线性代数Ⅰ（H）2021-12-03 测验题

1、

. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $AX=\beta$ 有解但解不唯一.

(a) 求 a 的值;

(b) 给出 $AX=\beta$ 的一般解.

2

2. 设 $M_{3\times 2}(F)$ 是数域 F 上全体 3×2 矩阵构成的线性空间,

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 $T: M_{3\times 2}(F)\to M_{3\times 2}(F)$ 如下, 对任意的 $A\in M_{3\times 2}(F)$

$$T(A)=PAQ.$$

(a) 证明 T 是线性映射.

(b) 求出 T 的核空间和像空间.

(c) 验证关于 T 的维数公式.

3

. 设 B 是 3×1 矩阵, C 是 1×3 矩阵, 证明: $r(BC)\le 1$; 反之, 若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵, 证明: 存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C, 使得 $A=BC$.

4

设 $B=[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n]$ 是实数域$\mathbb{R}$上线性空间 V 的一组基，$T\in L(V)$,

$T(\beta_1)=\beta_2$，$T(\beta_2)=\beta_3$，…， $T(\beta_{n-1})=\beta_n$，$T(\beta_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i\beta_i$，（$a_i\in\mathbb{R}$. ）

求 T 关于基 B 的表示矩阵。在什么条件下T是同构映射？

5

设A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，求A^* 的秩.

6

判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单的证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(a) 给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w, 总存在线性映射 $T: V\to W$ 使 $T(v)=w$.

(b) 若线性方程组有 m 个方程，n 个变量，且 $m<n$, 则这个方程组一定有非零解.

（c）若方阵$A^3=0$ ，则 $E+A$ 与$E-A$ 都是可逆矩阵.

（d）若方阵$A^2=A$ ，则 $E+A$ 与$E-A$ 都是可逆矩阵.

（其中 E 为单位矩阵）