弹性力学(A)课堂测验 1 解答

2023 年 11 月 09 日

1.<u>解答</u>:

$$\nabla^2\nabla^2 U = 0(|x| < l, |y| < h) \tag{1}$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = 0 & (y = \pm h, |x| < l) \\ \sigma_y = 0 & (y = +h, |x| < l) \\ \sigma_y = -q\cos\alpha x & (y = -h, |x| < l) \end{cases} \tag{2}$$

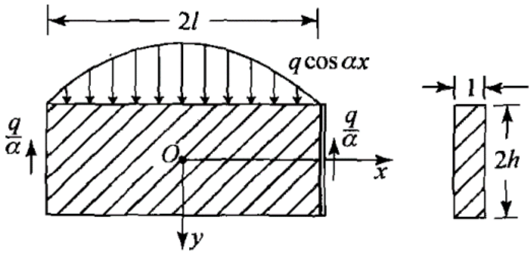

Figure 1 第一题图

$$\begin{cases} \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} dy = -\dfrac{q}{\alpha} \\ \int_{-h}^{+h} \sigma_x dy = 0 \qquad (x = l) \\ \int_{-h}^{+h} y\sigma_x dy = 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中$\alpha = \pi/2l$。假设应力函数为:

$$U = f(y)\cos\alpha x \tag{4}$$

将上述式(4)代入双调和方程(1)中可得:

$$f''''(y) - 2\alpha^2 f''(y) + \alpha^4 f(y) = 0 \tag{5}$$

对上述四阶常微分方程，其一般解为:

$$f(y) = A_1\cosh\alpha y + A_2\sinh\alpha y + A_3\alpha y\sinh\alpha y + A_4\alpha y\cosh\alpha y \tag{6}$$

由式(6)计算应力分量为:

$$\begin{cases} \sigma_x = U_{,yy} = [A_1\cosh\alpha y + A_2\sinh\alpha y + A_3(2\cosh\alpha y + \alpha y\sinh\alpha y) + A_4(2\sinh\alpha y + \alpha y\cosh\alpha y)]\alpha^2\cos\alpha x \\ \sigma_y = U_{,xx} = -[A_1\cosh\alpha y + A_2\sinh\alpha y + A_3\alpha y\sinh\alpha y + A_4\alpha y\cosh\alpha y]\alpha^2\cos\alpha x \\ \tau_{xy} = -U_{,xy} = [A_1\sinh\alpha y + A_2\cosh\alpha y + A_3(\sinh\alpha y + \alpha y\cosh\alpha y) + A_4(\cosh\alpha y + \alpha y\sinh\alpha y)]\alpha^2\sin\alpha x \end{cases}$$

当$y = \pm h$时，切应力$\tau_{xy} = 0$得:

$$\begin{cases} A_1\sinh\alpha h + A_2\cosh\alpha h + A_3(\sinh\alpha h + \alpha h\cosh\alpha h) + A_4(\cosh\alpha h + \alpha h\sinh\alpha h) = 0 \\ -A_1\sinh\alpha h + A_2\cosh\alpha h - A_3(\sinh\alpha h + \alpha h\cosh\alpha h) + A_4(\cosh\alpha h + \alpha h\sinh\alpha h) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

可以解得:

$$\begin{cases} A_3 = -\dfrac{\sinh\alpha h}{\sinh\alpha h + \alpha h\cosh\alpha h} A_1 \\ A_4 = -\dfrac{\cosh\alpha h}{\cosh\alpha h + \alpha h\sinh\alpha h} A_2 \end{cases} \tag{8}$$

进而利用(2)中剩余的 y 方向两个法向应力($y = \pm h$处的两个σ_y条件)，有:

$$\begin{cases} A_1\cosh\alpha h + A_2\sinh\alpha h + A_3\alpha h\sinh\alpha h + A_4\alpha h\cosh\alpha h = 0 \\ A_1\cosh\alpha h - A_2\sinh\alpha h + A_3\alpha h\sinh\alpha h - A_4\alpha h\cosh\alpha h = q/\alpha^2 \end{cases} \tag{9}$$

式(8)与(9)联立可得常数A_i的表达式：

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{q}{\alpha^2}\dfrac{\sinh\alpha h + \alpha h\cosh\alpha h}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} \\ A_2 = -\dfrac{q}{\alpha^2}\dfrac{\cosh\alpha h + \alpha h\sinh\alpha h}{\sinh 2\alpha h - 2\alpha h} \\ A_3 = -\dfrac{q}{\alpha^2}\dfrac{\sinh\alpha h}{\sinh 2\alpha h + 2\alpha h} \\ A_4 = \dfrac{q}{\alpha^2}\dfrac{\cosh\alpha h}{\sinh 2\alpha h - 2\alpha h} \end{cases} \tag{10}$$

最终验证此解同时也满足式(3)的边界条件。

#评分标准：

①正确写出边界条件和调和方程（10 分）
②正确写出一般解的形式（10 分）
③正确写出四个边界条件的代入式，指(7)(9)两式，可变换具体形式（15 分）
④正确解出A_i的表达式（10 分）
⑤验证此解同时满足(3)的边界条件（5 分）

2.解答:

本题目背景较长，实际上已经给出了平面各向异性材料的算子矩阵，对于各向同性材料，只需要将对应的材料常数代入C_{ij}中，并代入方程$|\mathcal{A}|\mathcal{U}=0$，即可得到双调和方程的表达形式。本题目的命题目的是希望同学们了解处理/构造/化简耦合方程的一种方法，通过引入特征函数，并求解特征函数的微分方程。

除此之外，还有几个有趣的问题可以抛给大家思考：
①特征函数$\mathcal{U}$是否唯一？
②根据矢量法则，应该求解的方程是$\mathcal{A}d=|\mathcal{A}|\begin{Bmatrix}\mathcal{U}_1\\\mathcal{U}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$，但是为什么只求一个$\mathcal{U}$即可？
③如何将得到的结果反求出位移场$\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}$？（这个可能比较简单，单纯可以通过$\mathcal{A}$的伴随矩阵$\mathcal{A}^*$进行实现，但是会遇到上述①和②的问题）

#评分标准：

①写出方程$|\mathcal{A}|\mathcal{U}=0$的结果即可（50 分）