

课程作业 (5)

张晗潇 12036020 浙江大学物理学系 理论物理班·聚变理论与模拟中心
邮箱: zhx_199855@163.com 联系电话: 17367078032 授课教师: 马志为 on 2021.3.31

Exercise 9.13

质量可忽略不计的两根细杆牢固地连接在其端部, 形成 90° 角。杆在 xy 平面中旋转, 其连接端在 origin 形成转轴。质量为 75 g 的质点附着在一根杆上, 距起点的距离为 42 cm , 质量为 30 g 的颗粒附着在另一根杆上, 距起点的距离为 65 cm 。

- (1) 整个装配体组件的转动惯量是多少?
- (2) 如果两质点到原点的距离不变, 但改为附着在同一根杆上, 转动惯量将如何变化?

解:

- (1) 总转动惯量

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

将题中的 $m_1 = 75\text{ g} = 0.075\text{ kg}$ 、 $m_2 = 30\text{ g} = 0.030\text{ kg}$ 、 $r_1 = 42\text{ cm} = 0.42\text{ m}$ 、 $r_2 = 65\text{ cm} = 0.65\text{ m}$ 分别代入, 直接计算得

$$I = 2.6 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- (2) 不会改变。因为转动惯量只和质量径向分布的情况有关, 和角向分布的情况无关。(所以也和两根杆之间的夹角无关。)

Exercise 9.14

考虑【Exercise 9.13】中的装配体, 设第一根杆沿 x 轴正方向放置, 第二根杆沿 y 轴正方向放置时。力 $\mathbf{F} = (3.6\text{ N})\hat{i} + (2.5\text{ N})\hat{j}$ 同时在两个质点上, 求系统的角加速度。

解:

一种方法是画图并标明力的作用点和方向, 再作出力臂(即过原点作出垂直于力的作用线的线段), 利用解三角形的方法测得力臂长度, 再计算出力矩。这种做法比较麻烦, 所以我们这里直接采用矢量叉乘的坐标表示进行计算。

根据题意, 两个质点的位矢分别为

$$\mathbf{r}_1 = (0.42\text{ m})\hat{i} + (0.00\text{ m})\hat{j} + (0.00\text{ m})\hat{k}$$

$$\mathbf{r}_2 = (0.00\text{ m})\hat{i} + (0.65\text{ m})\hat{j} + (0.00\text{ m})\hat{k}$$

而同时作用在两个质点上的外力为

$$\mathbf{F} = (3.6 \text{ N})\hat{i} + (2.5 \text{ N})\hat{j} + (0.0 \text{ N})\hat{k}$$

故合力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} \\ &= (0.0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{i} + (0.0 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{j} + (-1.3 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\tau} = (-1.3 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ 。根据转动定律（也可以称作“转动的牛顿第二定律”）

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$$

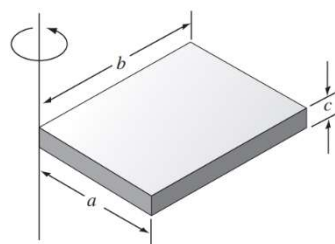
代入已经得到的 $I = 2.6 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，最终解得角加速度

$$\boldsymbol{\alpha} = (-50 \text{ rad/s}^2)\hat{k}$$

则角加速度的大小为 50 rad/s^2 ，其矢量方向沿着 z 轴负方向（或者说转动加速的方向从上向下看为顺时针）。

Exercise 9.17

右图为一质量均匀分布的长方体物块，质量为 M ，棱长分别为 a 、 b 、 c ，计算绕图示轴的转动惯量，该轴穿过一个角并垂直于物块的最大一个面。



解：

根据转动惯量的定义，有

$$\begin{aligned}I &= \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \\ &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2) \frac{M}{abc} dz dy dx \\ &= \frac{M}{3} (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

其中 $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{abc}$ 为物块密度。

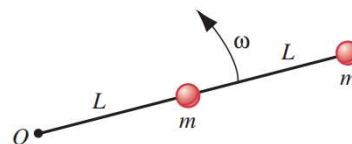
Exercise 9.19

如图，质量为 m 的两个质点通过两根杆固定在一起，并固定在旋转轴上，每根杆的长度为 L 、质量为 M 。该装配体以角速度 ω 绕旋转轴旋转。求绕该轴的转动惯量的代数表达式。

解:

从转轴由近至远, 第一根杆绕轴的转动惯量

$$I_1 = \frac{1}{3} ML^2$$



(也可以根据平行轴定理, 为 $I_1 = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$)

第一个质点绕轴的转动惯量

$$I_2 = mL^2$$

第二根杆绕轴的转动惯量 (根据平行轴定理)

$$I_3 = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{3L}{2} \right)^2 = \frac{7}{3} ML^2$$

第二个质点绕轴的转动惯量

$$I_4 = m(2L)^2 = 4mL^2$$

故有总转动惯量

$$\begin{aligned} I &= \sum_i I_i = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ &= \frac{8}{3} ML^2 + 5mL^2 \end{aligned}$$

(另外一种方法是将两根杆看作整体, 直接计算出 $I_{\text{rod}} = \frac{1}{3} (2M) (2L)^2 = \frac{8}{3} ML^2$ 。)

Exercise 9.21

右图 (图略) 显示了在第 9-3 节中考虑的实心杆, 该实心杆被均分为任意 N 小段。

(1) 每小段的质量 m_n 是多少?

(2) 证明每小段与旋转轴之间的距离都可以表示作 $r_n = \left(n - \frac{N+1}{2} \right) \frac{L}{N}$ 。

(3) 利用公式 $I = \sum_n r_n^2 m_n$ 计算其转动惯量, 并证明它将趋近于 $I = \frac{1}{12} ML^2 \left(\frac{N^2 - 1}{N^2} \right)$ 。

可能用到的数列求和公式:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N 1 &= N \\ \sum_{n=1}^N n &= \frac{N(N+1)}{2} \\ \sum_{n=1}^N n^2 &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \end{aligned}$$

解:

(1) 将长为 L 、质量为 M 的实心杆均分为 N 小段，从转轴一侧到另外一侧每段分别编号为 $1, 2, 3, \dots, n, \dots, N$ ，显然每段的质量均为

$$m_n = \frac{M}{N}$$

(2) 由于每段的长度均为

$$L_n = \frac{L}{N}$$

则每段的质心（距其开始处有 $\frac{L_n}{2}$ 处）到转轴的距离（转轴距端点 $\frac{L}{2}$ 处）为

$$r_n = (n-1) \frac{L}{N} + \frac{L}{2N} - \frac{L}{2} = \left(n - \frac{N+1}{2} \right) \frac{L}{N}$$

(3) 整根杆的转动惯量

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^N r_n^2 m_n \\ &= \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{N+1}{2} \right)^2 \left(\frac{L}{N} \right)^2 \left(\frac{M}{N} \right) \\ &= \frac{ML^2}{N^3} \sum_{n=1}^N \left[n^2 - (N+1)n + \frac{(N+1)^2}{4} \right] \\ &= \frac{ML^2}{N^3} \left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N(N+1)^2}{2} + \frac{N(N+1)^2}{4} \right] \\ &= \frac{ML^2}{N^3} \left(\frac{N^3}{12} - \frac{N}{12} \right) \\ &= \frac{1}{12} ML^2 \left(\frac{N^2-1}{N^2} \right) \end{aligned}$$

即题中所要求的表达式。显然当 N 足够大（切分足够细）时该式趋近于 $\frac{1}{12} ML^2$ 。

附 1：转动惯量的计算

转动惯量，可以直接理解为质点系对某轴转动时惯性大小的度量。它和平动中质量的定义是类似的——质量可以理解为质点或质点系平动惯性大小的度量。所以从这个定义来说，转动惯量就是转动情况下的“质量”，由此便不难理解转动定律和牛顿第二定律具有相似的形式了。

转动惯量的定义式往往需要借助能量方法推导而出。在平面上的定轴转动（注意这个前提！）下，它往往被视为一个标量。（对于三维空间中更复杂的转动情况，转动惯量便不再是标量，甚至也不是矢量，而应当被视作一个二阶张量——或许更像一个 3×3 的矩阵，共有 9 个分量。）它只和质量在径向的分布有关。绕某 z 轴的转动惯量可以表示为

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

在不致引起混淆的情况下可以省略下标。对质量连续分布的体系，我们只需将求和改成积分，即

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$

其中 $\rho = \rho(\mathbf{r})$ 是个以 \mathbf{r} 为变量的函数，也就是各位置处物体的密度值。

对于质量沿着线或者面分布的物体（例如绳、杆、链、薄板、薄盘等），转动惯量显然也可表示如下

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \lambda dl$$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma dS$$

同样有 $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ 、 $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ ， λ 为线密度， σ 为面密度。注意在不同坐标系中这些微小的面元、体元可以有不同表示

$$dS = dx dy \quad dV = dx dy dz \quad (\text{平面、空间直角坐标系})$$

$$dS = r dr d\theta \quad (\text{平面极坐标系})$$

$$dV = r dr d\theta dz \quad (\text{空间柱坐标系})$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (\text{空间球坐标系})$$

此外我们还有关于计算转轴偏离质心所在转轴的平行轴定理和适用于平板刚体的垂直轴定理，在此不再赘述，注意要清楚以上两定理的适用范围——平行轴定理只能以通过质心的转轴为出发点向外发散，而垂直轴定理只适用于平板刚体。根据平行轴定理我们也可以有一个简单的推论：在众多平行轴中，绕通过质心的转轴转动惯量最小。

常见均匀几何形体的刚体转动惯量列表如下：

表 11-1 均质物体的转动惯量

物体的形状	简 图	转动惯量	惯性半径	体 积
细直杆		$J_C = \frac{m}{12} l^2$ $J_O = \frac{m}{3} l^2$	$\rho_C = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ $\rho_O = \frac{l}{\sqrt{3}}$	
薄壁圆筒		$J_O = mR^2$	$\rho_O = R$	$2\pi R h$
圆柱		$J_C = \frac{1}{2} mR^2$ $J_O = J_C + \frac{m}{12}(3R^2 + l^2)$	$\rho_C = \frac{R}{\sqrt{2}}$ $\rho_O = \rho_C = \sqrt{\frac{1}{12}(3R^2 + l^2)}$	$\pi R^2 l$
空心圆柱		$J_O = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$	$\rho_O = \sqrt{\frac{1}{2}(R^2 + r^2)}$	$\pi l(R^2 - r^2)$
薄壁空心球		$J_C = \frac{2}{3} mR^2$	$\rho_C = \sqrt{\frac{2}{3}} R$	$4\pi R^2 h$
实心球		$J_C = \frac{2}{5} mR^2$	$\rho_C = \sqrt{\frac{2}{5}} R$	$\frac{4}{3}\pi R^3$

续表				
物体的形状	简 图	转动惯量	惯性半径	体 积
圆锥体		$J_z = \frac{3}{10}mr^2$ $J_x = J_y = \frac{3}{80}m(4r^2 + l^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{3}{10}}r$ $\rho_x = \rho_y = \sqrt{\frac{3}{80}(4r^2 + l^2)}$	$\frac{\pi}{3}r^2l$
圆环		$J_z = m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$	$\rho_z = \sqrt{R^2 + \frac{3}{4}r^2}$	$2\pi r^2R$
椭圆形薄板		$J_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{4}a^2$ $J_x = \frac{m}{4}b^2$	$\rho_z = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ $\rho_y = \frac{a}{2}$ $\rho_x = \frac{b}{2}$	πabh
长方体		$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)}$ $\rho_y = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + c^2)}$ $\rho_x = \sqrt{\frac{1}{12}(b^2 + c^2)}$	abc
矩形薄板		$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ $J_y = \frac{m}{12}a^2$ $J_x = \frac{m}{12}b^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{1}{12}(a^2 + b^2)}$ $\rho_y = 0.289a$ $\rho_x = 0.289b$	abh

Exercise 9.33

质量为 1.92 kg 的圆柱体绕其对称轴旋转。如右图所示施加力: $F_1 = 5.88 \text{ N}$ 、 $F_2 = 4.13 \text{ N}$ 、 $F_3 = 2.12 \text{ N}$, 其中 $R_1 = 4.93 \text{ cm}$ 、 $R_2 = 11.8 \text{ cm}$, 求出圆柱角加速度的大小和方向。

解:

给圆柱体的总力矩

$$\begin{aligned}\tau &= R_2 \times F_1 + R_2 \times F_2 + R_1 \times F_3 \\ &= (R_2 F_1 - R_2 F_2 + R_1 F_3) \hat{k} \\ &= 0.102 \text{ kg} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

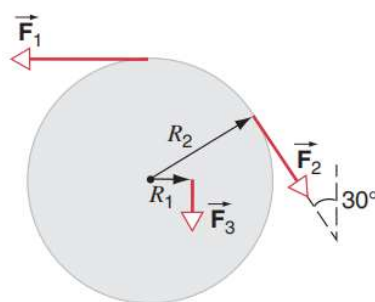
圆柱体绕其对称轴的转动惯量

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 0.0134 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

根据转动定律

$$\tau = I\alpha$$

解得角加速度

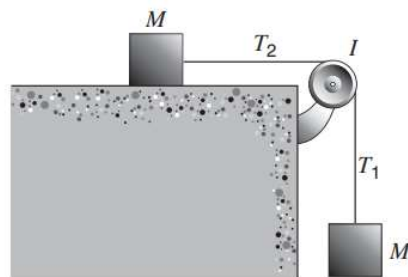


$$\alpha = (7.61 \text{ rad/s}^2) \hat{k}$$

则角加速度的大小为 7.61 rad/s^2 ，其矢量方向沿着 z 轴正方向（或者说转动加速的方向从向上向下看为逆时针）。

Exercise 9.38

两个相同的、质量均为 M 的物块通过一根细绳连接在半径为 R 、转动惯量为 I 的无摩擦皮带轮上（如右图），细绳不会在皮带轮上滑动，桌面与物块之间是否存在摩擦尚不清楚。从静止释放，发现皮带轮在时间 t 内旋转了一个角度 θ ，并且物块的加速度恒定。



- (1) 皮带轮的角加速度是多少？
 - (2) 这两个物块的加速度是多少？
 - (3) 细绳上部和下部的张力分别是多少？
- 所有答案用 M 、 I 、 R 、 θ 、 g 、 t 表示。

解：

设绳（即两个物块）加速度大小为 a ，以沿绳向下（向右）为正方向。

对两个物块和皮带轮，根据牛顿第二定律（或转动定律）分别有

$$Mg - T_1 = Ma$$

$$T_1 R - T_2 R = I\alpha$$

$$T_2 - f = Ma$$

其中 f 为桌面与物块之间（可能有的）摩擦力大小。

(1) 对于皮带轮，由于其从静止开始匀加速转动，且时间 t 内旋转了一个角度 θ ，容易得到其角加速度（顺时针加速转动）

$$\alpha = \frac{2\theta}{t^2}$$

(2) 由于细绳绕过皮带轮时无滑动，则根据加速度和角加速度的关系，解得绳的加速度

$$a = aR = \frac{2\theta R}{t^2}$$

这也是两个物块的加速度大小，方向分别沿绳向下和向右。

(3) 将以上结果代入原来的三个动力学方程，则只剩下 T_1 、 T_2 、 f 三个未知数。易解得

$$\text{下段绳中的张力} \quad T_1 = Mg - Ma = Mg - \frac{2M\theta R}{t^2} \quad (\text{受拉})$$

$$\text{上段绳中的张力} \quad T_2 = T_1 - \frac{I\alpha}{R} = Mg - \frac{2M\theta R}{t^2} - \frac{2I\theta}{Rt^2} \quad (\text{受拉})$$

$$\text{另有上方滑块受到摩擦力} \quad f = T_2 - Ma = Mg - \frac{4M\theta R}{t^2} - \frac{2I\theta}{Rt^2} \quad (\text{水平向左})$$

Exercise 9.41

时速 78.3 km/h 的汽车，轮胎直径为 77.0 cm 。

- (1) 轮胎绕车轴的角速度是多少？
- (2) 如果使汽车均匀地减速停止，此过程中车轮总共转动了 28.6 圈（无打滑），车轮的角加速度是多少？
- (3) 在此制动期间，汽车前进了多远？

解：

- (1) 本题完全类同于【Exercise 8.30】。

汽车前进速度 v_0 与车轮绕轴角速度 ω 之间满足 $v_0 = R\omega$ ，其中 R 为车轮的半径。

将汽车前进速度 $v_0 = 78.3 \text{ km/h} = 21.8 \text{ m/s}$ 和车轮半径 $R = 77.0 \text{ cm}/2 = 0.385 \text{ m}$ ，因此车轮绕轴的角速度

$$\omega = \frac{v_0}{R} = 56.6 \text{ rad/s}$$

- (2) 对应即为角速度从 $\omega = 56.6 \text{ rad/s}$ 降到 0 rad/s ，在此过程中车轮转动了 28.6 圈，则总角位移 $\theta = 28.6 \times 2\pi = 57.2\pi \text{ rad}$ ，故角加速度

$$\alpha = \frac{0 - \omega^2}{2\theta} = -8.91 \text{ rad/s}^2$$

以初始角速度方向为正方向。

- (3) 根据 $v_0 = R\omega$ ，对时间积分可得到汽车总位移 x 和车轮总角位移 θ 的关系

$$\int_0^t v_0 dt = \int_0^t R\omega dt \implies x = R\theta$$

由于整个制动过程中车轮共转了 28.6 圈，容易有汽车的总位移

$$x = R\theta = 28.6 \cdot 2\pi R = 69.2 \text{ m}$$

Exercise 9.42

一只悠悠球，转动惯量为 $950 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ ，质量为 120 g ，它的轴半径为 3.20 mm 、绳长为 134 cm 。悠悠球从静止滚动到绳的末端。

- (1) 它的加速度是多少？
- (2) 到达绳的末端需要多长时间？
- (3) 如果悠悠球“躺”在绳的底部只纯转动，那么其角速度以 rev/s 为单位是多少？
- (4) 重复(3)，但这一次假设悠悠球是以 1.30 m/s 的初速度被投掷下来。

解：

参考课本里的【Sample Problem 9.13】，对悠悠球受力分析，并分别列出沿竖直方向平动和绕悠悠球中心点（质心）转动的牛顿第二定律。平动以竖直向下为正方向，转动以逆时针

旋转为正方向, 分别有

$$\begin{aligned}\sum F_y &= mg - T = ma_y \\ \sum \tau_z &= TR_0 = I\alpha_z\end{aligned}$$

(1) 由于轴半径 (也就是接绳到悠悠球质心的距离) 为 R_0 , 悠悠球在绳上只有转动而无滑动, 故悠悠球转动的角速度和抽绳的速度 (即悠悠球质心下降的速度) 显然满足关系

$$v_y = \omega_z R_0$$

两边同时求导后得到悠悠球转动的角加速度和悠悠球质心下降的加速度所满足的关系

$$\frac{d}{dt} v_y = \frac{d}{dt} (\omega_z R_0) \implies a_y = \alpha_z R_0$$

代入上式, 求解得到悠悠球的加速度满足

$$a_y = \frac{mR_0^2}{mR_0^2 + I} g$$

将 $I = 950 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 = 9.5 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $m = 120 \text{ g} = 0.120 \text{ kg}$ 、 $R_0 = 3.20 \text{ mm} = 0.00320 \text{ m}$ 、 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ 代入, 解得

$$a_y = 0.125 \text{ m/s}^2$$

(2) 根据匀加速直线运动的规律, 易解得其时间为 (其中 $l = 134 \text{ cm} = 1.34 \text{ m}$)

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_y}} = 4.63 \text{ s}$$

(3) 悠悠球转动的角加速度

$$\alpha_z = \frac{a_y}{R_0} = 39.1 \text{ rad/s}^2$$

则到底端后的角速度

$$\omega = \alpha_z t = 181 \text{ rad/s} = \frac{181}{2\pi} \text{ rev/s} = 28.8 \text{ rev/s}$$

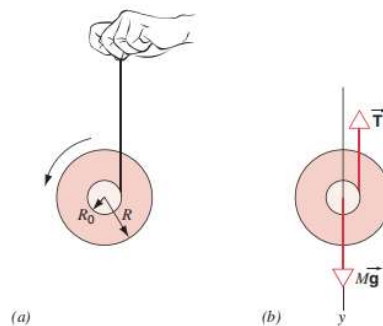
评注: 在实际生产生活应用中 (尤其是研究齿轮、电机转子等的时候), 为了使测量和计算方便, 转速 (以 rev/s 或 rev/min 为单位) 往往是衡量物体转动快慢程度更常用的物理量。我们要熟悉它和角速度 (以 rad/s 为单位) 之间的转换关系。

(4) 根据匀加速直线运动的规律, 解得悠悠球落至底端后的质心线速度为

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a_y l} = 1.42 \text{ m/s}$$

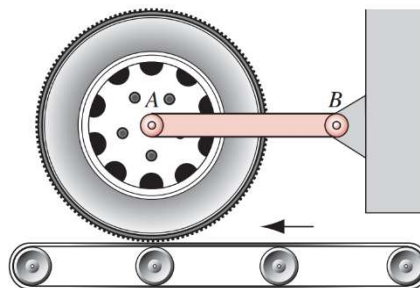
则到底端后的角速度

$$\omega = \frac{v}{R_0} = 444 \text{ rad/s} = 70.7 \text{ rev/s}$$



Exercise 9.43

右图是用于测试汽车轮胎防滑性的设备。轮胎最初是静止不动，并被固定在轻质框架中，该轻质框架在点 A 和 B 处以铰链连接（可自由旋转）。车轮绕其轴线的转动惯量为 $0.750 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，质量为 15.0 kg ，半径为 30.0 cm 。将轮胎放在传送带的表面上，传送带以 12.0 m/s 的表面速度运动，因此 AB 是水平的。



- (1) 如果轮胎与传送带之间的动摩擦系数为 0.600 ，那么车轮要经过多久才能达到其最终角速度？
- (2) 输送机表面上的滑痕长度将是多少？

解：

- (1) 车轮的最终角速度应当使得车轮边缘上的线速度和传输带前进的速度相同，即

$$\omega_f = \frac{v}{R} = 40.0 \text{ rad/s}$$

滑动摩擦力的大小（其中取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ）

$$f = \mu N = \mu mg = 88.2 \text{ N}$$

可以提供的车轮角加速度

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{fR}{I} = 35.3 \text{ rad/s}^2$$

因此所需要的时间

$$t = \frac{\omega_f}{\alpha} = 1.13 \text{ s}$$

- (2) 划痕的长度就是在这段时间内传送带的总位移，则

$$x = vt = 13.6 \text{ m}$$

Problem 9.21

均质球体沿斜坡向下滚动。

- (1) 如果球心的线加速度为 $0.133g$ ，则斜坡的倾角必须为多少？
- (2) 对于该倾角的情况，无摩擦的滑块沿直线向下滑动的加速度将是多少？

解：

- (1) 如右图所示，以球体和斜面的接触点（图中 A 点）为转轴，根据转动定律（以顺时针转动为正方向）

$$\tau = I\alpha$$

即为（注意由于转轴不是球的质心，需要使用平行轴定理导出此时的转动惯量）

$$MgR \sin \theta = \left(\frac{2}{5} MR^2 + MR^2 \right) \alpha$$

代入 $\alpha = \frac{a_c}{R} = 0.133 \frac{g}{R}$ ，解得

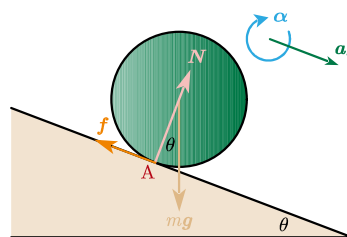
$$\theta = \arcsin \left(\frac{7}{5} \times 0.133 \right) = 10.7^\circ$$

（评注：牛顿第二定律和转动定律都是矢量式，但由于矢量的分量是标量，所以在约定正方向后它们分别可以写成三个方向的标量式。这里是定轴转动，只有一个方向的力矩，所以也可以写成这样的标量式。另外本题是在瞬心系中进行研究，同学们也可以思考使用质心系进行研究的方法。）

(2) 容易得到滑动情况的向下加速度为

$$a_{cf} = g \sin \theta = 0.186g$$

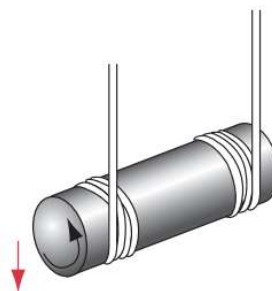
我们可以发现转动比滑动的质心加速度要小。从能量角度分析，滑动情况下是重力势能完全转化为质心的平动动能，而转动情况下重力势能只有一部分转化为质心的平动动能（另一部分转化为转动的动能），所以质心的平动动能会变小。



Problem 9.22

长度为 L 、半径为 R 的实心圆柱体的重量为 W 。两根细线缠绕在圆柱体上，两端附近各一根，线的端部连接到天花板上的挂钩上（如右图所示）。将圆柱体水平固定，两根线完全垂直放置，然后从静止释放。求：

- (1) 每根线在释放瞬间的张力；
- (2) 圆柱在下落时的线加速度。



解：

由对称性可以猜测两根线内的张力相同，设其大小为 T 。

如右图所示，以质心竖直向下平动、逆时针转动为正方向，以圆柱体对称轴（即右图中的 O_1O_2 轴）为转轴，分别根据牛顿第二定律和转动定律有

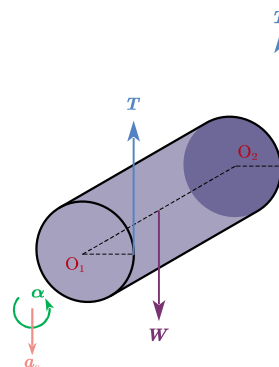
$$\sum F_y = Ma_c$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

即（注意到转动惯量 $I = \frac{1}{2} MR^2$ ，其中圆柱质量 $M = \frac{W}{g}$ ）

$$W - 2T = Ma_c = \frac{W}{g} a_c$$

$$2TR = \frac{1}{2} MR^2 \alpha = \frac{WR^2 \alpha}{2g}$$



同时有 $a_c = R\alpha$ ，因此分别解得质心的线性加速度和单根线中张力大小为

$$a_c = \frac{2g}{3}$$

$$T = \frac{Wa_c}{4g} = \frac{W}{6}$$

Problem 9.24

质量为 M 、半径为 R 的均匀圆盘最初静止在无摩擦的水平面的一侧。然后，通过缠绕在其边缘上的细绳在其周缘切向施加恒定的力 F ，描述圆盘的后续运动（含平动和转动）。

解：

本题应当理解为圆盘竖立在水平面上的滚动而非圆盘平放在水平面上的一般平面运动，否则会出现用初等方法无法求解的微分方程。（有兴趣的同学也可以尝试将方程列出来，不要求求解。）

因此容易得知圆盘的平动质心加速度

$$a_c = \frac{F}{M}$$

圆盘的转动角加速度大小（以质心为参考点）

$$\alpha = \frac{FR}{I} = \frac{2F}{MR}$$

所以圆盘朝着所施加力的方向加速滚动。

附 2：刚体的静力学平衡问题举例

在之前，我们求解了很多关于刚体的动力学问题，而对刚体的静力学问题（即平衡问题）涉及较少。其实，和平动的平衡（静止或匀速直线运动）可以认为是牛顿第二定律中加速度等于零的特殊情况一样，转动的平衡（无转动或匀速转动）也可以认为是转动定律中角加速度等于零。对于刚体的平衡问题，除了要满足加速度为零（也就是合外力为零）外，还需要满足角加速度为零（也就是合外力矩为零）。刚体的平衡问题在科研和生产生活中有着广泛的应用。

具体来说，对于平面上的刚体平衡问题，我们可以列出三个平衡方程（两个力的平衡方程、一个力矩的平衡方程）

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum \tau_{Oz} = 0$$

其中 $\sum \tau_{Oz}$ 也可以简写为 $\sum \tau_O$ ，指的是以 xy 平面内的 O 点为旋转中心的所有力矩（有正负之别）的代数和。由于 xy 平面上的所有力提供的力矩如果论矢量方向只可能在 z 轴上，所以它也是 z 轴方向上所有力矩（有正负之别）的代数和。旋转中心 O 点原则上可以任意选定，可以证明它的具体选择不影响平衡的成立，一般尽量使得那些难以知道、不必要知道的力的作用线通过 O 点，就不需要考虑它们所提供的力矩，从而简化计算。

而对于在三维空间中的刚体平衡问题,我们则可以列出六个平衡方程(三个力的平衡方程、三个力矩的平衡方程)

$$\begin{array}{ccc} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum \tau_{Ox} = 0 & \sum \tau_{Oy} = 0 & \sum \tau_{Oz} = 0 \end{array}$$

(思考:什么叫“自由度”?为什么我们说平面上的点有两个自由度、空间中的点有三个自由度、平面上的刚体有三个自由度、空间中的刚体有六个自由度?)

由于对单个刚体,我们只能列出三个(或六个)平衡方程,所以最多也就只能解出三个(或六个)未知量。当因为对称性或不独立等其他原因导致平衡方程的数目减少时,则所能解出的未知量数目也相应减少。如果题目中的待求未知量数目恰好等于能够列出的独立平衡方程数目,就意味着我们能够解出所有未知量,这样的问题称为“静定问题”。如果由于增加约束导致题目中的待求未知量数目多于能够列出的独立平衡方程数目,则只通过平衡方程是不能求出所有未知量的,这样的问题称为“超静定问题”。对于超静定问题,必须要考虑物体因为受力产生的形变来加列一些补充方程才可求解。要知道,刚体和质点一样,仅仅是一个从实际物体抽象而来的理想模型。一旦我们考虑了物体的形变,物体便不再能被视作刚体(而应该被视作弹性体),对其的讨论也超出了初等刚体力学的范畴,将在材料力学或结构力学等学科中进行讨论。

现在举两个简单的例子:

例 1: 两个质量均为 m 的小球 A 和 B, 用一根质量不计的细杆连接, 小球可视为质点。现在使该机构静止在如图所示的两光滑斜面上, 求平衡时形成的倾角 θ 的大小。

解法一: 显然斜面对小球的支持力应当垂直于斜面方向, 设其大小分别为 N_1 和 N_2 , 设杆长为 l , 则分别列出平衡方程:

$$\text{水平方向受力 (向右为正)} \quad \sum F_x = N_1 \sin 30^\circ - N_2 \sin 60^\circ = 0$$

$$\text{竖直方向受力 (向上为正)} \quad \sum F_y = N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - mg - mg = 0$$

$$\text{绕 A 点力矩 (逆时针为正)} \quad \sum \tau_A = N_2 l \sin(30^\circ + \theta) - mgl \cos \theta = 0$$

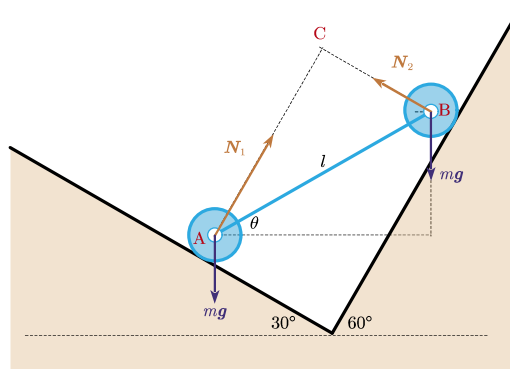
以上共三个方程, 三个未知量 (N_1 、 N_2 、 θ , 注意 l 可以消去), 可以求解。解得 $N_1 = \sqrt{3}mg$ 、 $N_2 = mg$ 、 $\theta = 30^\circ$ 。故平衡时形成的倾角 θ 的大小是 30° 。

正是由于这里的 l 是不能确定的, 所以我们知道平衡时形成的倾角 θ 的大小和 l 无关。

解法二: 上面的解法需要三个方程, 只有先解出了 N_1 、 N_2 才能解出 θ 。有没有办法不通过 N_1 、 N_2 也能解出 θ 呢? 我们分别延长 N_1 、 N_2 的作用线, 使之其垂直交于 C 点。我们容易发现: 假如选择 C 点为中心列出力矩平衡方程, 则 N_1 、 N_2 均不会在方程中出现。即有

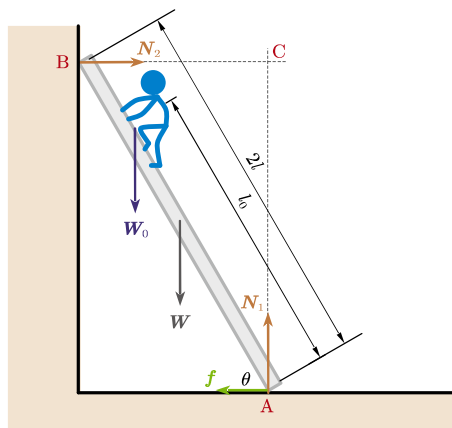
$$\begin{aligned} \text{绕 C 点力矩 (逆时针为正)} \quad \sum \tau_C &= mgl \sin(30^\circ + \theta) \cdot \sin 30^\circ \\ &\quad - mgl \cos(30^\circ + \theta) \cdot \sin 60^\circ = 0 \end{aligned}$$

所以只有一个方程、一个未知量, 直接可以解得 $\cot \theta = \sqrt{3}$, 即 $\theta = 30^\circ$ 。



例 2: 一架均匀的梯子自重为 W , 长为 $2l$, 上端靠在光滑的墙面上, 下端置于粗糙的地面上, 梯子与地面间的摩擦因数为 μ , 倾角为 θ 。设工人师傅的体重为 W_0 , 请问在保证安全(梯子不滑动)的前提下他最高能攀登到多高的地方? (工人师傅可视为质点。)

解: 将工人师傅所攀登到的位置到梯子底端的距离记作 l_0 , 将地面和墙面对梯子的支持力大小分别记作 N_1 和 N_2 , 地面对梯子的摩擦力大小记作 f , 各物理量的正方向如右图所示。我们显然可以在水平和竖直两个方向列出受力的平衡方程。至于力矩的平衡参考点虽然可以任意选择, 但为了简单, 我们可以选择 N_1 、 N_2 的作用线延长后的交点 C 点作为参考点, 这样这两个支持力就不会出现在这个方程中。此外梯子重力 W 的作用点显然在其质心处。



列出平衡方程:

$$\text{水平方向受力 (向右为正)} \quad \sum F_x = N_2 - f = 0$$

$$\text{竖直方向受力 (向上为正)} \quad \sum F_y = N_1 - W - W_0 = 0$$

$$\text{绕 } C \text{ 点力矩 (逆时针为正)} \quad \sum \tau_c = f \cdot 2l \sin \theta - W \cdot l \cos \theta - W_0 \cdot l_0 \cos \theta = 0$$

以上共三个方程, 三个未知量 (N_1 、 N_2 、 l_0 , 这里假定 f 是已知量), 可以求解。解得

$$N_1 = W + W_0$$

$$N_2 = f$$

$$l_0 = \frac{f \cdot 2l \tan \theta - Wl}{W_0}$$

又考虑到静摩擦力 $f \leq \mu N_1 = \mu(W + W_0)$, 所以

$$l_0 \leq 2\mu l \tan \theta \left(\frac{W}{W_0} + 1 \right) - \frac{W}{W_0} l$$

也就是说工人师傅为了保证安全(梯子不滑动)最高能攀登到 $l_0 = 2\mu l \tan \theta \left(\frac{W}{W_0} + 1 \right) - \frac{W}{W_0} l$ 处。

观察这个表达式, 我们发现若 μ 越大则允许攀登得越高, 若 θ 越大也允许攀登得越高。

附 3: 纯滚动时的静摩擦力与滚动摩阻简介

【感谢胡祺睿同学的思考与提问为本节提供了创作灵感~ 相信这也是很多同学的疑问, 因此我决定特地增加了这一小节分析纯滚动的物体所受的静摩擦力, 并为感兴趣的同学拓展关于滚动摩阻的知识。前者希望同学们尽量理解方便应用, 后者不属于《普通物理学》的教学内容, 仅供感兴趣的同学阅读参考。】

“Don’t reinvent the wheel.” (不要重复发明轮子。)

——英文谚语

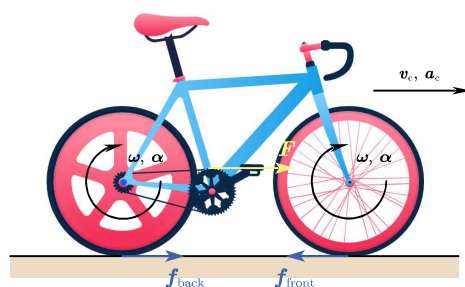
首先我们厘清关于“纯滚动”的概念。“纯滚动”即“无滑滚动”，也就是“只滚不滑”的意思。这也就是说，在平面上纯滚动的轮子（或者球等等），尽管轮子一直在转动，轮子的质心也一直在前进，但是在任何一瞬间，轮子与地面的接触点的速度一定为零，也就是轮子与地面一定无相对滑动。如果产生了相对滑动（即轮子与地面的接触点的速度不为零），那就不再是纯滚动，而是有滑动的滚动（或者说“连滚带爬”了）。在描述我们世界上各种各样的滚动（球、轮子、滚珠等等）的时候，纯滚动往往是非常好的一个近似模型。

既然接触点无滑动，如果接触点处有地面给它的摩擦力，那么也一定不是滑动摩擦力，而是静摩擦力。静摩擦力的最大特点就是大小和方向都不能直接确定（只能已知其他力后根据动力学关系求解，同时有其上限），因此需要具体问题具体分析。静摩擦力的意义在于阻止滑动，如果我们计算出维持纯滚动所需要的静摩擦力超出了其上限，就会发生滑动，不能维持纯滚动状态。

对于水平地面上以初速度 v_0 匀速滚动的轮子：如果是匀速滚动，质心应无加速度，所以合外力应该为零，故静摩擦力也是零，无论是质心平动速度还是转动角速度都不会改变。

对于斜面上从静止开始滚落的球（如【Problem 9.21】）：重力的分量是外加的驱动力（作用在质心），提供沿斜面向下的加速度；静摩擦力沿斜面向上，一方面抵消一部分质心加速度（所以滚动下落比滑动下落会慢一些），另一方面提供一个顺时针力矩让球得以向下滚动。此时的静摩擦力起到的是“阻止滑动、驱动转动、略微阻碍平动”的作用。（注意这时，由于纯滚动，所以 $v_c = \omega R$ 始终成立，两边求导后发现 $a_c = \alpha R$ 也始终成立。）

对于水平地面上的自行车：如图，一般自行车的主动轮（也就是和脚踏板直接用链条连接的轮子）是后轮，而前轮则是从动轮。对于后轮，脚踏板通过链条提供向前的驱动力（和顺时针的力矩），而受到地面的静摩擦力则向前（提供逆时针力矩），这个向前的静摩擦力为整辆车的前进提供动力，起到的是“推动平动、阻止滑动、略微阻碍转动”的作用。而对于前轮



这个被动轮，只受到向后的静摩擦力，正是这个静摩擦力让前轮得以顺时针转动，这时静摩擦力又是驱动转动的。对于汽车同理（主动轮受到的静摩擦力向前，被动轮受到的静摩擦力向后，如果是四轮驱动的车则所有轮子受到的静摩擦力均向前）。对于没有驱动力的情况（例如不蹬踏板、只让自行车凭惯性前进），前轮和后轮都是被动轮，故静摩擦力都向后。（同样注意，由于纯滚动， $v_c = \omega R$ 和 $a_c = \alpha R$ 也始终成立。）

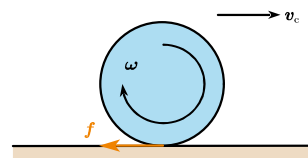
（关于自行车还有很多问题可以思考，例如：为什么自行车一般都是以后轮为主动轮而不是以前轮为主动轮？提示：前轮需要负责转向。为什么自行车无法倒着骑？为什么车胎没气的时候骑起来费劲？自行车究竟是如何保持平衡的？）

那么，地面上滚动的球是如何停下来的？

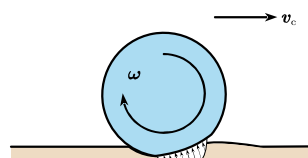
这个问题初看似乎并不是问题，很多同学的第一反应就是——一定是摩擦力导致的，就像在水平地面上推箱子最终会停下来是因为地面对箱子有滑动摩擦力一样。但是，仔细一想就会发现，对于滚动的情况，认为是摩擦力导致地面上滚动的球停下来就会导出明显的矛盾。

如右图，假设球具有向右的初速度，显然其也就具有顺时针方向的初角速度。假设静摩擦力的方向是向左的，那么从受力的角度分析，合外力显然向左，所以球将具有向左的质心加速度，

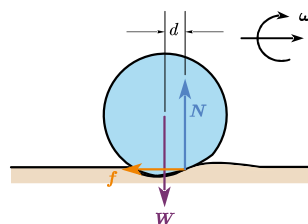
这应该导致球减速前进。但是，如果从力矩的角度分析，向左的合外力提供的是顺时针方向的力矩，这个力矩与初角速度的方向是同向的，所以会提供顺时针方向的角加速度，球反而会加速转动。又由于之前我们知道纯滚动条件下 $a_c = \alpha R$ 始终成立，我们根本不可能同时既让 a_c 减小又让 α 增大！假设静摩擦力的方向是向右的也会导致类似的矛盾。这就意味着我们的推导是错误的，地面上滚动的物体不可能仅受静摩擦力的作用而减速。



那这个“阻力”作用是怎么来的呢？经过研究发现，在实际情况下，球和地面都不能简单视作刚体，在发生接触、互相挤压会导致球和地面都发生形变，此时就产生了一个接触面，在接触面上会受到分布力的综合作用。它可以等效地这么理解：由于球对地面的压迫导致地面存在微小的下陷，所以相当于球在前进过程中一直都处在“爬坡”的状态，而这导致了地面对球的全反力（即支持力和摩擦力的合力，它们都是地面提供的约束力）的作用点会有略微前移，不再通过重力的作用线，而是拉开了一段小小的距离。



如右图所示，我们等效地记地面对球的全反力的竖直分力为 N 、水平分力为 f ，球重力为 W ，可见当 N 的作用位置相比重力略前移一段距离 d 时，球会多受一个逆时针方向的额外力矩 τ_f ，它的大小满足



$$\tau_f = dN$$

这个 τ_f 就被称为滚动摩阻力矩，显然它的方向与球转动的方向相反，所以它能够提供反方向的角加速度，使得球渐渐减速转动直到最终停下，真正发挥了阻碍转动的作用。而静摩擦力虽然阻碍平动、阻止滑动，但却会驱动转动。而对于在完全刚性的理想平面上的理想刚体，纯滚动是不应该有任何损耗的，此时也不存在静摩擦力，球将永远匀速滚动下去。

实验证明，滚动摩阻力矩和静摩擦力类似，它的值可能介于零和最大值之间，而最大值

$$\tau_{\text{fmax}} = \delta N$$

δ 就是 d 的最大值。我们发现 τ_{fmax} 一方面与 N 成正比，另一方面与 δ 有关，它被称为滚动摩阻系数（简称滚阻系数），具有长度的量纲。它与滚子和支撑面的材料硬度、湿度等相关，与滚子半径无关，可由实验测定。淬火钢珠与钢之间之间的滚阻系数 δ 只有大约 0.01 mm ，轮胎与地面间的滚阻系数 δ 则有大约 $2 \sim 10 \text{ mm}$ 。（思考：如何解释地面上的滚筒不是一推就动，而是需要施加一定的力才能被推动？）

由于滚阻系数往往非常小，大部分情况下可忽略不计，这使得滚动摩擦往往远远小于滑动摩擦，勤劳智慧的先民们利用这个原理创造了人类最古老也是最重要的发明之一——轮子。轮子的发明使得人类不再空耗大量能量用于克服与地面的摩擦，减轻了人类的负担、改变了人类使用力量的方式。有了轮子，人类不仅有可能远行，还可能搬运远远重于自身的物体，从而促进了族群间的交流，使得远距离的贸易和建设大规模的城市成为可能。轮子的独特之处还在于，它的发明并不像其他很多发明那样是来自大自然的启示（自然界中没有任何生物是在轮子上移动的），而完全是人类根据生产生活需要而发明的，是人类自身想象力和创造力的结晶。

轮子广泛应用的关键在于将转动的轮和固定的轴结合在一起，这样形成的轮轴是六种简单机械之一，也是人类运用技术的起点。并没有明确的证据表明是哪个文明最先发明了轮子——有一种观点认为是美索不达米亚文明——而中国自古以来也有“黄帝造车”的传说，也有玛雅等文

明直到灭绝也没能点出用于运输的轮子这一“科技树”。轮子不仅仅被用于运输，其旋转的特点还可用于成批制造陶器、用于水轮、用于纺车等等，当然也很快被用于统治和战争，从此轮子使用促成的技术进步与相应的影响深远的社会制度变革相伴而行。进入工业时代之后，齿轮、飞轮、螺旋桨、陀螺仪、轴承、电动机、离心机、涡轮机、光驱等等技术发明本质上都是轮子的延伸。

人类从文明之初就选择了轮子，而轮子也将伴随人类文明的始终，尽管这一伟大的发明早已为人类所司空见惯——西方的那句“不要重复发明轮子”的民谚，本质上是轮子作为一种“人类常识”的代名词，轮辋和车辙所见证的正是原本蒙昧的人类尝试认知世界的历程。轮子不但承载和推动了人类历史，更是被作为人类历史本身的比喻——滚滚向前，不可阻挡。

附 4：刚体力学提要

【说明：该部分内容比较抽象，故只是为了提供给学有余力的同学阅读参考，即使不甚理解也不必深究。力学、机械、能源、土建、水利、汽车、航空航天等工程学科的同学在未来还会有专门的课程来讲解相关的理论。如果希望了解更多可以到助教处领取参考书。】

1. 回顾：质点的合成运动

我们之前已经知道，质点的绝对运动（即相对于定参考系的运动）可以分解为两部分：质点的相对运动（即相对于动参考系的运动）和牵连运动（即动系相对于定系的运动）。质点的绝对速度和绝对加速度也可以表示为两个运动所对应速度和加速度的合成，即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}' \quad (\text{绝对速度等于牵连速度和相对速度的矢量和})$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}' \quad (\text{动系是平动时，绝对加速度等于牵连加速度和相对加速度的矢量和。})$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}' + \mathbf{a}_C \quad (\text{动系是定轴转动时，绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度和科里奥利加速度的矢量和})$$

要注意牵连加速度和相对加速度均可以分为切向分量和法向分量。

2. 刚体的平面运动：

而对于平面运动的刚体，我们同样也可以用运动分解的方法研究：取任意基点，则任何刚体的平面运动都可以分解为随着该基点的平动和绕该基点的转动两部分。其中平动速度和加速度与该基点的选择有关，而物体绕该基点转动的角速度和角加速度与该基点的选择无关，这里所谓的角速度和角加速度是相对于各基点处的平移参考系而言的。所以无论选择哪个点为基点，角速度和角加速度都是一样的。

我们假设选择刚体内的 O 点为基点，因此在我们研究刚体内另一点 A 点的运动时，我们也可以得到下面的速度合成与加速度合成公式

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{AO} \quad (\text{A 点速度等于基点速度和 A 点随刚体绕基点转动速度的矢量和})$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{AO}^t + \mathbf{a}_{AO}^n \quad (\text{A 点加速度等于基点加速度和 A 点随刚体绕基点转动的切向和法向加速度的矢量和})$$

同时我们还可以证明两个定理（同学们可自行尝试证明）：

速度投影定理：同一平面运动的刚体上，任意两点的速度在这两点连线上的投影分量相等。

速度瞬心定理：一般情况，在某一瞬时，平面运动的刚体上都唯一地存在一个速度为零的点。

(其实是垂直于该平面的一条线,但由于我们只研究平面运动,所以一般也称作“点”。)

这一点被我们称作速度瞬心。由此,刚体内任一点的速度等于该点随刚体绕速度瞬心所在轴转动的速度,也就是说刚体的平面运动可看作绕速度瞬心的瞬时转动。应该强调两点:(1) 尽管在每一时刻刚体中都有一点成为速度瞬心,但在不同瞬时速度瞬心的位置是不同的;(2) 速度瞬心只是这一时刻该点速度为零,加速度不一定为零,也请不要试图去寻找“加速度瞬心”。如果已知刚体上任意两点的速度,只要过这两点分别作速度方向的垂线,它们的交点就是速度瞬心。

3. 平面运动刚体的动力学方程:

尽管前面已经提到在分析刚体的运动时其参考点可以任意选择,但是在查考刚体的动力学(即力或力矩与加速度或角加速度的关系)时则不然,我们必须取一个特殊的基点(或者说特殊的参考系),这一基点便是质心,相应的参考系便称作质心参考系(即随质心一起运动的参考系)。

对于平面运动的刚体,我们有如下定理:

质心运动定理: $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_c$ (刚体总质量乘质心加速度为所有作用外力的矢量和)

质心转动定理: $\sum \tau_c = I_c \alpha$ (刚体绕质心的转动惯量乘角加速度为所有外力矩的矢量和)

这两个定理只对质心的特殊地位成立,可以根据它们列出动力学方程。由此我们发现刚体的平面运动宜分解为随质心的平动和绕质心的转动,前文的【Exercise 9.42】【Problem 9.22】【Problem 9.24】都是在质心系中(以质心为参考点)求解的实例。

那采用其他参考点会怎样呢?我们再考虑另一个特殊的点——速度瞬心,以速度瞬心(O点)为参考点的参考系简称为瞬心参考系。可以证明,瞬心系中的转动定理的形式为

$$\sum \tau' + \mathbf{r}'_c \times (-m\mathbf{a}_O) = I' \alpha$$

上述带撇的物理量均为瞬心系中对应的物理量,可以看出它比质心转动定理多了一项——在瞬心系中测得质心的位矢 \mathbf{r}'_c 与由于整个瞬心系是非惯性系而带来的惯性力的叉积(矢积),其中 \mathbf{a}_O 为瞬心本身的绝对加速度。对于在平面或斜面上滚动的球或轮子等物体(例如【Problem 9.21】),由于瞬心(即该题中A点)处加速度方向垂直斜面向上通过质心(留给同学们自己证明,注意关系式 $\mathbf{a}_c = R\alpha$ 是由 $\mathbf{v}_c = R\omega$ 两边求导而来,因此是合理的,这是在利用速度瞬心自身的性质,并不是捏造了一个“加速度瞬心”),故该项为零,则瞬心转动定理的形式与质心转动定理相同,所以【Problem 9.21】的解法才是合理的。之所以本题选取瞬心为参考点,是因为这样可以不用在方程中出现摩擦力 f ,大大简化计算。

4. 更复杂的刚体运动:

在我们的《普通物理学》课程中,只研究刚体较简单的运动形式——平动和定轴转动,以及两者合成的一般平面运动。实际上在三维空间中刚体还有更复杂的运动形式,如定点转动、一般的空间运动等。我们所熟悉的陀螺的运动就是刚体定点转动的一个特殊实例,称为回转运动。

刚体的定点转动可以分解为自转、进动和章动三个分运动,我们的地球也有自转、进动和章动(地轴的进动导致了“岁差”的产生,这使得北极星的“职位”所属将会在多年后发生变化,一万二千年后织女星或将成为新的北极星)。感兴趣的同学可以查阅相关资料,或选修《理论力学》等相关课程。