

课程作业 (6)

张晗潇、黄家兴 浙江大学物理学系·聚变理论与模拟中心 授课教师：马志为 on 2021.4.16

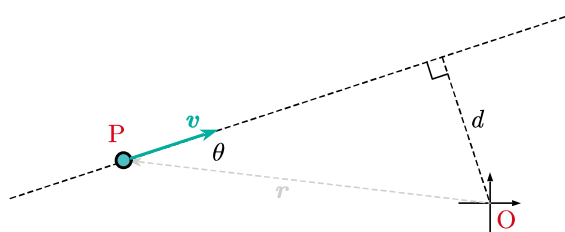
Exercise 10.1

质量为 13.7 kg 的质点以 380 m/s 匀速运动，轨迹直线距离原点 12 cm 。计算质点相对于原点的角动量大小。

解：

如右图，质点的角动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ &= (mvr \sin \theta) \hat{\mathbf{k}} \\ &= mvd \hat{\mathbf{k}} \\ &= (0.62 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$



即角动量的大小为 $0.62 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 。（其中 $\hat{\mathbf{k}}$ 由 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 的方向确定。）

Exercise 10.3

证明：匀速运动的质点在其整个运动过程中角动量不变。

解：

方法一：与上题类似，以任意选择的原点为参考点，由于 $\mathbf{l} = mvd\hat{\mathbf{k}}$ 且在匀速直线运动中 m 、 v 、 d 、 $\hat{\mathbf{k}}$ 均不变，所以角动量 \mathbf{l} 不变。

方法二（直接从角动量的定义出发证明）：由于

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \\ &= \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times (m\mathbf{a}) \\ &= m(\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}) \end{aligned}$$

根据矢量叉积的性质，相同矢量（或同向的矢量）叉积应为零，所以括号中第一项 $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ 为零；由于质点是作匀速直线运动，加速度 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ，所以括号中的第二项 $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ 也为零。

因此角动量对时间的导数恒为零（即 $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{0}$ ），也就是在全程中角动量并不随时间变化，

题意得证。

（本题推荐采用方法二，这种方法适用于各种与矢量代数相关的证明。）

Exercise 10.4

(1) 利用附录所提供的资料, 计算所有行星因绕太阳公转而产生的总角动量。

(2) 这其中有多少是木星贡献的?

解:

(1) 查课本附录 C (也就是【Appendix C: Astronomical Data】), 可获知太阳系中各行星的质量及公转轨道的半径和速度, 由此可方便地计算出角动量。

以太阳作为原点, 考虑行星运动近似为匀速圆周运动, 并认为所有行星都近似在同一平面上公转, 其公转方向都相同, 故认为所有行星的角动量都沿着同一方向, 可简单代数相加。则总角动量的大小表达为

$$L = \sum l_i = m_i r_i v_i$$

其中 m_i 、 r_i 、 v_i 分别为各行星的质量及公转轨道的半径和速度大小, 注意作为基数的地球质量为 $m_{\text{Earth}} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 因此计算得

$$\text{水星} \quad l_{\text{Mercury}} = 9.25 \times 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{金星} \quad l_{\text{Venus}} = 1.84 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{地球} \quad l_{\text{Earth}} = 2.67 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{火星} \quad l_{\text{Mars}} = 3.52 \times 10^{39} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{木星} \quad l_{\text{Jupiter}} = 1.94 \times 10^{43} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{土星} \quad l_{\text{Saturn}} = 7.84 \times 10^{42} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{天王星} \quad l_{\text{Uranus}} = 1.69 \times 10^{42} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$\text{海王星} \quad l_{\text{Neptune}} = 2.51 \times 10^{42} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

所以总角动量为

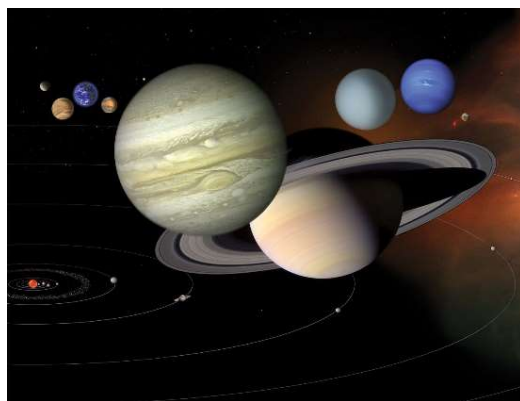
$$L = \sum l_i = 3.15 \times 10^{43} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

(注: 关于以上各行星轨道“共面性”、公转“同向性”的背后原因, 以及关于以上计算中未计入冥王星的解释, 可参见下文的【附 1: 从角动量守恒到天体系统的演化】。)

(2) 木星的角动量占总角动量的比例

$$\frac{l_{\text{Jupiter}}}{L} = 0.616$$

即木星贡献了整个太阳系行星 61.6% 的角动量。



▲ 太阳系的八大行星 (上方图为大小按比例绘制, 下方图为距离按比例绘制。可以发现太阳系实际上比我们想象中的要“空旷”得多。)

附 1：从角动量守恒到天体系统的演化

1. 太阳系的形成：

太阳系形成于 46 亿年前的大型分子云的引力坍塌区域中，其成分主要是氢与一些氦，还有前几代恒星聚变得到的少量重元素。大多坍塌的质量集中在中心，形成了太阳并点燃了热核聚变反应；其余部分“摊平”并形成了一个原行星盘，继而形成了行星、卫星、彗星和其他小型天体系统。这一广为接受的关于太阳系形成的理论被称为“星云假说”，最早版本由哲学家康德和数学家拉普拉斯提出，率先从科学的角度动摇了“自然界在时间上没有任何历史”的旧观念（恩格斯《自然辩证法》），并随着后来的一系列理论与实践逐步完善。

这个过程可以这样理解：原始星云作为质点系，可以认为内部作用几乎只有引力，在引力的不断吸引作用下原始星云开始坍塌，质量分布便越来越集中。由于整个质点系满足角动量守恒，一方面质量分布的集中必然导致运动速度的增大（简单理解：根据 $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ，由于总 \mathbf{l} 守恒，引力导致整体的 r 减小，所以整体的 \mathbf{v} 一定会增大，这就类似于花样滑冰运动员如果在旋转身体的过程中突然收回手臂，转速会突然加快），继而导致其中气体或尘埃之间的碰撞更加频繁，使得中心部分在质量越来越集中的同时还越来越炽热——最终形成了太阳；另一方面由于初始角动量是确定的，会导致上下方向的动量在漫长的岁月中由于碰撞被抵消，最终只余下同一个方向的旋转趋势，使得整个星云越来越“扁平”，又在离心作用之下成为原行星盘——最终冷却下来后形成了行星等天体，因此太阳系中各大行星几乎都在同一个平面上运动、夹角很小（即行星轨道的“共面性”），也因此太阳系中的各大行星公转方向都是一样的自西向东（即行星轨道的“同向性”），这也就是我们在上题【Exercise 10.4】中认为应该对所有行星的公转角动量同向相加的原因。

需要注意的是：尽管同样由于角动量守恒所以行星的自转方向和公转方向应该也是一样，但由于早期太阳系广泛存在的天体撞击事件，使得金星和天王星的自转方向被撞反（成为自东向西，因此在金星上看太阳是“西升东落”，而天王星则是以 97.9° 的转轴倾角几乎“躺着”在自转；另外亦有除撞击理论外的其他可能解释），不过这种撞击不足以彻底扭转行星的巨大公转角动量，所以行星的公转方向都是相同的（自西向东），并且与太阳的自转方向相一致，这也就是原始星云的角动量方向。

2. 星系的形状：

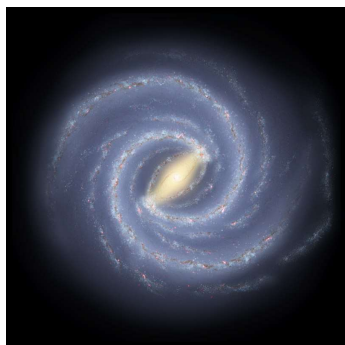
星系的形成过程与上述太阳系的形成过程有相似之处。我们所在的银河系是一个典型的旋涡星系（也有人称之为棒旋星系），但从侧面看起来它薄得像个圆盘，上述理论同样可以为我们揭示其背后的原因。这个圆盘被称作“银盘”，我们的地球处在银盘之中，所以我们永远只能窥



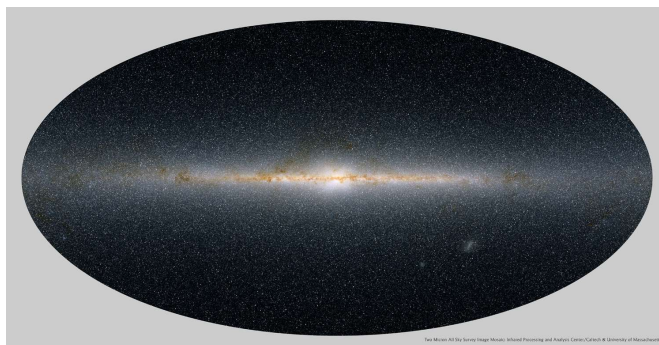
▲ 原行星盘（艺术想象图）

▼ 正在成形的行星（艺术想象图）





▲ 银河系俯视图（计算机模拟图）

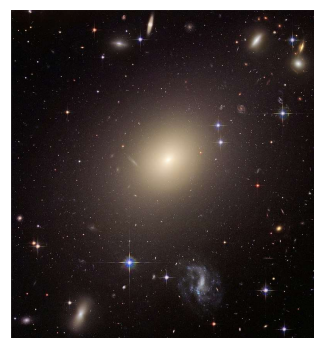


▲ 银河系侧视图（基于 2MASS 观测数据的银河系红外线画像）

得银河系的侧面，而难以直接俯视银河系的模样。而我们看到的“银河系侧面”，就是平日里在晴朗的夜里看到的“天河”——一条画过夜空的朦胧光带。

前面我们注意到，“扁平化”过程要进行下去，必须依赖于大量的碰撞。在银河系的早期，这片区域充满了气体和尘埃，它们分布弥散、碰撞频繁，因此“扁平化”过程进展较快。而当这些气体和尘埃汇聚形成恒星后，相当于大量质量被集中在很小的区域内，彼此之间的分布变得遥远（恒星之间的距离常常以光年计，所以恒星的碰撞是十分罕见的），因此“扁平化”过程会减缓直至停止，此时质量会按最自然的球对称分布。这也就解释了为什么我们的银河系“圆盘”中央往往还有“凸起”——银心附近由于引力作用物质的密度较大，所以形成恒星较早，恒星的形成消耗了气体与尘埃，使得银心附近“扁平化”的过程受到阻碍，所以在银心附近我们看到的是“凸起”的核球。

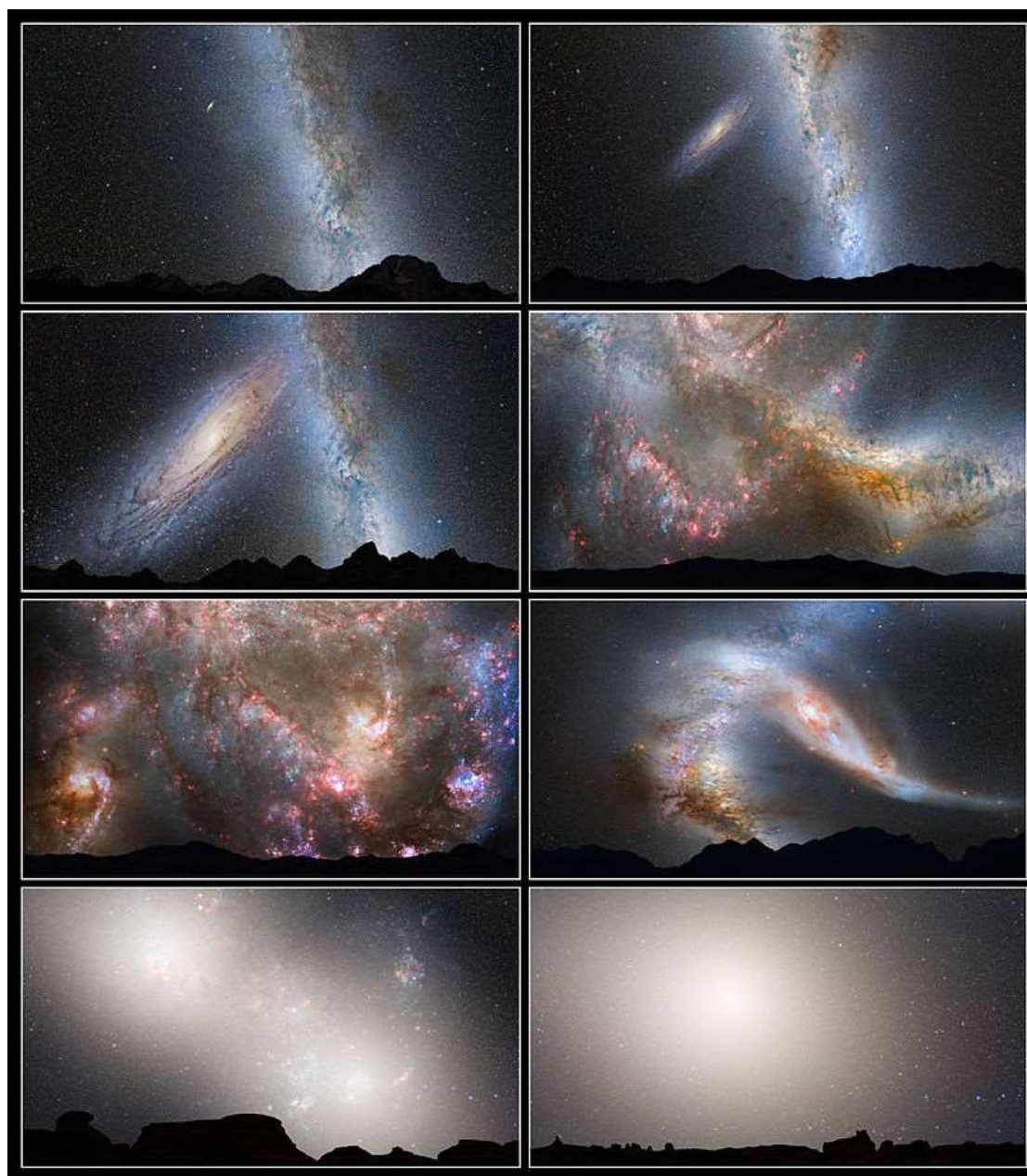
并不是所有的星系都会形成圆盘一样的结构，在浩瀚的宇宙中还存在着大量的椭球星系。这些星系往往是由多个大质量星系的碰撞与合并产生的，也有一些可能是诞生之初就有着较高的恒星形成率的星系。对于后者，较高的恒星形成率意味着星系内的气体和尘埃非常少，从而“扁平化”过程极弱；对于前者，碰撞时强烈的引力撕扯了原本的圆盘结构，同时由于发生碰撞的星系中有很多“已到老年”，其中大部分的气体和尘埃都被恒星的形成消耗掉了，所剩的那些已经无力再来一次“扁平化”过程——最终恒星受引力作用自然分布为球形，而微弱的、不明显的“扁平化”过程使之成为椭球形，并永远保持这个形状下去。

▲ ESO 325-G004
(一个位于半人马座的椭球星系)

这也将是我们所在的银河系和正在向我们奔赴而来的仙女座星系^[1]所共同的命运——天文学家发现仙女座星系正在以 $100 \sim 140 \text{ km/s}$ 的速度接近我们的银河系，并可能于四十亿年后发生碰撞，于七十亿年后合并成一个更大的椭球星系。这一合并后的新星系名称还没有被确定，各种提议中最被广泛接受的是 Milkomeda，亦即“银河系”(Milky Way)和“仙女座星系”(Andromeda)的英文合称——中文中则不妨将其称作“银仙系”。

——不用担心我们自己。星系合并并不是简单的刚体碰撞，星球直接碰撞的概率微乎其微。或许我们无法知道四十亿年后是否还有人类在银河系中欣赏这绚烂的“焰火表演”，但是所幸，“我们”——即使已经化作原子态——终将有机会亲身参与到这一宇宙中无比壮阔的瞬间。

[1] 也可以反过来说是我们的银河系正在朝向仙女座星系飞去，尽管实质上只是换一个参考系而已，但是据说——双向的奔赴才有意义。



▲ 银河系和仙女座星系的碰撞与合并全过程 (“从地球上看到的夜空”计算机模拟图)

第一行左图：现在，银河系是图中横贯夜空的光带；

第一行右图：往后的 20 亿年内，仙女座星系逐渐向我们靠近，能看到的盘面明显更大；

第二行左图：37.5 亿年后，仙女座星系近到几乎充满了视野；

第二行右图：38.5 亿年后，碰撞与合并发生，新恒星形成的过程绘就了绚烂的夜空；

第三行左图：39 亿年后，仙女座星系和银河系反复多次相对穿过，恒星的形成仍在继续；

第三行右图：40 亿年后，受到潮汐力影响，仙女座星系被拉长，银河系被扭曲；

第四行左图：51 亿年后，银河系和仙女座星系的核心似乎成了一对明亮的裂片；

第四行右图：70 亿年后，星系完全合并，形成了一个巨大的椭球星系，其明亮的核心主宰着夜空。

3. 开普勒第二定律:

角动量守恒其实并不是什么神秘或新鲜的理论, 同学们应该在高中阶段就接触了它的一种特殊形态——天体运动中的开普勒第二定律。这就好像尽管直到大学才真正引入了力矩和刚体平衡的概念, 然而杠杆的平衡原理却早在初中就已经出现在物理课堂上一样。

我们先回顾一下三条开普勒定律的表述:

开普勒第一定律 (轨道定律): 各个行星都沿各自的椭圆轨道环绕太阳, 而太阳则处在椭圆的一个焦点上;

开普勒第二定律 (面积定律): 在相等时间内, 太阳和运动着的行星的连线所扫过的面积都是相等的;

开普勒第三定律 (周期定律): 各个行星绕太阳公转周期的平方和它们的椭圆轨道半长轴的立方成正比。

历史上这三条定律启发了牛顿对万有引力定律的思考, 当然反过来利用万有引力定律也可以对开普勒的三大定律进行严格证明。我们这里只讨论开普勒第二定律, 它的实质其实是一一太阳对行星的引力是有心力 (引力 \mathbf{F} 永远作用在太阳与行星的连线上, 这使得 \mathbf{F} 和行星位矢 \mathbf{r} 永远平行, 则引力不提供任何外力矩), 在有心力场中行星的角动量总是守恒的。

如右图所示, 设行星沿着椭圆轨道绕太阳转动, 太阳在椭圆的其中一个焦点上。根据角动量守恒, 对于行星的任意两个位置, 显然有

$$l_1 = l_2 \implies mr_1 v_1 \sin \theta_1 = mr_2 v_2 \sin \theta_2$$

假设同样经历了一小段时间 dt , 则行星在轨道上经历的路径长度为 $v dt$, 其与太阳的连线扫过了一个小等腰三角形, 其面积为

$$dS = \frac{1}{2} v dt \cdot d = \frac{1}{2} r v \sin \theta dt$$

所以会有

$$\frac{1}{2} r_1 v_1 \sin \theta_1 dt = \frac{1}{2} r_2 v_2 \sin \theta_2 dt \implies dS_1 = dS_2$$

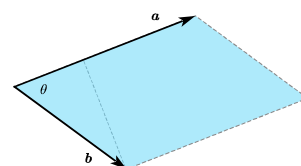
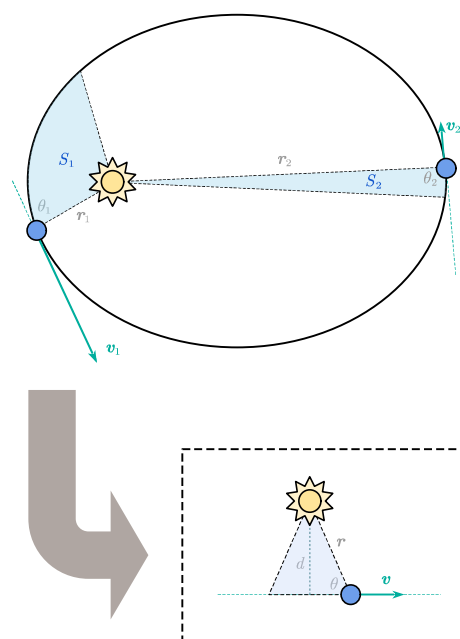
所以, 当经历同样一段较长时间时, 无数个小等腰三角形共同组成了图中的“椭圆扇形”。因为经过每一段时间新增的面积都相等, 累加后的面积自然也相等, 即

$$\int dS_1 = \int_0^t \frac{1}{2} r_1 v_1 \sin \theta_1 dt = \int dS_2 = \int_0^t \frac{1}{2} r_2 v_2 \sin \theta_2 dt \implies S_1 = S_2$$

这就证明了开普勒第二定律。所以行星在近日点附近轨道速度大, 远日点附近轨道速度小。

这也启发了我们矢量叉积的几何意义——两个矢量叉积所得到的新矢量, 其方向垂直于这两个矢量构成的平面, 其大小等于这两个矢量所张成的平行四边形面积 ($|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$), 如右图所示。

开普勒在第谷的观测数据的基础上提出的行星运动三大定律完



善和简化了哥白尼的日心说，彻底改写了天文学发展的进程。他所提出的行星运动的轨道有可能是椭圆而不是圆、行星的运动可能是不匀速的等等观点，极大挑战和动摇了亚里士多德和托勒密的旧有体系，也成了牛顿导出三大定律和万有引力定律的重要基础。

4. 太阳系的角动量分布：

太阳系中最主要的成员是太阳，它是一颗G2主序星，占据了太阳系所有已知质量的99.86%。然而，太阳自转的角动量却只占整个太阳系角动量的不到2%，太阳系的角动量几乎都被四颗巨行星占据——正如我们在上题【Exercise 10.4】中计算出的结果一样，其中角动量最主要的贡献者是木星（占了高达61.6%）。由此看来，形成行星系是从正在冷却的恒星中带走角动量的一种有效机制。如果每一颗恒星在它的发展历程上都像太阳那样在经历这个阶段时形成了一个行星系，那么，在我们的银河系中就可能就有 10^{10} 颗以上的恒星伴有行星。

5. 行星的定义：

行星通常指自身不发光、环绕着恒星的天体，行星的“行”意思是它并不像恒星那样几乎是镶嵌在天幕中没有相对运动（只是因为地球自转的原因随着天球整体转动），而是在恒星背景中游走不定。人类在很早就认识到了金、木、水、火、土这五颗能够用肉眼看到的行星。在日心说被提出后，人们渐渐接受地球也只是太阳系中的一颗普通行星；1781年，英国天文学家赫歇尔用自制的望远镜发现了第七颗行星天王星；1801年，在火星和木星轨道之间的谷神星被发现，之后在这里发现了许许多多密集的小天体，构成了一个小行星带；1846年，为了解释天王星轨道摄动的疑难，法国的勒维烈、英国的亚当斯“分别同时”^[2]利用牛顿的引力理论预测到天王星轨道外还有一颗新的行星，柏林天文台的加勒根据计算结果最终发现了第八颗行星海王星，这也是它被称为“笔尖下发现的行星”的原因；1930年，美国天文学家汤博发现冥王星，人们长期以来将之视作太阳系的第九大行星。从此，“九大行星”的观念印刻在人们头脑中长达数十年。

但是，人们很快发现冥王星实在太小了（甚至不如月球大），其质量、直径、偏心率均其它八颗相距甚远，根本不能称为“大行星”，而自1992年起陆续发现冥王星外与冥王星相若的天体，甚至2005年发现的冥外天体阋神星比冥王星还大，由此关于冥王星的行星地位越来越受到质疑。最终，在2006年的第26届国际天文学联合会上确立了行星的新定义：

1. 围绕于恒星运转（即公转）；
2. 有足够大的质量来克服固体应力，以达到流体静力平衡的形状（即近于球形）；
3. 有能力清空其周围轨道的小天体（即是该区域内最大天

体，能把轨道附近的小天体吸引成为自己的卫星）。

根据这个定义，太阳系只剩下八大行星，而像冥王星、阋神星、谷神星等符合前两个条件但不能清空其周围轨道小天体的则被称作“矮行星”，是以冥王星被排除在大行星之外。尽管在课本后的附录中也列出了冥王星的相关数据，我们在上题【Exercise 10.4】中并未计入冥王星公转的角动量，即是因此。（虽然即便计入了对结果的影响也微乎其微。）



▲ 新视野号拍摄的冥王星

[2] 由于各自追求的民族优越感，这项发现的“优先权”争议在英法两国余波荡漾。我们这些后人一般视他们为共同的发现者。（这和关于牛顿和莱布尼兹“创立微积分”的争议如出一辙。）

20 世纪末,人们开始发现太阳系外的行星——一般称作“系外行星”。截至 2020 年 6 月底,已经被确认的系外行星总共有 4281 颗。我们最感兴趣的是那些位于宜居带内、与地球环境相似的行星,因为我们认为那些行星上最有可能孕育出生命,甚至地外文明。

6. 黑洞的吸积盘:

前面所提到的角动量守恒造成的“扁平化”效应在我们的宇宙中还有更多的体现。引力场中的粒子,在其动能不足以克服引力束缚(即未达到逃逸速度)时,该粒子将因损失动能(或者由于角动量足够低)而不可避免地落向中心天体,天体“吸引和积累”这些物质的过程在天体物理上就称为吸积——我们显然可以发现,“吸积”的概念与之前所说的星云“坍缩”是一体两面。吸积过程中,引力势能转化为其他形式的能量。中心天体质量越大、半径越小,引力势能的释放就越充分。

以前的人们曾认为恒星发光的原因是恒星体积收缩导致的引力能释放,但后来经过进一步研究发现恒星能量的来源是恒星内部核聚变产生的核能。尽管如此,20 世纪 60 年代以来关于致密天体(也就是质量大、半径小的天体,如白矮星、中子星、黑洞等)理论和观测研究的进展使人们相信,引力势能的释放在这些天体演化的过程中扮演着重要角色,中子星和黑洞利用吸积来释放能量的效率远高于核能。

角动量较高的系统,如果其中又有较强的黏滞(即碰撞和摩擦)主导着物质之间角动量的转移,则也会由于“扁平化”的效应产生盘状的结构,被称为吸积盘。吸积盘是一个由高度电离或分子形式的气体构成的转动的气体盘。以黑洞为例,对于吸积盘内距离黑洞 r 的气体,直接根据万有引力平衡离心力(也就是万有引力提供向心力),易有

$$\frac{GM}{r^2} = \omega^2 r$$

计算出其旋转角速度 $\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ 。这就

意味着吸积盘的自转并不类似于刚体的自转,而存在“较差自转”,角速度不是常数,距离中心黑洞越远的地方角速度越小。这个速度差会产生类似于流体力学中的黏性,产生一个额外力矩(推导从略),导致盘内物质的角动量向外传递,质量则向内、外迁移——大

部分盘内物质被吸收到中心附近并释放引力能,少量盘内物质携带几乎所有角动量离开吸积盘(例如通过垂直于盘的喷流)。此外黏性还能将动能转化为热能,吸积盘内的气体被加热并放出强大的辐射,这也被认为是类星体耀眼的光以及黑洞 X 射线双星释放的 X 射线辐射的来源。



▲ 黑洞的吸积盘和喷流,伴随着强大的 X 射线辐射(艺术想象图)

7. “哥白尼原理”与膨胀的宇宙:

星系内物质的分布是很不均匀的,且因为其具有初角动量形成了盘面结构,那宇宙中星系的分布是均匀的吗?整个宇宙有角动量吗?尽管在大尺度上星系也会形成纤维、空泡等复杂结构,但是天文学家一般相信:以 10^8 ly 作为宇观尺度,在宇观尺度下,任何时刻三维宇宙空间的物质分布是均匀的和各向同性的。这个原理被称为“宇宙学原理”或者“哥白尼原理”,它的解释是

——人类不应当假设自己处在一个“造物主特别放置的宇宙中心”或者特殊位置观测宇宙，无论我们从任何方向看宇宙都应该看到大尺度上相同的景象，空间中任何一处观察到的物理量和物理规律不应该是特殊的。基于这一观点，我们认为在大尺度上宇宙内物质的分布是均匀的，宇宙整体角动量也应该为零（否则就会产生一个特殊的“旋转方向”）。我们观测到的宇宙微波背景辐射（即 3 K 宇宙背景辐射，被称为宇宙大爆炸的余温）是各向同性的，这是上述理论的有力证据。

那么宇宙究竟是有限还是无限的？如果坚持传统的牛顿静态宇宙、绝对时空的观点，无论认为宇宙是有限还是无限似乎都会导出矛盾：如果认为宇宙是有限的，那么就会有“边界”、有“中心”，与哥白尼原理违背；如果宇宙是无限且静态的（静态指宇宙间的物质虽然有彼此的相对运动，但宇宙并无整体的膨胀和收缩），就会出现难以解释的奥伯斯佯谬——夜空应该是亮的^[3]。爱因斯坦通过广义相对论和黎曼几何建立的静态、稳恒宇宙模型，将宇宙想象为一个四维“球”的三维“球面”——如此则不存在中央和边界区域之争，宇宙“有限而无边”，既符合宇宙学原理，也不会导致奥伯斯佯谬。

爱因斯坦的宇宙模型存在严重的不稳定性，稍有扰动便可能一直膨胀或者一直收缩。爱因斯坦为了得到一个稳定的宇宙模型，在他的引力场方程中加进了一个“宇宙常量”，相当于一种“负物质”用以抗衡引力。1922 年，苏联科学家弗里德曼提出：没有“宇宙常量”的引力场方程可能更加合理，并认为宇宙是动态的、处于膨胀状态。早在 1912 年美国天文学家斯里弗便利用光波的多普勒效应（红移）发现很多星系正在高速远离太阳系运动。1929 年，哈勃总结出了星系的退行速度 v 和星系到我们的距离 d 的关系，即

$$v = Hd$$

这个关系被称作哈勃定律，其中的 H 为哈勃常量，但它并不是真正的常量——星系间的引力会使得哈勃常量随时间减小，现在测得的值约为 $H_0 = 72 \pm 5 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ 。

哈勃定律说明我们的宇宙正在膨胀。这一发现迅速被天文观测所证实，并为之后更加重要的“宇宙大爆炸”理论模型的创立提供了基础。爱因斯坦在听闻这一发现后很快接受，使得他非常后悔在引力场方程中引进“宇宙常量”，直称其为“一生中最大的错事”。而爱因斯坦大概没有想到的是，时隔五十年后，曾经被他嫌弃的“宇宙常量”死而复生，天文学家们重新将它“请”回了引力场方程，赋予它新的含义、论述它背后的物理依据^[4]。科学的发展正是在迂回曲折中不断接近世界的真实。

从地球上观察，会发现每个方向上星系的退行速率符合同样的法则，并不存在任何一个“特殊的方向”，这当然不是因为地球是宇宙的中心，而是宇宙正是这样一个“没有中心、却处处都是中心”的状态，在其他星球上观察宇宙的膨胀也应该能得到同样的结论——这再次证明了“哥白尼原理”或“宇宙学原理”的强大适用性——地球也好、人类也罢，并不特殊。甚至我们可以说，整个科学的发展就是一步步剥夺人类自认为是受到造物主青睐的幸运儿这一幻想的历程：日心说的创立使得人类失去了“宇宙中心”的至高地位；无限宇宙观念的提出更是让地球一下子变

[3] 奥伯斯佯谬：假设宇宙是无限的，宇宙中的恒星也是无限且均匀分布，又显然可知恒星的亮度随着光传播的距离按平方反比率衰减。于是我们可以以地球为中心作出许许多多同心球壳，在半径为 r 的球壳上，恒星的总亮度应该与 r^2 成正比，每颗恒星在地球上看到的亮度应该与 r^2 成反比，所以每“层”球壳上恒星的总亮度应该与 r 无关，再对 r 从零到无穷远积分后应该得到无穷大才是，这也就说明无论白天还是黑夜在地球上看到的天空都应该是无限亮的，可为什么事实上夜空是黑的呢？

[4] 这同暗物质和暗能量有关，本节不展开介绍，有兴趣的同学可以自行查阅相关资料。

成了茫茫宇宙中普通的一分子；进化论的提出更是否定了“人类由上帝根据自己的形象创造”这一“神圣”命题，从此人类只是动物界中的普通一员；未来地外生命的发现或许又将让人类认识到自己并不是“宇宙中唯一的生命奇迹”……宗教神学有时让人狂妄自大，有时让人自甘卑微，唯有科学能让人类谦卑而自信地站在自然面前。科学的发展不但促进了人类对物质世界的认识，还以其彻底的革命性冲刷着人类全部的精神世界，让人类真正相信理性和智慧原来可以转化成力量。从此，渺小的人类终于敢以凡人之躯，窥探宇宙、改造世界、解放自身。



▲ 从外太空回望地球的三种视角：

左图：“蓝色弹珠”——阿波罗 17 号在 4.5 万千米远的轨道上拍摄的地球

中图：“地出”——阿波罗 8 号在约 38 万千米远的绕月轨道上拍摄的地球

右图：“暗淡蓝点”——旅行者 1 号在 64 亿千米远的轨道上拍摄的地球（图中蓝圈内小点）

一粒渺小的、脆弱的、悬浮在阳光下的微尘。这里有我们所有的一切、是我们目前所知唯一的家。

Exercise 10.9

一转动惯量为 $1.22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的砂盘连接到一电钻，其电机提供的扭矩为 $15.8 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。求：

- (1) 马达开启 33.0 ms 后的角动量；
- (2) 圆盘的角速度。

解：

- (1) 对于砂盘，根据

$$\tau = \frac{dl}{dt}$$

直接通过积分得到

$$l = \int_0^t \tau dt = \tau t + l_0$$

其中， l_0 表示初始时刻的角动量，本题为 0 ，故直接表示为 $l = \tau t$ 。

直接代入数据 $t = 33.0 \text{ ms}$ 、 $\tau = (15.8 \text{ N} \cdot \text{m})\hat{k}$ ，解得角动量 $l = (0.521 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\hat{k}$ 。

- (2) 根据

$$l = I\omega$$

并代入数据 $I = 1.22 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，解得圆盘角速度为

$$\omega = \frac{l}{I} = (427 \text{ rad/s})\hat{k}$$

Exercise 10.15

两个圆柱体的半径分别为 R_1 和 R_2 。转动惯量分别为 I_1 和 I_2 ，假定两圆柱的转轴均垂直纸面。大的圆柱体一开始以 ω_0 的角速度转动，后较小的圆柱逐渐向右靠近较大的圆柱，相互接触后便在摩擦力的作用下开始转动，最终，两圆柱停止相对滑动并在接触点处达到相同的转动速率。计算最终小圆柱的角速度 ω_2 。

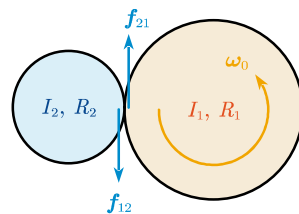
解：

这个问题类似平板模型最后达到共速的问题，不过这里是对转动系统的分析。

利用角动量定理

$$dL = \tau dt$$

在右图中，不妨认为 ω_0 的方向为垂直纸面向外（或逆时针旋转），并以之为角速度的正方向，摩擦力 f_{12} 和 f_{21} 互为作用力和反作用力，它们大小相等（其大小均记作 f ）、方向相反（如图所示）。对于两个圆柱，分别有（注意尽管两个摩擦力方向相反，但由于它们相对于各自圆心的侧面也相反，所以力矩符号相同）



$$dL_1 = I_1 d\omega_1 = -fR_1 dt$$

$$dL_2 = I_2 d\omega_2 = -fR_2 dt$$

消去 $f dt$ ，得到

$$\frac{I_1 d\omega_1}{R_1} = \frac{I_2 d\omega_2}{R_2}$$

两边积分后，有（以两圆柱相互接触为零时刻，用 t_c 表示达到无相对滑动的时间）

$$\int_0^{t_c} \frac{I_1}{R_1} d\omega_1 = \int_0^{t_c} \frac{I_2}{R_2} d\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1(\omega_1 - \omega_0)}{R_1} = \frac{I_2(\omega_2 - 0)}{R_2}$$

且在最终无相对滑动时应当保持接触点处线速度的大小、方向都相同，也就是

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

最终得到

$$\omega_2 = -\frac{R_1 R_2 I_1 \omega_0}{R_1^2 I_2 + R_2^2 I_1}$$

负号表示 ω_2 方向与 ω_0 的方向相反。

（思考：为什么本题不能对整个系统应用角动量守恒？提示：当我们把两个圆柱作为一个整体分析时，只能选择一个中心点去讨论它的角动量，此时角动量守恒的条件还成立吗？）

Exercise 10.20

一个人站在一个无摩擦的平台上，平台以 1.22 rev/s 的角速度旋转。他的双臂张开，两只手各拿一个重物。在这个状态下，人、重物和整个平台的总转动惯量为 $6.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。如果这个人通过移动重物将总转动惯量减小到 $1.97 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，那么平台的角速度将是多少？

解:

本问题类似前文在【附 1: 从角动量守恒到天体系统的演化】中简单提及的“花样滑冰运动员收回手臂”的问题, 这是一个非常简单的关于角动量守恒的示例。

由于系统不受外力矩, 简单应用角动量守恒, 对比移动重物前和移动重物后, 有

$$I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

解得最终的角速度大小为

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f} \omega_i = 3.80 \text{ rev/s}$$

Exercise 10.21

一转动惯量为 $1.27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的轮子套在一转动惯量可忽略的轴上转动, 角速度为 824 rev/min 。第二个转动惯量为 $4.85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 的轮子在本来静止的状态下突然连接在同一根轴上, 则随后两个轮子和轴的整体角速度为多少?

解:

系统的角动量守恒, 则有

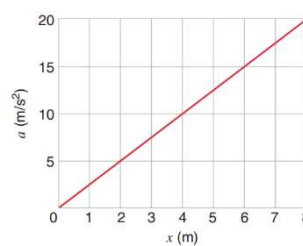
$$I_1 \omega_1 = (I_1 + I_2) \omega$$

代入数据后直接计算得最终的角速度大小

$$\omega = \frac{I_1 \omega_1}{I_1 + I_2} = 171 \text{ rev/min}$$

Exercise 11.21

一个 10 kg 的物体沿着 x 轴运动, 它的加速度是一个如图所示的关于位置的函数。当物体从 $x = 0 \text{ m}$ 运动到 $x = 8.0 \text{ m}$, 外力对它做的净功是多少?



解:

在一维上, 物体所受净外力

$$F = ma$$

每产生 dx 的小位移, 物体所受净功为

$$dW = F dx = ma dx$$

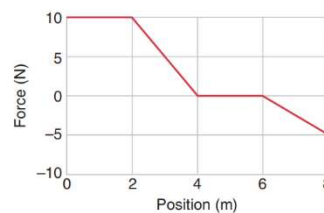
则整个过程中外力对物体的净功为

$$W = m \int_{0.0 \text{ m}}^{8.0 \text{ m}} a dx = 800 \text{ J}$$

(也可以直接根据图像计算。沿着运动轨迹, 变力做的净功等于 $F-x$ 图线下方所包围的面积, 也即 $a-x$ 图线下方所包围的面积再乘上质量 m 。)

Exercise 11.22

一质量为 5.0 kg 的物块，在一光滑平面上沿直线运动，其所受力为如图所示的关于位置的函数，在物块从原点运动到 $x = 8.0 \text{ m}$ 的过程中，力对物块做的功为多少？



解：

与前一题类似，每移动 dx ，物体所受净功为

$$dW = F dx$$

则整个过程力所做的功为

$$W = \int_{0.0 \text{ m}}^{8.0 \text{ m}} F dx = 25 \text{ J}$$

(本题直接根据 $F-x$ 图线下方所包围的面积计算无疑会方便很多。)

Exercise 11.23

如图所示，带有指针的弹簧悬挂在毫米刻度尺旁边，三个不同的重物按图示顺序分别悬挂在弹簧上。问：

(1) 如果所有重物被移走，指针将指在刻度尺的哪个位置？

(2) 求出重量 W 。

解：

(1) 对于弹簧，根据

$$F = kx$$

两边差分得到

$$\Delta F = k \Delta x$$

从第一张图到第二张图，拉力增加量 $\Delta F = 120 \text{ N}$ ，弹簧拉伸长度增加量 $\Delta x = 20 \text{ mm}$ ，解得弹簧的劲度系数

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = 6.5 \times 10^3 \text{ N/m}$$

因此，没有悬挂重物时，相对于第一张图，弹簧拉伸长度的改变量是，

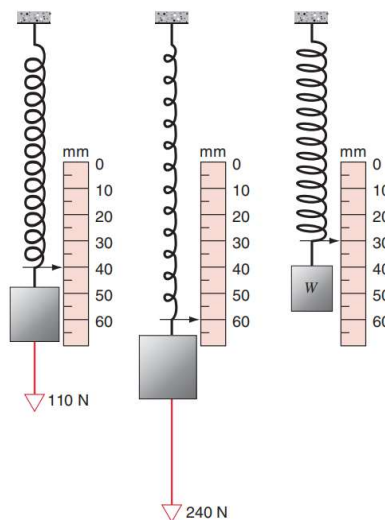
$$\Delta x = \frac{0 - W_1}{k} = -17 \text{ mm}$$

直接解得此时的刻度

$$x = 40 \text{ mm} - 17 \text{ mm} = 23 \text{ mm}$$

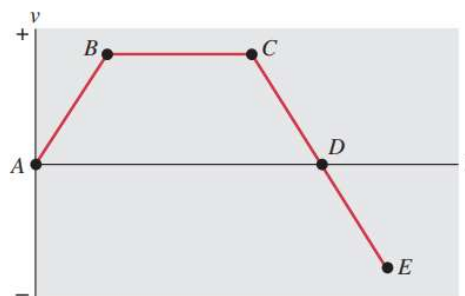
(2) 相对于没有悬挂重物的情况，弹簧拉伸量 $\Delta x = 7 \text{ mm}$ ，容易解得重物的重量

$$W = k \Delta x = 45 \text{ N}$$



Exercise 11.30

单个力作用于作直线运动的质点上, 图示为粒子速度与时间的关系图。求力在每个区间 **AB**、**BC**、**CD** 和 **DE** 对质点所做功的正负号。



解:

由动能定理

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} m \Delta(v^2)$$

所以要考察做功的正负只需考察速度平方的变化即可。

因此 **AB** 段和 **DE** 段做功为正, **CD** 段做功为负, **BC** 段做功为零。

(也可以通过分析每段受力方向和速度方向的关系考察, 受力与运动同向则力做正功, 受力与运动反向则力做负功。)

Exercise 11.36

利用存储在旋转飞轮(flywheel)中的能量来驱动的货运卡车已经在欧洲获得广泛应用。卡车利用电动马达将飞轮加速到最高转速 **624 rad/s**, 这种飞轮是一种质量为 **512 kg**、半径为 **97.6 cm** 的圆柱体。问:

- (1) 飞轮充满电后的动能是多少?
- (2) 如果卡车以 **8.13 kW** 的平均功率行驶, 在两次充电之间它可以行驶多少分钟?

解:

- (1) 充满电后, 飞轮的转动动能表示为

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$$

代入数据, 最终得 $E_k = 4.75 \times 10^7 \text{ J}$ 。

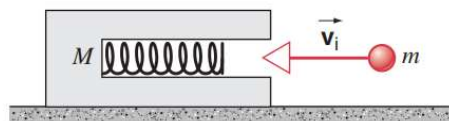
- (2) 两次充电间可以行驶的时间

$$t = \frac{E_k}{P} = 5.84 \times 10^3 \text{ s} = 97.4 \text{ min}$$

(飞轮是机械工程中很常用的构件, 其用于间歇性储存能量, 类似于电学中电感的作用。转动动能可以储存在转动惯量很大的飞轮中, 并在后续释放出来, 这样能减小输出功率的波动, 使输出更加平稳。弹簧结构也有类似的作用。)

Problem 11.31

将质量为 m 的球以速度 v_i 投射到质量为 M 的初始静止在无摩擦表面上的弹簧枪枪管中，当弹簧达到最大压缩力时，球在枪管里卡住。假定不存在摩擦带来的能量损失。问：



- (1) 球在枪管中静止后弹簧枪的速度是多少？
- (2) 球的初始动能有多少部分是由于对弹簧做功而损失的？

解：

- (1) 本题以小球初速度方向为正方向。整个过程动量守恒，所以有

$$mv_i = (M + m)v_f$$

解得系统整体的末速度

$$v_f = \frac{m}{m + M} v_i$$

- (2) 球的初始动能转化成了球和弹簧枪总体的动能以及弹簧压缩的势能，根据能量守恒其对弹簧做功而产生的弹性势能 E_p 满足

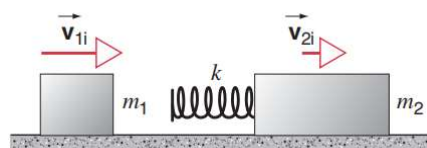
$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(M + m)v_f^2 + E_p$$

则解得该部分势能在球的初始动能里所占据的比例为

$$\frac{E_p}{\frac{1}{2}mv_i^2} = \frac{M}{M + m}$$

Problem 11.32

一物块的质量 $m_1 = 1.88 \text{ kg}$ 在一光滑桌面上以 10.3 m/s 的速度滑动，在它的正前方，另一质量 $m_2 = 4.92 \text{ kg}$ 的物块以相同方向 3.27 m/s 的速度滑动，一劲度系数为 $k = 11.2 \text{ N/cm}$ 的质量可忽略的弹簧固定在物块 m_2 的后方。当两物块发生碰撞，弹簧最大的压缩量为多少？



解：

同样以初速度方向为正方向，显然在最终两物块达到共速 v_f 时弹簧的压缩量达到最大。整个过程动量守恒，有

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f$$

得到系统的末速度 $v_f = 5.21 \text{ m/s}$ 。

物块的初始动能转化为了两个物块（和弹簧）的共同动能及弹簧的弹性势能。根据能量守恒

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + E_p$$

解得弹性势能的大小 $E_p = 33.7 \text{ J}$ 。再根据弹簧弹性势能满足

$$E_p = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

直接解得此时弹簧的压缩量 $\Delta x = 24.5 \text{ cm}$ 。

附 2：平动和转动的比较

	平动		转动
运动的描述	位置 \boldsymbol{r}		角位置 θ
	位移 \boldsymbol{s} 或 $\Delta\boldsymbol{r} \rightarrow d\boldsymbol{r}$	$\begin{matrix} \overleftrightarrow{d\boldsymbol{v} = r d\theta} \\ \text{纯滚动 } v_c = R\theta \end{matrix}$	角位移 $\Delta\theta \rightarrow d\theta$
	速度 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	$\begin{matrix} \overleftrightarrow{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}} \\ \text{纯滚动 } v_c = R\omega \end{matrix}$	角速度 $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$
	加速度 $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$	$\begin{matrix} \overleftrightarrow{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}} \\ \text{纯滚动 } a_c = R\alpha \end{matrix}$	角加速度 $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$
	匀速运动 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t$		匀速转动 $\theta = \theta_0 + \omega t$
	匀加速运动 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$		匀加速转动 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\alpha}t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
运动定律	(惯性) 质量 m	$\begin{matrix} \overleftrightarrow{I = \int r^2 dm} \end{matrix}$	转动惯量 I
	力 \boldsymbol{F}	$\begin{matrix} \overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}} \end{matrix}$	力矩 $\boldsymbol{\tau}$
	牛顿第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$		转动定律 $\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$
力随时间的效应积累	动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\begin{matrix} \overleftrightarrow{\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}} \end{matrix}$	角动量 $\boldsymbol{l} = I\boldsymbol{\omega}$
	动量定理 $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \quad \Delta\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F} dt$		角动量定理 $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{l}}{dt} \quad \Delta\boldsymbol{l} = \int \boldsymbol{\tau} dt$
	恒力冲量 $\boldsymbol{F}t = \Delta(m\boldsymbol{v})$		恒力矩角冲量 $\boldsymbol{\tau}t = \Delta(I\boldsymbol{\omega})$
	质心运动定理 $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_c$		质心转动定理 $\sum \boldsymbol{\tau}_c = I_c\boldsymbol{\alpha}$
	动量守恒 $\sum \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ 时 $\sum \boldsymbol{p}$ 不变		角动量守恒 $\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ 时 $\sum \boldsymbol{l}$ 不变
力随空间的效应积累	平动动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$		转动动能 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
	平动动能定理 $\Delta E_k = W = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$		转动动能定理 $\Delta E_k = W = \int \boldsymbol{\tau} d\theta$
	恒力做功 $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$		恒力矩做功 $W = \boldsymbol{\tau}\theta = \Delta\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$
	功率 $P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$		功率 $P = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\omega}$
	质点系 (如刚体) 的总动能 $E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$		

附 3：虚功原理简介

【说明：该部分内容作为分析力学的基础知识，在《普通物理学》课程中不作考试要求。但该部分知识可以简化对一些复杂问题的求解，因此给予介绍，供感兴趣且学有余力的同学自行阅读学习，也可以提出疑问。】

1. 约束及其分类：

在三维空间中，任何一个质点都可以在上下、前后、左右三个方向自由运动，需要用三个坐标才能完全表达它的位置，这时我们称该质点具有 3 个自由度。而对于由 n 个质点组成的质点系，照理来说应当具有 $3n$ 个自由度，需要 $3n$ 个坐标才能确切地描述整个体系的位形。

但事实上，质点系的运动往往不是绝对自由的，系统中常常存在一些限制各质点自由运动的条件，我们将这些条件叫做约束，例如铁轨对于机车、铰链对于杆件、绳索对于重物等都是约束，对质点的自由运动起到某种限制的作用。这些约束常常可以用方程表示，例如：质点只能在 x 轴和 y 轴所在的平面上运动，则构成 $z=0$ 的约束；两个质点中间始终以一根长为 l 的刚性细棒连接，则构成 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2$ 的约束。如果我们有 k 个约束方程，那么质点系实际上独立的坐标只有 $3n-k$ 个，也就只有 $3n-k$ 个自由度。

我们将约束分为不同种类：

稳定约束：约束方程中不显含时间 t 的约束；

不稳定约束：约束方程中显含时间 t 的约束；

几何约束：只限制质点坐标的约束；

运动约束：除了限制质点坐标，还限制质点速度的约束（这其中有一类通过积分能够转化为几何约束，另一类则不可以）；

不可解约束：质点始终无法脱离的约束（用等式表示）；

可解约束：质点可以在某一方向脱离的约束（用等式和不等式表示）；

完整约束：要求只包含几何约束和可积分的运动约束，且要求是不可解约束；

非完整约束：除了完整约束以外的其他约束。

（思考：能否各自举出几个例子？）

本节只讨论完整约束的体系，这种约束的一般形式可以表达为

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_n, y_n, z_n; t) = 0$$

2. 虚位移与虚功：

我们知道，在无限短的时间 dt 内，质点的位移应当满足 $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt$ ，在这种情况下质点的位移或者说坐标是由于时间 t 的改变而发生的，受到运动方程的制约。如果时间没有改变，即 $dt=0$ ，那质点也就没有位移，即 $d\mathbf{r}=0$ 。物体由于运动而真实发生的位移成为实位移。

但我们考虑另一种情况：时间 t 并没有改变，质点的位置只在约束所许可的情况下发生了一个无限小的变化。这个变化并不是由于质点的运动而实际发生的，而只是想象中可能发生的位移。我们不需要考虑时间的改变和运动方程的制约，只需要考虑此时此刻质点的位置和它所受到的约束。我们把这种位移称作虚位移，用 $\delta\mathbf{r}$ 表示。（此处的 δ 称作变分符号，“变分”有“无穷小变化”的意思，与用微分符号 d 表示的实位移相区别。）由于时间并没有改变，所以 $\delta t=0$ 。显然同

一时刻质点往往会有许许多多可能的虚位移。对于稳定约束，实位移往往是众多虚位移中的一个；但对于不稳定约束，实位移则可能和虚位移并无关联。

力在虚位移中所做的功被称作虚功，用 δW 表示，显然 $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$ 。（若为力矩对虚的角位移做功，则是 $\delta W = \boldsymbol{\tau} \delta \theta$ 。）作用在质点上的任何力（包括约束反力）都可能对虚位移做虚功，虚功自然也可以区分为正功和负功。在一个静止、平衡的体系中，任何力都不可能做实功；但如果我们假想了一个虚位移，则力可以做虚功。

如果在一个力学体系中，所有约束反力 \mathbf{F}_{ri} 在任意虚位移 $\delta \mathbf{r}$ 中所做虚功之和都为零，即

$$\sum_i \mathbf{F}_{ri} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

这样的约束被我们称作理想约束。可以证明：光滑面、光滑曲线、光滑铰链、刚性轻杆、不可伸长的绳、固定端等约束都属于理想约束。

3. 虚功原理：

设有一质点系处于静止平衡的状态，取其中任意一个（第 i 号）质点，设作用在该质点上所有主动力的合力为 \mathbf{F}_i 、所有约束反力（被动力）的合力为 \mathbf{F}_{ri} ，根据质点的平衡，要求

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ri} = \mathbf{0}$$

现在我们让每个质点都从它的平衡位置出发发生一小段虚位移，则该质点所受的虚功为

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ri} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

把所有质点的虚功相加，得到

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{F}_{ri} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

如果所有约束都是理想约束，则 $\sum_i \mathbf{F}_{ri} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ 。因此此时质点系的平衡条件为

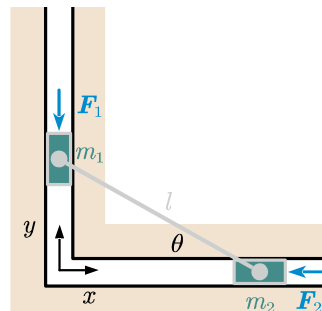
$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

即可以证明：受理想约束的力学体系平衡的充要条件是此力学体系中所有的主动力在任意虚位移中所做的虚功之和为零。（上面已经证明了必要性，对于充分性的严格证明比较困难，此处从略。）这个关系是 1717 年伯努利首先发现的，称作虚功原理或虚位移原理。

虚功原理可以将静力学的平衡问题转化为动力学的问题并利用功与能的方法来求解。由于约束反力（接触面的支持力、压力；杆和绳的张力；铰链处连接的力……）自然消去，故可以很方便地用它来求解主动力在平衡时应当满足的条件，当然它的缺点在于无法求解体系中的约束反力。不过，尽管虚功原理是根据理想约束的条件导出的，但在应用中也可以求解含有摩擦力的体系，只需要将摩擦力也作为主动力然后计入摩擦力的虚功即可。

例 1：在右图所示的，水平面中的椭圆规机构中，两个小滑块质量分别为 m_1 和 m_2 ，用长为 l 的轻杆相连，在两个主动力的作用下平衡于图示位置，倾角 $\theta = 30^\circ$ ，各处摩擦不计。已知主动力 $F_1 = 15 \text{ N}$ ，求主动力 F_2 的大小。

解：显然各处约束均为理想约束，如右图所示建立坐标系，设 m_1 沿着 x 轴正方向有一个虚位移 δx 、 m_2 沿着 y 轴正方向有一个虚位移 δy ，则主动力（即两个外力，注意这里是在水平面内，



所以没有重力)所做的总虚功

$$\delta W = -F_1 \delta y - F_2 \delta x = 0$$

注意 δx 和 δy 存在约束关系

$$(x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2 = x^2 + y^2 = l^2$$

即 (展开并舍去二阶小量)

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0 \implies \delta y = -\frac{x}{y}\delta x = -\delta x \cdot \tan \theta$$

将这个约束关系的表达式代回虚功原理的方程, 消去 δy , 得到

$$\delta W = (F_1 \tan \theta - F_2) \delta x = 0$$

考虑到 δx 的任意性, 所以必然有括号中的 $-F \tan \theta - F_2 = 0$, 直接解得

$$F_2 = F_1 \tan \theta = 8.7 \text{ N}$$

例 2: 用右图所示的起重滑车“神仙葫芦”吊起重量为 P 的重物。为使重物缓慢上升 (即系统平衡) 时, 人手施加的拉力 F 应该为多大? 滑车的轮和轴的半径分别为 R 和 r , 忽略绳和滑轮自重, 绳不可伸长, 不计一切摩擦。

解: 显然各处约束均为理想约束。设想力 F 的作用点有向下的虚位移 δy_1 的同时, 重物则有向上的虚位移 δy_2 , 则主动力 (包括力 F 和重物的重力 P) 做的总虚功是

$$\delta W = F \delta y_1 - P \delta y_2 = 0$$

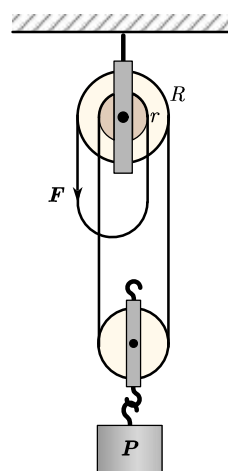
通过运动学分析, 我们设想这一过程中滑车具有逆时针方向的虚角位移 $\delta \phi$, 则力 F 作用点处的虚位移可以表示为 $\delta y_1 = R \delta \phi$; 而下方滑轮的左侧绳有向下的虚位移 $r \delta \phi$, 右侧绳则有向上的虚位移 $R \delta \phi$, 所以重物总的向上虚位移可以表示为 $\delta y_2 = (R - r) \delta \phi / 2$ 。将虚位移全部用 $\delta \phi$ 表示, 得到

$$\delta W = \left(FR - P \frac{R-r}{2} \right) \delta \phi = 0$$

由于 $\delta \phi$ 的任意性, 括号内的部分必然恒等于零, 直接解得

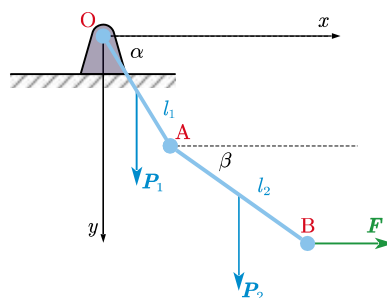
$$F = \frac{R-r}{2R} P$$

所以滑车的轮半径 R 和轴半径 r 之差越小则越省力。



例 3: 重 P_1 、长 l_1 的均匀杆甲, 一端被光滑铰链固定, 另一端能在竖直平面内自由运动; 重 P_2 、长 l_2 的均匀杆乙, 一端被光滑铰链连接在甲杆的自由端, 另一端也能在竖直平面内自由运动。现在用手拉住乙杆的自由端, 施加水平力 F , 求能使整体机构平衡时图中两个夹角 α 和 β 的大小。

解: 设甲杆 (\overline{OA}) 一端被铰链固定 O 点, 另一端与乙杆 (\overline{AB}) 用铰链连接于 A 点, 乙杆自由端为 B 点。显然只需要确定 A 、 B 两点的坐标就能确定系统的位形, 由于这是一个平面内的问题, 实际上只需要四个坐标; 又因为存在 $|\overline{OA}| = l_1$ 、 $|\overline{AB}| = l_2$ 这两个约束条件,



所以实际的独立坐标只有两个。我们别出心裁地选择 α 和 β 这两个角度作为我们的广义坐标。

显然各处约束均为理想约束。重力的作用点显然在各自杆的质心处。我们设甲杆中点(即 P_1 作用点)的坐标为 (x_1, y_1) , 乙杆中点(即 P_2 作用点)的坐标为 (x_2, y_2) ; 乙杆自由端(即 F 作用点)的坐标为 (x_3, y_3) , 则所有主动力(也就是这里提到的三个力)做的总虚功是

$$\delta W = P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2 + F \delta x_3 = 0$$

由几何关系写出这些坐标满足的约束条件, 并通过两边变分将这些约束方程转化为用 $\delta\alpha$ 和 $\delta\beta$ 表示的形式(变分的计算方法与微分基本上是相同的), 即

$$y_1 = \frac{l_1}{2} \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta y_1 = \frac{l_1}{2} \cos \alpha \delta \alpha$$

$$y_2 = l_1 \sin \alpha + \frac{l_2}{2} \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \delta y_2 = l_1 \cos \alpha \delta \alpha + \frac{l_2}{2} \cos \beta \delta \beta$$

$$x_3 = l_1 \cos \alpha + l_2 \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \delta x_3 = -l_1 \sin \alpha \delta \alpha - l_2 \sin \beta \delta \beta$$

代入到虚功的表达式中, 有

$$\delta W = \left(P_1 \frac{l_1}{2} \cos \alpha + P_2 l_1 \cos \alpha - F l_1 \sin \alpha \right) \delta \alpha + \left(P_2 \frac{l_2}{2} \cos \beta - F l_2 \sin \beta \right) \delta \beta = 0$$

由于 $\delta\alpha$ 和 $\delta\beta$ 都具有任意性且彼此独立, 所以两个括号内的部分应该都等于零, 即

$$P_1 \frac{l_1}{2} \cos \alpha + P_2 l_1 \cos \alpha - F l_1 \sin \alpha = 0$$

$$P_2 \frac{l_2}{2} \cos \beta - F l_2 \sin \beta = 0$$

直接解得

$$\alpha = \arctan \frac{P_1 + 2P_2}{2F}$$

$$\beta = \arctan \frac{P_2}{2F}$$

由此我们发现, 利用虚功原理求解平衡问题, 关键是利用几何关系或者运动关系求出各个主动力作用点对应的虚位移之间的关系, 上面的三道例题其实分别采用了三种不同的方法。当然, 并非绝对不可以利用虚功原理去求约束反力, 我们也可以解除该约束并代之以约束反力, 将约束力变成主动力, 然后将这个主动力作为唯一的未知力求解。这种方法稍微有点复杂, 这里也就不再更多介绍了。