

# 第 1 周课后作业

黄于翀

3210105423

2024 年 3 月 3 日

## 1.

文章 [1]提出了一个模型： hybrid FEM-NN models,这个模型同时使用了有限元方法（FEM）和神经网络（NN），将神经网络和有限元方法结合起来，用神经网络来表示偏微分方程中的未知项，然后用有限元方法来求解偏微分方程。

解决问题的过程中还需要对具体问题进行离散化。文章中给出的一个例子是心脏细胞模型问题，涉及到一个复杂的非线性偏微分方程，使用了算子分裂法实现了离散化，并在后续借助FEM-NN模型成功求解了这一问题。

在解决问题的过程中发现，离散化这一步骤带来的误差比较大但是神经网络一定程度优化了这一部分的误差。因此思考未来有没有可能专门训练一个神经网络来减轻离散化的误差和不稳定性。

## 2.

### Path B

首先展开方程III 左端

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \mathbf{V} \cdot \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho
\end{aligned} \tag{1}$$

然后展开方程IV左端

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho \tag{2}$$

故方程III 和方程 IV 左端是相等的，故Path B 得证。

### Path D

这次我们从方程II 左端入手

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV \\
&= \iiint_V \frac{D(\rho dV)}{Dt} \\
&= \iiint_V \frac{D\rho}{Dt} dV + \iiint_V \rho \frac{DV}{Dt} \\
&= \iiint_V \frac{D\rho}{Dt} dV + \iiint_V \rho \frac{DV}{Dt dV} dV
\end{aligned} \tag{3}$$

可以发现,第二项的体积分内部即为速度散度的定义，故有

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dV \tag{4}$$

由于该控制体位置的选取是任意的，故要满足方程II,则必须满足体积积分内的式子恒为 0，也即

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{5}$$

即方程IV，故Path D 得证。

## 参考文献

- [1] Sebastian K. Mitusch, Simon W. Funke, and Miroslav Kuchta. Hybrid fem-nn models: Combining artificial neural networks with the finite element method. *Journal of Computational Physics*, 446:110651, 2021.