微积分H作业解答

第一周

题目1. (7.1.1) 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(1) 写出该级数的前5项，并求该级数的前n项的部分和S_n;

(2) 根据级数收敛的定义判断级数是否收敛?若收敛,求级数的和.

解答:

(1) 前5项为$\frac{1}{10},\frac{1}{40},\frac{1}{88},\frac{1}{154},\frac{1}{238}$.

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2})=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2})=\frac{n}{6n+4}$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{6n+4}=\frac{1}{6}$, 故级数收敛,级数的和为$\frac{1}{6}$.

题目2. (7.1.3) 求下列级数的前n项的部分和，并根据级数敛散性的定义，判断级数是否收敛?若收敛，求该级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$.

解答:

(1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}=-\sum\limits_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^k=-(-\frac{1}{2})\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n)$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n)=\frac{1}{3}$,

故级数收敛，级数的和为$\frac{1}{3}$.

(2) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}})=1$,

故级数收敛,级数的和为1.

(5) $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{1}{k^2})=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2})=\sum\limits_{k=2}^{n}(\ln(\frac{k+1}{k})-\ln(\frac{k}{k-1}))$

$=\ln(\frac{n+1}{n})-\ln 2=\ln(\frac{n+1}{2n})$, 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(\frac{n+1}{2n}))=-\ln 2$,

故级数收敛,级数的和为$-\ln 2$.

题目3. (7.1.7) 利用柯西收敛准则判断下列级数的敛散性:

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

解答: (3) 取$\varepsilon_0=\frac{1}{\sqrt{6}}$,$\forall N\in\mathbb{N}_+$,$\exists n_0\in\mathbb{N}_+$,使得$n_0>N$,取$p_0=n_0$,有

$\sum\limits_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}>\sum\limits_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{\sqrt{(2n_0)^2+2n_0}}=\frac{n_0}{\sqrt{(2n_0)^2+2n_0}}=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{2}{n_0}}}>\frac{1}{\sqrt{6}}=\varepsilon_0$,

根据柯西收敛准则,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$发散.

题目4. (7.2.9)用比较判别法或极限判别法判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[\ln(1+\frac{1}{n})-1]$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \sin\frac{\pi}{4^n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} [e-(1+\frac{1}{n})^n]$.

解答: (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}}{n^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4} = \frac{1}{2}$,

而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-\frac{3}{2}}$收敛, 根据极限判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2n^2+n-4}$也收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}[1-\ln(1+\frac{1}{n})] = 1$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$发散,根据极限判别法,

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[1-\ln(1+\frac{1}{n})]$发散，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[\ln(1+\frac{1}{n})-1]$也发散.

(6) $3^n\sin\frac{\pi}{4^n} \le \frac{3^n\pi}{4^n}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\pi}{4^n}$收敛,根据比较判别法,

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n\sin\frac{\pi}{4^n}$也收敛.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}} = e\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}}{\frac{1}{n}} = e\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

(这是由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{x} = 1$,这里取$x = 1-n\ln(1+\frac{1}{n})$)

$= e\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{(n+1)}}{-\frac{1}{n^2}} = e\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}}$ (连续使用洛必达法则)

$= \frac{e}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{e}{2}$,

根据极限判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[e-(1+\frac{1}{n})^n]$和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$同敛散,即发散.

题目5. (7.2.10)用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性:

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\tan\frac{\pi}{3^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{\ln n}{n})^n$.

解答: (3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2\tan\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n^2\tan\frac{\pi}{3^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^{n+1}}}\cdot\frac{\frac{\pi}{3^n}}{\tan\frac{\pi}{3^n}}\cdot\frac{\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^n}}$

$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}<1$. 根据比值判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\tan\frac{\pi}{3^n}$收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}4\cdot\frac{5^n-3^n}{5^{n+1}-3^{n+1}}=4\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-(\frac{3}{5})^n}{5-3(\frac{3}{5})^n}=4\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}<1$.

根据比值判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$收敛.

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$.

根据根值判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$收敛.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$,本题无法用比值或根值判别法来判别.

另一方面, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(1-\frac{\ln n}{n})^n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln n+n\ln(1-\frac{\ln n}{n})}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln n+n(-\frac{\ln n}{n}+o(\frac{\ln n}{n}))}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{o(\ln n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}o(1)=1$, 这里$peano$余项$o(f(x))$表示$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{of(x)}{f(x)}=0$.

由极限判别法级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{\ln n}{n})^n$ 与级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$同敛散，即发散.

题目6. (7.2.11)用适当的方法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{\ln n})$;

(5) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}dx}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}(a>0)$.

解答: (1) 记$a_n=\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}$,令$b_n=a_{2n-1}=\frac{2n-1}{3^{2n-1}}$, $c_n=a_{2n}=\frac{2n}{5^{2n}}$.

则有$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n}=\frac{1}{9}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{c_n}=\frac{1}{25}<1$, 由根值判别法,

级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$均收敛, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$也收敛.

(3) 利用$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, 有$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{\ln n})}{\frac{2}{n\ln n}}=1$,根据极限判别法,

级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{\ln n})$ 与级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n\ln n}$有相同的敛散性.

在例7.2.16中已证明后者是发散的,故原级数$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{\ln n})$收敛.

(5) 利用积分判别法,只需考虑积分$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$的敛散性.

1.若$p=1$,则$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)^q}=\int_3^{+\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u^q}$,

当$q\le 1$时发散,当$q>1$时收敛.

2.若$p\ne 1$,则$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_3^{+\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{(\ln x)^{p-1}(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{e^{(p-1)u}\cdot u^q}$,

当$p>1$时,取t使得$0<t<p-1$,则有$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{(p-1)u}\cdot u^q}}{\frac{1}{e^{tu}}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{e^{(p-1-t)u}\cdot u^q}=0$,

而$\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{e^{tu}}$收敛,根据极限判别法积分形式, $\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{e^{(p-1)u}\cdot u^q}$也收敛.

当$p<1$时,取s使得$0<s<1-p$,则有$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{(p-1)u}\cdot u^q}}{e^{su}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^{(1-p-s)u}}{u^q}=+\infty$,

而$\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}e^{su}du$发散,根据极限判别法积分形式, $\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{e^{(p-1)u}\cdot u^q}$也发散.

综合以上情形,当$p>1$或者$p=1,q>1$时级数$\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$收敛,

当$p<1$或者$p=1,q\le 1$时级数$\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$发散.

(8) $\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}dx}<\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3}dx}=\frac{1}{\int_0^n xdx}=\frac{2}{n^2}$, 而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2}$收敛,

根据比较判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[3]{x^3+1}dx}$也收敛.

$$(11)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0, & 若a>1,\\ \dfrac{1}{2}, & 若a=1,\\ a, & 若a<1,\end{cases}\quad <1,$$

根据比值判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$收敛.

注记: 注意在(1)中, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$不存在,不能直接使用根值判别法,但可以利

用上极限形式的推广, 通过上极限$\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3}<1$来得到$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛.

题目7. (7.2.12) 利用级数收敛的必要条件证明下列等式: (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0$.

解答: 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$, 由于$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n+1}=0$,根据比值判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$收敛,从级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n!}=0$.

题目8. (7.2.15) 设$x_n(n=1,2,...)$是方程$\tan x=x$的正根,且从小到大排序,试证明级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2}$收敛.

解答: 考虑函数$f(x)=\tan x-x, x\in[n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$

由$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1>0$知$f(x)$在$(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$上单调递增,

又$f(n\pi)=-n\pi<0(n\geq 1), f(n\pi+\frac{\pi}{2})\to+\infty$,

则$f(x)$在$(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})(n\geq 1)$上有且仅有一个根.

另一方面,当$x\in(n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi)$时,$f(x)<0$.

综合得$x_n\in(n\pi,n\pi+\frac{\pi}{2})$,从而$\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{n^2\pi^2}$, 而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$收敛,

根据比较判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n^2}$收敛.