Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ульяновский государственный технический университет»

Кафедра «Измерительно-вычислительные комплексы»

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

лабораторный практикум для магистрантов направления 09.04.02
«Информационные системы и технологии»

Составитель: **В.В. Родионов**

Ульяновск, 2021

Язык функционального программирования F#, предназначенный для написания программ для платформы .NET Framework, позволяет создавать любые программы, однако его преимущества в полной мере раскрываются, если объект автоматизации предполагает использование большого числа математических расчётов. Поэтому часть лабораторных работ будет выполнена с использованием элементов теории вероятностей и математической статистики.

В качестве среды выполнения лабораторных работ предполагается использование интегрированной среды Visual Studio Community с установленным языком F#.

Основные понятия и характеристики стохастического процесса

Вероятность – это мера осуществимости результата. Формально это функция $\mathbf{P}(\mathbf{x})$, которая ставит в соответствие результатам некоторые вещественные числа и удовлетворяет аксиомам:

А1) $0 \le \mathbf{P}(\mathbf{x}) \le 1$ для любого результата $\mathbf{x}$,

А2) $\mathbf{P}(\mathbf{S}) = 1$, где $\mathbf{S}$ – пространство выборки,

А3) если $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, … – взаимоисключающие результаты, то вероятность их появления равна сумме вероятностей появления каждого из $\mathbf{x_i}$, т.е. $\mathbf{P(x_1 \cup x_2 \cup x_3 ...)}$ = $\mathbf{P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + ...}$.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение из пространства выборки, заранее не известное и зависящее от случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. Случайные величины, принадлежащие конечному или счетному множеству значений, называются *дискретными*, а если они могут принадлежать континууму значений, то будут являться *непрерывными* случайными величинами.

Вероятностное распределение представляет собой некоторое правило задания вероятности для каждого из всех возможных значений случайной переменной. Вероятностное распределение характеризуется *функцией вероятности* $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ и *функцией распределения* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Для дискретной случайной величины $\mathbf{P}(\mathbf{x_i}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}=\mathbf{x_i})$ со следующими ограничениями: $0 \le \mathbf{P}(\mathbf{x_i}) \le 1$ для всех $\mathbf{i}$ и $\sum\limits_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{P}(\mathbf{x_i}) = 1$, где $\mathbf{N}$ – количество значений случайной величины. Эта функция устанавливает $\mathbf{P}(\mathbf{x_i})$ – конкретную вероятность того, что случайная переменная $\mathbf{X}$ принимает значения $\mathbf{x_i}$. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}<\mathbf{x})$ со следующими свойствами:

$0 \le \mathbf{F}(\mathbf{x}) \le 1$ для всех $\mathbf{x}$,

$\mathbf{F}(-\infty) = 0$,

$\mathbf{F}(+\infty) = 1$.

Эта функция определяет вероятность того, что случайная величина $\mathbf{X}$ примет значение, не большее чем $\mathbf{x}$.

Функция распределения и функция вероятностей связаны следующим образом:

$$\mathbf{F(x)} = \sum_{\mathbf{x_i<x}} \mathbf{P(x_i)}.$$

Для непрерывных случайных величин функция вероятности заменяется на непрерывную функцию плотности вероятности $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, определяемую следующим образом

$$\mathbf{P(a < x < b)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}.$$

Функция распределения определяется следующим образом:

$$\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(y)dy} = \mathbf{P(X < x)}.$$

Математическое ожидание – взвешенная по вероятности средняя величина всех возможных значений $\mathbf{X}$, определяющая меру центральности распределения.

$$\mathbf{M(X)} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{x_i P(x_i)} \text{ для дискретной } \mathbf{X},$$

где $\mathbf{N}$ – количество значений случайной величины.

Если вероятности всех значений величины $\mathbf{X}$ одинаковы, то

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

$$\mathbf{M(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{xf(x)dx}$$, если **X** непрерывна.

Когда все значения непрерывной случайной величины сосредоточены на отрезке [**a**, **b**],

$$\mathbf{M(X)} = \int_{a}^{b} \mathbf{xf(x)dx}.$$

Дисперсия служит мерой рассеяния (разброса) случайной величины около её математического ожидания, представляя собой квадрат отклонения от математического ожидания:

$$\mathbf{D(X)} = \mathbf{M}[(\mathbf{X}-\mathbf{M(X)})^2], \text{ или } \mathbf{D(X)} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - M(X))^2.$$

Среднеквадратичным отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии этой величины: $\sigma = \sqrt{D}$.

1. Моделирование потоков сообщений в вычислительной системе

Известно, что функционирование программного обеспечения вычислительной системы основано на механизме передачи и приёма так называемых сообщений, носящих уведомляющий (нотификационный) или управляющий характер. При этом порядок и частота возникновения сообщений являются случайными величинами, зависящих от многих факторов: действий пользователя, количества запущенных приложений, режимов их работы и работы операционной системы. Эти случайные факторы в большинстве случаев могут быть аппроксимированы соответствующими распределениями вероятностей.

Рассмотрим условную схему передачи и приёма сообщений в некоторой простейшей вычислительной системе. В этой системе присутствует только один источник генерации сообщений и несколько приёмников, количество которых заранее определено. Причём каждое конкретное сообщение адресуется (с определённой вероятностью) только одному приёмнику. Сообщения имеют разные типы и приоритеты. Однако для упрощения моделирования приоритет сообщений игнорируется: считается, что одновременного поступления сообщений разных типов в приёмник не произойдёт. Учитывается только тип сообщения.

1.1 Характеристики сообщения

Сообщение в моделируемой вычислительной системе полностью описывается следующим характеристиками:

1. **Тип сообщения** – характеристика, определяющая назначение сообщения.
2. **Длина сообщения** – характеристика, определяющая размер сообщения.
3. **Время возникновения сообщения** – характеристика, устанавливающая время возникновения сообщения в процессе функционирования системы.
4. **Место сообщения** – характеристика, указывающая номер объекта (приёмника), для которого оно предназначено.

1.2 Задачи моделирования потока сообщений

При моделировании потока сообщений приходится решать ряд отдельных задач.

Задача 1. Генерация сообщений различных типов. На основе функции распределения вероятностей возникновения в системе сообщения с **i**-го типа $\mathbf{p_i}$, $\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{R}}$, где **R** – число типов сообщений, генерируется последовательность случайных чисел, определяющих тип каждого сообщения моделируемого потока.

Задача 2. Адресация сообщений. Сообщения поступают в **M** различных приёмников, причем каждое из них предназначено для передачи лишь в один из приёмников. Вероятности того, что сообщение **i**-го типа предназначено для передачи в **j**-й приёмник, задаются матрицей вероятностей $\mathbf{p_{i,j}}$.

Задача 3. Моделирование времени поступления сообщений в систему. Для сообщений **R** типов по заданным законам распределения промежутка времени между поступлениями в систему сообщений **i**-го типа генерируется последовательность случайных чисел, определяющих моменты возникновения каждого моделируемого сообщения в системе.

Задача 4. Моделирование потока сообщений с заданным законом распределения вероятностей длин. Для сообщений заданных **R** типов генерируется последовательность случайных чисел, задающих длину каждого сообщения соответствующего типа для моделируемого потока сообщений.

1.3. Форма описания и анализа потока сообщений

Поток сообщений, упорядоченный по времени возникновения сообщений в вычислительной системе, представляется по схеме, заданной четырьмя характеристиками каждого сообщения: 1) тип сообщения, 2) адрес приёмника, 3) длина сообщения, 4) время генерации сообщения.

Анализ характеристик потока сообщений проводится сопоставлением заданных (идеальных) характеристик потока и реально полученных. Для сообщения каждого типа определяется

а) вероятность и количество появления сообщений данного типа,

б) средняя и предельная длины сообщений данного типа,

в) средняя частота поступления сообщений данного типа,

г) вероятности и число поступлений сообщений данного типа к каждому приёмнику, средняя частота поступления сообщений в приёмник, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{f_i} = \frac{\mathbf{M_i}}{\mathbf{T_{max}}},$$

где $\mathbf{M_i}$ – число поступления сообщения **i**-го типа к каждому приёмнику,

$\mathbf{T_{max}}$ – время моделирования.

2. Случайные величины с равномерным законом распределения

2.1. Общие сведения

При моделировании систем на компьютере программная имитация стохастических воздействий любой сложности сводится к генерированию некоторых стандартных (базовых) процессов и к их последующему функциональному преобразованию. Таким базовым процессом является последовательность чисел $\{\mathbf{x_i}\} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x_N}$, представляющих собой реализации независимых, равномерно распределенных на интервале [0, 1] случайных величин $\{\varepsilon_i\} = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$. В основе процесса воспроизведения значений случайной величины лежат случайные числа. Количество случайных чисел, используемых для получения статистически устойчивой оценки характеристики процесса функционирования системы при реализации моделирующего алгоритма на компьютере, колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от класса объекта моделирования, вида оцениваемых характеристик, необходимой точности и достоверности результатов моделирования. Для имитационного моделирования на компьютере характерно, что большое количество операций расходуется на действия со случайными числами. Кроме того, результаты моделирования существенно зависят от качества исходных последовательностей случайных чисел. Поэтому наличие простых и экономичных способов формирования последовательностей случайных чисел требуемого качества во многом определяет возможность практического использования имитационного моделирования систем.

Генераторы случайных чисел, созданные как соответствующие программы для компьютера, называются *программными генераторами*. Их важным достоинством является простота практической реализации, а основным недостатком то, что получаемая с их помощью последовательность оказывается периодической, т.е., начиная с некоторого числа вся последовательность повторяется. Кроме того, строго говоря, детерминированный алгоритм, реализуемый программой, в принципе не может быть источником случайных чисел, вернее, как показали исследования Н.А. Колмогорова и его последователей, такой алгоритм должен бы был иметь бесконечную сложность. Поэтому последовательности чисел, получаемые с помощью любых программных генераторов, по сути являются детерминированными и называются *псевдослучайными*, или *квазислучайными*.

Считается, что наименьшим машинным затратам и удобству дальнейших преобразований удовлетворяет последовательность случайных чисел с равномерным распределением в интервале [0, 1]. С помощью таких случайных чисел можно конструировать как случайные события с любой заданной вероятностью, так и случайные величины, обладающие практически любым законом распределения.

Примером случайной величины, имеющей равномерное распределение вероятностей, может служить ошибка при снятии показаний с измерительных приборов, если производится округление отсчёта до ближайшего целого деления.

2.2. Основные свойства равномерного распределения

Рассмотрим свойства равномерно распределённой случайной величины.

Непрерывная случайная величина **X** имеет равномерное распределение на интервале [**a, b**], если на этом интервале плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его – равна нулю.

Закон равномерного распределения аналитически можно задать в виде плотности распределения **f**(**x**):

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 0\mathbf{,\ x < a,} \\ \dfrac{1}{\mathbf{b-a}}\mathbf{,a \le x \le b,} \\ 0\mathbf{,\ x > b,} \end{cases}$$

и функцию распределения **F**(**x**):

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} 0\mathbf{,\ x < a,} \\ \dfrac{\mathbf{x-a}}{\mathbf{b-a}}\mathbf{,a \le x \le b,} \\ 1\mathbf{,\ x > b.} \end{cases}$$

Математическое ожидание **M**(**X**) равномерного распределения находится посередине интервала [**a**, **b**]:

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\mathbf{a+b}}{2}.$$

Дисперсия **D**(**X**) и среднее квадратичное отклонение σ(**X**) соответственно равны:

$$\mathbf{D(X)} = \frac{\mathbf{(b-a)}^2}{12},\ \sigma\mathbf{(X)} = \frac{\mathbf{b-a}}{2\sqrt{3}}.$$

В частном случае равномерного распределения в интервале [0, 1] случайная величина **X** имеет функцию плотности распределения:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 0, \mathbf{x} < 0, \\ 1, 0 \le \mathbf{x} \le 1, \\ 0, \mathbf{x} > 1, \end{cases}$$

и функцию распределения:

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} 0, \mathbf{x} < 0, \\ \mathbf{x}, 0 \le \mathbf{x} \le 1, \\ 1, \mathbf{x} > 1. \end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение соответственно равны:

$$\mathbf{M(X)} = \frac{1}{2},\ \mathbf{D(X)} = \frac{1}{12}, \sigma\mathbf{(X)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

2.3. Методы проверки качества генерации случайных чисел с равномерным законом распределения

Числа, получаемые с помощью программного генератора, рассматриваются как случайные, однако нужно проверить, являются ли они в действительности последовательностью независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале [0, 1]. Для этого используются специальные методы (статистические критерии). Следует отметить, что если критерии $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, …, $\mathbf{T_n}$ подтверждают, что рассматриваемая последовательность ведёт себя случайным образом, то из этого нельзя заранее сделать вывод об успешности также и проверки $\mathbf{T_{n+1}}$. Однако каждая успешная проверка даёт всё больше уверенности в случайности последовательности.

Методы (в дальнейшем, тесты) проверки качества псевдослучайных чисел делятся на три группы:

а) тесты проверки «случайности» последовательности псевдослучайных чисел,

б) тесты проверки равномерности распределения,

в) тесты проверки независимости чисел последовательности.

Первые два теста основываются на статистических критериях согласия, с помощью которых проверятся гипотеза о том, что выборка $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, … произведена из генеральной совокупности с определенным распределением вероятностей. Наиболее употребительным является статистический критерий согласия Пирсона χ^2 (критерий частот), который применим к любому виду распределения.

Пусть имеется η – случайная величина, о законе распределения которой выдвигается некоторая гипотеза, $\mathbf{X}$ – множество возможных значений η. Разобьем $\mathbf{X}$ на $\mathbf{m}$ попарно непересекающихся множества $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, …, $\mathbf{X_m}$, таких, что

$\mathbf{P}(\eta\in\mathbf{X_j}) = \mathbf{p_j} > 0$ при $\mathbf{j} = 1, 2, …, \mathbf{m}$,

$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + … \mathbf{p_m} = \mathbf{P}(\eta\in\mathbf{X}) = 1$.

Выберем $\mathbf{N}$ независимых значений η_1, η_2, …, $\eta_\mathbf{N}$ и обозначим через $\nu_\mathbf{j}$ количество значений $\eta\in\mathbf{X_j}$. Очевидно, что математическое ожидание $\nu_\mathbf{j}$ равно $\mathbf{Np_j}$: $\mathbf{M}[\nu_\mathbf{j}] = \mathbf{Np_j}$.

В качестве меры отклонения всех $\nu_\mathbf{j}$ от $\mathbf{Np_j}$ выбирается величина $\chi^2_\mathbf{N} = \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{m}} \frac{(\nu_\mathbf{j} - \mathbf{Np_j})^2}{\mathbf{Np_j}}$.

При достаточно большом $\mathbf{N}$ величина $\chi^2_\mathbf{N}$ хорошо подчиняется закону распределения χ^2 с ($\mathbf{m}$–1) степенью свободы.

Правило применения критерия Пирсона сводится к следующему. Рассчитывается значение $\chi^2_\mathbf{N}$. При этом необходимым условием является наличие в каждом из интервалов по меньшей мере 10-15 наблюдений. Обычно фиксируют достаточно большую вероятность 1-α, которую называют *доверительной вероятностью*, или *коэффициентом доверия*. Вероятность α называют *уровнем значимости*. Это означает, что в рассматриваемой задаче событие с вероятностью большей или равной 1-α считают достоверным, а событие с вероятностью α невозможным при единичном испытании.

Далее по таблице распределения (приложение А) определяется значение $\chi^2_{k,\alpha}$. Если $\chi^2_N < \chi^2_{k,\alpha}$, то результат не противоречит гипотезе, и она принимается; $\chi^2_N \ge \chi^2_{k,\alpha}$ означает, что гипотеза должна быть отвергнута.

Этот вывод зависит от выбранной доверительной вероятности и поэтому не носит абсолютного характера. Чаще других используют доверительные вероятности 0,95 и 0,99; соответствующие уровни значимости называют 5%-ным и 1%-ным уровнями.

Тесты проверки «случайности» закона распределения

Рассмотрим два теста проверки «случайности»: тест проверки серий и тест проверки интервалов.

Тест проверки серий предусматривает разбиение случайных чисел в исследуемой последовательности на элементы двух родов – первого и второго.

Серией называется любой отрезок последовательности чисел, состоящий из следующих друг за другом элементов одного и того же рода. Например, если в последовательности чисел

$$\underbrace{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_d}_{\text{серия 1-го рода длины d}} \qquad \underbrace{\varepsilon_{d+1}, \varepsilon_{d+2}, ..., \varepsilon_{d+k}}_{\text{серия 2-го рода длины k}} \qquad \underbrace{\varepsilon_{d+k+1}, \varepsilon_{d+k+2}, ..., \varepsilon_s}_{\text{серия 1-го рода длины s-d-k}}$$

$\varepsilon_1 \ne \varepsilon_2 \ne \ldots \ne \varepsilon_d \ne \varepsilon_{d+1}$, $\varepsilon_{d+1} = \varepsilon_{d+2} = \ldots = \varepsilon_{d+k}$ и $\varepsilon_{d+k} \ne \varepsilon_{d+k+1} \ne \ldots \ne \varepsilon_s$, то числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d$ образуют серию первого рода длины **d**, числа $\varepsilon_{d+1}, \varepsilon_{d+2}, \ldots, \varepsilon_{d+k}$ образуют серию второго рода длины **k** и числа $\varepsilon_{d+k+1}, \varepsilon_{d+k+2}, \ldots, \varepsilon_s$ также образуют серию первого рода длины **s**–**d**–**k**. Иногда для удобства элементы серий первого рода обозначают знаками «–» (минус), а второго рода – знаками «+» (плюс). В этом случае рассматриваемая последовательность будет иметь такой вид:

$$\underbrace{-, -, ..., -}_{\text{d минусов}} \qquad \underbrace{+, +, ..., +}_{\text{k плюсов}} \qquad \underbrace{-, -, ..., -}_{\text{s-d-k минусов}}$$

Подсчитаем количество z_k серий второго рода длины **k** в последовательности псевдослучайных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$. Пусть $k = 1, 2, \ldots, w$ и z'_{w+1} – количество серий второго рода с $k \ge w+1$ (они объединяются в одну группу). При этом предполагается, что серия из двух чисел имеет длину 1 и т.д. Обозначим общее количество серий через $z = z_1 + z_2 + \ldots + z_w + z'_{w+1}$.

Величина χ^2_z с **w** степенями свободы вычисляется по формуле:

$$\chi^2_z = \sum_{k=1}^{w} \frac{(z_k - p_k z)^2}{p_k z} + \frac{(z'_{w+1} - p'_{w+1} z)^2}{p'_{w+1} z},$$

где $p_k = 9 \cdot 10^{-k}, p'_{w+1} = 10^{-(w+1)}$.

Если, с заданной доверительной вероятностью α, значение χ^2_z удовлетворяет критерию Пирсона, то тест проверки серий считается пройденным.

Тест проверки интервалов используется для проверки длины «интервалов» между появлениями ε_i на определённом отрезке. Если γ и φ – два действительных числа, таких, что $0 \le \gamma < \varphi \le 1$, то рассматриваются длины подпоследовательностей $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{i+k}$, в которых ε_{i+k} лежит между γ и φ, а другие ε_s не лежат между этими числами. Эта подпоследовательность, состоящая из **k**+1 числа, рассматривается как интервал длиной **k**. Отдельно подсчитывается число интервалов длиной **k** = 0, 1, …, **w**–1 и число интервалов, где **k** ≥ **w**.

Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_{w-1}, z_w$ – количества интервалов с соответствующими длинами. Тогда эти значения могут быть оценены на основе критерия Пирсона с **w**+1 степенями свободы и при использовании следующих вероятностей:

$$\mathbf{p_k = p \cdot (1-p)^k,\ 0 \le k \le w-1,\ p_w = (1-p)^w},$$

где $\mathbf{p} = (\varphi - \gamma)$ – вероятность того, что $\varphi \le \varepsilon_\mathbf{i} < \gamma$.

Тесты проверки равномерности закона распределения

Данный тест также строится на основе применения критерия согласия χ^2. Пусть имеется выборка $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mathbf{N}$ псевдослучайных чисел в интервале [0, 1]. Интервал [0, 1] изменения случайной величины ε разбивается на $\mathbf{m}$ интервалов $\mathbf{x_j}$, $\mathbf{j} = 1, 2, \ldots, \mathbf{m}$, очевидно, что $\mathbf{x_m} = 1$, а нижняя граница первого интервала равна нулю. Обычно принимают $\mathbf{m} = 10 \div 20$.

Далее производится определение вероятности $\mathbf{p_j}$ попадания случайной величины ε в $\mathbf{j}$-й интервал. Для равномерного на интервале [0, 1] закона распределения $\mathbf{p_j} = \mathbf{x_j}\text{-}\mathbf{x_{j-1}}$. Затем определяется величина $\nu_\mathbf{j}$, $\mathbf{j} = 1, 2, \ldots, \mathbf{m}$ – число попаданий случайной величины ε в $\mathbf{j}$-й интервал и подсчитывается величина

$$\chi^2_\mathbf{N} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{m}} \frac{(\nu_\mathbf{j} - \mathbf{p_j N})^2}{\mathbf{p_j N}},$$

распределенная по закону χ^2 с ($\mathbf{m}$–1) степенью свободы. С помощью критерия Пирсона выясняется, верна ли гипотеза о равномерном законе распределения случайной величины ε или её следует отвергнуть.

Данный тест также может быть использован и в том случае, если распределение неравномерно (в этом случае фактически производиться проверка на соответствие теоретическому закону распределения).

Тест проверки независимости последовательности случайных чисел

Независимость последовательности чисел может быть проверена с помощью критерия сериальной корреляции. Для последовательности псевдослучайных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mathbf{N}$ значение

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{N}(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_\mathbf{N}\varepsilon_1) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\mathbf{N})^2}{\mathbf{N}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_\mathbf{N}^2) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\mathbf{N})^2}$$

является коэффициентом сериальной корреляции, мерой зависимости $\varepsilon_{\mathbf{i}+1}$ от $\varepsilon_\mathbf{i}$.

Коэффициент корреляции $\mathbf{C}$ всегда будет лежать в диапазоне [–1, 1]. Когда он равен 0 или очень мал, значит, между числами $\varepsilon_{\mathbf{i}+1}$ и $\varepsilon_\mathbf{i}$ нет линейной зависимости, если же $\mathbf{C} = \pm 1$, это означает полную линейную зависимость. Следовательно, $\mathbf{C}$ должен быть как можно ближе к 0. Однако поскольку произведение $\varepsilon_\mathbf{i}\varepsilon_{\mathbf{i+1}}$ не является полностью независимым от $\varepsilon_{\mathbf{i+1}}\varepsilon_{\mathbf{i+2}}$, коэффициент корреляции «хорошей» последовательности не будет точно равен нулю, а будет принадлежать интервалу $[\mu_\mathbf{N} - 2\sigma_\mathbf{N}, \mu_\mathbf{N} + 2\sigma_\mathbf{N}]$, где

$$\mu_\mathbf{N} = \frac{-1}{\mathbf{N}-1},\ \sigma^2_\mathbf{N} = \frac{\mathbf{N}^2}{(\mathbf{N}-1)^2(\mathbf{N}-2)},\ \mathbf{N} > 2.$$

Ожидается, что $\mathbf{C}$ будет находиться в данном интервале с доверительной вероятностью 0,95.

3. Случайные величины с заданным законом распределения

При моделировании систем широкое применение находят различные дискретные и непрерывные распределения. Первые из них соответствуют *дискретным случайным величинам*, возможными значениями которых являются отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Непрерывные распределения описывают *непре-*

рывные случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток.

3.1 Дискретные случайные величины

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона нашло очень широкое применение для моделирования потоков событий. Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени. Поток событий называется *пуассоновским*, если он удовлетворяет распределению Пуассона, является ординарным и не имеет последействия.

Если интервалы между возникновением событий распределены экспоненциально, то число произошедших событий в данный отрезок времени будет распределено в соответствии с распределением Пуассона.

Характеристики распределения:

$\mathbf{P(x)} = \dfrac{\mathbf{e^{-\lambda}\lambda^{x}}}{\mathbf{x!}}$, $\mathbf{x} = 0, 1, 2, ...$; $\mathbf{D} = \mathbf{M} = \lambda$. Параметр λ называют *интенсивностью* потока.

Биномиальное распределение

Это распределение вероятностей случайной величины с целочисленными значениями **m** = 0, 1, ..., **n**. Биномиальное распределение – одно из основных распределений вероятностей, связанных с последовательностью независимых испытаний; это распределение вероятностей числа наступлений некоторого события («удачи») в **n** повторных независимых испытаниях, если при каждом испытании вероятность наступления этого события равна **p**.

Функция вероятности характеризуется формулой:

$$\mathbf{P(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}},$$

где $\mathbf{C_n^m} = \dfrac{\mathbf{n!}}{\mathbf{m!(n-m)!}}$, $0 < \mathbf{p} < 1$, $\mathbf{n} > 1$.

Математическое ожидание $\mathbf{M} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$, дисперсия $\mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} \cdot (1-\mathbf{p})$.

3.2 Непрерывные случайные величины

Треугольное распределение

Треугольное распределение используется тогда, когда известно наиболее вероятное значение на некотором интервале и предполагается кусочно-линейный характер функции плотности вероятности. Для этого распределения определяют три величины: минимум **a**, максимум **b** и моду **m**. График функции плотности вероятности состоит из двух отрезков прямых, один из которых возрастает при изменении **x** от минимального значения до моды, а другой убывает при изменении **x** от значения моды до максимума.

Треугольное распределение характеризуется:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{2(x-a)}}{\mathbf{(m-a)(b-a)}}, & \mathbf{a \le x < m} \\ \dfrac{\mathbf{2(b-x)}}{\mathbf{(b-m)(b-a)}}, & \mathbf{m \le x \le b} \end{cases},$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{a+b+m}}{3},$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{a(a-m)+b(b-a)+m(m-b)}}{18}, \quad \mathbf{a \le m \le b}.$$

Экспоненциальное (показательное) распределение

Если вероятность того, что одно и только одно событие наступит на интервале $\Delta\mathbf{t}$, пропорциональна $\Delta\mathbf{t}$ и если наступление события не зависит от наступления других событий (т.е. процесс характеризуется отсутствием последействия), то величины интервалов между событиями распределены экспоненциально. Хотя реальное распределение величин интервалов часто существенно отличается от экспоненциального, его использование позволяет существенно упростить решение задач моделирования.

Это распределение характеризуется:

$$\mathbf{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}},$$

где $\mathbf{x} > 0$.

Математическое ожидание $\mathbf{M} = \frac{1}{\lambda}$, дисперсия $\mathbf{D} = \mathbf{M}^2$.

Нормальное (гауссово) распределение

Большое число стохастических процессов описываются нормальным распределением (законом Гаусса). Этот закон справедлив в случаях, когда результат (исход) процесса зависит от большого числа независимых случайных факторов, каждый из которых в отдельности влияет на результат незначительно. Такая ситуация является крайне распространённой, с этим и связано название «нормальное».

Распределение характеризуется функцией плотности вероятности:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ – параметр сдвига, σ – параметр масштаба.

Математическое ожидание $\mathbf{M} = \mu$, дисперсия $\mathbf{D} = \sigma^2$.

Логарифмическое нормальное (логонормальное) распределение

Это распределение такой случайной величины, натуральный логарифм которой нормально распределён.

Распределение характеризуется функцией плотности вероятности:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{1}{\mathbf{x}\sigma\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание $\mathbf{M} = \mathbf{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, дисперсия $\mathbf{D} = \mathbf{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathbf{e}^{\sigma^2} - 1)$.

Распределение Вейбулла

Это распределение характеризуется функцией плотности вероятности

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{a}-1} \mathbf{e}^{-\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{a}}}$$

и распределения

$$\mathbf{F(x)} = 1 - \mathbf{e}^{-\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{a}}},$$

где **b** – параметр масштабирования, **a** – параметр кривизны.

Распределение Коши

Случайная величина, имеющая распределение Коши, является стандартным примером величины, не имеющей математического ожидания и дисперсии. Это распределение характеризуется функцией плотности вероятности

$$\mathbf{f(x)} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathbf{l}}{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2+\mathbf{l}^2}\right]$$

и распределения

$$\mathbf{F(x)} = \frac{1}{\pi}\mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\mathbf{l}}\right)+\frac{1}{2},$$

где $\mathbf{x}_0$ – параметр сдвига, $\mathbf{l}$ – параметр масштаба, $-\infty < \mathbf{x}_0 < +\infty$, $\mathbf{l} > 0$.

Функция $\mathbf{F(x)}$ имеет обратную функцию

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{l}\cdot\mathbf{tg}\left[\pi\left(\mathbf{x}-\frac{1}{2}\right)\right],$$

что позволяет генерировать выборку из распределения Коши методом обратного преобразования.

Распределение Эрланга

Распределение Эрланга часто встречается в инженерных приложениях, особенно телефонии. Это распределение характеризуется плотностью вероятности:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\left(\frac{\mathbf{x}}{\theta}\right)^{\mathbf{k}-1}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}}{\theta}}}{\theta(\mathbf{k}-1)!},$$

где $\mathbf{k} > 0$ – параметр формы, θ – параметр масштаба.

Математическое ожидание $\mathbf{M} = \mathbf{k}\cdot\theta$, дисперсия $\mathbf{D} = \mathbf{k}\cdot\theta^2$.

3.3 Методы получения случайных величин, распределённых по заданному закону

Метод обратной функции

В основе метода лежит то обстоятельство, что случайная величина $\mathbf{R} = \mathbf{F(x)}$ равномерно распределена на интервале [0, 1]. Для генерации случайной величины из распределения $\mathbf{X}$ генерируется случайное число $\mathbf{r}$ и решается уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{F(x)}$ относительно значения $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{r})$.

Например, функция экспоненциального распределения имеет вид: $\mathbf{F(x)} = 1-\mathbf{e}^{-\lambda\mathbf{x}}$. Приравнивая $\mathbf{F(x)} = \mathbf{r}$ и решая уравнения относительно $\mathbf{x}$, получаем $\mathbf{x} = -\frac{1}{\lambda}\mathbf{ln\,r}$.

Метод применим и для дискретных распределений.

Основная трудность этого метода – поиск обратного преобразования $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{r})$. Для ряда непрерывных распределений представление обратной функции в явном виде отсутствует. Для всех основных распределений, не имеющих явного представления обратной функции, разработаны специальные методы генерации.

Табличный метод

В качестве аргумента используется равномерно распределенное случайное число $\mathbf{R}$, в качестве функции – последовательность $\mathbf{F_i}$ чисел, задающих закон распределения. Для этого формируется таблица ($\mathbf{F_i}$, $\mathbf{x_i}$), $\mathbf{i}$ = 1, 2, .., $\mathbf{k}$.

Значение случайного числа $\mathbf{Z}$ с заданным законом распределения находят методом линейной интерполяции по формуле

$$\mathbf{z_j} = \mathbf{x_{i-1}} + \frac{(\mathbf{r_j} - \mathbf{F_{i-1}})(\mathbf{x_i} - \mathbf{x_{i-1}})}{\mathbf{F_i} - \mathbf{F_{i-1}}},$$

где $\mathbf{F_{i-1}} \le \mathbf{r_j} < \mathbf{F_i}$; $\mathbf{j} = 1, 2, .., \mathbf{N}$; $\mathbf{i} = 1, 2, .., \mathbf{k}$.

Поиск нужного интервала производится методом последовательного сравнения **j**-го случайного числа с границами интервалов $\mathbf{F_i}$, $\mathbf{i} = 1, 2, .., \mathbf{k}$ до выполнения условия $\mathbf{F_{i-1}} \le \mathbf{r_j} < \mathbf{F_i}$.

Метод, основанный на функциональных особенностях распределений

Этот метод используется в тех случаях, когда аналитически не удается вычислить интеграл от функции плотности вероятности.

Например, для генерации нормально распределенных случайных чисел используется центральная предельная теорема, на основании которой суммируются **N** случайных чисел **r**, равномерно распределенных на интервале [0, 1], для получения нормально распределенного случайного числа η: так, распределение суммы $\eta_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} \mathbf{r_j} - \dfrac{\mathbf{N}}{2}}{\sqrt{\dfrac{\mathbf{N}}{12}}}$ с ростом **N** стремится к нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Обычно принимают **N** = 12...20 (особенно простая формула получается, если **N** = 12). Увеличение **N** ведёт к повышению точности, но замедляет вычисления.

Переход к нормальному распределению с произвольными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 осуществляется по формуле:

$$\eta = \sigma\eta^0 + \mu,$$

где η^0 – стандартное нормальное распределение.

Задание

Часть I

1) В интегрированной среде Visual Studio создать консольное приложение для языка F#.
2) Объявить переменную k как ссылочную ячейку и инициализировать её значением, указанным в варианте. Далее умножить значение в этой переменной на 100 и использовать в программе для определения количества сообщений.
3) Объявить и инициализировать пустыми значениями два массива для хранения типов сообщений и номеров приёмников. При этом для представления типов использовать числа, а для представления приёмников – размеченное объединение, каждый элемент которого – кортеж, состоящий из числа и строки.
4) Создать функцию *Modeling*, в которой выполнить моделирование потока сообщений (задачи 1 и 2), получив поток из заданного количества сообщений. Использовать при этом **(вариант А)** цикл for или **(вариант Б)** цикл while, а также оператор сравнения **(вариант I)** if-else или **(вариант II)** if-elif-else.
5) Создать функцию *Calculating*, в которой для сообщения каждого типа определить а) вероятность и количество появления сообщений, б) вероятности и число поступлений сообщений данного типа к каждому приёмнику. Использовать при этом операцию сопоставления с образцом (вместо условного оператора), функции модуля Array (вместо циклов).
6) Создать функцию *Printing* для вывода потока сообщений и всех полученных характеристик на консоль. Сопоставить полученные характеристики с теоретическими.
7) Выполнить, при необходимости, дополнительные задания, предложенные преподавателем.

Предусмотреть наличие не менее одного параметра у функций **(вариант а)** Modeling, Printing, **(вариант б)** Calculating, Printing или **(вариант в)** Modeling, Calculating.

Для мелких функций использовать лямбда-выражения.

Числовые данные варианта использовать непосредственно, без введения вспомогательных значений (в этой и других частях).

Часть II

1) Описать модуль и класс, поля, свойства и методы которого инкапсулировали бы функциональность, реализованную в части I. При этом использовать **(вариант 1)** явный конструктор или **(вариант 2)** неявный конструктор класса. Предусмотреть передачу в конструктор количества сообщений в потоке и инициализацию соответствующего свойства. Если количество сообщений отрицательно или слишком велико, генерировать исключение ArgumentException.
2) Объявить поля класса – три массива для хранения типов сообщений и номеров приёмников, а также временных интервалов между появлениями сообщений.
3) Вместо функций из части I описать соответствующие методы.
4) Создать новый метод для выполнения задачи 3. Для генерации времени использовать *(уровень 3)* экспоненциальное распределение или *(уровни 4 и 5)* нормальное распределение.
5) Создать метод, в котором для сообщения каждого типа определить **(вариант а)** среднюю частоту поступления сообщения или **(вариант б)** среднюю частоту поступления сообщений в приёмник, а также математическое ожидание распределения временных интервалов. Сравнить с теоретическими значениями.
6) Выполнить, при необходимости, дополнительные задания, предложенные преподавателем.

Часть III

1) Создать ещё один файл, описать в нём модуль и класс – наследник класса из части II.
2) Объявить поле класса – список, предназначенный для хранения длин сообщений.
3) Создать метод для выполнения задачи 4. Для генерации длин использовать дискретную случайную величину, *(уровни 3 и 4)* равномерно распределённую в заданном диапазоне [**a**, **b**] или *(уровень 5)* дискретную случайную величину, заданную вариантом.
4) Создать методы для вычисления следующих характеристик последовательности длин и временных интервалов а) математическое ожидание, б) дисперсия и в) среднеквадратичное отклонение.
5) Создать свойство (тип – запись) для всех теоретических характеристик. Осуществлять подсчёт этих характеристик в свойствах самой записи.
6) Переопределить метод вывода потока сообщений, в котором вывести поток сообщений (из массивов и из списка), его характеристики (из методов и свойств) на консоль. Сравнить характеристики с теоретическими значениями.
7) Создать метод, в котором выполнить проверку качества последовательности длин методом проверки, указанным в варианте, руководствуясь также и предпочитаемым уровнем сдачи. Для обозначения успешности проверки использовать опциональный тип. Вывести результаты проверки на консоль.
8) Описать и использовать интерфейс, содержащий метод проверки *(уровень 5)*.
9) Выполнить, при необходимости, дополнительные задания, предложенные преподавателем.

При реализации отдавать предпочтение типам данных **(вариант I)** int16, float32, **(вариант II)** uint32, float, **(вариант III)** int, decimal **(вариант IV)** uint16, decimal, **(вариант V)** uint64, float32, **(вариант VI)** int64, float.

Также использовать *(уровень 4)* активные шаблоны и *(уровень 5)* хвостовую рекурсию.

Возможность обращения к элементу списка по индексу не использовать.

Одну из функций каррировать.

Применять в этой части только средства функционального и объектно-ориентированного подхода.

Задачи 1 и 2

№ варианта	Распределение типов		Распределение адресации						k
	тип	вероятность	1	2	3	4	5	6	
1	1	0,47	0,08	0,30	0,62	–	–	–	5
	2	0,41	0,41	0,29	0,30	–	–	–	
	3	0,12	0,27	0,66	0,07	–	–	–	
2	1	0,55	0,88	0,12	–	–	–	–	6
	2	0,07	0,06	0,94	–	–	–	–	
	3	0,12	0,30	0,70	–	–	–	–	
	4	0,26	0,54	0,46	–	–	–	–	
3	1	0,45	0,60	0,40	–	–	–	–	7
	2	0,38	0,09	0,91	–	–	–	–	
	3	0,17	0,77	0,23	–	–	–	–	
4	1	0,28	0,51	0,39	0,10	–	–	–	8
	2	0,17	0,06	0,26	0,68	–	–	–	
	3	0,20	0,18	0,40	0,42	–	–	–	
	4	0,35	0,35	0,62	0,03	–	–	–	
5	1	0,72	0,64	0,15	0,21	–	–	–	9
	2	0,24	0,04	0,58	0,38	–	–	–	
	3	0,04	0,12	0,85	0,03	–	–	–	
6	1	0,19	0,30	0,70	–	–	–	–	5
	2	0,55	0,95	0,05	–	–	–	–	
	3	0,08	0,37	0,63	–	–	–	–	
	4	0,18	0,12	0,88	–	–	–	–	
7	1	0,73	0,18	0,82	–	–	–	–	6
	2	0,11	0,75	0,25	–	–	–	–	
	3	0,16	0,48	0,52	–	–	–	–	
8	1	0,07	0,05	0,25	0,70	–	–	–	7
	2	0,01	0,20	0,23	0,57	–	–	–	
	3	0,46	0,65	0,24	0,11	–	–	–	
	4	0,07	0,17	0,64	0,19	–	–	–	
9	1	0,19	0,03	0,08	0,89	–	–	–	8
	2	0,18	0,43	0,54	0,03	–	–	–	
	3	0,63	0,97	0,01	0,02	–	–	–	
10	1	0,31	0,69	0,31	–	–	–	–	9
	2	0,19	0,20	0,80	–	–	–	–	
	3	0,43	0,24	0,76	–	–	–	–	
	4	0,07	0,72	0,28	–	–	–	–	
11	1	0,78	0,07	0,93	–	–	–	–	5
	2	0,19	0,55	0,44	–	–	–	–	
	3	0,03	0,16	0,86	–	–	–	–	
12	1	0,37	0,20	0,69	0,11	–	–	–	6
	2	0,24	0,17	0,04	0,79	–	–	–	
	3	0,02	0,66	0,06	0,28	–	–	–	
	4	0,37	0,23	0,19	0,58	–	–	–	

13	1	0,18	0,65	0,18	0,17	–	–	–	7
	2	0,10	0,09	0,48	0,43	–	–	–	
	3	0,72	0,23	0,24	0,53	–	–	–	
14	1	0,17	0,27	0,73	–	–	–	–	8
	2	0,14	0,47	0,53	–	–	–	–	
	3	0,19	0,95	0,05	–	–	–	–	
	4	0,50	0,24	0,76	–	–	–	–	
15	1	0,60	0,38	0,62	–	–	–	–	9
	2	0,35	0,20	0,80	–	–	–	–	
	3	0,05	0,98	0,02	–	–	–	–	
16	1	0,25	0,18	0,54	0,28	–	–	–	5
	2	0,17	0,50	0,30	0,20	–	–	–	
	3	0,30	0,30	0,25	0,45	–	–	–	
	4	0,25	0,50	0,21	0,29	–	–	–	
17	1	0,23	0,29	0,11	0,60	–	–	–	6
	2	0,45	0,55	0,24	0,21	–	–	–	
	3	0,32	0,60	0,33	0,07	–	–	–	
18	1	0,11	0,38	0,62	–	–	–	–	7
	2	0,05	0,19	0,81	–	–	–	–	
	3	0,60	0,98	0,02	–	–	–	–	
	4	0,24	0,47	0,53	–	–	–	–	
19	1	0,29	0,20	0,80	–	–	–	–	8
	2	0,31	0,88	0,22	–	–	–	–	
	3	0,40	0,06	0,94	–	–	–	–	
20	1	0,32	0,56	0,05	0,39	–	–	–	9
	2	0,06	0,25	0,08	0,67	–	–	–	
	3	0,25	0,38	0,26	0,36	–	–	–	
	4	0,37	0,50	0,08	0,42	–	–	–	

Задача 3

№ варианта	Нормальное распределение		Экспоненциальное распределение
	μ	σ^2	λ
1	4,2	0,3	0,37
2	5,6	1,8	0,48
3	8,3	4,9	0,72
4	3,3	0,8	0,91
5	5,6	1,2	0,41
6	7,1	2,0	0,60
7	4,2	2,0	0,76
8	3,3	0,9	0,55
9	3,2	1,5	0,41
10	8,6	5,2	0,49
11	4,7	2,5	0,74
12	7,3	4,4	0,68
13	3,3	0,6	0,20
14	6,2	3,8	0,27
15	7,3	3,4	0,18
16	8,1	5,2	0,77
17	5,2	2,1	0,16
18	6,0	2,2	0,36
19	4,5	2,0	0,52
20	8,3	4,7	0,84

Задача 4

№ варианта	a	b	Вид распределения	Параметры распределения		
				λ	максимум	p
1	19	70	распределение Пуассона	35	49	–
2	41	64	биномиальное распределение	–	64	0,41
3	0	36	распределение Пуассона	53	78	–
4	9	78	биномиальное распределение	–	27	0,19
5	55	104	распределение Пуассона	14	54	–
6	60	129	биномиальное распределение	–	87	0,75
7	45	80	распределение Пуассона	21	42	–
8	36	55	биномиальное распределение	–	75	0,30
9	21	67	распределение Пуассона	82	100	–
10	76	122	биномиальное распределение	–	92	0,17
11	14	43	распределение Пуассона	75	129	–
12	70	105	биномиальное распределение	–	64	0,33
13	23	84	распределение Пуассона	19	59	–
14	1	22	биномиальное распределение	–	34	0,21
15	40	70	распределение Пуассона	25	45	–
16	30	98	биномиальное распределение	–	70	0,65
17	15	40	распределение Пуассона	28	59	–
18	8	81	биномиальное распределение	–	70	0,69
19	23	61	распределение Пуассона	21	72	–
20	40	79	биномиальное распределение	–	43	0,55

Методы проверки

№ варианта	Метод проверки качества последовательности	
	уровни 3-4	**уровень 5**
1	тест проверки независимости	тест проверки равномерности
2	тест проверки независимости	тест проверки интервалов
3	тест проверки независимости	тест проверки серий
4	тест проверки независимости	тест проверки равномерности
5	тест проверки независимости	тест проверки интервалов
6	тест проверки независимости	тест проверки серий
7	тест проверки независимости	тест проверки равномерности
8	тест проверки независимости	тест проверки интервалов
9	тест проверки независимости	тест проверки серий
10	тест проверки независимости	тест проверки равномерности
11	тест проверки независимости	тест проверки интервалов
12	тест проверки независимости	тест проверки серий
13	тест проверки независимости	тест проверки равномерности
14	тест проверки независимости	тест проверки интервалов
15	тест проверки независимости	тест проверки серий
16	тест проверки независимости	тест проверки равномерности
17	тест проверки независимости	тест проверки интервалов
18	тест проверки независимости	тест проверки серий
19	тест проверки независимости	тест проверки равномерности
20	тест проверки независимости	тест проверки интервалов

Приложение А (справочное)

Критические точки распределения χ^2

α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,0002	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,63	7,34	9,5
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8

α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,8	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31	34	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34	37	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37	40	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40	43	45,3