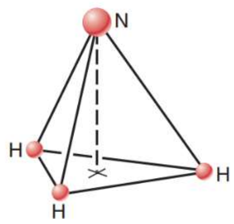
《普通物理学 I（H）》课程

课程作业（4）

张晗潇　　12036020　　浙江大学物理学系　　理论物理班·聚变理论与模拟中心
邮箱：zhx_199855@163.com　　联系电话：17367078032　　授课教师：马志为　　on 2021.3.25

Exercise 7.11

在氨（NH_3）分子中，三个氢（H）原子形成一个等边三角形，各个原子中心之间的距离为16.28×10^{-11} m，因此三角形的中心到每个氢原子之间的距离为9.40×10^{-11} m。氮原子（N）位于以三个氢原子构成的三角形为底面的三棱锥的顶点，它到每个氢原子的距离为10.14×10^{-11} m（如右图）。氮原子和氢原子质量之比为13.9。找到整个氨分子的质心相对于氮原子的位置。



解：

由对称性可得，从氮原子到底部三个氢原子构成的三角形中心（记作O点）的连线必然垂直于底面三角形，而整个氨分子的质心（记作C点）也必然在这条连线上，记O点位置到氮原子的距离（即连线长度）为y_O。设质心位置到氮原子的距离为y_C，则根据质心的定义显然有

$$(m_N+3m_H)\,y_C=m_N\cdot0+3m_H\cdot y_O$$

其中y_O根据勾股定理显然满足

$$y_O=d_{NO}=\sqrt{d_{NH}^2-d_{HO}^2}=3.80\times10^{-11}\ \mathrm{m}$$

其中$d_{HO}=9.40\times10^{-11}$ m、$d_{NH}=10.14\times10^{-11}$ m。

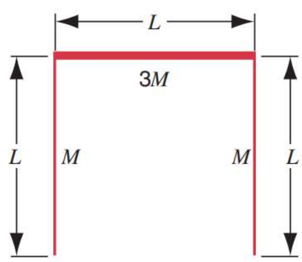
再利用$m_N/m_H=13.9$，容易解得

$$y_C=\frac{3y_O}{\frac{m_N}{m_H}+3}=\frac{3\times3.8}{13.9+3}=6.75\times10^{-12}\ \mathrm{m}$$

即氨分子质心位置到氮原子的距离。

Exercise 7.13

如右图所示，三根长度为L的细棒排列成倒置的U形。U形臂上的两根杆的质量分别为M，第三根杆的质量为$3M$。整个装配体的质心在哪里？



解：

显然假定三根杆的质量都沿杆均匀分布。（如果不是则一般需要使用微积分解决问题。）

由对称性可得，水平方向上装配体的质心必在整个装配体的对称轴上。

竖直方向上设质心的位置到最上方的第三根杆的距离为y_C。由于第一和第二根杆的质心位置到最上方的竖直距离均为$y_1 = y_2 = \frac{L}{2}$，第三根杆的质心位置到最上方的竖直距离$y_3 = 0$，则根据质心的定义有

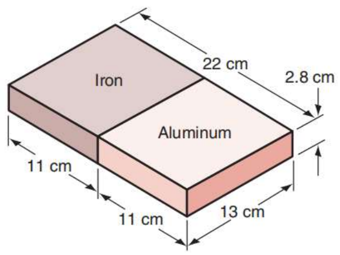
$$(M + M + 3M)y_C = My_1 + My_2 + 3My_3$$

解得

$$y_C = \frac{L}{5}$$

所以整个装配体的质心位于其竖直对称轴上距离最上方$\frac{L}{5}$处。

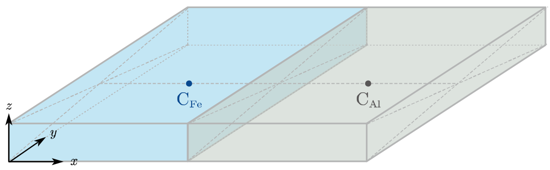
Exercise 7.14



右图为一个尺寸是$22.0\ \text{cm} \times 13.0\ \text{cm} \times 2.80\ \text{cm}$的复合板。复合板的一半由铝（密度$2.70\ \text{g/cm}^3$）制成，一半由铁（密度$7.85\ \text{g/cm}^3$）制成。复合板的质心在哪里？

解：

如右图所示建立右手空间直角坐标系，也假设两部分板的质量均匀分布。



设铝制部分的质心在C_{Al}点（其位置$\boldsymbol{r}_{Al} = x_{Al}\hat{\boldsymbol{i}} + y_{Al}\hat{\boldsymbol{j}} + z_{Al}\hat{\boldsymbol{k}}$），铁制部分的质心在$C_{Fe}$点（其位置$\boldsymbol{r}_{Fe} = x_{Fe}\hat{\boldsymbol{i}} + y_{Fe}\hat{\boldsymbol{j}} + z_{Fe}\hat{\boldsymbol{k}}$），而复合板整体的质心则位于C点（其位置$\boldsymbol{r}_C = x_C\hat{\boldsymbol{i}} + y_C\hat{\boldsymbol{j}} + z_C\hat{\boldsymbol{k}}$）。由对称性可得$C_{Al}$和$C_{Fe}$点均应在各自部分的几何中心，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{Al} &= x_{Al}\hat{\boldsymbol{i}} + y_{Al}\hat{\boldsymbol{j}} + z_{Al}\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= (16.5\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{i}} + (6.50\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{j}} + (1.40\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{r}_{Fe} &= x_{Fe}\hat{\boldsymbol{i}} + y_{Fe}\hat{\boldsymbol{j}} + z_{Fe}\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= (5.50\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{i}} + (6.50\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{j}} + (1.40\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

根据质心的定义应有

$$(m_{Al} + m_{Fe})\boldsymbol{r}_C = m_{Al}\boldsymbol{r}_{Al} + m_{Fe}\boldsymbol{r}_{Fe}$$

其中m_{Al}和m_{Fe}分别为铝制部分和铁制部分的总质量。由于两部分的体积相等，故它们正比于铝和铁的密度，分别为$\rho_{Al} = 2.70\ \text{g/cm}^3$和$\rho_{Fe} = 7.85\ \text{g/cm}^3$。最终解得质心位置

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_C &= \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Al} + \rho_{Fe}}\boldsymbol{r}_{Al} + \frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Al} + \rho_{Fe}}\boldsymbol{r}_{Fe} \\ &= (8.32\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{i}} + (6.50\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{j}} + (1.40\ \text{cm})\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

附 1：质心的计算

质心，即多质点体系的质量分布中心，有时也可以把它当作整个体系的代表点。如果整个体系质量是均匀分布的（或者说各处密度相同），则质心就是物体的几何中心。注意质心和物体的“重心”尽管在大多数情况下可以认为重合，但这两个概念从本质上看略有差别（例如青藏高原的质心位置就会比重心位置略高，再如地月系统则无从谈及“重心”，想想为什么）。

质心（一般用C表示）的位置等于物体各部分（各质点）的位矢用各部分处各自的质量加权后的平均值，即

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3+\dots}{m_1+m_2+m_3+\dots}\qquad \text{注意}\, m=\sum_i m_i$$

这是一个矢量表达式，当然也可以将它按每个方向的分量分别列式。

对于质量连续分布的物体，只需要把求和改成积分，也就是

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int \rho\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V}{\int \rho\,\mathrm{d}V}$$

其中$\rho=\rho(\boldsymbol{r})$是个以$\boldsymbol{r}$为变量的函数，也就是各位置处物体的密度值。

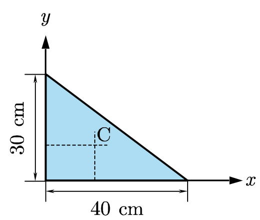
对于质量沿着线或者面分布的物体（例如绳、杆、链、薄板、薄盘等），质心的位置有时也可以这样表达

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int \lambda\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}l}{\int \lambda\,\mathrm{d}l}$$

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int \sigma\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}S}{\int \sigma\,\mathrm{d}S}$$

同样有$\lambda=\lambda(\boldsymbol{r})$、$\sigma=\sigma(\boldsymbol{r})$。$\lambda$称作线密度，即单位长度上的质量，单位可以是kg/m；σ称作面密度，即单位面积上的质量，单位可以是$\mathrm{kg/m^2}$；所以相应地ρ也称作体密度。

在之前的作业题中，我们练习的都是离散质点构成的体系，或者各部分可以被看作离散质点（把每个部分所在的位置用它们的质心代表，认为质心点处就集中了该物体的全部质量）的体系，这样求质点的位置只需要使用求和法即可。有时我们还会处理到一些类似“中空”、“挖孔”的问题，这种情况可以看作有一个“负质量”的部分叠加。但是在更多场合我们将要接触到的是质量连续分布的体系，这种情况往往必须要靠积分来寻找质心。



例 1：如右图所示的质量均匀分布的直角三角形薄板，求其质心位置。

解：如图建系，设质心位置为$\boldsymbol{r}_C$，容易求得其斜边所在直线的方程为$y=-3x/4+(30\ \mathrm{cm})$。因此对$x$轴和$y$轴方向分别积分得到（其中$\sigma$

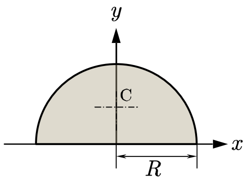
就是薄板面密度，由于质量均匀分布，所以它是常量）

$$x_C=\frac{\int_{0\ \mathrm{cm}}^{40\ \mathrm{cm}}\sigma x\cdot\left[-\frac{3}{4}x+(30\ \mathrm{cm})\right]\mathrm{d}x}{\int_{0\ \mathrm{cm}}^{40\ \mathrm{cm}}\sigma\cdot\left[-\frac{3}{4}x+(30\ \mathrm{cm})\right]\mathrm{d}x}=13\ \mathrm{cm}$$

$$y_C=\frac{\int_{0\ \mathrm{cm}}^{30\ \mathrm{cm}}\sigma y\cdot\left[-\frac{4}{3}y+(40\ \mathrm{cm})\right]\mathrm{d}y}{\int_{0\ \mathrm{cm}}^{30\ \mathrm{cm}}\sigma\cdot\left[-\frac{4}{3}y+(40\ \mathrm{cm})\right]\mathrm{d}y}=10\ \mathrm{cm}$$

所以质心的位置$\boldsymbol{r}_C=(13\ \mathrm{cm})\hat{\boldsymbol{i}}+(10\ \mathrm{cm})\hat{\boldsymbol{j}}$，或者也可以写作$\boldsymbol{r}_C=\left(13\hat{\boldsymbol{i}}+10\hat{\boldsymbol{j}}\right)\ \mathrm{cm}$。

例 2：如右图所示的质量均匀分布的半圆形薄板，半径为R，求其质心位置。



解：如图建系，设质心位置为$\boldsymbol{r}_C$。根据对称性，显然可知质心一定位于其对称轴上，也就是$x_C=0$。现在主要需要求的是质心位置与圆心的距离，也就是y_C。同样由于质量均匀分布，分子和分母中的面密度σ都是常数，可以同时约去，于是质心密度的表达式变成了

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\int\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}S}{\int\mathrm{d}S}=\frac{\int\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}S}{S}$$

注意分母中$\int\mathrm{d}S=S$其实就是整个图形的总面积（相应地，$\int\mathrm{d}V=V$其实就是整个物体的总体积、$\int\mathrm{d}l=l$其实就是整条曲线段的总长度）。

在这个问题中，使用极坐标系会是比较方便的。在极坐标系中，小面元$\mathrm{d}S=r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$，各点处到$x$轴的距离$y=r\sin\theta$。积分区间为：$r$从$0$到$R$，$\theta$从$0$到$\pi$，所以有

$$y_C=\frac{\int y\,\mathrm{d}S}{S}=\frac{\int r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r}{S}=\frac{\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{R}r^2\,\mathrm{d}r}{S}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}R^3}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{4}{3\pi}R$$

则质心y方向的坐标y_C为$\frac{4}{3\pi}R$。

对于其中一些情况，有时利用一个重要的结论“巴普斯定理”可以简化计算。

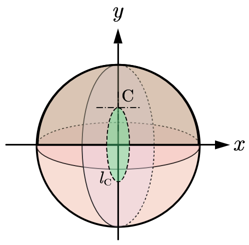
巴普斯定理的表述如下（其中均要求物体的质量均匀分布）：

对于平面上面积为S_0的图形，使它沿垂直于其所在平面的方向运动形成一个体积为V的立体，那么这个立体的体积就等于质心所经路程l_C乘以原图形面积，即$V=S_0\cdot l_C$；或对于平面上长为l_0的曲线段，使它沿着垂直于它所在平面的方向运动扫过一个面积S，那么这个面积就等于曲线段线段的质心所经路程l_C乘以原线段的长度，即$S=l_0\cdot l_C$。

例 3：用巴普斯定理再求解一遍例 2，求该质量均匀分布的半圆形薄板的质心位置。

解：我们选择让这个半圆形薄板绕着x轴旋转一周，这样就得到了一个半径为R的球体，体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$。我们也容易知道半圆形薄板的面积$S_0=\frac{1}{2}\pi R^2$。

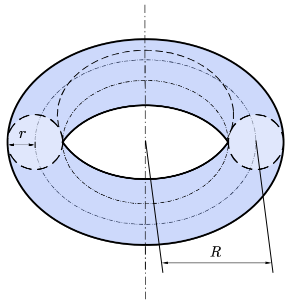
同样设质心距离原点的距离为r_C（刚好也就是其y方向的坐标y_C）。在整个旋转过程中，质心总共扫过的路程（轨迹长度）应该是$l_C = 2\pi r_C$，所以根据$V = S_0 \cdot l_C$，容易解得$l_C = \dfrac{3}{2}R$，所以$r_C = \dfrac{l_C}{2\pi} = \dfrac{3}{4\pi}R$，与例 2 中的结果相同。



（请同学们自己尝试利用巴普斯定理来解答例 1。提示：直角三角形绕其一条直角边旋转一周可以变成一个圆锥。如果分别绕两条直角边旋转即可分别求解出质心在两个方向的坐标。）

除了利用巴普斯定理来求质心，我们当然也可以反其道而行之，利用巴普斯定理来求一些虽然复杂但具有良好对称性的几何体的体积或表面积。

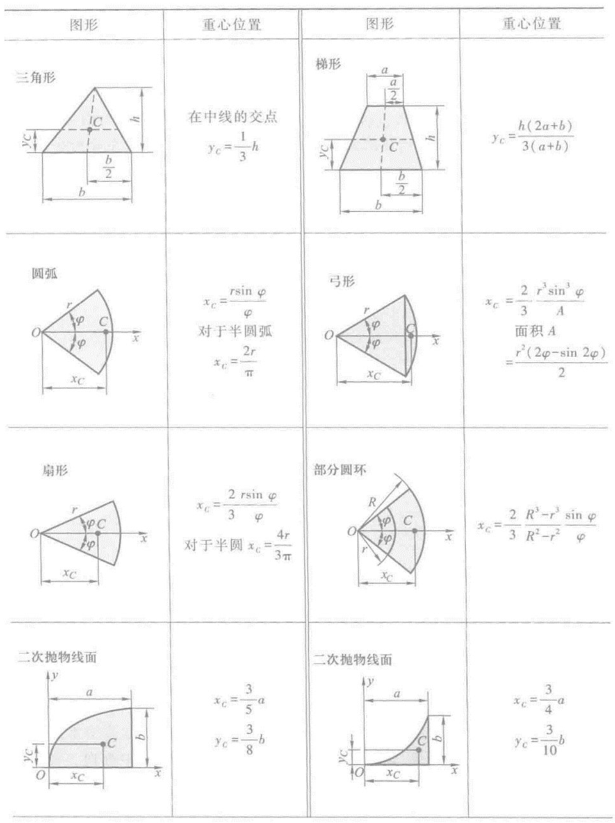
例 4：“甜甜圈形”（或“游泳圈形”、或“轮胎形”、或“托卡马克形”，英文 Torus，有时直接被称作“环形”）如右图所示，它是一个半径为$r = 1.0\ \text{m}$的小圆截面绕着其平面内的回转轴旋转一周形成的立体图形，回转半径$R = 4.0\ \text{m}$。试求其体积和表面积。



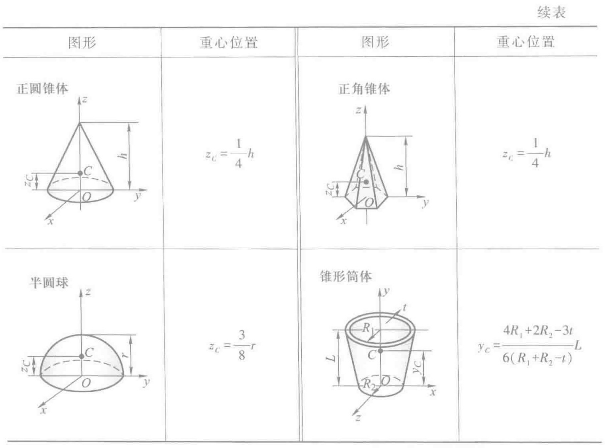
解：如果用常规方法求这个图形的体积和表面积是非常麻烦的，不用一些高级的数学工具几乎不可能。但一旦有了巴普斯定理，这个问题就简单多了。

由于其截面为半径为r的小圆，易知截面面积$S_0 = \pi r^2$、周长$l_0 = 2\pi r$。圆面的质心很明显位于其圆心处，所以在绕轴旋转一周的过程中，质心总共扫过的路径长度是$l_C = 2\pi R$。直接解得“甜甜圈形”体积$V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2 = 79\ \text{m}^2$、表面积$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr = 158\ \text{m}^2$。

另附常见简单图形的质心（重心）位置列表：



图形	重心位置	图形	重心位置
三角形	在中线的交点 $y_C = \frac{1}{3}h$	梯形	$y_C = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$
圆弧	$x_C = \frac{r\sin\varphi}{\varphi}$ 对于半圆弧 $x_C = \frac{2r}{\pi}$	弓形	$x_C = \frac{2}{3}\frac{r^3\sin^3\varphi}{A}$ 面积 $A = \frac{r^2(2\varphi - \sin 2\varphi)}{2}$
扇形	$x_C = \frac{2}{3}\frac{r\sin\varphi}{\varphi}$ 对于半圆 $x_C = \frac{4r}{3\pi}$	部分圆环	$x_C = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\frac{\sin\varphi}{\varphi}$
二次抛物线面	$x_C = \frac{3}{5}a$ $y_C = \frac{3}{8}b$	二次抛物线面	$x_C = \frac{3}{4}a$ $y_C = \frac{3}{10}b$



续表

图形	重心位置	图形	重心位置
正圆锥体	$z_C=\frac{1}{4}h$	正角锥体	$z_C=\frac{1}{4}h$
半圆球	$z_C=\frac{3}{8}r$	锥形筒体	$y_C=\frac{4R_1+2R_2-3t}{6(R_1+R_2-t)}L$

Exercise 7.17

每分钟，一名特殊的游戏管理员将用机枪发射220枚12.6 g橡皮子弹，枪口速度为975 m/s。面对以3.87 m/s的速度向管理员冲来的重84.7 kg的动物，必须发射多少枚子弹才能让动物停在轨道上？（假设子弹水平移动并在撞击目标后掉落到地面。）

解：

假设动物被第i枚子弹击中前的速度大小为V_{i-1}，质量为M；子弹速度大小为v，质量为m。子弹撞击目标后直接掉落地面（水平速度减到零），设动物中弹后速度大小为V_i。本题以动物初速度方向为正方向。

对每次射击，根据动量守恒都有

$$MV_{i-1}-mv=MV_i$$

解得

$$V_i=V_{i-1}-\frac{m}{M}v$$

即每次射击，动物的速度减小$\frac{m}{M}v$。由上述递推公式易得通项公式

$$V_i=V_0-i\frac{m}{M}v$$

将初速度$V_0=3.87$ m/s、动物质量$M=84.7$ kg、子弹质量$m=12.6$ g$=0.0126$ kg、子弹枪口速度$v=975$ m/s代入，解得要想使得动物不再前进，至少需要的子弹枚数

$$i\geq\frac{V_0}{\frac{m}{M}v}=26.7$$

向上取整，故至少需要27枚子弹才能将使动物无法前进。

Exercise 7.18

铁路上一列平板车厢以45 m/s 的速度沿着无摩擦的水平轨道奔跑。安装在车厢上并瞄准前方的是一门加农炮，可以以625 m/s 的炮口速度发射65 kg 重的炮弹。 车厢、加农炮以及汽车上大量的加农炮弹总质量为3500 kg 。必须发射多少枚炮弹才能使汽车尽可能接近停靠？

解：

与上题类似，假设车厢发射第i枚炮弹前的速度大小为V_{i-1}，质量为M；炮弹的炮口速度（相对于发射炮弹后的车厢，或者说是炮弹与车厢的分离速度）为v，质量为m，设车厢大小为V_i。本题以动物初速度方向为正方向。

对每次发射炮弹，根据动量守恒都有

$$[M-(i-1)m]V_{i-1}=(M-im)V_i+m(V_i+v)$$

解得

$$V_i=\frac{[M-(i-1)m]V_{i-1}-mv}{M-(i-1)m}=V_{i-1}-\frac{mv}{M-(i-1)m}$$

即每次射击，车厢的速度减小$\frac{mv}{M-(i-1)m}$。由于$m \ll M$，可以认为发射炮弹前后车厢自身质量几乎不改变，故该递推关系近似为

$$V_i=V_{i-1}-\frac{mv}{M}$$

由上述递推公式易得通项公式

$$V_i=V_0-i\frac{m}{M}v$$

将车厢初速度$V_0=45$ m/s 、车厢总质量$M=3500$ kg 、炮弹质量$m=65$ kg 、炮口速度$v=625$ m/s 代入，解得要想使得车厢接近停靠，需要的发射的炮弹枚数

$$i=\frac{V_0}{\frac{m}{M}v}=3.9$$

即需要发射约4 枚炮弹才可以使车厢接近停靠。

也可以直接采用递推关系计算，由$V_0=45$ m/s，易解得

$$V_1=V_0-\frac{mv}{M}=33 \text{ m/s}$$

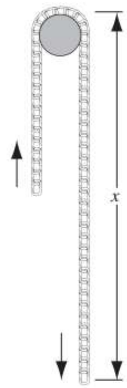
$$V_2=V_1-\frac{mv}{M-m}=22 \text{ m/s}$$

$$V_3=V_2-\frac{mv}{M-2m}=10 \text{ m/s}$$

$$V_4=V_3-\frac{mv}{M-3m}=-2.8 \text{ m/s}$$

即在发射4 枚炮弹后车厢速度最小，最接近停靠。

Problem 7.3



如右图，长度为L的均匀柔性链条（线密度为λ）穿过一个小的无摩擦栓钉。当其一侧悬挂长度为x时从静止释放，此时另一侧悬挂长度为$L-x$。求加速度a关于x的函数关系。

解：

本题以竖直向下为正方向。对于在下落这一侧的一段链条而言，它同时受到自身重力和另一侧链条给它的拉力T，满足

$$\lambda xg-T=\lambda xa$$

而对于另一侧的一段链条而言，它也同时受到自身重力和前一侧链条给它的拉力T，满足

$$\lambda(L-x)g-T=-\lambda(L-x)a$$

联立并消掉T，解得a和g的关系为

$$a=\left(2\frac{x}{L}-1\right)g$$

Problem 7.10

一架$5860\ \mathrm{kg}$重的火箭被设置为垂直发射，喷气速度为$1.17\ \mathrm{km/s}$。问每秒必须喷出多少气体以提供所需的推力来：

(1) 克服火箭的重力；

(2) 使火箭初始的向上加速度为$18.3\ \mathrm{m/s^2}$。

解：

设t时刻火箭的质量为m、速度大小为v；设$\mathrm{d}t$时间内喷出气体的质量为$\mathrm{d}m$，已知喷气速度（相对于火箭）$u=1.17\ \mathrm{km/s}$。以竖直向上为正方向，根据动量定理

$$[(m-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m(v-u)]-mv=-mg\,\mathrm{d}t$$

展开有（注意到$\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$作为高阶无穷小量可忽略）

$$m\,\mathrm{d}v-u\,\mathrm{d}m=-mg\,\mathrm{d}t$$

两边同除以$\mathrm{d}t$并移项，解得加速度的表达式

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{u}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-g$$

$t=0\ \mathrm{s}$时刻有火箭初始质量$m\big|_{t=0\ \mathrm{s}}=m_0=5860\ \mathrm{kg}$，将其代入。如果只是为了克服火箭的重力，即初始加速度最小只需要$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0\ \mathrm{m/s^2}$，解得所需要的最小喷气速度（单位时间内喷出气体的质量）为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0 g}{u}=49.1\ \mathrm{kg/s}$$

其中取重力加速度$g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$。

(2)　将初始时刻所要求的火箭加速度$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a_0=18.3\ \mathrm{m/s^2}$代入，易解得所需要的喷气速度为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0(a_0+g)}{u}=141\ \mathrm{kg/s}$$

其中也取重力加速度$g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$。

Exercise 8.3

在时间间隔t内，发电机的飞轮所经过的角度由ϕ由下式给出

$$\phi(t)=at+bt^3-ct^4$$

其中a、b、c为常数。求角速度和角加速度的表达式。

解：

角速度的表达式为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=a+3bt^2-4ct^3$$

角加速度的表达式为

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2}=6bt-12ct^2$$

Exercise 8.30

一辆以$97\ \mathrm{km/h}$的速度行驶的汽车的车轮直径为$76\ \mathrm{cm}$。 求：

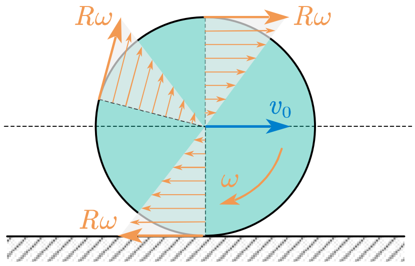
(1)　车轮绕轴的角速度；

(2)　使汽车匀减速地停下来，车轮共转动30圈，计算角加速度；

(3)　在此制动期间，汽车前进了多远？

解：

(1)　考虑到车轮在地面上的运动是无滑动的纯滚动，根据运动合成（详见之前【Homework#2】的题解中【附 3：摆线的形成及质点速度和加速度的直观分析法】一节中的阐述），汽车前进速度v_0与车轮绕轴角速度ω之间的关系应该满足$v_0=R\omega$，其中R为车轮的半径。



将汽车前进速度$v_0=97\ \mathrm{km/h}=27\ \mathrm{m/s}$和车轮半

径$R=76\ \text{cm}/2=0.38\ \text{m}$，因此车轮绕轴的角速度

$$\omega=\frac{v_0}{R}=71\ \text{rad/s}$$

(2) 对应即为角速度从$\omega=71\ \text{rad/s}$降到$0\ \text{rad/s}$，在此过程中车轮转动了30圈，则总角位移$\theta=30\times2\pi=60\pi\ \text{rad}$，故角加速度

$$\alpha=\frac{0-\omega^2}{2\theta}=-13\ \text{rad/s}^2$$

以初始角速度方向为正方向。

(3) 根据$v_0=R\omega$，对时间积分可得到汽车总位移x和车轮总角位移θ的关系

$$\int_0^t v_0\,\mathrm{d}t=\int_0^t R\omega\,\mathrm{d}t\quad\Longrightarrow\quad x=R\theta$$

由于整个制动过程中车轮共转了30圈，容易有汽车的的总位移

$$x=R\theta=30\cdot2\pi R=72\ \text{m}$$

Exercise 8.32

一个物体在xOy平面上运动，运动方程为

$$x(t)=R\cos\omega t$$
$$y(t)=R\sin\omega t$$

x和y是物体的坐标，t是时间、R和ω是常数。

(1) 消除这些方程式之间的t，以找到物体运动曲线的轨迹方程。这条曲线是什么？常量R的含义是什么？

(2) 求x和y的方程对时间t的微分，以求出物体速度的分量v_x和v_y。组合v_x和v_y以找到$\boldsymbol{v}$的大小和方向，描述对象的运动。常量ω的含义是什么？

(3) 求v_x和v_y的方程对时间t的微分，以求出加速度$\boldsymbol{a}$的大小和方向。

解：

(1) 对x和y的方程联立消t，得到的是物体运动的轨迹方程，根据$\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1$，易解得

$$x^2+y^2=R^2$$

这显然是一个圆的曲线方程，故物体运动的轨迹形成了一个圆。常量R是圆的半径。

(2) 对x和y的方程对时间求导，得到

$$v_x(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-R\omega\sin\omega t$$

$$v_y(t)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=R\omega\cos\omega t$$

所以合速度为

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x(t)\,\hat{\boldsymbol{i}}+v_y(t)\,\hat{\boldsymbol{j}}=R\omega\,\underline{/\omega t+90^\circ}$$

合速度大小不变，方向沿圆切线方向，这是一个匀速圆周运动。常量ω是圆周运动的角速度。

(3) 对v_x和v_y的方程再对时间求导，得到

$$a_x(t)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-R\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y(t)=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-R\omega^2\sin\omega t$$

所以合加速度为

$$\boldsymbol{a}(t)=a_x(t)\hat{\boldsymbol{i}}+a_y(t)\hat{\boldsymbol{j}}=R\omega^2\,\underline{/\omega t+180^\circ}$$

合加速度大小不变，方向指向圆心。

Problem 8.6

一名宇航员正在离心机中接受训练。离心机的半径为$10.4\ \mathrm{m}$，并且在开始时依照

$$\phi(t)=(0.326\ \mathrm{rad/s^2})t^2$$

旋转。求$t=5.60\ \mathrm{s}$时，求其角速度、切向速度、切向加速度和径向加速度。

解：

(1) 根据角速度的表达式

$$\omega(t)=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=2\times(0.326\ \mathrm{rad/s^2})\cdot t$$

则$t=5.60\ \mathrm{s}$时的角速度$\omega\big|_{t=5.60\ \mathrm{s}}=3.65\ \mathrm{rad/s}$。

(2) $t=5.60\ \mathrm{s}$时的切向速度$v\big|_{t=5.60\ \mathrm{s}}=R\cdot\omega\big|_{t=5.60\ \mathrm{s}}=38.0\ \mathrm{m/s}$，其中$R=10.4\ \mathrm{m}$为离心机的半径。

(3) 根据切向加速度的表达式

$$a_\tau(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=2\times10.4\ \mathrm{m}\times0.326\ \mathrm{rad/s^2}=6.78\ \mathrm{m/s^2}$$

则$t=5.60\ \mathrm{s}$时的切向加速度$a_\tau\big|_{t=5.60\ \mathrm{s}}=6.78\ \mathrm{m/s^2}$。

(4) $t=5.60\ \mathrm{s}$时的径向加速度$a_n\big|_{t=5.60\ \mathrm{s}}=\dfrac{\left(v\big|_{t=5.60\ \mathrm{s}}\right)^2}{R}=139\ \mathrm{m/s^2}$。

Problem 8.7

地球绕太阳的轨道几乎是一个圆。

(1) 地球（被视为质点）围绕太阳旋转的角速度是多少？

(2) 它在轨道上的线速度是多少？

(3) 地球相对于太阳的加速度是多少？

解：

根据题目的假设，将地球围绕太阳的公转运动近似为匀速圆周运动。

(1) 地球围绕太阳公转一周的周期被称为“一年”，这里取恒星年。因此该匀速圆周运动的周期$T=1\ \mathrm{yr}=365.26\ \mathrm{d}=3.1558\times10^{7}\ \mathrm{s}$。

解得角速度

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=1.9910\times10^{-7}\ \mathrm{rad/s}$$

(2) 地球到太阳的平均距离被称为“一个天文单位”，因此该匀速圆周运动的半径取为$R=1\ \mathrm{AU}=1.4960\times10^{11}\ \mathrm{m}$。

解得线速度

$$v=R\omega=2.9786\times10^{4}\ \mathrm{m/s}=29.786\ \mathrm{km/s}$$

(3) 由于假设地球绕太阳的运动近似为匀速圆周运动，故无切向加速度，总加速度大小等于径向加速度的大小，即是

$$a=a_{\mathrm{n}}=R\omega^{2}=5.9303\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^{2}}$$

附 2：关于“日”和“年”的说明

“日”，自然定义为一昼夜的时间长度，但它究竟是多长呢？尽管在我们的生活中以“子夜到子夜”为一日，但是由于“子夜”的时间判断并不明显，所以我们常常用“正午到正午”度量一日的时间，所谓“正午”就是太阳到达其空中最高点位置的时间。由此，我们定义“太阳日”为太阳重返到其在天空中最高点所经历的时间。但由于地球公转轨道是椭圆形且自转倾斜，所以每天的实际“太阳日”长度（称作“真太阳日”）其实都不一样！为了方便使用，我们将所有“太阳日”在一年当中的平均值定义为“平太阳日”（1 d），也就等于24 h（86400 s）。

我们又知道，昼夜交替是由于地球自转产生的，但地球自转的实际周期是不是24小时呢？答案是否定的。当地球从一个“正午”开始自转一周后，由于地球在自转的同时也绕日公转了一个小角度，所以此时还并没有达到下一个“正午”，地球自转的实际周期比“太阳日”略短。为了刻画地球自转的真正周期，我们又定义了“恒星日”——地球相对于遥远、固定不动的恒星（或相对于春分点）自转一圈所需要的时间。一恒星日（即地球自转一周的真正周期）其实只有约23 h 56 min 4 s。（*想想应该怎么计算，它和太阳日之间应该满足怎样的关系？*）

而“年”的定义也有着类似的麻烦。一年的自然定义应该是寒来暑往（太阳直射点移动回归）的周期，即取为太阳在天球上沿黄道从某一定标点再回到同一定标点所经历的时间间隔，这样定义的一年称作“回归年”。一回归年的长度是365.2422 d（365 d 5 h 48 min 45 s）。

这样定义的回归年同样不是地球绕太阳公转的真正周期，为此我们同样又定义了“恒星年”——地球相对于遥远、固定不动的恒星（或相对于春分点）真正的绕日公转周期。一恒星年的长度是365.2563 d（365 d 6 h 9 min 9 s），比恒星年长20 min 4 s。

在天文学、地质学和古生物学上，为了统一时间标度，将固定的365.25 d（31557600 s）称作一个“儒略年”，符号为a。