微积分H作业解答

第六周

题目1. (8.5.46) 请在空间直角坐标系中画出下列曲面的图形:

(3) $2 - z = x^2 + y^2$;

(5) $z = \sqrt{4x^2 + 25y^2}$;

(6) $x^2 + y^2 = 2x$.

解答: (3) 顶点为$(0,0,2)$,开口向下的旋转抛物面;

(5) 顶点为原点的上半椭圆锥面(注意$z \geq 0$);

(6) 即$(x-1)^2 + y^2 = 1$.

以直线$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$为中心轴,横截面圆周半径为1的圆柱面.

题目2. (8.5.47) 请在空间直角坐标系中画出以下曲线:

(1) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = x^2 + y^2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

解答: (1) 上半球面与旋转抛物面交线,为一圆周;

(3) 以z轴为中心轴的圆柱面与平面交线,为一椭圆

(注意这个平面是倾斜的，所以得到的是椭圆而不是圆).

题目3. (8.5.49) 写出曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的一个参数式方程.

解答: 先消去z,得$2x^2+2xy+2y^2=R^2$,即$\frac{3}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2=R^2$

根据圆的参数方程,可设$x+y=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t, x-y=\sqrt{2}R\sin t$,

解得$x=\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t+\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, y=\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, z=-(x+y)=-\frac{2R}{\sqrt{6}}\cos t.$

由此得到曲线的一个参数式方程: $\begin{cases} x=\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t+\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, \\ y=\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t, \\ z=-\frac{2R}{\sqrt{6}}\cos t \end{cases}$ $(0\le t<2\pi).$

注记: 解法不唯一,也可以设某个变量为t去反解另外两个变量,但不论哪种方法都应保证参数只有一个,即自由度为1.

题目4. (9.1.2) 求下列函数的定义域,并在xOy平面内画出其图形:

(3) $z=\ln(x^2+2y^2-8)$;

(5) $z=\arcsin\frac{x-y}{x^2+y^2}$.

解答: (3) $x^2+2y^2>8$,为一椭圆外部.

(5) $-1\leq\frac{x-y}{x^2+y^2}\leq 1$,即$x^2+y^2\geq x-y$或$x^2+y^2\geq y-x$,其中$x^2+y^2\neq 0$.

配方后为$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2\geq\frac{1}{2}$ 或$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\geq\frac{1}{2}$,其中$x^2+y^2\neq 0$.

图像为两个圆的外部,这两个圆的切点为原点,在图像中须挖掉.

题目5. (9.1.3) 求下列函数的定义域,并在三维直角坐标系中画出其图形:

(1) $u=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}+\ln(z-x^2-y^2)$;

(4) $u=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x^2+y^2+z^2-1)}$.

解答: (1) $x^2+y^2+z^2\leq 4, z>x^2+y^2$.

(4) $x^2+y^2\leq 4, x^2+y^2+z^2>1, x^2+y^2+z^2\neq 2$.

题目6. (9.1.4) 设$f(x+\frac{1}{x},y-1)=x^2+y^2+2xy+\frac{1}{x^2}+\frac{2y}{x}-2(x+y)-\frac{2}{x}+4$,

求$f(x,y)$的表达式.

解答: $f(x+\frac{1}{x},y-1)=(x^2+2+\frac{1}{x^2})+(y^2-2y+1)+(2xy+\frac{2y}{x})+(-2x-\frac{2}{x})+1$

$=(x+\frac{1}{x})^2+(y-1)^2+2y(x+\frac{1}{x})-2(x+\frac{1}{x})+1$

$= (x+\frac{1}{x})^2 + (y-1)^2 + 2(y-1)(x+\frac{1}{x}) + 1$

则$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 1 = (x+y)^2 + 1.$

题目7. (9.2.6) 利用极限定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0.$

解答: (1) 注意到$|\frac{xy}{|x|+|y|}| \le \frac{|xy|}{2\min\{|x|,|y|\}} = \frac{\max\{|x|,|y|\}}{2}$,

对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$,当$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$时, 有$|x| < \delta, y| < \delta$,

则$|\frac{xy}{|x|+|y|}| \le \frac{\max\{|x|,|y|\}}{2} < \frac{\delta}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$, 由极限定义知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0.$

题目8. (9.2.7) 说明下列函数在$(x,y) \to (0,0)$时是否存在极限?若存在,求出其极限:

(2) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x+y}$;

(5) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;

(7) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

解答: (2) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2y^2}{x+y} = 0$; $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x+x^4}} \frac{x^2y^2}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-x^4)^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(1-x^3)^2 = 1$,

故在$(x,y) \to (0,0)$时极限不存在.

(5) $\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = |x| + |y| - \frac{2|xy|}{|x|+|y|}$,

一方面$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|) \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(2\sqrt{x^2+y^2}) = 0$,

另一方面,同上题可证$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{|x|+|y|} = 0.$

综合得$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)-2\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{|x|+|y|}=0.$

(7) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1;\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0,$

故在$(x,y)\to(0,0)$时极限不存在.

题目9. (9.2.9) 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{1-\cos(xy)}{\ln(1-2x^2)};$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\tan x-x}{\sqrt{1+yx^3}-1}.$

解答: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 2}\frac{1-\cos(xy)}{\ln(1-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{\ln(1-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^3))}{((-2x^2)+o(x^3))}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+o(x^3)}{-2x^2+o(x^3)}=-1.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 2}\frac{\tan x-x}{\sqrt{1+yx^3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\sqrt{1+2x^3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4))-x}{(1+\frac{1}{2}\cdot 2x^3+o(x^5))-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^4)}{x^3+o(x^5)}=\frac{1}{3}$

注记: 严谨来说要证明重极限存在性才能只计算累次极限.