ramion kąta o wierzchołku O leżą punkty A i B, a na drugim ramieniu – punkty A_1 i B_1 (patrz rysunek poniżej).



Czy proste AA_1 i BB_1 są równoległe, jeśli:
a) $|OA| = 4{,}2$ dm, $|AB| = 2$ dm, $|OA_1| = 6{,}3$ dm, $|OB_1| = 9{,}3$ dm
b) $|OA| = 6{,}8$ cm, $|OB| = 22{,}8$ cm, $|OB_1| = 28{,}5$ cm, $|A_1B_1| = 20$ cm.

7.53. Dane są odcinki, których długości są równe a i b, $a > b$. Skonstruuj odcinek, którego długość będzie równa:

a) $\frac{1}{5}a$ b) $\frac{2b}{3}$ c) $\frac{3(a+b)}{7}$

d) $\frac{b^2}{a}$ e) $\frac{ab}{a-b}$ f) $\frac{a^2}{a+b}$.

7.54. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, mamy dane: $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 7$ cm, $|AD| = 8$ cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?

7.55. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przedłużono ramiona AD i BC do przecięcia się w punkcie E. Oblicz CE, jeśli $|AD| = 1$ dm, $|BC| = 1{,}5$ dm, $|DE| = 2$ dm.

7.56. Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt K tak, że $\frac{|CK|}{|AK|} = \frac{3}{4}$. Przez punkt K poprowadzono prostą równoległą do boku AB. Przecięła ona bok BC trójkąta w punkcie L. Oblicz $|BL|$ i $|LC|$, jeśli $|BC| = 49$ cm.

7.57. Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt M tak, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{5}{7}$. Przez punkt M poprowadzono prostą, równoległą do boku AB trójkąta, która przecięła bok BC w punkcie N. Wiedząc, że $|AC| = 24$ cm i $|AB| = 20$ cm, oblicz $|MN|$ oraz $\frac{|CN|}{|CB|}$.

Podział trójkątów. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki boków w trójkącie

7.58. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych jest o 26° większy od drugiego.

D **7.59.** Suma dwóch kątów trójkąta jest równa trzeciemu kątowi. Wykaż, że jest to trójkąt prostokątny.

7.60. Znajdź kąty trójkąta równoramiennego, w którym kąt przy podstawie jest pięć razy mniejszy od przyległego do niego kąta zewnętrznego.

7.61. W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna DE kąta rozwartego ADC i prosta BC wyznaczają dwa kąty przyległe, których miary pozostają w stosunku 2 : 3. Oblicz miary kątów równoległoboku $ABCD$.

7.62. W trójkącie równoramiennym jeden z boków ma długość 4 cm, a drugi 9 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

7.63. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie AC. Ramię AB przedłużono na zewnątrz trójkąta o odległość BD i punkt D połączono z punktem C. Oblicz długość AC, jeżeli obwód trójkąta CBD wynosi 24 cm, a obwód trójkąta ADC wynosi 39 cm.

7.64. Czy można zbudować trójkąt o bokach mających długość:
a) 2, 4, 6 b) $2-\sqrt{2}$, 5, $2+\sqrt{2}$ c) 10, 12, 14?

7.65. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których boki pewnego trójkąta mają długość:
a) $3,\ a+2,\ 5-a$ b) $a,\ 2a,\ 6$ c) $a,\ 6-a,\ 3a+4$.

7.66. Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną.

7.67. Dwa boki trójkąta różnobocznego mają długość 5 i 7. Trzeci bok leży naprzeciw najmniejszego kąta w tym trójkącie. Wyznacz długość trzeciego boku wiedząc, że wyraża się ona liczbą naturalną.

7.68. Dwa boki trójkąta różnobocznego mają długość 3 i 7. Trzeci bok leży naprzeciw największego kąta w tym trójkącie. Wyznacz długość trzeciego boku wiedząc, że wyraża się ona liczbą naturalną.

7.69. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 11$ cm, $|AC| = 12$ cm. Połączono środki boków tego trójkąta, otrzymując trójkąt $A_1B_1C_1$. Oblicz obwód tego trójkąta.

7.70. Obwód trójkąta ABC wynosi 27 cm. Połączono środki boków tego trójkąta i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$. Oblicz obwód tego trójkąta.

7.71. W trójkącie ABC połączono środki boków, otrzymując trójkąt $A_1B_1C_1$. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest o 20 cm mniejszy od obwodu trójkąta ABC. Oblicz obwód trójkąta ABC.

D **7.72.** W trójkącie ABC połączono środki boków i otrzymano trójkąt KLM. Wykaż, że kąty trójkąta KLM mają takie same miary, jak kąty trójkąta ABC.

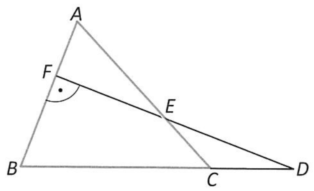
D **7.73.** Wykaż, że jeżeli kąt przyległy do jednego z kątów trójkąta jest dwa razy większy od drugiego kąta tego trójkąta, to trójkąt jest równoramienny.

D **7.74.** W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i zaznaczono na przedłużeniach punkty D i E tak, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle DCE| = 135°$.

D **7.75.** Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zaznaczono punkty C_1 i C_2 w taki sposób, że $|AC_1| = |AC|$ oraz $|BC_2| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle C_1CC_2| = 45°$.

D **7.76.** Wykaż, że jeśli w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie dzieli dany trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, to kąty danego trójkąta są równe: 36°, 72°, 72°.

D **7.77.** W trójkącie ABC na rysunku obok boki AC i BC są równe. Punkty B, C, D są współliniowe oraz $DF \perp AB$. Wykaż, że trójkąt CDE jest równoramienny.



D **7.78.** W trójkącie ABC bok AB jest najdłuższy. Na boku AB odłożono odcinki AC_1 oraz BC_2 w taki sposób, że $|AC_1| = |AC|$ oraz $|BC_2| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle C_1CC_2| = \dfrac{|\sphericalangle A| + |\sphericalangle B|}{2}$.

D **7.79.** Wewnątrz trójkąta ABC wybrano dowolny punkt S. Uzasadnij, że $|\sphericalangle CSB| > |\sphericalangle CAB|$.

D **7.80.** W trójkącie ABC prowadzimy dwusieczne kątów B i C, które przecinają się w punkcie S. Wykaż, że trójkąt CBS jest rozwartokątny.

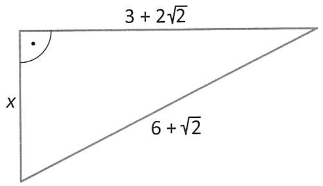
D **7.81.** Udowodnij, że w każdym trójkącie jest kąt, który ma co najmniej 60°, i kąt, który ma co najwyżej 60°.

D **7.82.** Narysuj dowolny trójkąt ABC i wykreśl przy dwóch jego wierzchołkach po jednym kącie zewnętrznym. Czy suma tych dwóch kątów może równać się kątowi półpełnemu? Odpowiedź uzasadnij.

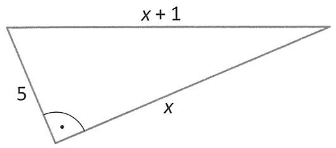
Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

7.83. Oblicz x:

a)

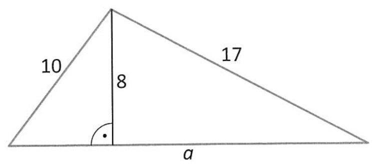


b)

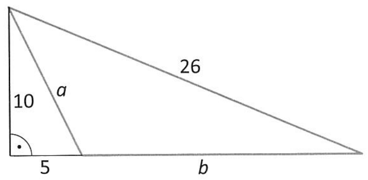


7.84. Oblicz długości nieznanych odcinków na rysunkach poniżej:

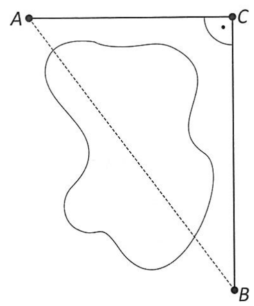
a)



b)



7.85. Miejscowości A, B i C są położone nad tym samym jeziorem – jak pokazano na rysunku obok. Z miejscowości A do C prowadzi droga długości 2,7 km, a droga z miejscowości C do B jest o 900 m dłuższa. O ile krótsza jest odległość w linii prostej od A do B od drogi prowadzącej przez C?



7.86. Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu, mierzonej w calach (1 cal = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala.

7.87. Punkt P należy do dwusiecznej kąta prostego i leży w odległości 2 cm od obu ramion tego kąta. Jaka jest odległość tego punktu od wierzchołka kąta?

7.88. Punkt M leży na symetralnej odcinka AB, w odległości 11 cm od odcinka AB i 61 cm od końców tego odcinka. Oblicz długość odcinka AB.

7.89. W trójkącie prostokątnym średni bok jest krótszy od najdłuższego o 2 cm. Wiedząc, że najkrótszy bok ma długość 8 cm, oblicz długość pozostałych boków trójkąta.

7.90. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 10 cm, a dwa jego krótsze boki pozostają w stosunku 8 : 15. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

7.91. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny:
a) 1,6 dm; 1,2 dm; 1 dm
b) 4 dm; 85 cm; 75 cm
c) $\sqrt{2}$ cm; $\sqrt{3}$ cm; $\sqrt{5}$ cm
d) 1 m; 5 dm; 1,25 m.

7.92. W prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość 10 cm, a bok BC ma 4 cm. Na boku DC obrano punkt E tak, że $|DE| : |EC| = 1 : 4$. Czy trójkąt ABE jest prostokątny? Odpowiedź uzasadnij.

7.93. Dane są odcinki o długościach a i b, $a > b$. Skonstruuj odcinek, którego długość jest równa:

a) $a\sqrt{2}$
b) $b\sqrt{12}$
c) $0{,}5\sqrt{a^2+b^2}$
d) $\frac{1}{3}\sqrt{a^2-b^2}$.

7.94. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny:
a) 4 cm, 5 cm, 6 cm
b) 10 cm, 7 cm, 7 cm
c) $2\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, $10\sqrt{0{,}36}$ cm
d) $(\sqrt{2}+1)$ cm, $(\sqrt{2}-1)$ cm, $2\sqrt{2}$ cm.

7.95. Sprawdź, czy dany trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny, jeśli długości jego boków pozostają w stosunku:
a) 4 : 3 : 5
b) 2 : 3 : 4
c) $2 : 1 : \sqrt{5}$
d) $\sqrt{10} : \sqrt{6} : \sqrt{5}$.

Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie

7.96. Obwód trójkąta ABC wynosi 21 cm. Wysokość CD dzieli go na dwa trójkąty, których obwody wynoszą odpowiednio 12 cm i 15 cm. Oblicz wysokość CD.

7.97. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość ma długość:
a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{6}$
c) 15
d) $\sqrt{2}$.

7.98. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego wiedząc, że jest on o 1 dłuższy od wysokości tego trójkąta. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi.

7.99. Oblicz długość boku trójkąta prostokątnego równoramiennego wiedząc, że najkrótsza wysokość tego trójkąta jest o 1 krótsza od pozostałych wysokości. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi.

7.100. W trójkącie prostokątnym wysokości mają długość: 12 cm, 15 cm, 20 cm. Jaką długość mają odcinki, na które spodek wysokości, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, podzielił przeciwprostokątną?

7.101. W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Spodek wysokości podzielił przeciwprostokątną na odcinki długości a i b. Oblicz tę wysokość.

a) $a = 5$ cm $b = 2$ dm
b) $a = 0{,}2$ dm $b = 1\frac{1}{4}$ dm
c) $a = \sqrt{2}$ cm $b = \sqrt{18}$ cm
d) $a = 2\sqrt{3\frac{1}{16}}$ dm $b = 1{,}4$ m

7.102. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 32 cm wysokość poprowadzona na podstawę jest równa 8 cm. Oblicz długość boków tego trójkąta.

7.103. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego ABC, wiedząc, że środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka C dzielą kąt prosty C na trzy równe części.

7.104. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna ma długość 4. Oblicz długość środkowych tego trójkąta.

7.105. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Oblicz różnicę długości środkowej i wysokości tego trójkąta, poprowadzonych z wierzchołka kąta prostego.

7.106. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 16 cm i 12 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

7.107. W trójkącie równoramiennym boki mają długość 13 cm, 13 cm, 10 cm. Oblicz długość środkowych w tym trójkącie.

7.108. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 30 cm. Środek ciężkości tego trójkąta znajduje się w odległości $2\frac{2}{3}$ cm od podstawy. Oblicz obwód danego trójkąta.

D **7.109.** W trójkącie ABC poprowadzono wysokości BD i CE. Wykaż, że miary kątów ABD i ACE są równe.

D **7.110.** Wykaż, że jeżeli jedna z wysokości trójkąta jest jednocześnie środkową tego trójkąta, to ten trójkąt jest równoramienny.

D **7.111.** W trójkącie ABC na wysokości CD wybrano punkt H taki, że $|\sphericalangle AHD| = |\sphericalangle ABC|$. Wykaż, że proste AH i BC są prostopadłe.

D **7.112.** Udowodnij, że jeżeli środkowa trójkąta równa się połowie boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt jest prostokątny.

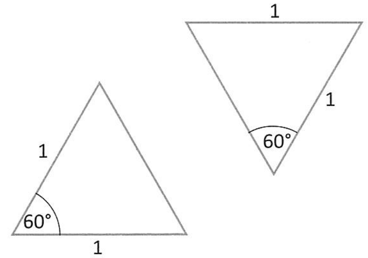
D **7.113.** W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę α, zaś kąt przy wierzchołku B – miarę β, przy czym $\alpha < \beta$. Wykaż, że kąt między wysokością poprowadzoną z wierzchołka C i dwusieczną kąta przy wierzchołku C jest równy $\frac{\beta - \alpha}{2}$. Rozważ trzy przypadki, gdy kąt przy wierzchołku B jest kątem ostrym, prostym lub rozwartym.

7.114. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 14$ cm, $|AC| = 15$ cm. Niech D oznacza spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Oblicz $|CD|$.

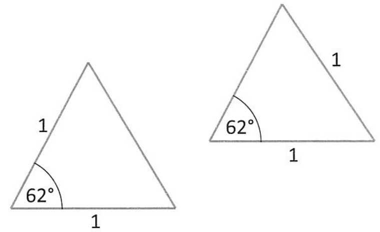
Przystawanie trójkątów

7.115. Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

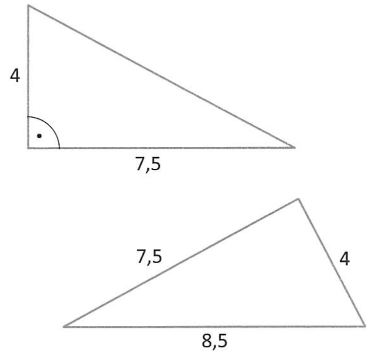
a)



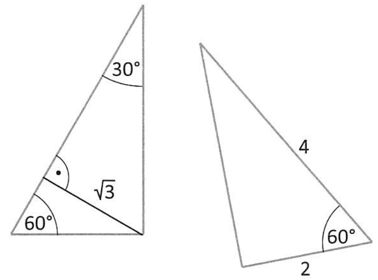
b)



c)



d)



D **7.116.** Udowodnij, że dwa trójkąty prostokątne są przystające, jeżeli przyprostokątna i przeciwległy jej kąt ostry jednego trójkąta równają się przyprostokątnej i przeciwległemu kątowi ostremu drugiego trójkąta.

D **7.117.** W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne BD i B_1D_1. Wykaż, że jeśli $|BC| = |B_1C_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|BD| = |B_1D_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

D **7.118.** W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe BD i B_1D_1. Wykaż, że jeżeli $|BD| = |B_1D_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$ oraz $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle D_1B_1C_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

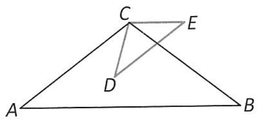
D **7.119.** W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, wiedząc, że $|CD| = |C_1D_1|$, $|DA| = |D_1A_1|$ oraz $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C_1D_1A_1|$.

D **7.120.** W trójkątach ostrokątnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono wysokości CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, jeżeli $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|CD| = |C_1D_1|$.

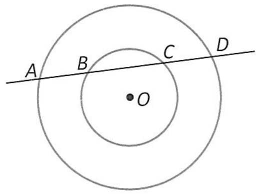
D **7.121.** Na jednej z dwóch prostych przecinających się w punkcie O zaznaczamy punkty A, B w taki sposób, że punkt O jest środkiem odcinka AB. Na drugiej prostej zaznaczamy punkty C, D w taki sposób, że punkt O jest również środkiem odcinka CD. Wykaż, że pr. $AC \parallel$ pr. BD.

D 7.122. W trójkącie równobocznym o boku a przedłużono bok AC poza punkt A o odcinek AA_1, $|AA_1| = 1$, bok AB poza punkt B o odcinek BB_1, $|BB_1| = 1$, bok BC poza punkt C o odcinek CC_1, $|CC_1| = 1$. Udowodnij, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest równoboczny.

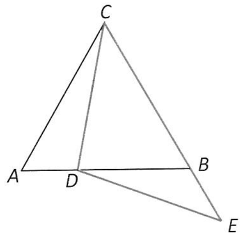
D 7.123. Trójkąty ABC i CDE są równoramienne, $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CE|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE|$. Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



D 7.124. Prosta przecina dwa okręgi współśrodkowe odpowiednio w punktach A, D i B, C, jak na rysunku obok. Wykaż, że $|AB| = |CD|$.



D 7.125. Punkt D należy do boku AB trójkąta równobocznego ABC (zobacz rysunek obok). Bok CB przedłużono poza punkt B do punktu E. Wykaż, że jeśli $|BE| = |AD|$, to trójkąt CDE jest równoramienny.

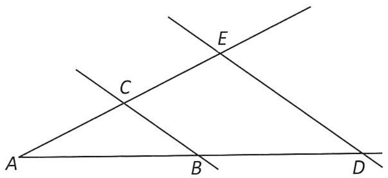


D 7.126. Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC zaznaczono odpowiednio punkty E, F, D tak, że $|AE| = |BF| = |CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Wykaż, że trójkąt EFD jest równoboczny oraz że boki tego trójkąta są prostopadłe do boków trójkąta ABC.

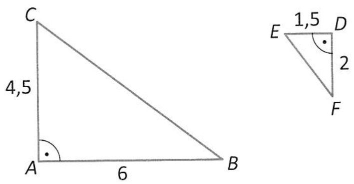
Podobieństwo trójkątów

7.127. Czy dane trójkąty są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

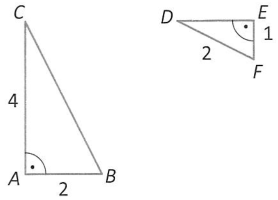
a) ΔABC i ΔADE, jeśli $ED \parallel CB$



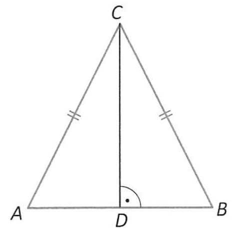
b) ΔABC i ΔDEF



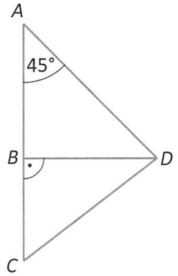
c) ΔABC i ΔDEF



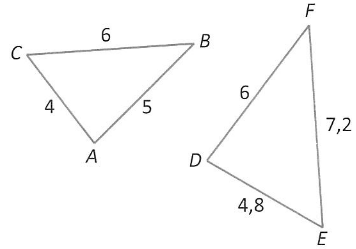
d) ΔADC i ΔBDC



e) ΔABD i ΔBCD, jeśli $|AB| \neq |BC|$

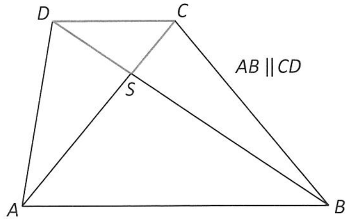


f) ΔABC i ΔDEF

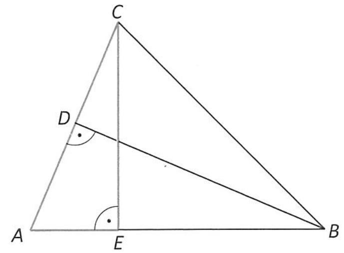


D 7.128. Wykaż podobieństwo trójkątów:

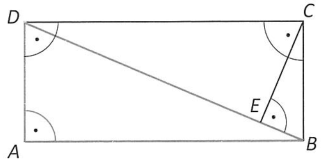
a) ΔABS i ΔCDS



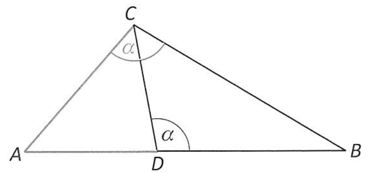
b) ΔABD i ΔAEC



c) ΔABD i ΔDEC

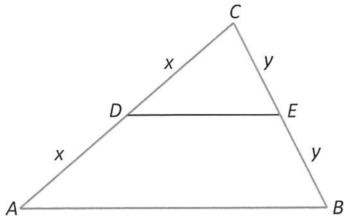


d) $\Delta\ ABC$ i ΔCDB

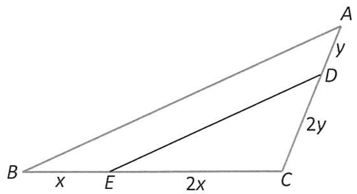


D 7.129. Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do wskazanego poniżej trójkąta i podaj skalę tego podobieństwa.

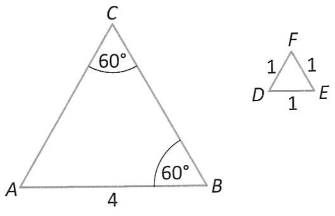
a) ΔDEC



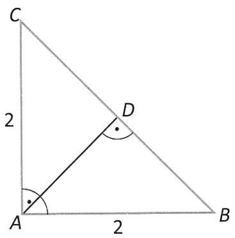
b) ΔDEC



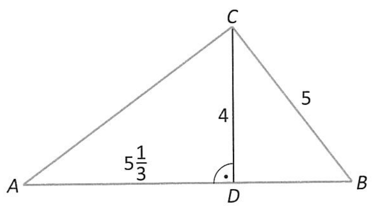
c) ΔDEF



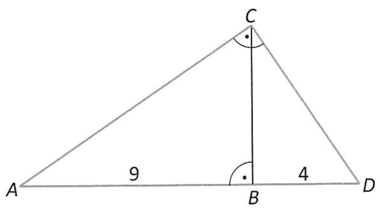
d) ΔABD



e) ΔCDB

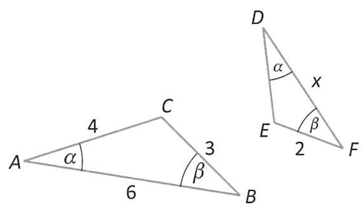


f) ΔADC

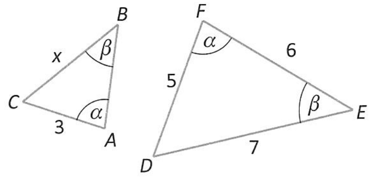


7.130. Na rysunku poniżej trójkąty ABC i DEF są podobne. Wyznacz długość x.

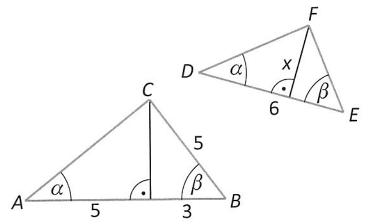
a)



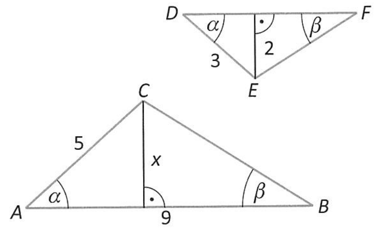
b)



c)



d)



7.131. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość $|CA| = 5{,}5$ cm, $|CB| = 30$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC, a $|A_1B_1| = 122$ cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

7.132. Obwód trójkąta ABC jest równy 9 cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = 4$, a dwa jego boki mają długość: $|A_1B_1| = 10$ cm, $|A_1C_1| = 12$ cm. Oblicz długość boków trójkąta ABC.

Podobieństwo trójkątów – zastosowanie w zadaniach

7.133. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 12$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC i jego obwód jest równy 6 cm. Oblicz:
a) skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC
b) długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

7.134. Obwód trójkąta ABC podobnego do trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równy 14 cm. Wiedząc, że: $|A_1B_1| = 2$ cm, $|B_1C_1| = 3\frac{1}{3}$ cm oraz $|A_1C_1| = 4$ cm, oblicz:
a) skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta $A_1B_1C_1$
b) długości boków trójkąta ABC.

7.135. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali s. Wiedząc, że obwód trójkąta ABC jest o 60% krótszy od obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$, oblicz:
a) skalę s
b) o ile procent obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest dłuższy od obwodu trójkąta ABC.

7.136. Obwód trójkąta ABC jest równy 21 cm. Prosta równoległa do podstawy AB przecina wysokość CD w punkcie P, a boki AC i BC – odpowiednio w punktach E i F. Wiedząc, że $|DP| : |PC| = 1 : 2$, oblicz obwód trójkąta CEF.

7.137. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 90°$, $|AB| = 51$ cm, $|BC| = 24$ cm, poprowadzono odcinek DE długości 15 cm, równoległy do boku AC taki, że $E \in BC$ i $D \in AB$. Oblicz długości odcinków CE i AD.

7.138. W trapezie długości podstaw wynoszą 5 cm i 8 cm, a długości ramion: 3 cm i 4 cm. Ramiona trapezu przedłużono do przecięcia w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt P, a dwa pozostałe są końcami dłuższej podstawy trapezu.

7.139. W trapezie podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, a wysokość jest równa 7 cm. Wyznacz odległości punktu przecięcia się przekątnych trapezu od podstaw.

7.140. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki długości $|AD| = 4$ cm i $|DB| = 10$ cm. Bok BC ma 16 cm długości. Wyznacz długości odcinków, na jakie symetralna boku AB podzieli bok BC.

7.141. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm. Na boku AC zaznaczono punkt D, a na boku BC punkt E w taki sposób, że $|DC| = 2$ cm, $|CE| = 3$ cm. Wiedząc, że $|DE| = 4$ cm, oblicz długość odcinka AB.

7.142. Boki trójkąta rozwartokątnego ABC mają długość: $|AB| = 10$, $|BC| = 8$, $|AC| = 5$. Na boku AB zaznaczono punkt D w taki sposób, że $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle ACB|$. Oblicz długości odcinków CD i DB.

7.143. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 20 cm. Spodek najkrótszej wysokości dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki w stosunku 9 : 16. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

7.144. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden jest o 2 krótszy od tej wysokości, a drugi o 3 od niej dłuższy. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

7.145. W trójkącie równoramiennym ABC są dane: $|AC| = |BC| = 26$ cm, $|AB| = 20$ cm. Oblicz odległość środka S wysokości CD od ramienia AC.

7.146. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 8$ cm i $|AC| = 4$ cm. Punkt D dzieli bok AB w stosunku $|AD| : |DB| = 1 : 3$. Punkt E należy do boku BC i odcinek DE jest prostopadły do boku BC. Oblicz $|CE| : |EB|$.

7.147. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 30 cm, a ramię 25 cm. Oblicz odległość środka podstawy od ramienia tego trójkąta.

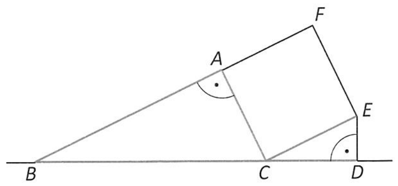
7.148. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a wysokość CD ma 12 cm. W trójkąt ten wpisano kwadrat, którego dwa wierzchołki należą do podstawy AB, a dwa – do ramion AC i BC. Oblicz długość boku kwadratu.

7.149. Podstawa AB trójkąta ostrokątnego ABC ma długość 10 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę ma długość 8 cm. W ten trójkąt wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do podstawy AB, a dwa – do boków AC i BC. Oblicz długość boku kwadratu.

7.150. Na rysunku obok punkty B, C, D są współliniowe. Trójkąty BCA i CDE są prostokątne, a czworokąt $ACEF$ jest kwadratem.

D a) Wykaż, że trójkąty ABC i CDE są podobne.

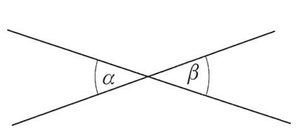
b) Wiedząc dodatkowo, że $|AC| : |AB| = 3 : 4$, oblicz skalę podobieństwa trójkąta CDE do trójkąta ABC.



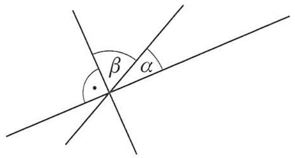
Test sprawdzający do rozdziału 7.

1. Kąty przyległe α, β są zaznaczone na rysunku:

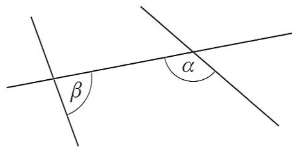
A.



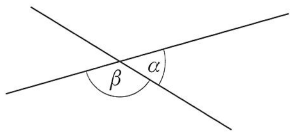
B.



C.



D.

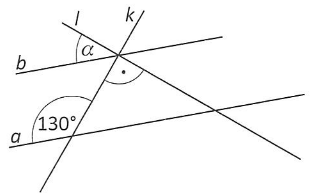


2. Figurą wypukłą i nieograniczoną jest:

A. odcinek B. koło C. okrąg D. kąt o mierze 175°

3. Na rysunku obok proste a i b są równoległe, zaś prosta k jest prostopadła do prostej l. Zatem:

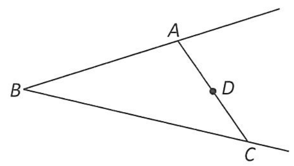
A. $\alpha = 35°$ B. $\alpha = 40°$
C. $\alpha = 45°$ D. $\alpha = 50°$



4. Punkt C dzieli odcinek AB długości 48 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy $|AC| : |BC| = 3 : 5$. Z tego wynika, że:

A. $|AC| = 30$ cm i $|BC| = 18$ cm B. $|AC| = 20$ cm i $|BC| = 28$ cm
C. $|AC| = 18$ cm i $|BC| = 30$ cm D. $|AC| = 28$ cm i $|BC| = 20$ cm

5. Na rysunku obok $|BA| < |CB|$ oraz $|AD| = |DC|$. Prawdziwe jest zdanie:



A. Prosta BD nie jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ nie jest dwusieczną kąta ABC.
B. Prosta BD nie jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ABC.
C. Prosta BD jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ABC.
D. Prosta BD jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ nie jest dwusieczną kąta ABC.

6. Dany jest odcinek AB oraz punkty C_1, C_2, C_3, spełniające warunki:

$|C_1A| = 5{,}5$ cm $\qquad |C_2A| = 3{,}(7)$ cm $\qquad |C_3A| = \sqrt{18}$ cm

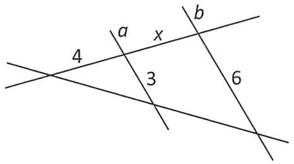
$|C_1B| = \left(\dfrac{2}{11}\right)^{-1}$ cm $\qquad |C_2B| = 3\dfrac{7}{9}$ cm $\qquad |C_3B| = 3\sqrt{2}$ cm

Do symetralnej odcinka AB spośród punktów C_1, C_2, C_3:

A. należy tylko punkt C_1 B. należą tylko punkty C_1 i C_2
C. nie należy żaden punkt D. należą wszystkie punkty.

7. Na rysunku obok proste a i b są równoległe. Zatem:

A. $x = 2$ B. $x = 4$
C. $x = 6$ D. $x = 8$



8. Dwa boki trójkąta mają długość 4 oraz $5\frac{1}{2}$, a obwód tego trójkąta jest liczbą naturalną. Trzeci bok tego trójkąta może mieć maksymalnie długość równą:

A. 9 B. 8,5 C. 7,5 D. 5,5

9. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 1 cm krótsza od przeciwprostokątnej, a druga przyprostokątna ma 5 cm długości. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość:

A. 5 cm B. 10 cm C. 13 cm D. 15 cm

10. W pewnym trójkącie dwusieczna tylko jednego kąta zawiera wysokość tego trójkąta. Zatem trójkąt ten jest:

A. rozwartokątny B. prostokątny C. równoramienny D. równoboczny

11. W trójkącie prostokątnym równoramiennym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość a. Długość przeciwprostokątnej jest równa:

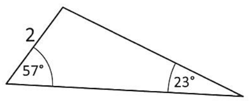
A. $2a$ B. $\sqrt{2}a$ C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ D. a

12. W trójkącie o bokach długości 4, 5, 6 połączono środki boków i otrzymano w ten sposób nowy trójkąt. Obwód nowego trójkąta jest równy:

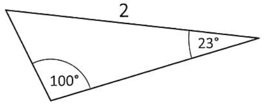
A. 5,5 B. 6,5 C. 7,5 D. 8,5

13. Dane są trzy trójkąty:

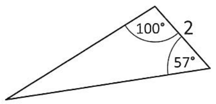
I.



II.



III.

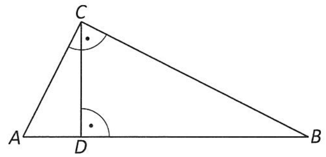


Trójkąty przystające są na rysunkach:

A. tylko na I i II B. tylko na II i III C. tylko na I i III D. na I, II i III

14. W trójkącie ABC na rysunku obok $|AD| = 1\frac{1}{5}$ cm, $|DB| = 7{,}5$ cm.
Odcinek CD ma długość:

A. 2 cm B. 3 cm
C. 4 cm D. 5 cm



15. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono dwie wysokości CD i AE. Wiadomo, że $|DB| = 2{,}5$ cm, $|CD| = 5$ cm oraz $|AE| = 4$ cm. Wówczas:

A. $|EB| = 2$ cm B. $|EB| = 2\frac{1}{4}$ cm C. $|EB| = 3$ cm D. $|EB| = 3\frac{1}{8}$ cm

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

16. Kąt zewnętrzny przy podstawie trójkąta równoramiennego jest większy o 36° od kąta zewnętrznego przy jego wierzchołku naprzeciw podstawy. Wyznacz kąty tego trójkąta.

17. W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna DE kąta rozwartego ADC i prosta BC wyznaczają dwa kąty przyległe, których miary pozostają w stosunku 2 : 3. Oblicz miary kątów równoległoboku $ABCD$.

18. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz długości odcinków: CE, BE i DE.

19. W trójkącie ABC poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy AB, dzielące bok BC na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie ABC jest o 6 dm większa od podstawy AB. Oblicz długość boku AB.

20. Liczba przekątnych pewnego wielokąta foremnego jest trzy razy większa od liczby jego boków. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego wielokąta.

D **21.** Miary kątów wewnętrznych pewnego sześciokąta pozostają w stosunku 1: 2: 3: 4: 3 : 2. Wykaż, że ten sześciokąt jest figurą wklęsłą.

22. W trójkącie ABC dwusieczna poprowadzona z wierzchołka C przecina przeciwległy bok w punkcie D. Wiedząc, że $|\sphericalangle BDC| = 100^\circ$ i że odcinek CD jest równy jednemu z boków wychodzących z wierzchołka C, oblicz miary kątów trójkąta ABC.

D **23.** W trójkącie ABC przedłużono bok AB poza wierzchołek B i odłożono odcinek BD, równy odcinkowi BC. Połączono punkty C i D. Wykaż, że $|\sphericalangle CDA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBA|$.

24. Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego ABC wiedząc, że $|AB| = 2a + 5$, $|BC| = a + 6$, $|CA| = 4a - 1$.

25. Rozpatrujemy trójkąty, których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi, a obwód jest mniejszy od 17.

a) Wyznacz długości boków trójkąta, który ma największy obwód.

b) Dla wyznaczonego trójkąta oblicz długość odcinka łączącego środki dwóch krótszych boków.

26. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, $|AB| = |BC|$, o obwodzie 200 cm. W trójkącie tym poprowadzono środkowe AD i CE. Obwód trójkąta ACE jest o 20 cm większy od obwodu trójkąta ABD. Oblicz długości boków trójkąta ABC.

27. W trójkącie dwa boki mają długość 3,15 i 0,78. Wyznacz długość trzeciego boku, wiedząc, że wyraża się ona liczbą całkowitą.

D **28.** Przekątne równoległoboku mają długość 10 cm i 8 cm. Wykaż, że obwód czworokąta powstałego z połączenia kolejno środków boków tego równoległoboku jest równy 18 cm.

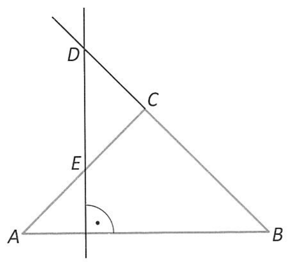
29. W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest o 3 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Druga przyprostokątna ma długość 9 cm. Oblicz:

a) obwód trójkąta

b) odległość punktu przecięcia środkowych trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

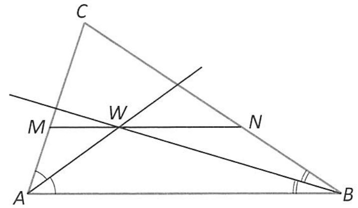
30. W trójkącie prostokątnym równoramiennym środkowa poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 6 cm. Oblicz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta ostrego tego trójkąta.

D **31.** W trójkącie ABC boki AC i BC mają taką samą długość. Na półprostej $\overrightarrow{BC}$ poza bokiem BC zaznaczono punkt D tak, że prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do boku AB przecina się z bokiem AC w punkcie E. Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoramienny.



D **32.** W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AC. Z punktu D poprowadzono odcinek DE taki, że $DE \perp AB$ oraz $E \in AB$. Wykaż, że długość odcinka DE jest równa połowie wysokości CF.

D **33.** Przez punkt W, w którym przecinają się dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC, prowadzimy równoległą do boku AB. Ta równoległa przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $|MN| = |AM| + |BN|$.



D **34.** Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 4{,}8$ cm, $|BC| = 6{,}4$ cm oraz $|AC| = 8$ cm.

a) Wykaż trójkąt ABC jest prostokątny.

b) Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych jest równa 8 cm, a druga jest o 4 cm krótsza od przeciwprostokątnej.

c) Podaj skalę tego podobieństwa.

35. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC w skali 0,25 jest o 12 cm krótszy od obwodu trójkąta ABC. Wyznacz obwody tych trójkątów.

36. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$, a jego obwód jest o 25% krótszy od obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$. Podaj, w jakiej skali trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC.

37. Przez punkt K przecięcia się przekątnych AC i BD trapezu poprowadzono prostą m, prostopadłą do obu podstaw trapezu, która przecina krótszą podstawę DC trapezu w punkcie L, a dłuższą podstawę AB w punkcie M. Wiedząc, że $|LM| = 12$ cm oraz, że $|KL| = 2$ cm i $|LC| = 3$cm, oblicz długość przekątnej AC trapezu.

38. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono odcinek AE prostopadły do przekątnej DB i punkt E należy do boku DC prostokąta. Przekątna DB przecina się z odcinkiem AE w punkcie P. Wiedząc, że $|AP| = 8$ cm, $|PE| = 2$ cm, oblicz:

a) długość przekątnej prostokąta

b) długość boków prostokąta.

D **39.** W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D, bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta EAF i oblicz skalę tego podobieństwa.

D **40.** Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, punkty A_1, B_1, C_1 są środkami boków, a punkty K, L, M są środkami odcinków SA, SB, SC. Udowodnij, że $\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta KLM$.