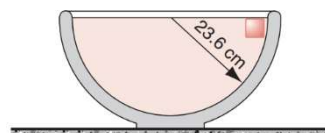


课程作业 (7)

张晗潇、黄家兴 浙江大学物理学系·聚变理论与模拟中心 授课教师：马志为 on 2021.4.29

Exercise 12.7

一个非常小的冰块从半径为 23.6 cm 的半球形无摩擦碗的边缘释放，如右图所示。则小冰块移动到碗底时运动有多快？



解：

直接利用系统能量守恒，即动能的变化量与重力势能的变化量之和为零

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

即

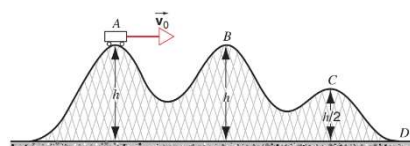
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR$$

易得小冰块滑到碗底时的速度大小

$$v = \sqrt{2gR} = 2.15\text{ m/s}$$

Exercise 12.9

如图所示，过山车在无摩擦的轨道上从 A 点开始运动，请分别计算过山车在 B 点、C 点、D 点的速率（speed）^[1]。（假设过山车可以被认为是一个质点，并且它始终在轨道上。）



解：

过山车的总能量守恒，若把地面作为势能零点，则初始时

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

则在 B 点，根据

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = E$$

得到 B 点处的速率

[1] 这里稍微对 velocity 和 speed 两个词作一下区分：velocity 指速度（矢量），平均速度定义为位移与时间间隔之比，瞬时速度定义为位移对时间的导数；speed 指速率（标量），平均速率定义为路程与时间间隔之比，瞬时速率定义为路程对时间的导数。由于在生活中我们也将 speed 称为“速度”，以后我们除必要外将不在字面上特别区分这两个词语，通称为“速度”。容易知道：瞬时速率就等于瞬时速度的大小，然而平均速率却不一定等于平均速度的大小。

$$v_B = v_0$$

在C点, 根据

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mg \cdot \frac{1}{2}h = E$$

得到C点处的速率

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + gh}$$

在D点, 根据

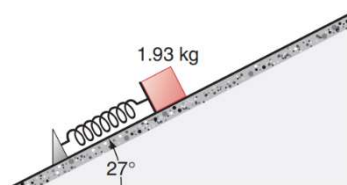
$$\frac{1}{2}mv_D^2 = E$$

得到D点处的速率

$$v_D = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Exercise 12.15

一个质量 1.93 kg 的滑块被放置在倾角 27.0° 的光滑斜面上的一根被压缩的弹簧上, 弹簧的劲度系数为 20.8 N/cm 且被压缩了 18.7 cm 。当滑块被释放后, 问其在斜面上最远能到何处? (以滑块被释放前的位置为基点。)



解:

以滑块被释放前的位置为势能零点, 则初始能量为

$$E_i = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = 36.4 \text{ J}$$

整个过程能量守恒, 因此滑块最终达到最高点时有

$$mgh = E_i$$

得到滑块能上升的最大竖直高度

$$h = \frac{E_i}{mg} = 1.92 \text{ m}$$

则最高点到初始点的距离为

$$l = \frac{h}{\sin \theta} = 4.23 \text{ m}$$

附 1: 量纲分析基础

由于物理量之间都有着规律性的联系, 因此当一个单位制中的基本量选定后, 其他的物理量 (被称为“导出量”) 都可通过既定的物理关系与基本量联系起来。基本量的单位被称为基本单位, 导出量的单位则被称作导出单位。如果不考虑数字因数, 只考虑一个量是从哪些基本量导出的, 我们就可以列出物理量的量纲式。在力学中, 我们常用的单位制 (如国际单位制或厘米-克-

秒单位制)都选用了长度 L 、时间 T 和质量 M 作为基本量(即基本量的总数 $m=3$ ^[2]),所以对每个物理量 Q 就可以写出如下的量纲表达式

$$[Q]=[L]^{\alpha}[T]^{\beta}[M]^{\gamma}$$

其中 $[Q]$ 便称作物理量 Q 的量纲。例如:速度、动量、力和功的量纲分别可表示为

$$[v]=[x]/[t]=[L][T]^{-1}$$

$$[p]=[m][v]=[L][T]^{-1}[M]$$

$$[F]=[p]/[t]=[L][T]^{-2}[M]$$

$$[W]=[F][x]=[L]^2[T]^{-2}[M]$$

通过量纲式我们可以进一步确定物理量各自的单位,同时方便地进行不同单位制下的单位换算。此外,通过检验物理方程两边及相加减各量的量纲是否相符,我们可以初步检验方程的正确性。

在通常的物理学教科书中,关于量纲理论的介绍基本就到此为止了,只是浅尝辄止、一带而过。但实际上量纲分析方法绝不仅仅只能用来换算换算单位、检验检验公式的对错……在这里,我们将介绍量纲分析法更多方面的应用。

量纲可以看成某个“线性空间”中的“矢量”。还是以力学量为例,若对 $[Q]$ 的表达式两边取对数,可以得到

$$\ln[Q]=\alpha\ln[L]+\beta\ln[T]+\gamma\ln[M]$$

我们就可以说 $\ln[L]$ 、 $\ln[T]$ 、 $\ln[M]$ 分别是该 m 维“线性空间”中的“正交基矢”,而 (α, β, γ) 便是“矢量” $\ln[Q]$ 在这些“基矢”上的“投影”(或者说它的“分量”)。

下面让我们来看几个利用量纲分析法解决问题的有趣例子:

例 1:用量纲分析法证明勾股定理。

证明:我们认为:一个直角三角形的面积 S 应当可以由它的一边(例如斜边 l)和一个锐角(例如小锐角 α)所唯一确定。由于 α 是无量纲的,而面积具有长度平方的量纲,也就是说 S 只可能和 l 的平方成正比。所以直角三角形面积的表达式可以写为

$$S(l, \alpha) = k(\alpha) \cdot l^2$$

其中 $k(\alpha)$ 是无量纲的系数,它是只由 α 决定的函数。(思考:为什么 k 不可能含有自变量 l ?)

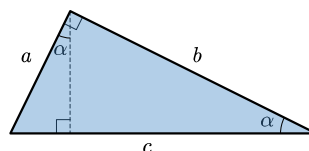
过 c 边作该直角三角形的一条高线,将三角形一分为二。容易发现得到的两个小的直角三角形都以 α 为小锐角。根据两个小直角三角形的面积之和等于大直角三角形,有

$$k(\alpha) \cdot a^2 + k(\alpha) \cdot b^2 = k(\alpha) \cdot c^2$$

两边同时约去 $k(\alpha)$,得到

$$a^2 + b^2 = c^2$$

即直角三角形两直角边平方之和等于斜边的平方,这就是初等几何中著名的勾股定理(毕达哥拉斯定理)。^[3]



[2] 在力学中通常 $m=3$;在电磁学中 m 可以为4(米-千克-秒-安培制)或3(高斯制);在国际单位制的完整体系中共有7个基本量,也就是 $m=7$ 。

[3] 说到这里不禁想起:人民教育出版社在其出版的初中数学自读课本上曾经闹过一个“用相对论证明勾股定理”的大乌龙,当时笔者也亲身参与了对该事件的讨论并给人教社发去了邮件进行反馈,具体经过详见<https://www.zhihu.com/question/401988398/answer/1288769432>。

例 2: 用量纲分析法推导质量为 M 、边长为 a 的均匀正方形薄板的转动惯量 (以其中心点为转轴)。

解: 第一步: 推导其转动惯量和 M 、 a 的关系。

我们认为: 正方形薄板的转动惯量 (以其中心点为转轴) 应由它的质量 M 、边长 a 唯一确定。由于转动惯量的量纲是 $[I] = [M][L]^2$, 我们可以得出该正方形薄板的转动惯量应当表示为

$$I(M, a) = k \cdot Ma^2$$

其中 k 是无量纲的系数。如果薄板的形状相同, 则 k 应该相同。

第二步: 推导转动惯量表达式中的系数 k 。

单凭量纲分析是求不出无量纲的系数的, 我们必须补充其他知识。

将正方形薄板如图所示一分为四, 则可得四个完全相同的、质量为 $M/4$ 、边长为 $a/2$ 的小正方形薄板。由于这些小正方形薄板的形状与大正方形薄板相同, 则每个小薄板的转动惯量 (以各自的中心点为转轴) 应当可以表达为 $I_0 = k \cdot \frac{M}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{k}{16} \cdot Ma^2$ 。

再利用平行轴定理, 我们将小薄板的转轴从各自的中心点移到各自的一个角上 (即原来大薄板转轴所在的位置), 此时每个小薄板的转动惯量为 $I_1 = I_0 + \frac{M}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2 = \left(\frac{k}{16} + \frac{1}{32}\right) \cdot Ma^2$ 。

此时, 四个小薄板的转动惯量之和必然等于大薄板的转动惯量, 即

$$4I_1 = I \implies \left(\frac{k}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot Ma^2 = k \cdot Ma^2$$

直接解得 $k = 1/6$, 因此质量为 M 、边长为 a 的均匀正方形薄板的转动惯量 (以其中心点为转轴) $I = \frac{1}{6}Ma^2$ 。这种方法不需要繁琐的积分, 且最终结果与积分法所得到的结果一致。

例 3: 用量纲分析法证明: 小摆幅情况下单摆的周期 τ 与摆锤质量 m 无关。

证明: 我们先假定认为: 单摆的周期 τ 可能和摆锤的质量 m 、摆长 l 和重力加速度 g 有关, 我们将这三个参量选为 “主定参量”。由于这四个物理量的量纲式分别为

$$\begin{aligned} [\tau] &= [T] & \implies & \ln[\tau] = \ln[T] \\ [m] &= [M] & \implies & \ln[m] = \ln[M] \\ [l] &= [L] & \implies & \ln[l] = \ln[L] \\ [g] &= [L][T]^{-2} & \implies & \ln[g] = \ln[L] - 2\ln[T] \end{aligned}$$

选取 “主定参量” 为一组新的 “基矢”, 假定单摆周期的表达式为

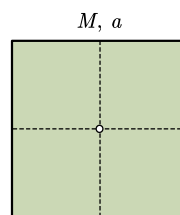
$$\tau = k \cdot m^\alpha l^\beta g^\gamma$$

其中 k 为无量纲系数。将上式写成量纲式并两边取对数得到

$$\ln[\tau] = \alpha \ln[m] + \beta \ln[l] + \gamma \ln[g]$$

将等式两边都用 $\ln[M]$ 、 $\ln[L]$ 和 $\ln[T]$ 表示, 并要求各 “基矢” 前系数相等, 我们将得到如下的线性方程组

$$\ln[T] = \alpha \ln[M] + (\beta + \gamma) \ln[L] - 2\gamma \ln[T] \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}$$



也可以写成矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得 $\alpha = 0$ 、 $\beta = 1/2$ 、 $\gamma = -1/2$ 。也就是单摆的周期 τ 可以表达为

$$\tau = k \cdot m^0 l^{1/2} g^{-1/2} = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

即 $\tau \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$ ，所以周期 τ 与摆锤质量 m 无关的命题得证。系数 k 便不能再通过量纲分析法确定，

我们还可以猜测这个无量纲系数与同样无量纲的摆角 θ 有关——事实上，利用量纲分析法还可以对任意大摆角时单摆的周期进行分析。

从上面几道题我们发现：量纲分析法可以帮助我们在不知道具体的物理定律和机制的时候就能够简便地得到一些重要的概念和信息，进行定性的判断甚至半定量的分析。尽管量纲分析法有时不能帮助我们直接确定方程中的无量纲系数，但是如果在辅以其他知识或者已知的特例、实验结果等，就有可能将这个无量纲系数最终确定。当然，要正确地使用量纲分析法并不容易，它的精髓是找到适当的“主定参量”以构建一组新的“基矢”，换句话说就是要首先意识到“哪些物理量有可能决定结果”。这要求相当的经验和对现象本质的洞察力，甚至于在那些未知的领域还要有极其敏锐的物理直觉。我们不妨再举一个例子：

例 4：一道关于量子真空涨落的问题：两块无限大平行平面壁相距 d ，皆由理想导体构成。从经典力学看，两壁之间是没有相互作用的。但若计及（相对论性）电磁场的量子真空涨落效应，为了确定两壁间单位面积上的作用力（即压强 p ），哪些物理量可能涉及到？试用量纲分析的方法把 p 确定到只差一个数值系数，并求 p 相对 d 的比例关系。

解：本题只给了一个物理量 d 。如果说还有什么可能会决定 p 的大小，看到此题涉及相对论性的电磁场和量子效应，我们能想到的或许就只有两个物理常量——光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ 和普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 了。这些物理量的量纲式如下

$$[p] = [L]^{-1} [T]^{-2} [M]$$

$$[d] = [L]$$

$$[c] = [L] [T]^{-1}$$

$$[h] = [L]^2 [T]^{-1} [M]$$

所以可以假定压强 p 的表达式为

$$p = k \cdot d^\alpha c^\beta h^\gamma \implies [p] = [d]^\alpha [c]^\beta [h]^\gamma$$

其中 k 为无量纲系数。要求各“基矢”前系数相等，写成矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解得 $\alpha = -4$ 、 $\beta = 1$ 、 $\gamma = 1$ 。所以压强 p 的表达式为

$$p = k \cdot d^{-4} c^1 h^1 = k \frac{hc}{d^4}$$

即 $p \propto \frac{hc}{d^4}$ ，也就是 p 同 d 的四次方成反比。

这里只介绍量纲分析方法的一些初步应用, 关于“ Π 定理”等更加理论化、深入的内容, 这里不再具体讲解, 有兴趣的同学可以查阅相关参考书, 如赵凯华老师的《定性与半定量物理学》。

附 2: 几何相似性与标度律

你或许听过很多号称“科普”的“营销号”有过这样的说辞: “小小的一只跳蚤一跳能够跳一米高, 那可是它自己身长的几百倍, 如果有一只长得像人一样大的跳蚤, 它可以跳几百米高!” 我们生活中还可以经常观察到猫能从五六倍自己身高的地方跳下来而安然无恙 (所谓“猫有九条命”), 那人如果掌握了猫一样的“身手”, 是否也能从十几米高的楼上跳下而毫发无损呢? 很多科幻电影中的世界末日场景常会有体型庞大的变异“怪物”, 但自然界中真的可能进化出巨型的蚂蚁、蜘蛛、甲虫或哥斯拉吗? 真的可能生长出无比巨大的树木吗? 蚂蚁可以背负数百倍自身重量的食物, “超人”有可能力气大到能背起数百个体型相仿的人吗?

这其实很大程度上是我们“线性思维”的局限性导致的“想当然”结果。人们常常误以为任何东西都能成比例放大, 例如“一个人身高高了 50%, 做衣服的布料也要多用 50%”——然而我们早就知道, 假设某形状的物体其线度 (尺寸) 扩大到原来的两倍, 则表面积应当扩大到原来的四倍, 体积则应当扩大到原来的八倍。也就是说表面积应当和线度的平方成正比 ($S \propto l^2$)、体积则应当和线度的立方成正比 ($V \propto l^3$), 这是最基本的标度律。所以, 一个人身高高了 50% (是原来的 1.5 倍), 做衣服用的布料 (和表面积有关) 应当是要多用 125% (是原来的 2.25 倍) 才对。商店里买饮料, 一瓶 1 L 装的往往要比两瓶 500 mL 装的便宜, 是因为越小的包装其表面积与体积之比会越大, 也就是小瓶装的饮料多耗费了包装的材料成本。这样看来, 对于跳蚤这样的生物来说, 假定其体内蕴藏的能量 E 与身体质量 m 成正比, 又假定密度不变, 则体内的能量与身体体积 V 成正比, 即 $E \propto m \propto V \propto l^3$; 跳蚤跳起是将体内的能量转化为重力势能, 其跳起高度 h 所需的重力势能 $mgh \propto m \propto V \propto l^3$ 。从而我们发现 $h \propto l^0$, 即跳蚤能跳起的高度 h 几乎不受其身体线度 l 的影响。所以大自然中能跳的动物无论体型大小其能跳起的高度几乎都在同一数量级, 即便是长得像人那样大的跳蚤最多也只能跳一米左右的高度。同理, 我们知道动物或植物的体重 (或质量) 正比于它的体积, 与线度的立方成正比 ($W \propto m \propto V \propto l^3$), 而其支撑面积 (例如脚底的面积或树干的横截面积) 却只和线度的平方成正比 ($S \propto l^2$), 所以动物的体型越大, 其单位支撑面上所需要承受的重量就越大 ($W/S \propto l$), 这也就限制了动物的体型不能太大 (否则其骨骼结构根本承受不了如此的重量)、树木也不可能无限长高 (否则必然导致树干失稳)。所以我们才会发现大象的四条腿非常粗壮, 与其他小型的哺乳动物不成比例; 而像鲸鱼这种巨大的哺乳动物必须生活在海里, 如果一旦在岸上搁浅, 失去了水的浮力, 它们就会立刻被自身的体重压死。

利用标度律的基本知识, 我们可以解释自然界中的很多现象, 或者对一些物理问题进行估算。下面再举几个简单的例子:

例 1: 18 世纪英国著名作家斯威夫特写了一本讽刺小说《格列佛游记》, 描绘了主人公格列佛在“小人国”和“巨人国”游历的经历。为了方便, 我们假定这些巨人和小人的几何线度 l 都与我们这些正常人差一个数量级, 但同为在地球上生活的血肉之躯, 体内的成分和物理、化学过程都是相似的。估算下列问题:

- (1) “巨人国”的居民其骨骼要承受的负载比我们大多少倍?
- (2) “小人国”的居民一顿饭需要摄入多少食物(相比于其体重)?
- (3) “小人国”如果也有文字和书本,则它们每页纸上能印多少个字?

解:

(1) 前面已经提过,人的体重与线度立方成正比、骨骼的横截面积与线度平方成正比,这也导致了人的骨骼上单位面积所承受的静态负荷与线度成正比(即 $W/S \propto l$)。对于“巨人国”的居民来说,由于它们的线度(或者说身高)是我们的10倍,所以它们的骨骼上所承受的静态负荷也是我们的10倍。但还有动态负荷:一旦他们活动身子,除重力外,其受到的惯性力还质量与加速度之积成正比,而加速度又和位移成正比(位移与线度成正比),与时间的二次方成反比(从《格列佛游记》的描述来看,“巨人国”的生活节奏和我们差不多,因此假定时间不受影响),最终导致 $F/S \propto ma/S \propto l^2$, 即其骨骼实际承受的动态负荷可能是我们的100倍!看来“巨人国”如果真的存在,那里的居民稍微一剧烈运动,就可能面临骨折的风险。

(2) 我们人类是恒温动物,需要对外界保持一定的温差 ΔT 。根据牛顿冷却定律,单位时间从体表散失的热量正比于皮肤的表面积 S ($S \propto l^2$) 和温差 ΔT ,而这些热量要靠摄入的食物补充。所以对于身高是我们的1/10的“小人国”居民来说,他们每顿饭需要摄入的食物重量(正比于其热量)与它们自身体重之比是 $Q/V \propto S/V \propto l^{-1}$, 是我们的10倍之多。

(3) 按衍射公式计算,人眼最小分辨角 $\theta \propto \lambda/D$, 其中 λ 为光波波长(这个到哪儿都是一样的)、 $D \propto l$ 为瞳孔直径,所以 $\theta \propto l^{-1}$ 。再假设“小人国”居民的明视距离 r 也是我们的1/10(即 $r \propto l$), 我们可以得到其书本上字的尺寸 $x = r\theta \propto l^0$, 所以他们的书本上字的大小应该和我们的一样大。但要知道他们的书本面积是我们的1/100 ($S \propto l^2$), 所以他们一页纸上可以印的字数也是我们的1/100 ($S/x^2 \propto l^2$)。假设我们的书一行有30个字,一页有30行,则一页共有900个字,而他们的书则每行只能印3个字,一页只能印3行,总共一页上只能印9个字。

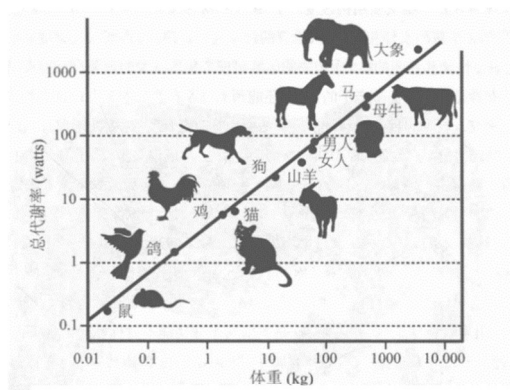
上面的计算说明,自然界中生物的体型大小是长期演化的结果,大自然选择了这样的尺度。过度地放大和缩小在物理学上都是不真实的。当然,如果是在与地球环境迥异的其他行星,那上面所孕育出的生物的体型可能与地球生物相差甚远,而那也必然意味着截然不同的外观和生活习性。并不是每一种环境下的生物都可以产生智慧乃至文明的,因此很多科学家猜测:如果真的存在能够与人类沟通的外星智慧生命,他们必然也来自与地球环境相似的行星。

按照前面对“小人国”的方法计算,我们很容易得出恒温动物的散热功率 P 正比于动物体的表面积 S , 即 $P \propto S$ 。但动物体内储存的总能量却又是正比于其体积(或质量)的,即 $E \propto V \propto M$, 所以每单位质量的散热应该与动物体本身的线度 l 成正比,换言之动物的体型越大则其表面积与体积之比越小,就越难散热。在冰天雪地的北极,往往生活着体型较大的北极熊等动物,这便是因为体型大的动物在极地的生存优势非常明显;而生活在热带、体型同样庞大的大象则必须极力扩大自己的体表面积,因此它在进化中长出了巨大的耳朵来帮助散热。

对一般的动物来说,要使得体内的产热和散热能够平衡,其散热功率(也称为基础代谢率, Basal Metabolic Rate, BMR)似乎应当与其质量的 $2/3$ 次方成正比,即 $P \propto M^{2/3}$ 。但1947年美国的生物学家克莱伯(Kleiber)通过实验发现并非如此。他对多种哺乳动物用其单位时间所呼吸出的二氧化碳计算其基础代谢率,发现对哺乳动物而言它的基础代谢率应该与其体重(或质量)的 $3/4$ 次方成正比,即 $P \propto M^{3/4}$, 如右图所示。这说明我们的模型还不够精准,这个谜直到50年

后的 1997 年才被点破。科学家们提出三点假设：

- (1) 在进化压力下，生物体倾向于使用耗能最少的方式来传递物质进行新陈代谢；
- (2) 如果想把生物体用一种“管道”填满，最有效的就是具有自相似性层级结构的“微管”（即一层层“分支”的分形结构，如毛细血管）；
- (3) 只在最末端一层的微管，营养与物质交换是和体积相关的。



▲ 很多恒温动物的代谢率与体重的 $3/4$ 次方成正比。

所以我们可以认为：代谢率 P 正比于循环系统中的营养流量（即体液总流量） Q ，即 $P \propto Q$ 。体液（例如血液）总体积 V 正比于体重（或身体质量 M ），即 $V \propto M$ 。我们再考虑一个典型的分支结构，设每个节点都是从 1 个分成 n 个，有 m 层，故最末端总共有 $N = n^m$ 个分支；我们假设每层微管的长度相比于上一层都按固定比例 α 缩小，每层微管的内径相比于上一层都按固定比例 β 缩小，又因为通过一个微管的体液流量正比于微管体积，所以最末端微管总数 N 正比于体液总流量，即 $N \propto Q$ 。将体液认为是不可压缩流体，故体液总体积正比于每层微管伸展空间的大小，即 $V \propto \alpha \beta^2$ 。在分形结构最末端的分支，不妨认为单个分支所渗透的总体积（看作以分支长度为内径的球体）对各种动物都一样，所以最末端有 $\alpha \propto N^{1/3}$ ；认为最末端分支的截面积对各种动物也都应该一样，所以最末端有 $\beta \propto N^{1/2}$ 。综上所述就得到了 $P \propto M^{3/4}$ 。

这个法则被称为“克莱伯定律”。它意味着什么呢？假设一头牛的体重是一只老鼠体重的 10000 倍，那么牛的代谢率仅为老鼠代谢率的 1000 倍（ $10000^{3/4}$ ）。也就是说，牛仅需要 1000 倍于老鼠的能量就能够维持生命，尽管牛的细胞数量是老鼠的 10000 倍。这也就意味着牛体内的细胞工作效率比老鼠的低，单个细胞的代谢只有老鼠的 $1/10$ 。进而能推导出牛的细胞衰老会更慢，所以牛的平均寿命比老鼠要长。

例 2：解释：无论躯体大小如何，各种哺乳动物一生中心跳的次数基本相同。

解：设心脏每次跳动所抽运的血液量正比于心脏本身的大小，而心脏本身的大小正比于动物体的体积（或质量），则单位时间内的泵血量（血液流量） $Q \propto Mf$ ，这里的 M 指动物本身的质量、 f 为心率（心跳频率）。又根据克莱伯定律，有 $Q \propto P \propto M^{3/4}$ ，故可以推得 $f \propto M^{-1/4}$ ，也就是体型越大的动物心率越慢（这和我们实际观察到的情况是一致的）。又根据前面的推导，动物体的寿命 τ 正比于其细胞数量（正比于其质量或体积）与代谢率之比，即 $\tau \propto M/P$ ，则有 $\tau \propto M^{1/4}$ 。综上，在动物一生中总心跳次数 $N = \tau f \propto M^0$ ，即与躯体大小无关，基本为定值。

这种尺度规律并不只在生物界成立，有限空间内部的有序物质、能量、信息交换是在复杂系统中非常普遍的现象。当初研究尺度效应的研究人员现在将同样的研究手段放到了另一种“有机体”——城市上面。社交网络、交通规划、管道流控……总有很多自发形成的规则等待人们去探索。

下面几个问题，由于篇幅所限这里就不写出解答了，留待有兴趣的同学们自己思考：

- (1) 假设流速为 v 的河流可以冲走质量为 m 的石头，证明：流速为 $2v$ 的河流可以冲走质量为 $64m$ 的石头。（也就是 m 与 v 的六次方成正比，所以河水流速只要稍微增加则河流的搬运能力就会大幅增强，这个关系在地质学上被称为“艾里定律”。）

(2) 天文学家发现：与太阳大小相近的主序阶段恒星，其质量 M 和光度 L （即发光的功率，常用来衡量恒星的绝对亮度）满足 $L \propto M^4$ 的“质光关系”。请问恒星若质量越大，则它的寿命会越长还是越短？（再继续想一想：什么样的恒星才可能在它的行星系里孕育出智慧生命？）

(3) 鸵鸟是当今世界上体型最大的鸟，有人说鸵鸟不会飞是因为它的翅膀退化了，那我们假如能给鸵鸟一双与它的身体大小成比例的翅膀，它是否就能飞起来呢？

(4) 如果一座城市人口增多，它就会向外扩张更大的面积，也会兴建更多的基础设施（如商场、加油站、公路等），同时由于社会矛盾更容易涌现，治理难度也可能会增加。城市人口、面积和基础设施数量、社会治理难度（要想办法量化这个变量）之间可能存在怎样的标度关系？你如何建立这个模型？在得到结论之后你还可以继续思考：一座城市和普通的生物体有何不同？生物体总有一定的寿命，我们能算出一座城市的“寿命”吗？

Exercise 13.14

一个橡皮球从 6 ft 的高度落下，其每次着地反弹都会损失 10% 的动能。问反弹多少次后，球将不再能上升到 3 ft 以上？

解：

将地面设为势能零点，则落地反弹 n 次后，橡皮球的总能量为

$$E = mgh_{\max} = mgh_i \cdot (1 - 10\%)^n$$

则 n 次落地后所能反弹的高度为

$$h_{\max} = (6 \times 0.9^n) \text{ ft}$$

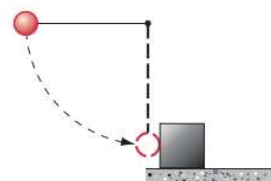
再令 $h_{\max} < 3 \text{ ft}$ ，即

$$n > \log_{0.9} 0.5 = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.9} \approx 6.58$$

得到最小的 n 为 7。

Exercise 13.15

将一个质量为 0.514 kg 的钢球固定在长 68.7 cm 的绳索上，将绳索牵至水平位置时从静止释放，当钢球运动到底部时刚好击中了最初静止在无摩擦的表面的钢块，钢块质量为 2.63 kg。设在碰撞时一半的动能被转化成内能和声能。求出碰撞后钢球和钢块的速度。



解：

钢球从起始点运动到底部的过程，根据能量守恒，易有

$$mgl = \frac{1}{2}mv_0^2$$

解得碰撞前钢球的速度

$$v_0 = 3.67 \text{ m/s}$$

接着便发生碰撞，以水平向右为正方向。设碰撞后钢球和钢块的速度分别为 v_1 和 v_2 ，分别列动量和能量方程（注意钢球在碰撞前的动能只有一半转化为了碰撞后钢球和钢块的动能）

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} mv_0^2 \right) = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} Mv_2^2$$

整理并消去 v_2 得到

$$2(m+M)v_1^2 - 4mv_0v_1 + (2m-M)v_0^2 = 0$$

这是一个关于 v_1 的一元二次方程，根据求根公式可解出 v_1 的两个解

$$v_1 = \frac{2m \pm \sqrt{2(M^2 - mM)}}{2(M+m)} \cdot v_0 = (0.600 \pm 1.95) \text{ m/s}$$

即 $v_1^+ = 2.55 \text{ m/s}$ 、 $v_1^- = -1.35 \text{ m/s}$ 。相应地，根据

$$v_2 = \frac{m}{M}(v_0 - v_1)$$

得到 $v_2^+ = 0.219 \text{ m/s}$ 、 $v_2^- = 0.981 \text{ m/s}$ 。

显然第一个解（取 + 号的解）并不合理（因为这样会导致钢球的速度向右且快于钢块的速度，相当于钢球“穿越”钢块而过），因此应该取第二个解（取 - 号的解）。所以碰撞后钢球的速度为 $v_1 = -1.35 \text{ m/s}$ （负号表示方向向左），钢块的速度为 $v_2 = 0.981 \text{ m/s}$ （向右）。

Exercise 13.19

国家运输安全委员会正在测试一种新车的耐撞性。2340 kg 的车辆以 12.6 km/h 的速度驶入桥台。在碰撞过程中，汽车的质心向前移动 64.0 cm，桥台受压 8.30 cm。忽略汽车与路面之间的摩擦。

- (1) 假设桥台对汽车施加的力是恒定的，求出这个力。
- (2) 汽车的内能增加了多少？

解：

- (1) 桥台对车做功使其动能减小，所以有

$$F\Delta x_{\text{car}} = \frac{1}{2} Mv_{\text{car}}^2$$

其中， $\Delta x_{\text{car}} = 64.0 \text{ cm}$ 、 $M = 2340 \text{ kg}$ ， $v_{\text{car}} = 12.6 \text{ km/h}$ ，分别代入得到这个力为

$$F = 2.24 \times 10^4 \text{ N}$$

- (2) 汽车动能转化为汽车内能以及桥台的内能，所以汽车内能的增加量

$$\Delta E_{\text{int,car}} = F(\Delta x_{\text{car}} - \Delta x_{\text{abutment}}) = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$$

其中 $\Delta x_{\text{abutment}} = 8.30 \text{ cm}$ 。

Problem 13.1

一块重量为 w 的石头以初速度 v_0 竖直向上抛向空中。假定空气阻力为 f ，它在石头移动一段距离 y 时会耗散掉其 fy 的机械能。证明：

(1) 石头所能达到的最大高度为

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

(2) 石头撞击地面时的速度是

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}$$

解：

(1) 假定石头所能达到的最大高度为 h ，石头质量为 w/g ，根据能量守恒，直接有

$$\frac{1}{2} \frac{w}{g} v_0^2 = wh + fh$$

因此解得

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

故题设得证。

(2) 假定石头撞击地面时的速度为 v ，假设石头最开始便是从地面高度抛出的，根据能量守恒，有

$$\frac{1}{2} \frac{w}{g} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{w}{g} v^2 + 2fh$$

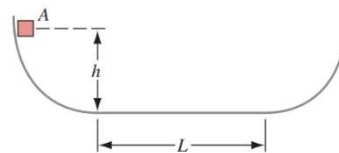
因此解得

$$v = \left(v_0^2 - \frac{4g}{w} fh \right)^{1/2} = v_0 \left(1 - \frac{2f}{w + f} \right)^{1/2} = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}$$

故题设得证。

Problem 13.2

如右图所示，一个质量为 $m = 234 \text{ g}$ 的小物体沿着两端弯曲、中间平坦的轨道滑行。平坦部分长度 $L = 2.16 \text{ m}$ 。轨道的弯曲区域无摩擦，但是物体如果穿过平坦区域，会由于摩擦而损失 688 mJ 的机械能。物体在距离平坦轨道高度为 1.05 m 的点 A 被释放，则它最终将停在何处？



解：

若以平坦高度为势能零点，则物体初始总能量为

$$E_i = mgh = 2.41 \text{ J}$$

物体会在两端弯曲轨道之间来回运动，且每完整经过平坦轨道一次，要损失 $\Delta E = 0.688 \text{ J}$ 的机械能（在弯曲轨道上运行时满足机械能守恒），所以设物体在平坦轨道经过的总路程为 L_s ，

则可以计算出物体总共可以通过平坦轨道的次数

$$\frac{L_s}{L} = \frac{E_i}{\Delta E} = 3.50$$

所以物体最终会停在平坦轨道的中间位置，距离平坦轨道两端的距离均为 $\frac{L}{2} = 1.08 \text{ m}$ 。

Problem 13.5

氢原子中，质子对电子的吸引力有如下形式

$$F = k \frac{e^2}{r^2}$$

其中 e 是电子的电荷量、 k 是常数、 r 是电子和质子之间的距离。假设质子固定不动，电子最初围绕质子在半径为 r_1 的圆轨道上运动，然后突然跳到半径为 r_2 （半径更小）的圆轨道上。

- (1) 用牛顿第二定律计算电子动能的变化；
- (2) 利用力和势能之间的关系，计算原子势能的变化；
- (3) 在该过程中，原子的总能量改变了多少？（这种能量经常以辐射的形式释放出来。）

解：

- (1) 电子作匀速圆周运动，设半径为 r ，根据牛顿第二定律有

$$F = k \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

所以电子在半径为 r 的圆轨道上的动能表示为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{ke^2}{r}$$

电子从半径为 r_1 的圆轨道上跳到半径为 r_2 的圆轨道，动能变化为

$$\Delta E_k = \frac{ke^2}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

- (2) 方法一（通过吸引力做功求势能变化量）：势能变化量为

$$\Delta E_p = - \int_{r_1}^{r_2} F dr = - ke^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

方法二（通过电势能的表达式）：由于质子和电子之间的吸引力（库仑力）和万有引力具有相似的形式，容易猜测出电势能的表达式为（以无穷远处为势能零点）

$$E_p = -k \frac{e^2}{r}$$

所以电子从半径为 r_1 的圆轨道上跳到半径为 r_2 的圆轨道，势能变化为

$$\Delta E_p = - ke^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

- (3) 所以总能量的变化为

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = - \frac{ke^2}{2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

附 3：自然界中的对称性与守恒律

1. 对称性

“对称”的概念大概从人类文明的源头开始就存在于人们的意识之中了。大自然钟爱对称，从放射状的海星到结构精细的蜂巢，从六角形的雪花到两两配对的 DNA 碱基，种种对称的事物和现象在自然界中普遍存在。而在人类创造的建筑、艺术等文明成果中亦能发现丰富的对称性。其实，自然界对称性的根本还体现在大量的物理量、物理规律是对称的，自然界的简洁与和谐蕴含在对称之中。

怎么从科学上定义“对称”呢？我们可以将“对称”理解为“经过某种变换后不可区分”，这就意味着变换前和变换后的两种情况（或者说进行某种操作之前或之后）在数学上是等价的。例如，一幅左右对称的照片，显然我们如果将它沿着轴线作一个左右的“镜像翻转”，则翻转前和翻转后的照片是一模一样、不可区分的，这种对称性叫做“镜面反演对称性”。一个一般的等边三角形显然不具备任何对称性，但是若是一个等腰三角形则沿其对称轴具备了“镜面反演对称性”，若是一个等边三角形，则其绕中心点旋转 120° 、 240° 、 360° 后也都无法与原图形区分开来，我们就说它具有了更强的对称性。那由此，正方形的对称性又强于正三角形、正六边形的对称性又强于正方形……最终我们发现圆形具有最强对称性的平面图形，它除了满足沿其任意对称轴的“镜面反演对称性”，还满足完全的绕其中点的“空间转动对称性”，无论旋转多少度都没办法与原来的图形区分开来。

时空变换（即对空间或时间的变换）是最常见的变换或者操作，每一种变换就对应了一种可能的对称性。常见的空间变换有：空间平移（ $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ ）、空间旋转（ $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$ ）、镜面反演（ $x \rightarrow -x$ 或 $y \rightarrow -y$ 或 $z \rightarrow -z$ ）、空间反演（ $x \rightarrow -x$ 且 $y \rightarrow -y$ 且 $z \rightarrow -z$ ，即 $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ）、标度变化（放大或缩小，即 $\mathbf{r} \rightarrow k\mathbf{r}$ ）等；常见的时间变换有：时间平移（ $t \rightarrow t + t_0$ ）、时间反演（ $t \rightarrow -t$ ）等。注意我们还想不到办法对时间进行旋转操作。

如果物理规律在经过某种变换后保持不变，则称物理规律具有关于这种变换的对称性。例如牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ，如进行时间反演（ $t \rightarrow -t$ ）变换，则因为 $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ 故有 $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ，又因为 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ 故有 $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}$ ，力 \mathbf{F} 又被 $m\mathbf{a}$ 定义故有 $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ ，故整个定律依然不变（ $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ），则称牛顿第二定律具有时间反演对称性。当然，这并不代表任何符合牛顿第二定律的具体过程都具有时间反演对称性——我们没法真的让“时间倒流”，但可以用拍摄录像然后倒放的方式来模拟时间反演。假设我们令一个重物在不受空气阻力的情况下自由落体，则这段过程倒放后将是一个重物从地面向上竖直上抛，但观众并不会觉得这两个过程中哪个有异样，也区分不出哪个是倒放而成的结果，这是因为此时唯一的力重力也满足时间反演对称性（ $m\mathbf{g} \rightarrow m\mathbf{g}$ ）。但是如果物体受到了与速度成正比的空气阻力，观众就能立刻发现倒放的录像不真实、不合常理，这是因为空气阻力并不能在时间反演下保持不变（ $\mathbf{f} = -k\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{f} = k\mathbf{v}$ ）。

（思考：构成世界万物的微观粒子，其服从的物理规律，如牛顿运动定律、麦克斯韦电磁场方程、量子力学的规律等，几乎都是满足时间反演不变性的。然而在生活中我们却发现很多宏观的现象是“不可逆”的——扩散的墨水不会再次聚集、破镜难以自动重圆、覆水难收、年华易逝，看似两者之间是严重矛盾的。这背后有什么原因呢？）

2. 守恒律:

寻找“守恒量”或者说“不变量”在科学研究中常常起到关键作用,种种简洁而优美的守恒律支配着我们的宇宙。在我们以前学习动量守恒定律、角动量守恒定律和机械能守恒定律的时候,推导过程中或多或少应用到了牛顿运动定律。但是我们却要说,这些守恒定律具有更广泛的适用性,即使是在高速或微观世界里牛顿运动定律已经不再适用,这些守恒定律依然成立。究其原因,是因为守恒定律是由我们的宇宙中更普遍、更深刻的机制保证着的,这种机制就是我们宇宙中的时空变换对称性。

具体来说:

- (1) 能量守恒定律对应着时间平移对称性(时间均匀性),即物理规律不随时间改变;
- (2) 动量守恒定律对应着空间平移对称性(空间均匀性),即物理规律不随空间位置改变;
- (3) 角动量守恒定律对应着空间转动对称性(空间各向同性),即物理规律不随空间的角度取向改变。

我们简单举一个违反时间平移不变性导致违反能量守恒定律的例子:假设重力加速度 g (它反映的是引力常量 G)随着时间改变^[4],例如白天 g 较小而晚上 g 较大,那么只要白天将水库里的水抽到高处(耗费较少的能量),晚上再放水发电(得到较多的能量),就相当于凭空获得了多余的能量——这便是“永动机”,它的存在违反了能量守恒定律。

德国数学家埃米·诺特提出了“诺特定理”:对于自然界中每一种对称性,都存在与之对应的一条守恒律。除了之前所说的能量、动量、角动量三条守恒定律外,还有镜面反演对称性对应着空间的宇称守恒、正反物质转换的对称性对应着电荷守恒,等等。自然界中的对称性(守恒律)是凌驾于牛顿定律、麦克斯韦方程等一系列具体物理规律之上,统领着整个宇宙的更普适规律,对称性和守恒律的存在是宇宙性质的体现,对称性和守恒律的破缺^[5]则暗示着我们这个宇宙新问题、新规律的存在。

附 4: 拉格朗日力学简介

【说明:该部分内容作为分析力学的基础知识,在《普通物理学》课程中不作考试要求。但该部分知识不但可以简化对很多问题的分析,而且在后续一些专业课程和问题中有极其广泛的应用,因此给予介绍,供感兴趣且学有余力的同学自行阅读学习,也可以提出疑问。】

“拉格朗日展现出一个以一个惊世骇俗的公式描述了系统运动万变的结果;拉格朗日方法的美在于它完全容纳了其结果的尊严,以至于他的伟大工作仿佛像一种科学的诗篇。”

——哈密顿

1. 分析力学:

到今天为止,我们所学习的所有力学知识,总的来说都是以“牛顿方式”进行的——借助图

[4] 坦率说,我们不知道物理规律是否会随着时间发生变化,也无法保证如 c 、 G 、 h 等这些基本的物理常量是否会随着宇宙中的时间推移发生改变。至少直到目前为止,我们还没有发现这种变化存在的证据。

[5] 1956年杨振宁和李政道两位物理学家提出的“弱相互作用中宇称不守恒”就是对称性破缺的一个典型例子,也正因为弱相互作用中镜面反演对称性不成立,我们才可以在这个过程中真正将“左”和“右”区分开来。

形、运用形象化的思维，去分析物体的受力和运动情况，再通过牛顿运动定律将物体的受力和运动情况联系起来。由于我们着重分析的是力、动量、速度、加速度、角动量、力矩等矢量，所以我们已经学习过的这套力学也可以被称作“矢量力学”，而牛顿便是矢量力学的创始人。他发现了制约机械运动的基本规律（牛顿运动定律）、发明了运用这种规律的数学方法（微积分），取得了打破“天地界限”的惊人成就，成为了整个物理学的起点。其实，物理学家都有一种最基本的信念：“自然界是和谐、统一的。”牛顿力学则是体现这种信念的第一个成功的范例。

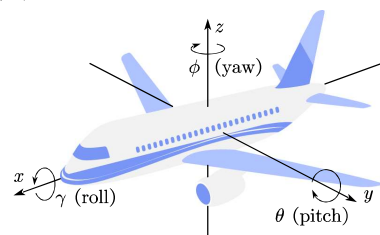
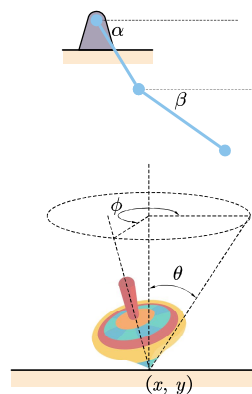
然而，牛顿力学（即矢量力学）在很多情况下往往会遇到困难。例如，实际的力学系统中往往存在复杂的，而约束及约束力一多便会给系统的运动方程带来大量的未知数，给求解带来了极大的麻烦，甚至有的时候根本无法求解。针对矢量力学所遇到的困难，采用数学分析的方法求解力学问题的理论在 18 世纪得到了迅猛的发展，成为了被称为“分析力学”的全新理论体系，是经典力学体系的又一次质的飞跃。经典的分析力学主要有拉格朗日形式和哈密顿形式，也分别被称为“拉格朗日力学”和“哈密顿力学”。和矢量力学形成鲜明对比的是，拉格朗日所著的厚达 500 多页的《分析力学》中没有一幅图，自始至终采用的都是解析方法。

其实分析力学的基本方法已经同大家见过面了——在上一周的作业中我们为大家介绍了虚功原理。只不过虚功原理一般被用于简化对静力学问题的研究，对于更加复杂的动力学问题，我们还需要更强大的武器。这里为大家简单介绍拉格朗日力学的核心方程——拉格朗日方程，并举例说明其一些简单应用。

2. 广义坐标、自由度、位形空间：

对于任何一个力学系统，如果想要描述它的位形，所需要的独立参数（或者说最少参数）的数量就称为它的自由度，而这些独立参数就称为其广义坐标。我们可以举以下例子：

- 上下运动的活塞只有一个自由度：
需要一个广义坐标，可以取活塞的上下位置 x ；
- 右图中由两根铰接轻杆构成的系统有两个自由度：
需要两个广义坐标，可以取图中的两个夹角 α 和 β ；
- 空间中自由运动的质点有三个自由度：
需要三个广义坐标，可以取质点的笛卡尔坐标 (x, y, z) ；
- 在地面上自由摆动的玩具陀螺有四个自由度：
需要四个广义坐标，可以取与地面接触点的坐标 (x, y) ，陀螺的自转轴与竖直方向的夹角 θ 、陀螺的自转角 ϕ ；
- 保持等距离运动的两个质点有五个自由度：
需要五个广义坐标，两个质点原本共有六个空间坐标 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) ，由于保持等距的约束条件可以去掉其中任何一个（可以想象成哑铃形状，或刚性的双原子分子）；
- 空间中自由运动的刚体有六个自由度：
需要六个广义坐标，例如飞机的位形可以由它的质心在空间中的位置 (x_c, y_c, z_c) ，以及描述它空间转动姿态的三个姿态角^[6]——俯仰角、偏航角、横滚角 (θ, ϕ, γ) 来唯一确定。



[6] 这三个姿态角的精确定义其实相当复杂，右图仅作示意，如果有专业和飞行器相关的同学则还将深入学习，在很多科研训练项目（如无人机控制等）中也常会用到。对于一般的刚体，在研究中我们选取另外定义的三个“欧拉角”来描述其空间转动姿态，分别是章动角、进动角和自转角 (θ, ϕ, ψ) 。

简单地说,空间中自由运动的质点有3个自由度,即需要3个广义坐标去唯一决定它的位形;如果是空间中自由运动的 n 个质点构成的质点系,则应该有 $3n$ 个自由度。但是需要注意这些质点往往并不能够完全自由运动,如果存在约束,相当于多了限制运动的方程,如果存在 k 条约束方程,则最终质点系将只有 $3n-k$ 个自由度。进而,如果约束多到这些质点系形成了刚体,即便这个刚体可以在空间中自由运动(含转动),也只剩下6个自由度了,只需要6个广义坐标便可以唯一决定其位形(位置和形状)。这和我们之前得到的结论是一致的。我们发现这些广义坐标既可以选择为线量(如笛卡尔坐标 x 、 y 、 z ,物体沿着固定轨迹所经过的路程 s),也可以选择为角量(如各类夹角 α 、 β 、 θ 、 ϕ 等),而且对同一个系统其选择并不是唯一的,这些广义坐标可以统一用 q 表示。广义坐标对时间的导数(\dot{q})称为广义速度,显然如果有需要也可以定义广义加速度、广义动量、广义力等等概念。

用广义坐标张成的空间被称为位形空间,这是一种抽象的数学空间。设系统自由度为 N ,其中的每一点(q_1, q_2, \dots, q_N)则能够完全描述系统的位形。随着时间推移,如果系统的位形会随着时间的变化,那么它就会在位形空间里画出一条径迹。

3. 拉格朗日量与拉格朗日方程:

一般的教科书上,导出拉格朗日方程的过程都需要使用到变分法。由于同学们普遍还没有学习过变分法,下面尝试用一种简单但不太严格的方法直接从广义坐标导出拉格朗日方程。

假设一个系统中只有保守力作用,对于任意广义坐标 q ,牛顿第二定律为

$$F = -\frac{\partial V}{\partial q} = m\ddot{q}$$

其中 V 为系统势能。而对于恒定质量的系统,其加速度 \ddot{q} 可以表示为

$$m\ddot{q} = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)$$

其中 T 为系统动能。两式联立得

$$-\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)$$

注意在只有保守力作用的系统中,系统的势能 V 一般只依赖于广义坐标而不依赖于广义速度,系统的动能 T 一般只依赖于广义速度而不依赖于广义坐标。因此我们可以有

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}}\right]$$

定义系统的拉格朗日量 $L = T - V$,即拉格朗日量等于系统动能减去势能,显然它具有能量的量纲。于是有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

这就是拉格朗日方程。实际上,对于任何一个广义坐标 q_i ,拉格朗日方程都应成立,即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

上式的适用范围是主动力全部都是保守力的完整系统。如果对应某个广义坐标还存在着非保守的主动力 Q_i 作用(对于线坐标是力、对于角坐标是力偶),则它还会出现在方程的右端,由此我们可以得到更加普适情况下的拉格朗日方程,即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

另外要说明的是, 系统拉格朗日量 L 是广延量, 具有可加性 (即整体的拉格朗日量等于各部分的拉格朗日量之和)。由于系统广义坐标的选取具有不唯一性、势能的零点选取也具有不唯一性, 所以拉格朗日量 L 也具有不唯一性。

自此我们已经彻底甩掉了繁杂的矢量分析, 改用能量的观点去看待力学系统。利用拉格朗日方程去分析复杂的力学系统常常会意想不到地简洁。下面举几个具体例子:

例 1: 试着推导平面极坐标系中的质点运动方程。

解: 这里有两个自由度, 广义坐标取极径 r 和极角 θ , 即 $q_1 = r$ 、 $q_2 = \theta$ 。这两个广义坐标所对应的广义速度 $\dot{q}_1 = \dot{r}$ 、 $\dot{q}_2 = \dot{\theta}$, 对应的广义力是 $Q_1 = F_r$ 、 $Q_2 = \tau = rF_\theta$ 。又因为质点的合速度为 $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$, 故其动能 $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ 。由于这里没有势能可言, 拉格朗日量就等于动能, 即 $L = T - V = T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ 。

代入一般情况 (有非保守外力) 的拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)}{\partial r} \right] &= F_r \quad \Rightarrow \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)}{\partial \theta} \right] &= rF_\theta \quad \Rightarrow \quad m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta \end{aligned}$$

这也就直接得出了平面极坐标系中质点径向和切向加速度的表达式 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 和 $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$, 和我们之前在【Bonus 2.3】中利用矢量方法导出的结果相同, 但由于避免了繁琐的矢量运算和坐标转换, 过程简单得多。如果我们再尝试导出质点在球坐标系中的运动方程, 就会更深刻地体会到拉格朗日方法的简洁之处。

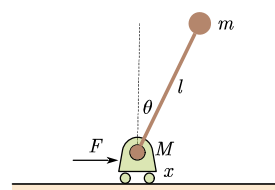
例 2: 倒立摆问题: 小车质量为 M , 在光滑轨道上运行, 其上铰接一长度为 l 的均匀轻杆 (杆质量不计), 末端固定一个质量为 m 的小球。将摆球提到最高位置后从静止释放, 为了保证能维持摆的“倒立状态”, 控制外力 F 发生变化来推动小车。试求系统的运动方程。

解: 这里有两个自由度, 广义坐标取小车的水平位移 x 和摆杆与竖直方向的夹角 θ , 即 $q_1 = x$ 、 $q_2 = \theta$ 。

系统的总动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} (x + l \sin \theta) \right]^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt} (l \cos \theta) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} - l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} m (-l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 - m l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

系统的总势能 $V = mgl \cos \theta$ (以轨道平面为重力势能零点)



则系统的拉格朗日量 $L = T - V = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$ 。

代入拉格朗日方程, 即

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= F \implies (M + m)\ddot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta - ml\ddot{\theta}\cos\theta = F \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \implies ml^2\ddot{\theta} - ml\cos\theta\ddot{x} - mgl\sin\theta = 0\end{aligned}$$

如果想用矢量力学的方法得到这个运动方程, 需要分析小车和摆杆之间的约束力, 受力分析非常麻烦, 而直接用拉格朗日方程则要简单很多。当然最后得到的方程还是很难求解。假设摆动的角度 θ 很小, 我们就可以用它在原点附近的泰勒展开来近似, 再通过拉普拉斯变换可以得出传递函数和状态空间方程, 便可以利用控制科学的方法设计控制器来控制倒立摆的运动, 使之虽然来来回摆动但是始终“不倒”。^[7]

4. 从拉格朗日力学到哈密顿力学:

1833 年, 哈密顿以拉格朗日力学为基础, 创造了另一种全新的分析力学理论, 这一套理论被后人称为哈密顿力学, 是分析力学发展历程上的又一个突破。哈密顿力学以哈密顿量 H 来刻画力学系统, 在由广义坐标 q_i 和对应的广义动量 p_i 共同张成的“相空间”(具有 $2N$ 个维度, 其中 N 为系统自由度数) 里研究力学过程。现在我们把学过的三种力学放在一起比较, 列表如下:

	创立时间	类型	对应的空间	相应的几何	方程类型
牛顿力学	1687 年	矢量力学	欧几里得空间	欧几里得几何	二阶微分方程
拉格朗日力学	1788 年	分析力学	位形空间	黎曼几何	N 个二阶微分方程组
哈密顿力学	1833 年	分析力学	相空间	辛几何	$2N$ 个一阶微分方程组

这三种力学形式本质上是完全等价的, 可以互相推导。但分析力学不但能够简化很多以前难以研究的复杂问题, 而且往往更加接近我们世界运行的本质。哈密顿力学几乎已经完全抛弃了“力”的概念——对, 力学中甚至可以不需要“力”! 能量和动量是我们的宇宙里比“力”更加基本的物理量, 而分析力学中新引入的“作用量”可能比能量和动量还要基本。当我们研究光、电磁场、微观粒子等物理现象时, 整个牛顿力学的基本观念(如时间的绝对性与时空分离的观念、质量和能量分离的观念、运动可以被确定描述的观念等等) 都受到了挑战, 人们不得不承认新的物理事实(如相对论效应、波粒二象性等), 此时牛顿力学已经不再适用, 而分析力学却可以顺利超脱经典概念的束缚, 自然地走向全新的物理理论过渡——分析力学中建立的最小作用量原理为物理学革命提供了启示, 成为建立相对论力学和量子力学最简练而富有概括性的出发点。自 20 世纪 60 年代以来, 分析力学在非线性非完整系统中的研究、非保守系统中奇异吸引子的发现及有关“混沌”现象的研究等等, 正在丰富着分析力学的内容, 且大大拓展着它的应用范围。正因如此, 分析力学被称为“力学中的力学”, 让古老的力学走在当代科学发展的最前沿。

[7] 倒立摆是一个非线性、高阶次、多变量、强耦合、开环不稳定的力学系统, 是控制理论中的经典模型, 研究它产生的方法在各类工程领域(如机器人行走过程中的平衡控制、海上钻井平台的稳定控制、火箭发射中的垂直度控制和卫星飞行中的姿态控制等等)。如果有些同学未来选择机械、电子、控制、自动化等专业, 或者科研项目研究机器人等等, 将不可避免地倒立摆打交道。笔者本人本科时还在工科专业时曾经有一门实验课, 做了一整个学期的实验就是为了控制一个一阶倒立摆。