Министерство образования и науки РФ

Ульяновский государственный технический университет

Лабораторная работа по теории оптимизации

информационных систем № _2_

ОДНОМЕРНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

(Название лабораторной работы)

Учебная группа ИСТМД-11

	ФИО	Дата	Подпись
Студент	**Шаблыгин В.В.**		
Преподаватель	**Новиков А.А.**		

Ульяновск, 2021

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

изучение прямых методов минимизации функций, использующих информацию о производных целевой функции.

Задачи: изучить следующие методы минимизации:
- метод средней точки;
- метод хорд;
- метод Ньютона.

Программа лабораторной работы

Ознакомиться с вышеуказанными методами.
Составить программу в среде MATLAB.
Получить результаты и сделать выводы.

ОБОРУДОВАНИЕ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ:

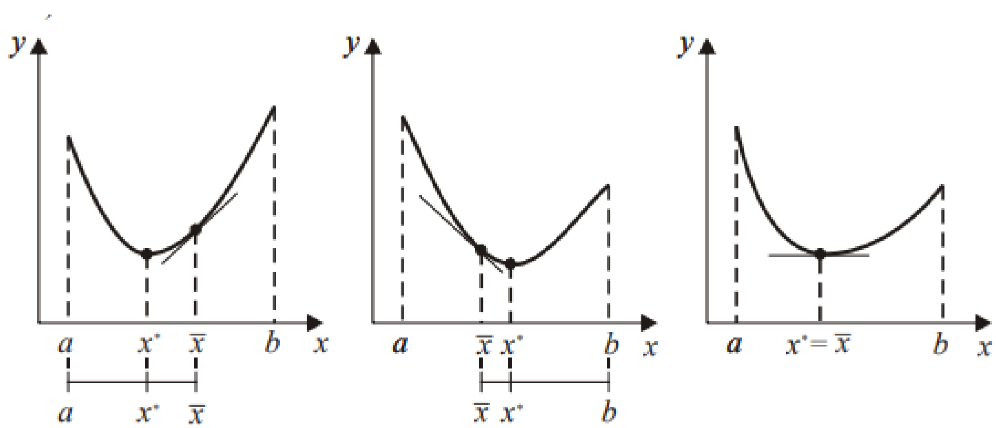
Среда программирования MATLAB.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ:

Оптимизация – задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных и/или нелинейных равенств и/или неравенств.

Если функция f(x) является дифференцируемой или дважды дифференцируемой выпуклой функцией и возможно вычисление производных в произвольно выбранных точках, то этом случае эффективность поиска точки минимума можно существенно повысить.

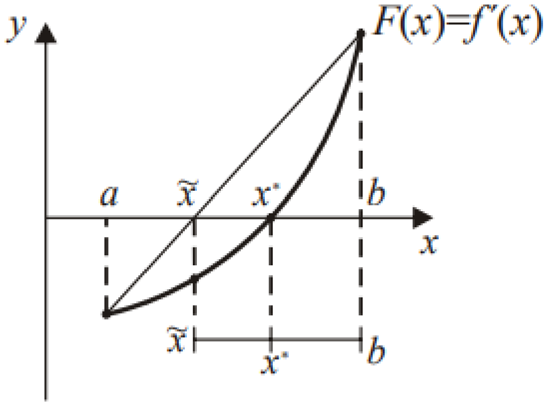
Метод средней точки. Если определение производной f ′(x) не представляет затруднений, то в процедуре исключения отрезков методом дихотомии вычисление двух значений f(x) вблизи середины очередного отрезка можно заменить вычислением одного значения f ′(x) в его средней точке $\bar{x}$ = (a+b)/2. В самом деле, если ′ xf > 0)(, то точка $\bar{x}$ лежит на участке монотонного возрастания f(x) , поэтому x* < $\bar{x}$, и точку минимума следует искать на отрезке [a, $\bar{x}$]. При f ′ (x)< 0 имеем противоположную ситуацию и переходим к отрезку [$\bar{x}, b$]. Равенство f ′ (x)= 0 означает, что точка минимума найдена точно x* = $\bar{x}$,



Такое исключение отрезков требует на каждой итерации только одного вычисления f ′(x) и уменьшает отрезок поиска точки x* ровно вдвое.

Метод хорд

Сущность приближенного решения уравнения F(x) = 0 на отрезке [a,b] при методом хорд состоит в исключении отрезков путем определения $\bar{x}$ – точки пересечения с осью 0x хорды графика функции F(x) на [a,b]:



Полагая F(x) = f ’(x) , запишем координату точки $\bar{x}$

$$\tilde{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) .$$

Отрезок дальнейшего поиска точки x* ([a,x] или $[\bar{x}, b]$) выбирается в зависимости от знака f ‘$(\bar{x})$ так же, как в методе средней точки. На каждой итерации, кроме первой, необходимо вычислять только одно новое значение f ‘$(\bar{x})$

Метод Ньютона

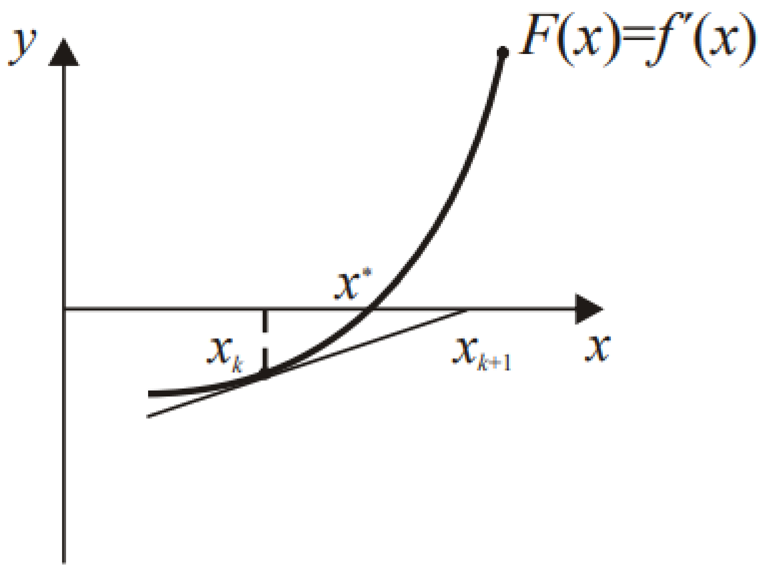
Если выпуклая на отрезке $[a, b\ ]$ функция f (x) дважды непрерывно дифференцируема на этом отрезке, то точку $x^* \in [a\ b,\ ]$ минимума этой функции можно найти, решая уравнение $f\,'$(x) = 0 *методом Ньютона* (другое название − метод касательных). Пусть $x_0 \in [a, b]$ − нулевое (начальное) приближение к искомой точке x^*. Линеаризуем функцию F (x) = $f\,'$(x) в окрестности начальной точки, приближенно заменив дугу графика этой функции касательной в точке
$(x_0 , f\,'(x_0))$

$$F\ (\mathrm{x}) \approx F\ (\mathrm{x}_0) + F\ (x'_0)(x - x_0)\ .$$

Выберем в качестве следующего приближения к x^* точку x_1 пересечения касательной с осью абсцисс. Приравнивая к нулю правую часть , получим первый элемент $x_1 = x_0 – (F\ (x_0) / F\ (x'_0\ ))$ итерационной последовательности $\{ x_k \}$, k =1, 2,....

Выберем в качестве следующего приближения к x^* точку x_1 пересечения касательной с осью абсцисс. Приравнивая к нулю правую часть, получим первый элемент $x_1 = x_0 – (F\ (x_0) / F\ (x'_0\ ))$ итерационной последовательности $\{ x_k \}$, k =1, 2,....

В очередной точке x_k построим линейную аппроксимирующую функцию для F (x) и определим точку, в которой эта функция обращается в нуль, используя в качестве следующего приближения x_{k+1}.



Уравнение касательной к графику $F(x)$ в точке $x = x_k$ имеет вид $y = F(x_k)+F(x'_k)(x - x_k)$, поэтому точка $x = x_{k+1}$, найденная из условия $y = 0$, определяется формулой $x_{k+1} = x_k - (F(x_k) / F'(x_k))$

Поскольку $F(x) \equiv f'(x)$, получим, что для решения уравнения $f'(x) = 0$ необходимо построить последовательность

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где x0 – точка, выбранная в качестве начального приближения.

Вычисления по формуле производятся до тех пор, пока не выполнится неравенство $|f'(x_k)| \le \varepsilon$, после чего полагают $x^* \approx x_k$, $f^* \approx f(x_k)$.

ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Исследовать методы минимизации будем на примере функции:

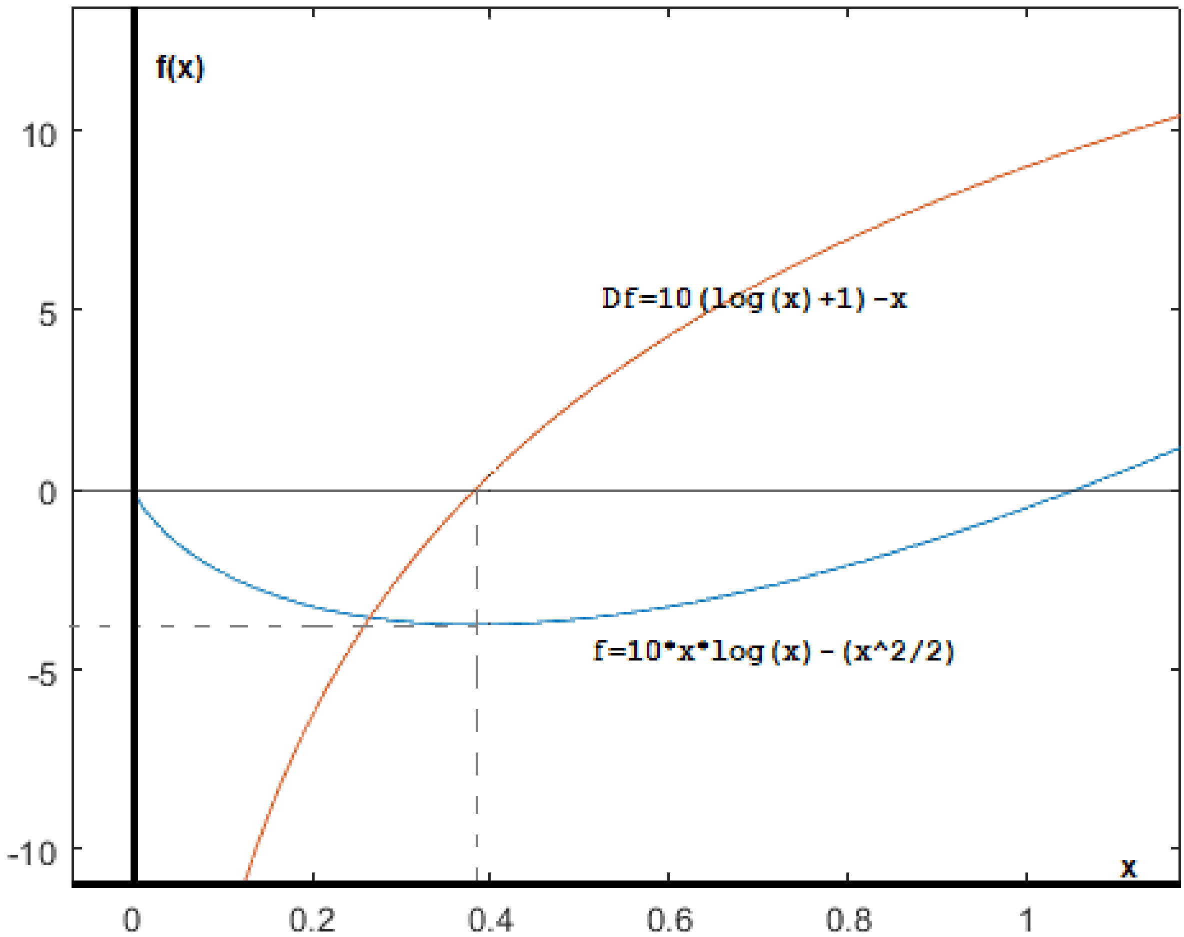
$$f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2} \to \min, \quad x \in [0{,}1,\ 1].$$

Текст программы:

```
% Построим график
ezplot ('10*x*log(x)-(x^2/2)', [0 2.0])
hold on
ezplot ('10*(log(x)+1)-x', [0 2.0])
xline(0)
yline(0)

% 1. Метод средней точки
f = @(x) 10*x*log(x)-(x^2/2);   % наша функция
Df = @(x) 10*(log(x)+1)-x;      % производная

e = 0.00001; % заданная погрешность
a = 0.3;     % задаем начальный отрезок [a,b]
b = 0.5;
x=(a+b)/2;   % средняя точка
i=1;         % счетчик итераций
```

```
while abs(Df(x)) > e  % пока не добьемся требуемой точности
    if Df(x) > 0 %
        b=x;       % задаем новый отрезок [a, x]
    else
        a=x;       % задаем новый отрезок [x, b]
    end
    i = i+1;
    x=(a+b)/2;      % новая средняя точка
end
disp('1. Метод средней точки, x= :')
disp(x)
disp('Минимальное значение функции, f(x)= :')
disp(f(x))
disp('Затрачено итераций, i= :')
disp(i)

% 2. Метод хорд
f = @(x) 10*x*log(x)-(x^2/2);  % наша функция
Df = @(x) 10*(log(x)+1)-x;     % производная

e = 0.00001; % заданная погрешность
a = 0.3;     % задаем начальный отрезок [a,b]
b = 0.5;
x = a-(Df(a)/(Df(a)-Df(b)))*(a-b);   % точка пересечения хорды
i=1;         % счетчик итераций

while abs(Df(x)) > e  % пока не добьемся требуемой точности
    if Df(x) > 0 %
        b=x;       % задаем новый отрезок [a, x]
    else
        a=x;       % задаем новый отрезок [x, b]
    end
    i = i+1;
    x=a-(Df(a)/(Df(a)-Df(b)))*(a-b);      % новая средняя точка
end
disp('2. Метод хорд, x= :')
disp(x)
disp('Минимальное значение функции, f(x)= :')
disp(f(x))
disp('Затрачено итераций, i= :')
disp(i)

% 3. Метод Ньютона
f = @(x) 10*x*log(x)-(x^2/2);  % наша функция
Df = @(x) 10*(log(x)+1)-x;     % производная первого порядка
Df2 = @(x) 10/x-1;             % производная второго порядка
e = 0.00001; % заданная погрешность
a = 0.3;     % задаем начальный отрезок [a,b]
b = 0.5;
x = (a+b)/2;     % начальное приближение
i=1;         % счетчик итераций

while abs(Df(x)) > e  % пока не добьемся требуемой точности
    i = i+1;
    x = x - Df(x)/Df2(x);      % новое приближение
end

disp('3. Метод Ньютона, x=')
disp(x)
disp('Минимальное значение функции, f(x)=')
disp(f(x))
disp('Затрачено итераций, i= ')
disp(i)
```

Результат:



1. Метод средней точки, x= :
0.382212066650391
Минимальное значение функции, f(x)= :
-3.749081008645030
Затрачено итераций, i= :
18

2. Метод хорд, x= :
0.382212689504838
Минимальное значение функции, f(x)= :
-3.749081008645648
Затрачено итераций, i= :
6

3. Метод Ньютона, x=
0.382212172156819
Минимальное значение функции, f(x)=
-3.749081008645822
Затрачено итераций, i=
3

Сведем результаты в таблицу:

	метод средней точки	метод хорд	метод Ньютона
Погрешность	0.00001	0.00001	0.00001
Количество итераций	18	6	3

Выводы по работе: из таблицы видно, что наиболее эффективным методом является метод Ньютона.