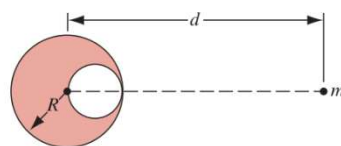


课程作业 (8)

张晗潇、黄家兴 浙江大学物理学系·聚变理论与模拟中心 授课教师：马志为 on 2021.5.11

Problem 14.11

以下问题来自莫斯科国立大学 1946 年的“奥林匹克”考试：在半径为 R 的铅球中制作一个球形的空心，使该空心部分的表面能接触铅球的外表面并穿过铅球的中心。挖空前球体的质量为 M 。有一质量为 m 的小球位于铅球球心和挖去部分球心连线上，距离铅球中心 d 处。根据万有引力定律，空心铅球对一个小球的力为多少？



解：

我们可以将空心铅球视作原来的铅球叠加上一个“负质量”的被挖去部分。易知被挖去部分的质量

$$M_h = \frac{1}{8}M$$

因此，挖前整体对小球的引力为

$$F_1 = \frac{GMm}{d^2}$$

被挖去部分对小球的引力为

$$F_2 = \frac{GmM/8}{(d - R/2)^2}$$

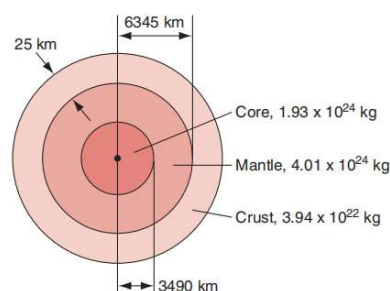
因此，空心球对小球的引力为

$$F = F_1 - F_2 = \frac{GMm}{d^2} \left[1 - \frac{1}{8 \cdot \left(1 - \frac{R}{2d}\right)} \right] = \frac{GMm}{d^2} \left(\frac{14d - 8R}{2d - R} \right)$$

方向向左。

Problem 14.13

右图不按比例地显示了穿过地球内部的横截面。地球并不是完全均匀的，而是分成三个区域：地壳、地幔和地核。这些区域的大小及其质量如图所示。地球的总质量为 $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ，半径 6370 km 。忽略旋转，并假设地球是球形的，问：



- (1) 计算地球表面的 g ;
- (2) 假设一深洞被打入壳幔分界面 (莫霍不连续面), 洞底的 g 值是多少?
- (3) 假设地球是均匀球体 (取相同总质量和大小)。深度为 25 km 时的 g 值是多少?

解:

- (1) 根据万有引力定律, 重力加速度为

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

在地表处, 物体受到整个地球的引力作用, 可以将地球等效为位于地心的质点, 因此此处有 $M = M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ 、 $r = R_E = 6370 \text{ km}$, 又因为引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 代入后计算出地表处的重力加速度

$$g_s = 9.83 \text{ m/s}^2$$

(2) 对于万有引力这种平方反比力, 我们可以导出一个重要的结论: 均匀空心球壳对于其内部任何一点的引力均为零。也就是说, 对于均匀球体内部任何一点, 在其“外侧”的各层球壳对它实际上没有引力作用, 它只受到其“内侧”各层球壳所提供的引力合力, 也就是受到其“内侧”部分的小球体的引力。

位于壳幔分界面 (莫霍不连续面) 上的点, 只受到地幔和地核的引力作用, 此时总质量

$$M = M_{\text{Core}} + M_{\text{Mantle}} = 5.94 \times 10^{24} \text{ kg}$$

到地心 (等效点) 的距离

$$r = r_{\text{Moho}} = 6370 \text{ km} - 25 \text{ km} = 6345 \text{ km}$$

代入得到此时的重力加速度

$$g_M = 9.84 \text{ m/s}^2$$

- (3) 将地球看作均匀球体, 则地球平均密度为

$$\rho = \frac{M_E}{3\pi R_E^3/4}$$

在距离球心 r 处, 物体相当于只受到半径为 r 的球体引力作用, 因此

$$M = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

因此此时的重力加速度表示为

$$g = \frac{G\rho \cdot 3\pi r^3/4}{r^2} = \frac{GM_E r}{R_E^3}$$

代入 $r = 6345 \text{ km}$, 得到

$$g = 9.79 \text{ m/s}^2$$

Problem 14.14

使用上题图所示的地球模型来检验地球内部的 g 随深度的变化:

- (1) 求在核幔分界面处的 g 。从这个界面到地球中心, g 如何变化?

- (2) 证明: g 在地幔中有一个局部最小值, 找到达到极小值的位置, 并计算这个 g 值。
 (3) 画一张草图, 显示地球内部 g 的变化。

解:

- (1) 如果假设地核均匀, 则在地核中距离地心 r 处的 g 为

$$g = \frac{GM_r}{R_{\text{Core}}^3}$$

对于核幔分界面(古登堡不连续面)处, $r = R_{\text{Core}} = 3490 \text{ km}$ 、 $M = M_{\text{Core}} = 1.93 \times 10^{24} \text{ kg}$, 代入计算得 $g = 10.6 \text{ m/s}^2$ 。

从核幔分界面一直到地心, 由于 $g \propto r$, 故 g 随着 r 线性减小, 直到地心处 $g = 0$ 。

- (2) 在地幔中, 距离地球中心 r 处的 g 为

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

其中 $M = M_{\text{Core}} + \frac{r^3 - R_{\text{Core}}^3}{R_{\text{Mantle}}^3 - R_{\text{Core}}^3} M_{\text{Mantle}}$

根据题意有地核总质量 $M_{\text{Core}} = 1.93 \times 10^{24} \text{ kg}$ 、地幔总质量 $M_{\text{Mantle}} = 4.01 \times 10^{24} \text{ kg}$, 地核和地幔外界面到地心的距离分别为 $R_{\text{Core}} = 3490 \text{ km}$ 、 $R_{\text{Mantle}} = 6345 \text{ km}$, 整理后有

$$g = \frac{A}{r^2} + B \cdot r$$

其中的系数

$$A = G \left(M_{\text{Core}} - \frac{R_{\text{Core}}^3}{R_{\text{Mantle}}^3 - R_{\text{Core}}^3} M_{\text{Mantle}} \right) = 7.55 \times 10^{13} \text{ m}^4/\text{s}^2$$

$$B = \frac{GM_{\text{Mantle}}}{R_{\text{Mantle}}^3 - R_{\text{Core}}^3} = 1.26 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$$

求极值, 使

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2A}{r^3} + B = 0$$

得到在 $r = r_0 = 4.93 \times 10^6 \text{ m} = 4930 \text{ km}$ 处重力加速度 g 取到最小值, 此时

$$g = g_{\min} = 9.29 \text{ m/s}^2$$

- (3) 前面已经得到了在地核和地幔中的 g 分布, 同理可以得到在地壳中的 g 分布

$$g = \frac{C}{r^2} + D \cdot r$$

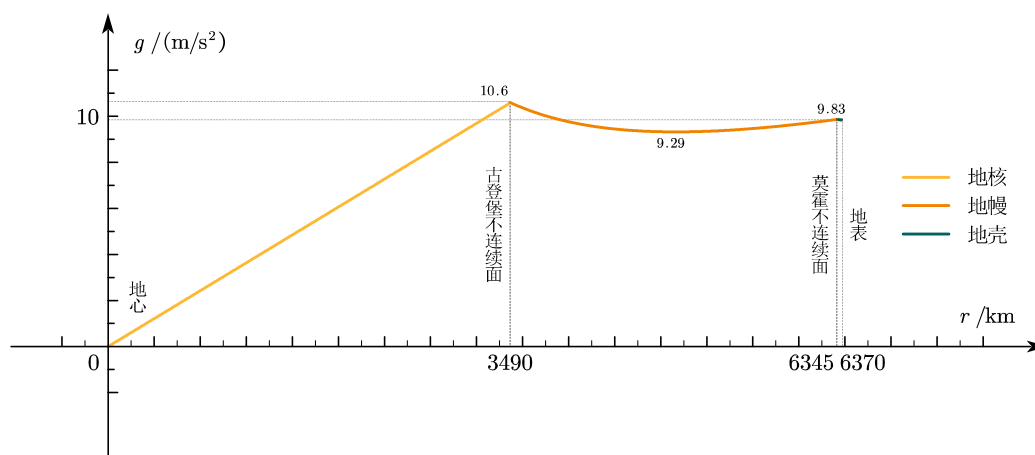
其中 $C = 1.75 \times 10^{14} \text{ m}^4/\text{s}^2$ 、 $D = 8.67 \times 10^{-7} \text{ m/s}^2$ 。故地球内部 g 随着到地心距离 r 的变化是一个分段函数, 其作图如下页图所示。

注: 本周推荐阅读: 刘慈欣的两篇短篇科幻小说《带上她的眼睛》^[1]《地球大炮》^[2], 在欣赏故事之余可以顺便琢磨一下其中涉及到的物理模型, 以及能否改善、如何改善其中可能的不准确之处。

[1] 本篇原载于《科幻世界》杂志 1999 年第 10 期, 其删减版于 2016 年被选入部编版初中语文课本。

[2] 本篇原载于《科幻世界》杂志 2003 年第 9 期。

以上两篇小说均可至助教处索要完整的 txt 版本。



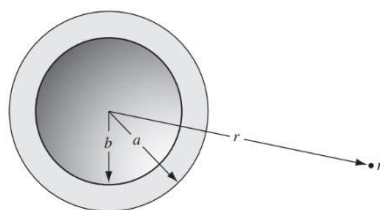
Problem 14.18

一个质量为 M 、半径为 a 的均匀物质球有一个半径为 b 的同心空腔，如图所示：

(1) 画出空心球对质量为 m ，离球体中心的距离为 r 的质点所施加的引力 F 随 r 变化的函数；

(2) 画出系统相应的势能曲线 $U(r)$ ；

(3) 利用这些图，如何得到重力场强度的图线？



解：

(1) 当 $0 \leq r < b$ 即质点处于空腔内时，所受引力为零，即

$$F = 0$$

当 $b \leq r < a$ 即质点位于存在物质的部分时，质点所受引力为

$$F = \frac{GM'm}{r^2}$$

其中

$$M' = \frac{r^3 - b^3}{a^3 - b^3} M$$

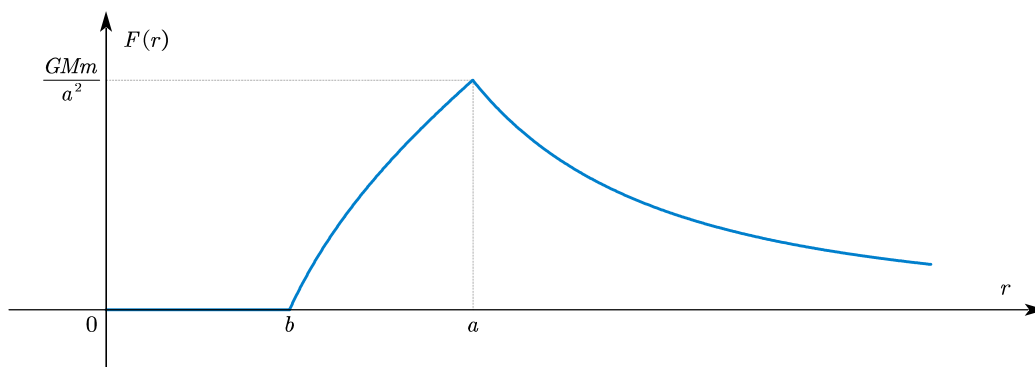
当 $a \leq r < \infty$ 即质点在球外时，质点所受引力为

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

综上所述有

$$F(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq r < b) \\ \frac{GMm}{r^2} \frac{r^3 - b^3}{a^3 - b^3} & (b \leq r < a) \\ \frac{GMm}{r^2} & (a \leq r < \infty) \end{cases}$$

作图如下：



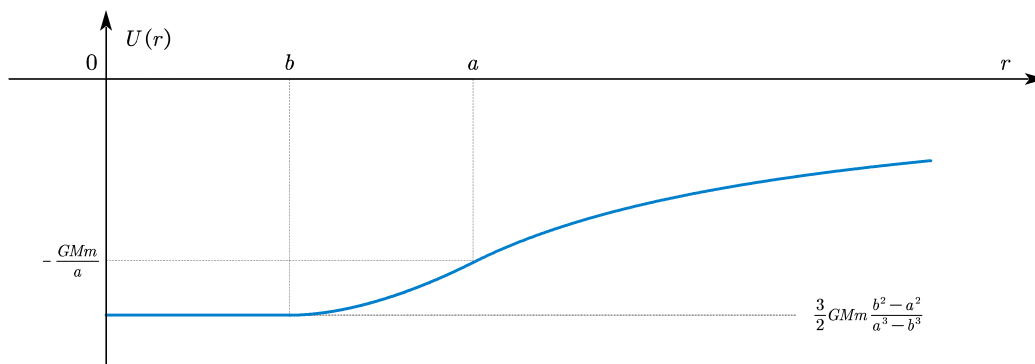
(2) 设无穷远点为势能零点，则根据

$$U(r) = \int_{\infty}^r F dr$$

并利用上一问结果，得到

$$U(r) = \begin{cases} \frac{GMm}{a^3 - b^3} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{3a^2}{2} \right) & (0 \leq r < b) \\ \frac{GMm}{a^3 - b^3} \left(\frac{b^3}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{3a^2}{2} \right) & (b \leq r < a) \\ -\frac{GMm}{r} & (a \leq r < \infty) \end{cases}$$

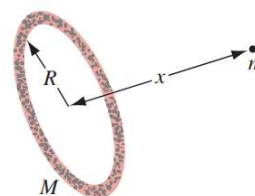
画出势能曲线如下，易见满足 $F = -\nabla U$ 的关系，对一维即为 $F = -\frac{\partial U}{\partial r}$ 。



(3) 将引力曲线 $F(r)$ 的纵坐标方向除以 m 即为重力场强度曲线 $g(r)$ ，绘图从略。

Problem 14.22

一些行星（如木星、土星、天王星和海王星等气态巨行星）带有近乎圆形的行星环，这些环可能是由不足以形成卫星的物质组成的。此外，许多星系都有环状结构。考虑一个质量为 M ，半径为 R 的均匀环：



(1) 求一个环对一个质量为 m 的粒子施加的引力的表达式，这个质量为 m 的粒子处在环的轴线上且与环中心的距离为 x ；

(2) 假设粒子在环的吸引下从静止状态释放, 求它通过圆环中心时的速度。

解:

(1) 由对称性可知环对粒子的力在轴线方向, 因此我们不妨只考虑沿这个方向的分量。

取圆环中一小段长度 dl 的微元, 则微元对粒子的引力在轴线方向上的分量为

$$dF_x = \frac{G\lambda dl}{x^2 + R^2} m \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

其中线密度 $\lambda = \frac{M}{l} = \frac{M}{2\pi R}$, 对整个环积分得到

$$F = \int_0^{2\pi R} \left(\frac{G\lambda dl}{x^2 + R^2} m \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{G\lambda l m x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{GMmx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(2) 由能量守恒, 设粒子通过圆环中心时的速度为 v , 则

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\Delta U$$

$$\text{其中 } -\Delta U = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{GMmx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

解得速度大小为

$$v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)}$$

关于行星环成因的一种解释可参见下文【附 1: 潮汐】。

附 1: 潮汐

“涛之起也, 随月盛衰。”

——(汉)王充《论衡》

“潮之涨退, 海非增减, 盖月之所临, 则水往从之。……此竭彼盈, 往来不绝, 皆系于月。”

——(唐)余道安《海潮图序》

在我们的地球上, 分布着占据大约 71% 面积的广阔海洋, 其中海水的总量高达 1.4×10^{18} 吨。海洋中的海水当然不是“一潭死水”, 而是无时无刻不在进行着极其复杂的运动, 参与着整个地球系统的物质和能量循环。海水的运动形式主要分为三种——波浪、洋流、潮汐。

海面上之所以会产生波浪, 是因为风力或气压作用使得海水离开了原来的平衡位置, 产生了一种周期性的起伏运动并向远方传播而去。而海洋中稳定的、大尺度的洋流, 则是风力效应、热盐效应、地转偏向力等因素综合作用所造就的^[3]。但对于我们只要在海边居住或旅游便随时可见、现象明显的潮涨潮落, 其成因在我们之前的学习中却鲜有提及。所谓“潮汐”, 便是指每天早晚各会发生一次的周期性海水涨落, 早称为“潮”、晚称为“汐”——无怪乎“潮汐”正是“朝夕”二字各添加了一个三点水旁, 换言之潮涨潮落在一天中会发生两次而非一次。很久以前, 中国的

[3] 洋流按成因主要可以分为风海流、密度流、补偿流三类。

先人们就通过观察潮汐落差的周期变化与月相（月盈月缺）间的关系，敏锐意识到“海非增减”，潮汐的真正成因可能和天上的月亮有关，其超越时代的论述蕴含着朴素唯物主义的思想光辉。然而，如果简单将潮汐现象的成因理解为“月球的引力吸引海水”似乎不完全准确——这样看来，由于地球一天只自转一周，地球上的同一个点一天内只会有一次机会靠近月球，则一天内应当涨潮一次而不是两次。要弄清楚这个问题，我们必须深入了解潮汐的成因，而这一点是牛顿以来，包括伯努利、欧拉、马克劳林、拉普拉斯等在内的科学家们所共同揭示的。

1. 潮汐的成因

正如研究每个实际科学问题之前所必须要做的，我们要建立简化的、理想的物理模型。假定地球是光滑且均匀的正球体、海水完全覆盖地球表面、忽略地球自转，则在没有其他天体、只有地球自身的引力作用时，海水应该均匀覆盖地球表面，如右图所示。

我们进行一个不太严格但简单的解释：给我们的地球加上月球。如果考虑月球引力的作用，则地球的各处都会受到月球额外的引力作用，产生额外的加速度。显然它们受到的月球引力都指向月球（右图中深灰色箭头），且地球上各处受到的月球引力大小是不均匀的，越靠近月球的地方受到引力越大，越远离月球的地方受到的引力越小。这种引力的不均匀会导致加速度的不均匀，于是我们考察全球海水相对于地心的相对加速度，发现地球上朝向月球的地方海水受到的月球引力更强，故相对加速度方向背离地面，造成海面的隆起，会发生涨潮；背离月球的地方海水受到的月球引力更弱，但相对加速度也背离地面，也会发生海面隆起，所以也会发生涨潮；而与之垂直的地方海水的相对加速度却朝向地面，海面下降，故造成落潮，海水流向涨潮的区域作为补充。这样海水就并不是均匀覆盖地球表面，而是沿地月连线的两端凸起，形成一个椭球形或者说纺锤形。由于地球在自转，海面上每一处每天都各有一次朝向月球和背离月球的机会，故涨潮和落潮在一天里会周期性地发生两次。

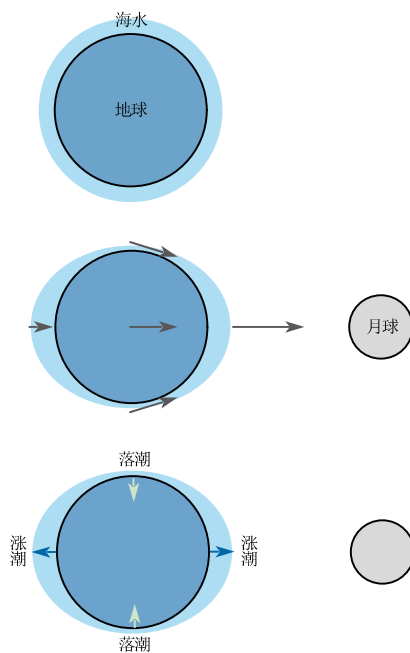
我们还可以粗略计算一下朝向和背离月球的两处海水所受的引潮力（即此处单位质量海水所受月球引力和地心处单位质量所受月球引力的矢量差）。以朝向月球方向为正方向，设海水微元质量为 m 、月球质量为 M 、地月距离（取质心距离）为 l 、地球半径为 R_E ，则朝向月球处海水受到的引潮力

$$F_1 = \frac{GMm}{(l - R_E)^2} - \frac{GMm}{l^2} \approx GMm \frac{2lR_E}{l^2(l - R_E)^2} \approx \frac{2GMmR_E}{l^3}$$

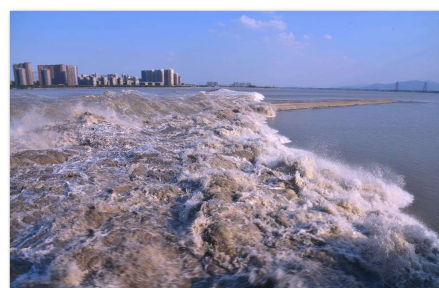
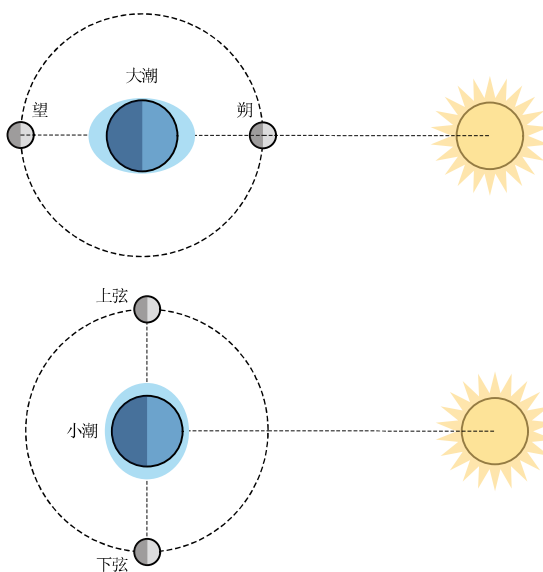
为正，即朝向月球，海面上升。而背离月球处海水受到的引潮力

$$F_2 = \frac{GMm}{(l + R_E)^2} - \frac{GMm}{l^2} \approx GMm \frac{-2lR_E}{l^2(l + R_E)^2} \approx -\frac{2GMmR_E}{l^3}$$

为负，即背离月球，海面也上升。以上的计算中已利用近似 $R_E \ll l$ 。所以我们发现：引潮力的大小与引力来源天体（这里是月球）的质量 M 成正比，与地球到引力来源天体的距离 l 的三次方成反比。这和引力大小只与距离 l 的二次方成反比并不相同。



除了月球外,太阳的引力当然也可以对地球上的海水产生引潮力。太阳的质量约为月球的 2.7×10^7 倍、到地球的距离约为月球的390倍,则尽管太阳和月球对地球产生的引力之比高达180:1,看似是太阳的引力占主导;但太阳和月球对地球产生的引潮力之比却只有1:2.2,即潮汐作用中来源于月球的部分(称太阴潮)是来源于太阳的部分(称太阳潮)的两倍多,即太阳潮只起到次要作用。太阳潮和太阴潮是线性叠加的,在朔日和望日(即农历初一左右和十五左右),由于太阳、地球和月球几乎在同一条直线上,太阳潮和太阴潮相互叠加,成为每月的两次大潮;在上弦月和下弦月的日子(即农历初八左右和廿二左右),由于太阳、地球和月球的方向成一直角,太阳潮和太阴潮相互抵消,成为每月的两次小潮。我们早就知道,除了海水有潮汐,江水也会随着潮汐涨落,而浙江省的钱塘江潮便是一大天下奇观。钱塘江潮之所以壮观,便是由于淤浦以上河段存在的巨大的沙坎导致河床迅速抬高,加之喇叭形的河口扩大了潮水的能量,前浪受阻、后浪堆叠,气势汹涌。当潮头靠近岸堤时,随着水深的变浅,下层水所受阻力越来越大,以至于它的速度明显慢于上层水,受惯性作用潮头最高处向前倾倒并摔到岸堤上,成为飞溅的浪花。每年观潮的最佳时机往往是在中秋节前后——所谓“浙江^[4]之潮,天下之伟观也,自既望以至十八日为最盛”(周密《观潮》),正是望日前后恰逢大潮的缘故。^[5]



▲ 钱塘江大潮

2. 潮汐锁定现象

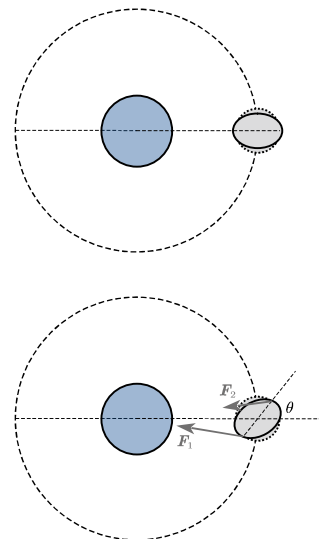
或许你曾注意到过——月球总是以同一面对地球的。换言之,我们站在地球上永远只能看见月球的一面,而在月球上的人也只能是在月球的同一个半球里才能在天空中看到地球(正因此我们才会有“月球正面”和“月球背面”的概念,而人类在过去对月球背面的情况知之甚少;也正因此嫦娥四号登陆月球背面时难以与地球直接通讯,需要提前发射“鹊桥号”中继卫星)。我们不难由此得知——月球的自转周期和它绕地球公转的周期应当是近似相等的。但为什么会这样呢?是一直以来就这样吗?其实这也和潮汐现象有密切的关系。

会受到天体引潮力作用的不仅仅是海水,气体或固体同样也会发生潮汐现象。对于相隔非常近的大天体和小天体(如地球和月球)而言,它们互相之间的引潮力将非常明显。例如,地球的引潮力会使得月球的形状发生改变——沿地月连线方向两端凸起,而显然凸起的部分将受到额外的引力。如下页图所示(图示有夸张),一旦月球相对地球的朝向发生变化(例如相对逆时针

[4] 此处“浙江”即为钱塘江之古称,又称“之江”、“折江”等。一条江的名字最终成为了一个省的名字。

[5] 笔者在太一初来杭州上学时的第一个中秋节假期就动过观钱塘潮的想法,然而拖延至今也未能如愿,希望同学们有机会都能去看一次。观潮的最佳地点之一是在海宁的盐官。

自转一个 θ 角度), 则其突出部分会受到地球的额外引力 F_1 和 F_2 , 显然有 $F_1 > F_2$, 故这个额外引力产生的合力矩应是顺时针方向的, 会抵消刚才的逆时针自转, 将相对自转“拉慢一些”。经过这种长年累月的相互作用, 最终达成“潮汐锁定”——月球的自转周期和公转周期相等, 从而月球与地球之间的朝向不再变化。当然, 来自小天体的引潮力也会对大天体的自转产生影响, 月球的引潮力也对地球的自转起着“刹车”作用, 使得地球自转不断变慢——地质学和古生物学证据可以证明在三亿多年前的泥盆纪地球自转比现在更快, 一年有超过四百天。可以预想到, 再经过更加漫长的岁月, 地球也终将被月球“锁定”, 就像现在的冥王星和它的卫星卡戎这一对互相潮汐锁定的“双星”一样, 从此地球也将永远以同一面朝向月球。住在“地球背面”的人们, 只有辗转万里来到地球的另一面, 才可能有机会欣赏到月光了。



(思考: 地球可能被太阳潮汐锁定吗? 如果一颗被它的恒星潮汐锁定的行星上有生物, 它们可能是怎样生存的? 地月系统应该满足角动量守恒, 由于潮汐锁定导致地球的自转减慢, 角动量都跑到哪儿去了? 由此你能提出什么关于月球运动的新猜想?)

3. 洛希极限和行星环的形成

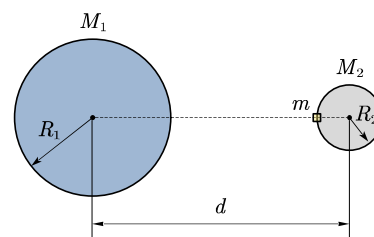
电影《流浪地球》中提及了一个有趣的科学名词——“洛希极限”。地球为了借助木星的“引力弹弓”效应加速来逃离太阳系而接近木星, 由于未事先计算(或未预料到)地球的引力对木星质量分布的改变带来的引潮力变化导致地球不慎向木星下坠, 地球的大气层被木星的强大引力抽去。更可怕的是, 如果地球继续接近木星, 以至于达到了木星的洛希极限以内, 则地球将被木星彻底撕碎, 后面人类的所有努力都是为了将地球推离木星^[6]。为什么靠近大天体的小天体会被撕成碎片呢? 这是引力和引潮力相争的结果。当小天体非常靠近大天体时, 大天体对小天体各部分的引力差值(或者说引潮力)就会异常显著。如果小天体自身的引力无法抵御来自大天体的这种强大引潮力(至于天体内物质的化学结合力相比于引力而言往往是很小的), 小天体便会无法维持自身形状而倾向碎散。我们把上面两个力刚好平衡时两个天体的距离称为洛希极限, 这是由最早计算出该极限的科学家洛希命名的。

我们不妨做一个简单的计算: 假设两个天体都是完全刚体的、圆球形的, 忽略化学结合力、自转和潮汐变形等其他因素。设大天体质量为 M_1 、半径为 R_1 , 小天体质量为 M_2 、半径为 R_2 , 它们之间的距离为 d (显然 $d \gg R_2$), 小天体表面有小质量 m 的物质。当它所受到来自小天体自身的引力和来自大天体的引潮力平衡时, 即

$$\frac{GM_2 m}{R_2^2} = \frac{2GM_1 m R_2}{d^3}$$

即有

$$d = \sqrt[3]{\frac{2M_1 R_2^3}{M_2}}$$



[6] 有点遗憾(但也无伤大雅)的是, 电影中把这个洛希极限算错了……大概是把太阳和木星之间的洛希极限误当成了木星和地球之间的洛希极限。(有兴趣的同学也可以自己算一算。)

《流浪地球》原著小说原载于《科幻世界》杂志 2000 年第 7 期, 其内容、基调等与电影有较大差异。

这个值便是两个天体之间的洛希极限。当然我们也可以用两天体的密度 ρ_1 和 ρ_2 表示，得到

$$d = R_1 \sqrt[3]{2 \frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

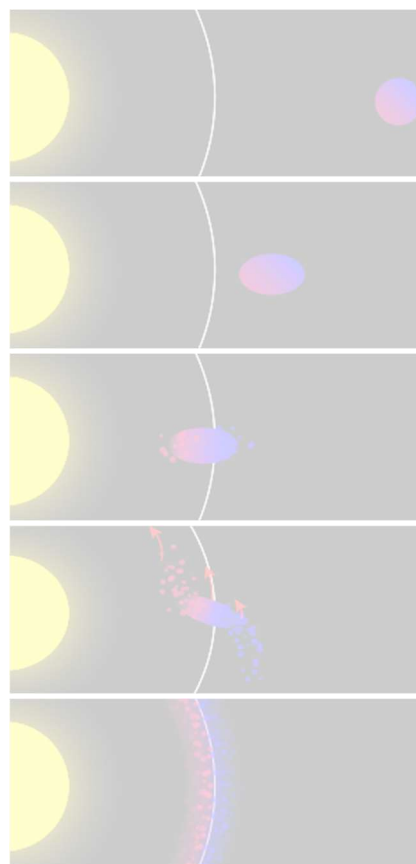
以上计算是基于小天体是完全的刚体，所以这个值也被称为“刚体洛希极限”。相反，如果小天体是完全的流体，则有“流体洛希极限”。洛希自己给出的公式是

$$d \approx 2.44 R_1 \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

这个值比刚体洛希极限要大，显然是因为流体更容易被拉扯、变形、撕裂。而实际的天体往往既不是完全的刚体也不是完全的流体，由于黏度、摩擦力、化学键等等的影响，其真正的洛希极限值往往在以上两者之间。

如果代入地球和月球的数据，我们会发现地月之间的洛希极限值大约为 1.7 个地球半径。这就意味着即使有某种强大的外力将月球推向地球，我们也不会担心月球坠落到地球上，因为它早在落地之间就已经进入地球的洛希极限，会被地球的引潮力撕裂。1994 年的休梅克-利维 9 号彗星就是在接近木星的过程中被木星撕碎成 21 个小碎块，最终与木星相撞。太阳系中很多巨行星有壮观而美丽的环结构（例如土星环），这或许就是原本土星的某颗卫星渐渐由于能量衰减而轨道下降，最终落入洛希极限的范围内而被土星的巨大引潮力撕碎而形成的。相反，假如我们计算发现洛希极限小于大天体的半径，则意味着洛希极限会落在大天体的内部，则接近它的小天体永远不会被引潮力撕碎故有可能直接撞击在大天体上，6500 万年前可能正是这样一颗撞击地球的彗星导致了包括恐龙在内的生物大灭绝事件。

地球和月球围绕着共同的质心相互绕转，却只能彼此遥遥守望。月球一旦过于接近，越过了“安全距离”，便会不可避免地对方撕得粉碎。而已经粉碎崩塌的月球最后的结局是什么呢？或许也会渐渐聚拢在地球周围，化作一道“地环”，将地球永远拥抱。



▲ 小天体靠近大天体洛希极限的过程
(变形、撕裂、形成行星环)

附 2：弹性体力学基础

【说明：该部分内容作为连续体力学的基础知识，除课堂上已经讲授的基础部分外，其他在《普通物理学》课程中不作考试要求，但为保证知识体系的完整性依然列入介绍，供同学们阅读参考。未来学习力学、机械、土木、建筑、材料、机器人、海洋工程、航空航天等专业的同学，会在《材料力学》《结构力学》《弹性力学》等专业课程中对该部分内容进行更深入的学习。】

1. 为什么我们需要弹性体力学?

到现在为止, 我们学习的所有力学知识, 研究对象主要只有两种理想模型——质点和刚体。质点是忽略物体的大小和形状, 只将物体简化成一个有质量的点; 刚体是考虑到物体的大小与形状, 但假设物体绝对不会发生形变, 同时也不考虑其中各部分的相互作用力, 将物体作为一个整体来研究。然而, 自然界中根本不存在真正的刚体——力是导致物体形变的原因, 物体受力时必然会发生形变, 其内部各质点之间也会产生相对运动和相互作用力, 研究这一现象的力学被称为连续介质力学。一般来说, 自然界中的真实物体可以分为固体、液体、气体^[7]三种物态, 固体往往是弹性体, 液体和气体则被合称为流体, 研究它们的力学则分别被称为弹性体力学和流体力学。正因此, 弹性体力学的知识不但能用于解释固体的各种现象, 还是同学们从简单的质点力学、刚体力学过渡到即将要学习的流体力学的必要铺垫, 起到承上启下的作用。

在我们生活中所见到的任何机械、建筑等工程结构, 一般由固体制成。固体往往有抵抗形变和破坏的能力, 但这种能力又是有限度的。为了保证安全和正常工作, 我们往往希望构件能有足够的能力负担起应该承受的载荷, 即要求其具有不被破坏的能力 (一定的强度)、不发生过大变形的能力 (一定的刚度)、足够的保持原有平衡形态的能力 (一定的稳定性), 这也就要求我们选择合适的形状、合适的尺寸、合适的材料等, 对这些问题的计算和分析就是包括材料力学、结构力学等学科在内的弹性体力学的任务。如果设计出来的结构其强度和刚度不够, 那么曲轴可能被折断、齿轮可能损坏变形、杆件可能被压弯, 甚至储气罐可能爆炸、桥梁可能摇摆、楼房可能坍塌……其后果不堪设想。但如果一味只知加固加粗、选择更结实的材料, 又会面临重量的增大、成本的增加等等问题。所以, 为了兼顾经济和安全, 必须使用弹性体力学的知识进行定量计算, 用理论正确地指导实践。

2. 应力和应变

我们假设接下来研究的可变形固体都是连续、均匀、各向同性的。至于各向异性的物质 (例如一些晶体) 会有非常多奇妙的性质, 留待后续课程或相关领域继续深入研究。

弹性体在力的作用下, 其中会产生相应的形变 (应变) 和弹性恢复力 (应力)。其中应力指的是物体中各部分相互作用的内力。假定固体中有一假想的小面元 dS 将物质分成了两部分, 则彼此之间有内力作用, 设作用在这个小面元上的内力为 dF , 则该截面上的应力 p 定义为

$$p = \frac{dF}{dS}$$

p 反映的是内力在这个微小截面处的集中度, 它的国际制单位是帕斯卡 (Pa)。它是个矢量, 一般可分解为垂直于斜面的分量 σ (称为正应力, 或压力、张力等) 和平行于斜面的分量 τ (称为切应力或剪应力, 注意不要和力矩的符号混淆), 有时也直接用 σ 代表应力的合矢量。

在应力作用下固体会发生变形, 变形主要有两种基本形式——一种是线段长度的伸长或缩短, 另一种是原本正交的线段夹角的变化。为了度量前一种, 假设固体中某条沿着坐标轴方向的很短的线段原本的长度为 x_0 、变形后的长度为 $x_0 + \Delta x$, 则我们定义 “单位长度线段的变形” 为

$$\varepsilon = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

[7] 暂时不考虑等离子体之类新物态, 不过其实等离子体也可以认为是一种流体——有兴趣的同学可以查阅关于 “磁流体力学” 的资料, 你或许就会随之摸到可控核聚变事业的门槛。

当 $x_0 \rightarrow 0$ 时, 相当于取某点处的极限, 此时的 ε 称为某点处的正应变。为了度量后一种, 假设固体中某两条分别沿着正交坐标轴的很短的线段原本夹角为 $\pi/2$ 、变形后的夹角为 $\pi/2 + \Delta\theta$, 则我们定义“剪切变形的角度”为

$$\gamma = (\pi/2 + \Delta\theta) - \pi/2 = \Delta\theta$$

同样取某点处的极限, 此时的 γ 称为某点处的切应变。正应变和切应变都是量纲为一的纯数。

简单地说——正应变衡量的是微元的拉伸和压缩, 切应变衡量的是微元的剪切和扭转。利用应力和应变, 可以算出固体的具体变形值。(本文只研究小变形的情况。)

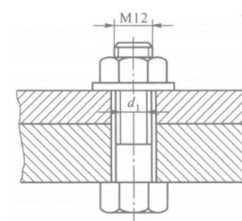
3. 直杆的拉伸和压缩

首先我们考察最简单的变形情形。一根直杆 (以圆柱形为例), 原长为 l_0 , 对其一端的表面施加与杆方向平行的拉力或压力 F , 则直杆会被拉伸或压缩, 相应地变长或变短, 长度的变化量设为 Δl , 则杆内的正应变 $\varepsilon = \Delta l / l_0$, 所以则拉伸时 $\varepsilon > 0$, 而压缩时 $\varepsilon < 0$ 。设杆的横截面积为 S , 则杆内某点处受到的正应力大小为 $\sigma = F/S$ 。在弹性限度内, 应力大小应和应变大小成正比, 即

$$\sigma = Y\varepsilon = Y \frac{\Delta l}{l_0}$$

这个关系被称作胡克定律 (仔细想想就会发现它和我们之前学习过的弹簧的胡克定律 $F = kx$ 本质上是相同的), 其中 Y 被称作固体的杨氏模量, 它具有和应力 σ 相同的量纲, 和固体的材料有关。

例 1: 右图中的 M12 螺栓, 内径 $d_1 = 10.1 \text{ mm}$, 将它拧紧后计算长度 $l = 80.0 \text{ mm}$ 内产生的总伸长 $\Delta l = 0.030 \text{ mm}$ 。已知其钢材料的杨氏模量 $Y = 210 \text{ GPa}$, 试计算螺栓内的应力和螺栓的预紧力。

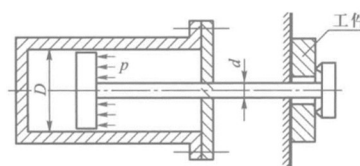


解: 螺栓的平均正应变 $\varepsilon = l_0 / l = 3.8 \times 10^{-4}$

由胡克定律计算螺栓内的拉应力 $\sigma = Y\varepsilon = 80 \text{ MPa}$

则螺栓的预紧力 $F = \sigma S = \pi d_1^2 / 4 = 6.4 \text{ kN}$

例 2: 气动夹具如右图所示, 已知气缸内径 $D = 140 \text{ mm}$ 、缸内气压 $p = 0.60 \text{ MPa}$ 。活塞杆材料为 20 钢, 为安全起见我们希望它所承受的应力值不超过 $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$ (称为许用应力, 往往是利用它会产生断裂等失效的极限应力值除以一定的安全因数得到的), 请问杆直径 d 至少要设计为多少?



解: 杆件承受的拉力 (设 $D \gg d$) $F = pS = p\pi D^2 / 4 = 9.2 \text{ kN}$

所以杆件的直径 d 要满足 $\sigma = \frac{F}{\pi d^2 / 4} \leq [\sigma]$

解得 $d \geq 12 \text{ mm}$, 即杆的直径至少需要有 12 mm 。之前我们计算杆件承受的拉力的时候忽略了杆的横截面积, 相当于多算了一部分压力, 所以这个计算是偏于安全的。

材料失去功能统称为失效。脆性材料容易被拉断, 塑性材料在拉伸时可能出现明显影响功能的塑性变形, 受压的杆件也可能被压扁、压弯甚至压断, 即使是弹性变形一旦超出一定范围也会影响使用, 以上都属于由于强度或刚度不足而造成的失效。此外, 温度、时间、金属的疲劳、化学腐蚀等都可能造成失效。

直杆在发生纵向形变的同时还会伴随着横向形变。设杆的横向线度原来为 b_0 ，经历纵向形变后改变量为 Δb ，则横向应变为

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

实验证明：当应力不超过比例极限时，横向应变 ε' 与纵向应变 ε 是一个常数，可以写成

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

这里的 μ 被称为泊松比，量纲为一。之所以引入负号，是因为绝大部分材料都满足纵向拉伸时横向会收缩、纵向压缩时横向膨胀的规律，所以 ε' 和 ε 的符号是相反的，引入负号来保证 μ 通常为正值。由热力学原理可以给出各向同性材料 μ 的取值范围为 $-1 \leq \mu \leq 1/2$ ，对于常规、传统的材料都有 $0 \leq \mu \leq 1/2$ ，如果 $\mu = 1/2$ 意味着材料在变形过程中体积保持不变（称为不可压缩材料），如果 $\mu = 0$ 意味着材料在变形过程中横向尺寸保持不变。而如果 $-1 \leq \mu < 0$ ，就会出现纵向拉伸时横向也膨胀、纵向压缩时横向也收缩的奇异现象，这种具有“负泊松比”的材料也被称作拉胀材料，黄铁矿、 α -方英石等天然材料和很多人造材料就具有这种奇妙的负泊松比效应，有这样特性的材料和结构多半会有高减振及高断裂抵抗的能力，可用在像防弹背心、包装材料、护膝及护肘、减振材料及胶棉拖把等地方。

为了描述拉伸和压缩过程中的体积变化，我们还可以定义“体应变” $\Delta V/V$ ，并有

$$\sigma = B \frac{\Delta V}{V}$$

其中 B 称为体积模量^[8]。容易证明：杨氏模量、体积模量和泊松比之间满足如下关系

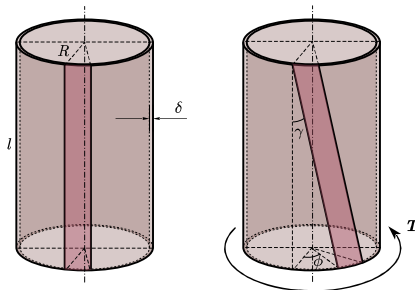
$$B = \frac{Y}{3(1-2\mu)} \quad (\text{思考：怎样证明？})$$

4. 柱的扭转

除了拉伸和压缩，常见的形变形式还有扭转和弯曲。这两个词看起来比较相似，其实是有显著区别的。我们依然以圆柱形的直杆为例，扭转指的是给它一个绕轴的合力矩（可以由一对大小相等、方向相反但作用线之间有一定距离的力提供，这称为一对力偶），最终的结果是杆件的任意两个横截面产生绕轴线的相对转动。而弯曲则指给它垂直于轴的横向合力作用，最终的结果是轴由直线变成曲线。我们稍微想象一下转动汽车方向盘和折弯吸管两幅画面，就可以轻易地区别这两个概念。

我们首先考虑柱的扭转。首先考虑最简单的情况——薄壁圆筒的扭转，也称为纯剪切。如右图所示，设圆筒高为 l ，半径为 R 、厚度为 δ ，若施以绕轴的合力矩 T （这里为了避免与切应力的符号混淆，力矩用 T 表示，请务必注意），使得其一端的截面相比于另一端绕轴相对旋转了一个小角度 ϕ 。我们可以在圆筒的中间高度处任取一横截面，对该截面以下的部分柱体列出力矩平衡方程

$$T = \tau R \cdot S = \tau R \cdot 2\pi R \delta$$



[8] 这里的 σ 以受拉为正。如果以受压为正，或者直接将 σ 换作固体表面所受压强 p ，则在 B 之前还需要添加一个负号，以使得 B 始终为正。

其中 S 为横截面的面积, 可解得切应力 $\tau = T/2\pi R^2 \delta$ 。而切应变显然为

$$\gamma = R\phi/l$$

实验证明, 在切应力不超过材料的剪切比例极限时, 切应力与切应变成正比, 即

$$\tau = G\gamma$$

称为剪切的胡克定律。其中 G 称为材料的切变模量或剪变模量, 其量纲与 τ 相同, 由此可以得出扭矩和薄壁圆筒扭转角的关系为 $\phi = (l/2\pi GR^3 \delta) \cdot T$, 即薄壁圆筒的扭转角与合力矩的大小成正比。容易证明: 杨氏模量、切变模量和泊松比之间满足如下关系

$$G = \frac{Y}{2(1+\mu)} \quad (\text{思考: 怎样证明?})$$

例 3: 现在我们来研究横截面为圆的圆柱形杆件的扭转。试得出合力矩和扭转角的关系。

解: 将圆柱形杆件切分为不同半径的薄壁圆筒。取从半径 r 到 $r + dr$ 的薄壁圆筒分析, 假设其受到的扭矩为 dT ,

$$\text{则切应力为} \quad \tau(r) = dT/2\pi r^2 dr$$

$$\text{切应变为} \quad \gamma(r) = r\phi/l$$

根据剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$, 可以得到合扭矩和薄壁圆筒扭转角的关系为 $\phi = (l/2\pi Gr^3) \cdot (dT/dr)$

将方程变形并两边对整个横截面积分, 得到

$$\int_0^T dT = \int_0^R \frac{2\pi Gr^3 \phi}{l} dr \Rightarrow T = \frac{\pi GR^4}{2l} \cdot \phi \Rightarrow \phi = \frac{2l}{\pi GR^4} \cdot T$$

即圆柱杆件的扭转角也与合扭矩的大小成正比。

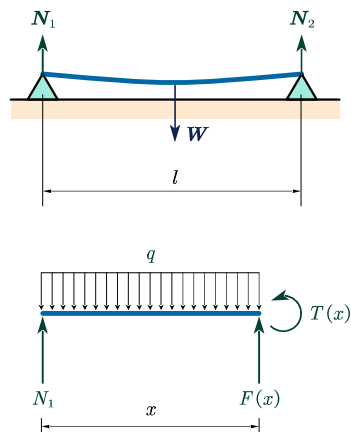
我们得到的这个公式和杆件的长度 l 有关, 为了消除 l 的影响, 我们不妨用沿轴单位长度的扭转角 $\phi' = d\phi/dx$ 来度量圆柱杆件的扭转程度, 并记其中 $\pi R^4/2 = I_p$ [9], 这样公式就可以写成

$$\phi' = \frac{1}{GI_p} \cdot T$$

分析我们得到的式子, 可以发现: 扭矩 T 越大, 则扭转程度 ϕ' 越厉害; 而 GI_p 越大, 则扭转程度 ϕ' 会越小, 因此 GI_p 也称为柱的“抗扭刚度”。

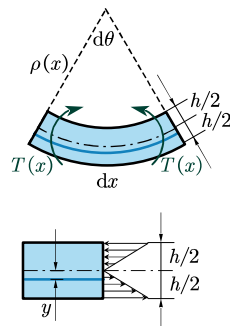
5. 梁的弯曲

接下来我们讨论梁的弯曲, 这是一个比较复杂的问题, 我们只举一个最简单的例子。如右图所示, 设长为 l 的均匀杆两端被支座固定, 则在其自重的作用下向下微微弯曲。为简化问题设两支座的支持力均只有竖直向上的分量, 且 $N_1 = N_2 = W/2$, W 为其自重。不过需要特别指出的是: 此处的受力分析图仅作示意, 重力 W 并不是集中分布在梁的中心处, 而是均匀分布在梁的每一段长度上。为简单计, 假定梁的截面是矩形, 宽为 b 、高为 h 。



[9] 此处 $I_p \equiv \int_S r^2 dS$, 即横截面上所有点对轴心距离平方的积分, 称作横截面的“极惯性矩”, 显然它只和横截面的形状和尺寸有关, 量纲为长度的四次方。对薄壁圆筒, 横截面为细圆环, $I_p = 2\pi R^3 \delta$; 对圆柱, 横截面为圆形, $I_p = \pi R^4/2$ 。(思考: 对空心圆柱呢? 对矩形截面呢?)

首先我们从梁左侧起算 x 长度处将梁切开，将杆分为两段。取其中左段受力分析。已知最左侧受向上的支持力 $N_1 = W/2$ ，全段受到自身的重力，这是向下的均匀分布力 $qx = Wx/l$ (q 称作载荷集度，定义作单位长度上受到的力)。为了让这一段梁能保持平衡，我们计算截面处其所受到的内力(这本应该是另一段梁施加给它的)：由受力平衡方程发现这里应当有一个剪力 $F(x) = W(x/l - 1/2)$ (取向上为正方向)；由力矩平衡方程发现这里应该有一个弯矩 $T(x) = Wx/2(1 - x/l)$ (取逆时针为正方向)。



可以证明：对于跨度远大于截面宽度的梁，剪力对弯曲形变的影响可以忽略，因此我们主要考虑弯矩导致的弯曲。我们在切开梁的截面附近取很小一段长度 dx ，设该处弯曲的曲率半径为 $\rho(x)$ ，对应的圆心角为 $d\theta$ 。可以证明：无论截面形状如何，只要其有一纵向对称面，那么弯曲的梁里总会存在一个中性层(即图中用点划线标出的中性轴所对应的一层)处于“既不拉伸也不压缩”的临界状态，而这根中性轴必然通过截面的几何中心，对于矩形截面的梁当然被中性层分为上下高度相等(均为 $h/2$)的两部分，在两端弯矩(假设在 dx 内 $T(x)$ 不变)的作用下，上层被压缩，下层被拉伸。我们选择其中特定一层(如右图中深蓝色所示)研究，设其到中性层的距离为 y (向下为正)，则我们可以写出：此处的正应变 $\varepsilon(y) = y d\theta / \rho d\theta = y/\rho$ ，此处对中性层的弯矩 $dT(y) = \sigma y \cdot dS = \sigma b y dy$ ，再利用胡克定律 $\sigma = Y\varepsilon$ ，联立并积分可得

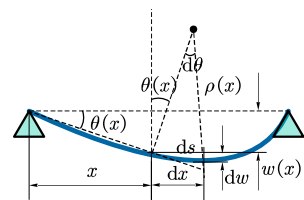
$$dT = \frac{Yb}{\rho} y^2 dy \quad \Rightarrow \quad \int_0^{T(x)} dT = \frac{Yb}{\rho(x)} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \quad \Rightarrow \quad T(x) = \frac{Ybh^3}{12\rho(x)}$$

再记其中 $bh^3/12 = I_z^{[10]}$ ，这样公式就可以写成

$$\rho(x) = YI_z \cdot \frac{1}{T(x)}$$

分析我们得到的式子，可以发现：弯矩 $T(x)$ 越大的地方，曲率半径 $\rho(x)$ 越小，即曲率越大，或者说被弯曲得越厉害；而 YI_z 越大，则 $\rho(x)$ 越大，弯曲程度越小，故 YI_z 也称为梁的“抗弯刚度”。

我们继续根据已知的弯矩分布 $T(x) = Wx/2(1 - x/l)$ 求梁的变形。定义变形后的梁轴线相对于原本水平位置的竖直位移为 $w(x)$ (称为挠度)，相对于原本位置转过的转角为 $\theta(x)$ 。在小挠度、小转角的近似下(如右图所示，绘图有显著夸张)，根据几何关系易有 $dw/dx = \tan\theta \approx \theta$ 、 $d\theta/dx \approx d\theta/ds = 1/\rho$ ，所以有这样的结论： $w(x)$ 对 x 的导数是 $\theta(x)$ ， $\theta(x)$ 对 x 的导数是 $1/\rho(x)$ ，因此 $1/\rho(x)$ 就是 $w(x)$ 的两阶导数，反过来从 $1/\rho(x)$ 求 $w(x)$ 就需要做两次积分。



因此根据弯矩分布

$$T(x) = Wx/2 - Wx^2/2l$$

可得到曲率分布

$$1/\rho(x) = T(x)/YI_z = (12/Ybh^3) \cdot (Wx/2 - Wx^2/2l)$$

因此挠度分布为

$$w(x) = \iint \frac{1}{\rho(x)} dx dx + c_1 x + c_2 = -\left(\frac{W}{Ybh^3}\right) \cdot \left(\frac{x^4}{2l} - x^3 + \frac{l^2 x}{2}\right)$$

其中应用了边界条件 $w(0) = w(l) = 0$ 来确定积分常量 c_1 和 c_2 。这就是挠度方程 $w = w(x)$ ——它的函数图像就是这根梁弯曲之后的形状，其中负号表示梁的弯曲方向朝下。

[10] 此处 $I_z \equiv \int_S y^2 dS$ ，即横截面上所有点对 z 轴(即中性层)距离平方的积分，称作横截面对 z 轴的“惯性矩”，显然它也只和横截面的形状和尺寸有关，量纲也是长度的四次方。对这里的矩形截面， $I_z = bh^3/12$ ；对圆截面， $I_z = \pi R^4/4$ 。(思考：这里的“惯性矩”和之前的“极惯性矩”有什么关系？和“转动惯量”呢？)

6. 应力张量和广义胡克定律

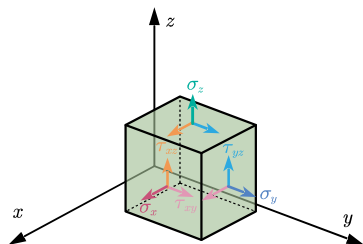
之前我们将应力定义作固体内某微小单位截面 dS 上的所受的力 dF ，即有 $dF = p dS$ ，并认为应力是一个矢量。但其实我们很容易就能发现：应力不但和截面 dS 的位置有关，也和它的取向有关，截面的朝向不同也会导致应力的不同，所以我们之前的定义是没有办法真正描述“一点处”的应力的。要怎样才能完整描述某个位置处的应力值呢？唯一的办法只有将 dS 换成面积矢量 $d\mathbf{S}$ ——方向定义作截面法线的方向，而这时的应力便成了从一个矢量 $d\mathbf{S}$ 到另一个矢量 $d\mathbf{F}$ 的映射——于是我们意识到：要完整描述某个位置处的应力必须要用一个二阶张量。由此我们可以定义应力张量 \mathbf{p} ——这将是真正学习到的第一个二阶张量^[11]，使其满足

$$d\mathbf{F} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S}$$

也可以将它写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dS_x \\ dS_y \\ dS_z \end{bmatrix}$$

应力张量看似有九个分量，然而可以证明：在相互垂直的两个平面上，切应力必然成对存在且数值相等，方向都垂直于两平面交线且共同指向或者共同背离交线。所以有 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ，也就是独立的分量只有六个。我们可以理解为在我们研究的那一“点”的位置取一个微小的立方体，则各分量示意图如右。



这样，我们就可以用矩阵的形式写出应力的六个分量和对应的应变的六个分量的关系，这个关系被称作广义胡克定律。对于各向同性材料，其形式比较简单，表述如下

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Y & -\mu/Y & -\mu/Y & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/Y & 1/Y & -\mu/Y & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/Y & -\mu/Y & 1/Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

而对于各向异性材料，由于拉伸和剪切之间存在耦合效应，正应力和切应力会有综合作用，所以上述矩阵中可能每一个分量都不会为零，也可能并不存在如此多的相同分量。

Problem 15.7

(1) 证明公式 $p = p_0 e^{-h/a}$ （即大气层中大气压 p 随高度 h 变化的表达式，假定温度是均匀的），可以写成空气密度 ρ 随高度 h 变化的形式：

$$\rho = \rho_0 e^{-h/a}$$

其中 ρ_0 是地面（ $h = 0$ ）附近的大气密度。

(2) 假设空气对以速度 v 移动的物体产生的阻力 D 由 $D = C \rho v^2$ 给出，其中 C 为常数， A 为物体的前截面积， ρ 为当地的空气密度。如果火箭垂直发射并以恒定的向上加速度 a_r 移

[11] 以后我们约定以粗正体字母代表二阶及以上的张量，以与标量（细斜体字母）和矢量（粗斜体字母）相区别。手写时常写成上加双箭头，不同人的写法不一，如 \mathbf{p} 就可写为 \vec{p} 、 \overrightarrow{p} 、 \overleftarrow{p} 、 $\overrightarrow{\overrightarrow{p}}$ 等多种形式。

动, 求当火箭所受阻力最大时它所飞行的高度。

解:

(1) 根据公式 15-13

$$p = p_0 e^{-h/a}$$

以及对于温度恒定的气体我们有

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

(注: 根据理想气体状态方程 $pV = nRT$ 可知 $\frac{p}{\rho} = \mu RT$, 即温度 T 恒定的情况下 p 与 ρ 成正比。其中 p 为气体压强; $\rho = m/V$ 为气体密度; m 为气体质量; V 为气体体积; T 为气体温度, 单位为 K ; n 为气体的物质的量, 单位为 mol ; $\mu = n/m$ 为气体的摩尔质量, 单位为 kg/mol , 显然它只和气体的种类即化学成分有关; $R = 8.314 J/(mol \cdot K)$ 为普适气体常量或称克拉伯龙常量。)

h 可直接得到

$$\rho = \rho_0 e^{-h/a}$$

故得证。

(2) 火箭飞行到高度 h 时 (由于火箭仍受到空气阻力, 故可知火箭还未飞出大气层, 则可知火箭所上升的高度较小, 因此可假设重力加速度 g 仍为定值), 由于火箭的加速度恒定为 a_r , 则火箭速度为

$$v = \sqrt{2a_r h}$$

故此时火箭所受的空气阻力为

$$D = CA\rho v^2 = CA e^{-h/a} \cdot 2a_r h$$

当 D 最大时, 即取 $\frac{dD}{dh} = 0$, 求导得

$$2CA\rho_0 h \left(1 - \frac{h}{a}\right) e^{-h/a} = 0$$

解得此时 $h = a$, 通过验证可以确定火箭飞行高度 $h = a$ 时其所受阻力确实最大。

Problem 15.8

(1) 考虑一个承受竖直向上加速度 a 的流体容器。证明流体的压强随深度的变化由下式给出

$$p = \rho h(g + a)$$

其中, ρ 为深度, d 为密度。

(2) 同时证明, 如果流体整体承受一个竖直向下的加速度 a , 则深度 h 的压强 p 由下式给出

$$p = \rho h(g - a)$$

(3) 自由落体的状态呢？

解：

(1) 取一个横截面积为 A 、高度为 dh 的流体薄片，它位于深度 h 处。对它列出牛顿第二定律方程（以竖直向下为正方向）

$$pA - (p + dp)A + dm g = -d m a$$

流体薄片的质量 $dm = \rho A dh$ ，整理得

$$dp = \rho(g + a)dh$$

两边积分直接得到（注意 $h = 0$ 时有 $p = 0$ ）

$$p = \rho h(g + a)$$

故题设得证。

(2) 将 a 换作 $-a$ 即可，答案为 $p = \rho h(g - a)$ 。

(3) 自由落体状态有向下的加速度 $a = g$ ，故 $p = 0$ ，则流体内没有压强。

Problem 15.11

证明行星大气层的压强分布（假定恒温）满足

$$p = p_0 e^{k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

其中 g 按照 $1/r^2$ 变化（其中 r 是与行星中心之间的距离）， p_0 是行星表面处的压强， R 是行星的半径， k 是常数。验证该结果在接近行星表面时是否能导出方程

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$$

解：

(1) 同样在大气层中取一个横截面积为 A 、高度为 dr 的气体薄片，它位于距离行星中心 r 处。以远离行星中心的方向为正方向，写出静力学平衡方程（题中要求 g 按照 $1/r^2$ 变化，我们可以直接用万有引力的原始公式代入）

$$pA = (p + dp)A + \frac{GMm}{r^2}$$

其中气体薄片的质量 $dm = \rho A dr$ ，整理得

$$dp = -\frac{GM\rho dr}{r^2}$$

利用 $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$ ，有

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \frac{GM dr}{r^2}$$

两边积分则有

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} GM \int_R^r \frac{dr}{r^2} \implies \ln p - \ln p_0 = \frac{\rho_0}{p_0} GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

定义 $k = \frac{\rho_0}{p_0} GM$ ，变形得

$$p = p_0 e^{k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

而当很接近行星表面即 $r \rightarrow R$ 时，定义高度 $h = r - R$ ，显然 $h \ll R$ 。此时有

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} = -\frac{h}{R(R+h)} \approx -\frac{h}{R^2}$$

又因为地表附近的重力加速度 $g = \frac{GM}{R^2}$ ，故 $k = \frac{\rho_0}{p_0} GM = \frac{\rho_0}{p_0} gR^2$ ，代入即得到

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$$

关于引力场中的气压分布，更详细的讨论见后文的【附 3: 恒星的结构与宇宙中元素的合成】。

Problem 15.13

如图所示，空心的球形铁壳几乎完全浸没在水中悬浮。壳体的外径为 58.7 cm ，铁的密度为 7.87 g/cm^3 ，求壳体的内径。

解：

球形铁壳悬浮时受力平衡，根据阿基米德浮力定律

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} g V_1 = mg$$

根据球形铁壳质量 $m = \rho_{\text{Fe}} (V_1 - V_2)$ ，其中外体积 $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3$ 、空腔体积 $V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3$ ，整理得

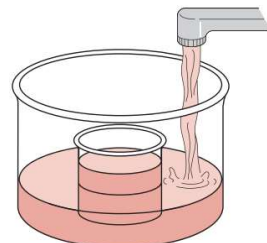
$$r = R \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_{\text{Fe}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Fe}}}}$$

再利用外径 $R = 58.7 \text{ cm}$ 、铁的密度 $\rho_{\text{Fe}} = 7.87 \text{ g/cm}^3$ 、水的密度直接取 $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1.00 \text{ g/cm}^3$ ，解得内径 $r = 56.1 \text{ cm}$ 。



Problem 15.17

将一个装满水的玻璃烧杯放在水槽中。烧杯的质量为 390 g ，内部容积为 500 cm^3 。现在开始向水槽注水，并通过实验发现：如果烧杯中装水不足一半，它将漂浮在水槽中；但如果装水一半以上，则即便当水上升到其烧杯的边缘时，它依然会停在水槽底部。则烧杯材料的密度是多少？



解：

据题意发现，当烧杯中刚好装了一半水时，烧杯的总重（包含烧杯和其中水的总重）应

当刚好等于其最大能排开水的总重，达到浮力和重力平衡的临界状态，也就是

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} g (V + V_{\text{beaker}}) = \rho_{\text{H}_2\text{O}} g \frac{V}{2} + m_{\text{beaker}} g$$

再取水的密度 $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1.00 \text{ g/cm}^3$ 、烧杯的容积 $V = 500 \text{ cm}^3$ 、烧杯的质量 $m_{\text{beaker}} = 390 \text{ g}$ 。 V_{beaker} 为烧杯杯体所占的体积，它与烧杯杯体材料密度 ρ_{beaker} 之间满足 $\rho_{\text{beaker}} V_{\text{beaker}} = m_{\text{beaker}}$ 。所以整理得

$$\rho_{\text{beaker}} = \frac{2m_{\text{beaker}} \rho_{\text{H}_2\text{O}}}{2m_{\text{beaker}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}} V} = 2.79 \text{ g/cm}^3$$

附 3：恒星的结构与宇宙中元素的来源

“恒星具有相当稳定的质量，太阳的质量为：

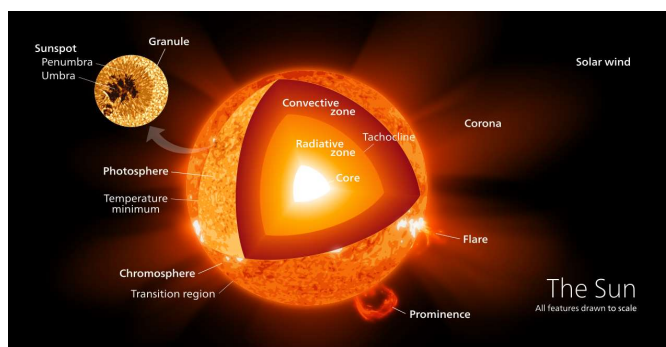
2 000 000 000 000 000 000 000 000 吨。

——我知道你们不会介意多或者少一两个零，可大自然在乎。”

——爱丁顿《恒星与原子》

在晴朗的夜晚，如果你仰望夜空能看到点点繁星，除了少数几颗明亮的行星外，能看到的绝大多数都是恒星。从地球上看来，恒星似乎都只是看不清细节的荧荧光点，但实际上这是缀满天幕的千亿个燃烧着的太阳——我们赖以生存的太阳也只是恒星世界中的普通一员。以光年计的漫长距离使得我们对恒星表面的细节知之甚少，甚至在大型望远镜中也无法看见恒星表面呈现出行星那样的圆面，但是物理学和天文学的发展使得人们拥有很多办法确定恒星的大小、质量、化学成分和温度等参数，甚至能够定出恒星的年龄。在这些恒星中，有体积比太阳大数亿倍乃至百亿倍的超巨星，也有直径仅约 10 km 的中子星；有光焰四射、辐射总能量相当于一个星系的超新星，也有暗淡无光、垂垂迟暮的黑矮星。各种恒星其半径可以相差 10^6 倍、光度（绝对亮度）可以相差 10^{10} 倍、密度可以相差 10^{25} 倍，但恒星的质量大小相差只在 10^3 倍以内。质量大小的差异造成自身引力大小的差异，而正是引力主导了恒星一生的演化，这就使得不同质量的恒星走过完全不同的演化途径，并走向截然不同的最终归宿。

恒星的结构当然是复杂的。就拿我们的太阳来说，它可以视作由高温等离子体（即电离的气体，电子和离子相互分离）和磁场交织而成的炽热球体，其自内向外可以分为核心区、对流区、辐射区，再向外还有包括光球层、色球层和日冕在内的太阳大气，其中无时无刻不在发生着极其激烈、复杂的物质运动和能量交换，黑子、耀斑、日珥、日冕物质抛射、日震等种种难以预测的太阳活动持续发生，并通过太阳风和磁场影响着它第三颗行星上的芸芸众生，至今还有大量有关太阳活动机制方面的未解之谜等待着人们来破解。然而，恒星的结构



▲ 太阳结构示意图

又可以说是简单的——我们也可以将它抽象成一个由高温气体在自身引力作用下形成的理想球体，在忽略自转的前提下将有着球对称的完美结构，这无疑比其他天体系统（例如星云、星系、行星等）要简单得多。

1. 恒星结构的基本方程

我们首先尝试在我们已经通过假设进行过简化的基础上建立关于恒星结构的物理模型，从而获得一些基本方程。

将恒星看作是由一团理想气体构成的球体，并划分为许多个球壳。考虑一个半径为 r 的壳层（球壳），其内部所含的球体总质量为 $m(r)$ ，则其与恒星密度分布 $\rho(r)$ 的关系即为

$$\frac{dm(r)}{dr} = \rho(r) \cdot 4\pi r^2$$

即质量方程。

再在该壳层上取一个横截面积为 A 、高度为 dr 的小圆柱体，它所受恒星的万有引力只能由其上下表面的压差平衡（类比于前面的【Problem 15.11】，但注意这里的引力来源质量只能用 $m(r)$ 代入，因为外层球壳对它的引力严格为零），以维持恒星内部结构的稳定。设半径为 r 的壳层处的压强为 $p(r)$ ，则压强分布应当满足

$$\frac{dp(r)}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

即流体静力学平衡方程。

我们还需要一个物态方程，它能将恒星内部的压强和温度、密度、化学成分等信息结合起来，这个物态方程随恒星性质和化学成分的不同而变，比较复杂。太阳中主要是氢和氦，对于像太阳这样的主序星，有时我们可直接假设它是一团炽热的理想气体，故可直接采用理想气体状态方程

$$\frac{p(r)}{\rho(r)} = \frac{RT(r)}{\mu(r)}$$

作为物态方程，其中 $T(r)$ 为半径为 r 的壳层处的温度， $\mu(r)$ 为半径为 r 的壳层处物质的摩尔质量， $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ 为普适气体常量（注意不要与半径混淆）。

注意边界条件 $m(0) = 0$ 、 $m(R_s) = M_s$ 、 $p(0) = p_c$ 、 $p(R_s) = 0$ 、 $T(0) = T_c$ 、 $T(R_s) = 0$ 。其中 M_s 和 R_s 分别为恒星的总质量和半径， p_c 和 T_c 分别代表恒星中心处的压强和温度。由于恒星中心处的压强和温度显然要远远高于恒星表面处的压强与温度，在近似计算时认为恒星表面处的压强和温度为零是合理的。（思考：那我们有什么办法知道恒星表面的温度呢？）

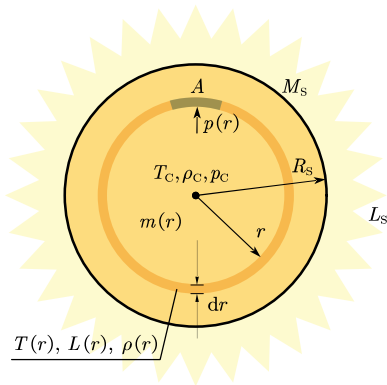
例 1: 已知太阳质量 $M_s = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、半径 $R_s = 6.97 \times 10^8 \text{ m}$ ，试估算太阳中心的温度。

解: 首先将上面的质量方程和流体静力学平衡方程相除，得到

$$\frac{dm(r)}{dp(r)} = - \frac{4\pi r^4}{Gm(r)}$$

直接积分会比较困难，我们不妨用一个近似：左边 $\frac{dm(r)}{dp(r)} \approx \frac{m(R_s) - m(0)}{p(R_s) - p(0)} = - \frac{M_s}{p_c}$ ，即用平均变化率代替实际变化率。再代入 $r = R_s$ ，得到

$$\frac{M_s}{p_c} = \frac{4\pi R_s^4}{GM_s}$$



为了通过 p_c 获得 T_c , 我们用 $r=0$ (即太阳中心处) 的理想气体状态方程代入。为方便计算, 我们再假设: 太阳是密度均匀的球体, 各处物质密度都等于平均密度 $\bar{\rho} = 3M_s/4\pi R_s^3$; 构成太阳的主要物质是质子 (氢核), 其摩尔质量取 $\mu_H \approx 1 \text{ g/mol}$ 。代入整理得到太阳中心温度估计为

$$T_c = \frac{GM_s \mu_H}{3RR_s} = 7.64 \times 10^6 \text{ K}$$

查阅资料得知通过标准模型计算出的太阳中心温度约为 $T_c = 1.57 \times 10^7 \text{ K}$, 大约是我们估算结果的两倍, 说明我们估算的结果在数量级上已经非常准确。

上面我们所介绍的只是决定恒星结构的最基本方程, 还有什么别的方程呢? 我们知道, 恒星若要不断发光发热, 其中的物质必定通过某种机制产生能量。假设恒星半径为 r 的壳层处单位质量的物质产生的能量为 $\varepsilon(r)$ (称为产能率), 则向外离开这一壳层的能量一定多于进入这一壳层的能量。我们用光度 L (即发光的功率, 具有功率的量纲) 来衡量产能, 则光度分布 $L(r)$ 满足

$$\frac{dL(r)}{dr} = \varepsilon(r) \rho(r) \cdot 4\pi r^2$$

即能量方程 (光度方程), 边界条件为 $L(0)=0$ 、 $L(R_s)=L_s$, L_s 为恒星光度。

能量要从恒星的内部传到外部, 主要的传热方式是辐射和对流 (热传导的作用在恒星中并不明显), 所以我们还需要一个和传热有关的方程。这个方程的推导比较复杂, 需要用到很多同学们还没学到的知识, 所以这里只给出结论: 温度分布 $T(r)$ 应满足

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\kappa(r) \rho(r) L(r)}{16\pi r^2 \sigma T^3(r)} \quad (\text{若辐射传能为主})$$

$$\frac{1}{T(r)} \frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{p(r)} \frac{dp(r)}{dr} \quad (\text{若对流传能为主})$$

即能流方程 (能量输运方程), 其中 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ 为热辐射中的斯特藩-玻尔兹曼常量、 γ 为气体的绝热指数, 它们的意义将在之后的热学部分课程学到 (如果学不到再来找我)。 $\kappa(r)$ 则称为吸收系数或不透明度, 指恒星内半径为 r 的壳层处单位质量的物质所吸收的能量。

除此之外, 对于一般的恒星, 我们总不总能把它看作理想气体。一般形式的物态方程表达为

$$f[p(r), T(r), \rho(r), X(r), Y(r), Z(r)] = 0$$

即给出一个压强、温度、密度的关系式, 其中 X 、 Y 、 Z 只和恒星的元素丰度 (化学组成) 有关。

以上共五个方程 (质量方程、流体静力学平衡方程、能量方程、能流方程、物态方程) 合称为恒星结构的基本方程, 其中刚好也共有五个未知量 ($m(r)$ 、 $p(r)$ 、 $L(r)$ 、 $T(r)$ 、 $\rho(r)$), 方程封闭, 可以求解。当然其产能率 $\varepsilon(r)$ 、吸收率 $\kappa(r)$ 和化学组成 $[X(r), Y(r), Z(r)]$ 必须事先给定。这也就导出了恒星 “解的唯一性定理” —— 平衡的恒星球体的内部结构, 由它的化学成分和总质量唯一确定。接下来我们会继续看到恒星的总质量是怎样在恒星的演化中起到决定性作用的。

2. 恒星能量的来源

太阳发光发热, 普照众生, 是地球赖以形成生态圈和智慧文明的能量源泉。人类所使用的化石燃料、水能、风能、生物质能等, 归根到底都是来自于太阳的馈赠。(思考: 为什么?) 我们将单位时间内垂直射入地球大气层外单位面积上的能量称作太阳常量 f , 这个和地球上万千生灵的命运有关的常量经测量为 $f = 1.361 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ 。如此巨大的能量从何而来? 曾有人猜想太阳是熊熊燃烧的大煤球或氢气球 (即太阳的能量来自于化学燃烧), 然而事实真的如此吗?

例 2: 化学反应的本质是核外电子相互作用, 所以化学反应的能量一般不会超过电离能。假设太阳仅由氢组成, 每个氢原子通过化学反应可以释放出 10 eV 能量 ($1\text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{ J}$), 如果太阳辐射的能量完全来自于化学能, 估算太阳的寿命。算出结果后你有什么想法?

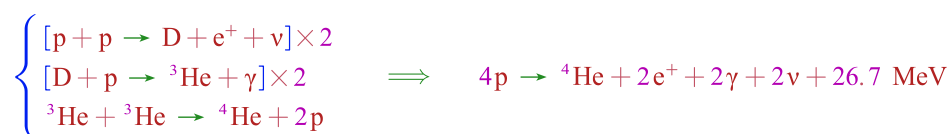
解: 根据太阳质量 $M_s = 1.99 \times 10^{30}\text{ kg}$ 、氢原子质量约等于质子质量 $m_p = 1.67 \times 10^{-27}\text{ kg}$, 可以计算出太阳中氢原子的总数约为 $N = M_s/m_p = 1.19 \times 10^{57}$ 个。假定每个氢原子通过化学反应可以释放出 10 eV 能量, 则太阳一生中总共可释放的化学能共有 $E_s = N \times 10\text{ eV} = 1.91 \times 10^{39}\text{ J}$ 。

又根据太阳常量 $f = 1.361 \times 10^3\text{ W/m}^2$ 、日地平均距离 $a = 1.50 \times 10^{11}\text{ m}$ (即一天文单位或 1 AU), 可解得太阳的总光度为 $L_s = 4\pi a^2 f = 3.85 \times 10^{26}\text{ W}$ 。如果太阳辐射的能量完全来自于化学能, 我们可以估算太阳的寿命 $\tau = E/L_s = 4.96 \times 10^{12}\text{ s} = 1.57 \times 10^5\text{ yr}$ 。

我们推导出的结论告诉我们: 太阳总共只有十几万年的寿命。而经地质学考证 (尤其是利用放射性同位素测年法测定地层中古老矿物的年龄), 发现地球至少已存在了数十亿年, 而太阳诞生的时间只可能比地球更早。这一明显的矛盾推翻了太阳靠化学能发光发热的旧有认识, 促使人类进一步探寻太阳能量的真正来源。

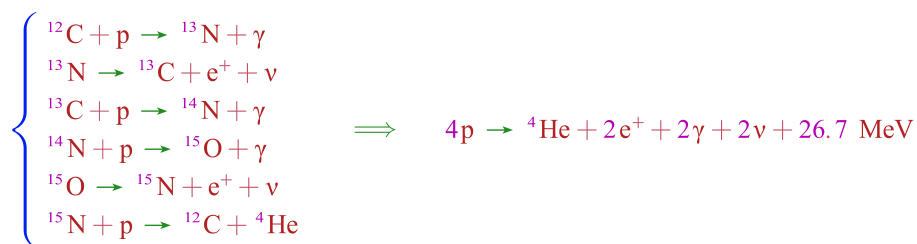
1926 年, 英国的天文学家爱丁顿提出: 恒星的能源可能来自恒星内部的核聚变反应。我们在高中已经学习过: 核聚变又称为热核反应, 指在极高温的条件下两个或更多的轻原子核结合成一个重原子核并释放出大量能量的过程, 其能量的来源是原子核结合过程中的质量亏损 (根据质能方程有 $\Delta E = \Delta mc^2$)。我们知道, 想要让两个原子核结合在一起是非常困难的, 因为它们同时带正电, 结合需要克服巨大的库仑斥力, 所以只有当两个能量足够高的核迎面相撞的时候才有结合的可能, 而这需要极高的温度。最初人们认为要想发生核聚变必须要有上百亿度的高温, 由此质疑恒星内部的温度是无法引燃核聚变的, 但是后来量子力学的进展尤其是量子隧穿效应的发现让人们意识到发生核聚变所需要的最低温度可能只需要数千万度。人们最终相信是恒星内部的核聚变反应在为恒星源源不断提供能量。爱丁顿最终揭示了“星星为什么会发光”的谜。[12]

以太阳为例, 其内部所发生的最有效的核反应序列是 **pp** 循环 (质子-质子循环), 其主反应步骤如下



即总的来说是 4 个质子 (**p**, 氢核) 结合为一个氦核 (${}^4\text{He}$), 并释放出正电子 (e^+)、光子 (γ)、中微子 (ν) 和能量。反应产生的能量中有大约 25 MeV 被用于加热, 剩下的部分则被中微子带走。另一种则称为 **CNO** 循环 (碳-氮-氧循环), 其主反应步骤如下

[12] 如何在地球上实现人工可控的核聚变反应来作为人类的能源? 相关的研究称为可控核聚变研究或“人造太阳”。聚变能具有原料来源广泛、储量大、无环境危害等优点, 几乎可以说是“取之不尽, 用之不竭”, 被人类寄予厚望, 是解决未来能源危机的理想途径。更不用说, 由丰富的、几乎免费的能源带来的生产力的飞速发展甚至可能彻底改变人类的生产方式, 从而实现人类文明的全方位跃升, 为实现更加理想的社会形态、探索更加遥远的宇宙空间甚至人自身的进化奠定可能——但显然这条道路是异常艰辛的, 其面临诸多困难, 尽管经历了半个多世纪的探索, 要想实现真正的聚变发电依然任重道远。目前在地球上、实验室条件下可行的聚变反应堆思路主要有惯性约束聚变 (ICF) 和磁约束聚变 (MCF) 两种, 中国不但参与了国际合作的托卡马克聚变实验堆 ITER 计划, 还在国内的 EAST、HL-2M 等装置实验上取得了国际领先水平的成果, 未来还将自主设计创新 CFETR 实验堆的研究。笔者所在的浙江大学聚变理论与模拟中心便是研究聚变和空间等离子体物理的重要阵地, 热忱欢迎有兴趣、有意向的同学加入我们的事业, 投身于为人类开创未来的理想和星辰大海的征程。



总反应式与 pp 循环相同，可以看出这里的碳核 (${}^{12}\text{C}$) 只是起到类似催化剂的作用。对于像太阳这种温度较低的恒星，以 pp 循环为主；对于温度更高的恒星，以 CNO 循环为主。通过核反应的反应率，可以估算太阳的寿命大约为百亿年左右，如今的太阳正当壮年，是一颗“主序星”。

主序阶段的恒星主要由氢和氦组成。由于氢是原料，氦是炉渣，其发生的聚变过程也被称作“氢燃烧”。随着岁月推移，氢渐渐燃烧殆尽，如果温度足够高，氦原子 (${}^4\text{He}$) 也会成为燃料，继续成为更重的元素铍 (${}^8\text{Be}$)，进而聚变成碳 (${}^{12}\text{C}$) 和氧 (${}^{16}\text{O}$)，称为“氦燃烧”，恒星的外壳急剧膨胀，表面温度降低并主要发出红色的光，成为一颗又大又红的红巨星。氢熄火后，如果温度足够高，则新的“碳燃烧”和“氧燃烧”又开始了，生成氖 (${}^{20}\text{Ne}$)、钠 (${}^{23}\text{Na}$)、镁 (${}^{24}\text{Mg}$)、硅 (${}^{28}\text{Si}$)、磷 (${}^{31}\text{P}$)、硫 (${}^{32}\text{S}$) 等核。而一切的最后，如果恒星内部温度非常高，则硅会最后聚变为铁 (${}^{56}\text{Fe}$) 和镍 (${}^{56}\text{Ni}$)，即“硅燃烧”。铁和镍是硅燃烧的灰烬，也是恒星内部聚变反应最后的炉渣——高中已经学习过的比结合曲线告诉我们：铁是比结合能（即平均结合能）最大的元素，所以到铁为止恒星内部的聚变反应已经走到了尽头，不可能再形成新的原子核了，恒星也就走入了“热死亡”。需要说明的是，只有质量足够大的恒星才能完整走完上述过程，如果恒星质量不够大，上述过程则会在某个阶段中止，恒星直接进入“热死亡”状态。恒星内部产生各种聚变反应所需要的温度和必须具备的最小恒星质量（以太阳质量 M_{S} 为单位）列表如下：

聚变反应过程	近似点燃温度 /K	典型运转温度 /K	所需最小恒星质量 / M_{S}
氢燃烧	4×10^6	2×10^7	0.05
氦燃烧	1×10^8	2×10^8	0.5
碳燃烧	6×10^8	8×10^8	4
氧燃烧	1×10^9	1.5×10^9	6
硅燃烧	2×10^9	3.5×10^9	9

（思考：木星是太阳系中最大的行星，主要由氢和氦构成，你认为木星内部有可能点燃核聚变从而成为一颗真正的恒星吗？研究发现木星内部也会自发产生一定能量，请猜测能量的来源。）

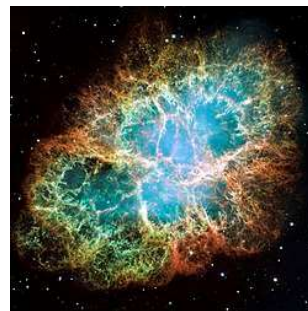
3. 恒星的归宿与宇宙中元素的合成

前面已经提到过：恒星的质量决定了恒星能否形成，决定了恒星的形态、特征和演化路径，也决定了恒星的归宿。对于小质量恒星 ($M \leq 2.3M_{\text{S}}$) 来说，它的“热生命”到氢燃烧完成即告终结（这样进行的氢燃烧是一种爆炸式的氢燃烧，持续时间一般只有短短的几秒到几分钟，称为“氢闪”）。其内部丧失活力以后，整个恒星的热不稳定性显著增加，核心越来越压缩，密度越来越高，直到唯一能克服自身引力的是恒星内部所有电子的“简并压力”，形成了体积很小、光度很小的孤零零的白矮星。它不再能够自己产生能量，只能靠着“生前”积蓄的能量维持着自己的光度和温度，因此它终将慢慢冷却变暗，最终在几十亿甚至上百亿年漫长而孤独的岁月中耗尽一切能量，熄灭掉最后的光辉，成为黯淡无光的黑矮星，永无声息地游荡在漫漫宇宙中——这也将是我们的太阳在数十亿年后的最终结局。

如果恒星质量较大 ($M \geq 8.5M_{\text{S}}$ ，而 $2.5M_{\text{S}} < M < 8.5M_{\text{S}}$ 的中等质量恒星其演化则可能介于

两种情况之间), 则可以平稳进行层层热核反应直到生成铁为止。待到热核反应达到极致, 铁原子已经充满恒星核心停止燃烧时, 温度可能超过 $4 \times 10^9 \text{ K}$, 光子会以很高的能量穿入铁原子核将其击碎, 逃逸的中微子将带走大量能量, 能量的丧失意味着压力突然降低, 在强大引力作用下星核迅速塌缩, 成为高密度的中子核心, 而外层塌缩的物质遭遇中子核心后又以极快的速度反弹, 形成强大的冲击波, 携带着极其巨大的能量, 整个恒星的绝大部分物质都被抛向宇宙空间, 能量的狂飙横扫天宇, 成为壮烈辉煌的超新星——这一过程可以在几天之内释放比恒星一生中正常辐射产生的总和还要多的能量, 在地球上看来它的亮度会瞬间增加 $10^7 \sim 10^8$ 倍。超新星爆发之后, 恒星中心处残留的部分质量形成一个致密星体 (中子星或黑洞)。

超新星爆发伴随着核合成——爆发的巨大能量能将原有的原子核打碎重组, 从而能形成比铁重的数十种元素 (铜、锌、金、铂、铀、钍……), 这些重元素被甩向广袤的宇宙空间, 形成壮丽的星云。——在我们的宇宙中, 最初的宇宙大爆炸创造了绝大部分的氢、少部分的氦和极少的锂, 接下来一直到铁为止的元素多是在恒星内部的聚变反应中形成的, 比铁更重的元素则只能在超新星爆发中诞生。星云是前代恒星“死亡”后的残骸, 但故事并没有就此结束, 星云中的物质会在渐渐冷却之后重新聚集, 新的恒星将在前代恒星的遗迹中诞生, 继续开始新一轮的演化循环。



▲ 蟹状星云 (一颗超新星的残骸)

而来源于前代恒星的丰富的元素组成使得它更有可能形成行星, 乃至诞生生命、孕育文明。

当我们露天躺在星空之下, 将自己彻底处在天地之间时, 时空仿佛都静止了。尽管我们总是将恒星理解为是地球上永恒不动的参考坐标, 但事实上恒星也有诞生、运动与死亡。宇宙中, 在我们看不见的遥远角落, 正在发生着无数的毁灭与创生, 无数惊天动地的事变记叙着宇宙过去, 也勾画了宇宙的未来。其实, 星辰一直与我们同在——组成我们躯体的氢, 来自宇宙原初的大爆炸; 随血液流淌的铁, 可能曾是某颗恒星的核心; 携带着遗传信息的氮和磷, 也曾在原始的大气与海洋中游荡; 人类文明赖以建立的种种元素, 或许是在超新星爆发的遗骸中诞生的……我们只是古老遥远的恒星结束自己生命后散落又凝聚的尘埃。或许我们的肉身终将逝去, 山川、地球、太阳、银河系等等都将在未来的某一天不复存在, 但是从物质和能量的角度上来看——世界上没有任何东西会真正消亡, 曾经在我们身上的原子或许又将流转漂泊至别处, 经历亿万年的漫长岁月后, 新的生机和希望将在另一片原本冷寂的空间孕育而生。

“你身体里的每一个原子都来自一颗爆炸了的恒星, 你左手的原子与右手的原子也许来自不同的恒星。这实在是我所知道的物理学中最富诗意的东西: 你的一切都是星尘……因此, 忘掉耶稣吧, 星星都死去了, 你今天才能在这里。”

——克劳斯《一颗原子的时空之旅》



▲ 笔者曾参加的天荒坪观星实景图 (2016年11月, 左: 猎户座; 中、右: 银河。)

图源: 浙江大学学生天文爱好者协会

欢迎有兴趣的同学积极参加浙大天协主办的路边天文和上山观星等活动 (尤其是从未见过真正的星空的人)。 (公众号: 浙大天协 ZJUAAA)