《普通物理学 I（H）》课程

课程作业（2）

张晗潇　12036020　浙江大学物理学系　理论物理班・聚变理论与模拟中心
邮箱：zhx_199855@163.com　联系电话：17367078032　授课教师：马志为　on 2021.3.12

Problem 3.7

一种儿童玩具由三辆在小型无摩擦滚筒上串联拉动的小车组成。三辆小车的质量分别为 $m_1 = 3.1\ \mathrm{kg}$、$m_2 = 2.4\ \mathrm{kg}$、$m_3 = 1.2\ \mathrm{kg}$。如果它们同时被一个水平向右、$P = 6.5\ \mathrm{N}$ 的拉力拉动，求：

(1) 系统的加速度；

(2) 第二辆车和第三辆车之间的拉力；

(3) 第一辆车和第二辆车之间的拉力。

解：

以水平向右为正方向。

(1) 将系统作为整体，根据牛顿第二定律

$$P = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

解得系统加速度

$$a = 0.97\ \mathrm{m/s^2}$$

(2) 对第三辆车单独分析，根据牛顿第二定律

$$T_{23} = m_3 a$$

解得第二辆车和第三辆车之间的拉力

$$T_{23} = 1.2\ \mathrm{N}$$

(3) 对第二辆车单独分析，根据牛顿第二定律

$$T_{12} - T_{32} = m_2 a$$

显然有

$$T_{32} = T_{23} = 1.2\ \mathrm{N}$$

解得第一辆车和第二辆车之间的拉力

$$T_{12} = 3.5\ \mathrm{N}$$

Problem 3.9

一根铁链含有五节，每节质量为 $100\ \mathrm{g}$，被竖直向上以均匀的加速度 $2.50\ \mathrm{m/s^2}$ 提起。求：

(1) 相邻两节之间的作用力；

(2) 提起铁链时施加在最上节上的力 F；

(3) 每节上受到的静力。

解：

以竖直向上为正方向。

(1) 将除最上节外的四节铁链作为整体，它受到一个向上的作用力F_{12}，即第一节铁链对第二节铁链的作用力，满足

$$F_{12} - 4mg = 4ma$$

将$a = 2.50\ \mathrm{m/s^2}$、$m = 100\ \mathrm{g}$、$g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$代入，解得

$$F_{12} = 4m(a+g) = 4.92\ \mathrm{N}$$

利用同样的方法，将下方三节、下方两节、最下一节铁链分别作为整体，可分别求得第二节铁链对第三节铁链之间的作用力、第三节铁链对第四节铁链之间的作用力和第四节铁链对第五节铁链之间的作用力为

$$F_{23} = 3m(a+g) = 3.69\ \mathrm{N}$$

$$F_{34} = 2m(a+g) = 2.46\ \mathrm{N}$$

$$F_{45} = m(a+g) = 1.23\ \mathrm{N}$$

本题中均以竖直向上为正方向。

（注：这里为了和提供的加速度a配合，重力加速度取了三位有效数字。选择从$9.79\ \mathrm{m/s^2}$到$9.81\ \mathrm{m/s^2}$均可。地球表面平均标准重力加速度为$9.80665\ \mathrm{m/s^2}$——代表在海平面纬度约$45.5°$处自由落体的加速度，这个数值被第三次国际度量衡会议确立。杭州地区的重力加速度约为$9.79363\ \mathrm{m/s^2}$。）

(2) 对最上节铁链单独分析，满足

$$F - F_{12} - mg = ma$$

解得（直接用F_{12}表示相等的F_{21}，下同）

$$F = ma + mg + F_{12} = 6.15\ \mathrm{N}$$

即拉力的大小。

(3) 净力提供加速度，对每节铁链都有

$$F_{\mathrm{net}} = ma = 0.250\ \mathrm{N}$$

Problem 4.15

一个质量为m的物体从空中下落，一个$D = bv^2$的阻力阻碍了该物体的运动。

(1) 该物体初始下降的加速度是多少？

(2) 经历一段时间后，该物体的速度将接近一个恒定值，此时的收尾速度v_{T}是多少？

(3) 当物体速度$v = v_{\mathrm{T}}/2$时，其下降加速度是多少？

解：

以竖直向下为正方向。

(1) 初始时$v = 0$，阻力也为零，物体只受到重力作用，根据牛顿第二定律，易得到此

时下降的加速度

$$a(0)=g$$

(2) **方法一（受力平衡）**：当该物体的速度达到恒定值（匀速）时，合力应为零，故其所受重力和阻力应当平衡，于是有

$$mg=D=bv^2$$

此时 $v=v_{\mathrm{T}}$ 记作收尾速度，即

$$v_{\mathrm{T}}=\sqrt{\frac{mg}{b}}$$

方法二（函数积分求解）：根据牛顿第二定律

$$\frac{F}{m}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

物体受到的是重力和阻力，以竖直向下为正方向，移项后得到

$$\mathrm{d}t=\frac{m}{mg-bv^2}\mathrm{d}v$$

两边从初始开始积分（为免混淆，将中间变量记作 t' 和 v'）

$$\int_0^t \mathrm{d}t'=\int_0^v \frac{m}{mg-bv'^2}\mathrm{d}v'$$

左边

$$\int_0^t \mathrm{d}t'=t$$

右边

$$\begin{aligned}
\int_0^v \frac{m}{mg-bv'^2}\mathrm{d}v' &= \frac{1}{g}\int_0^v \frac{1}{1-\frac{b}{mg}v'^2}\mathrm{d}v' \\
&= \frac{1}{g}\int_0^v \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v'\right)\left(1-\sqrt{\frac{b}{mg}}v'\right)}\mathrm{d}v' \\
&= \frac{1}{g}\int_0^v \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v'\right)\left(1-\sqrt{\frac{b}{mg}}v'\right)}\mathrm{d}v' \\
&= \frac{1}{2g}\int_0^v \left(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v'}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{b}{mg}}v'}\right)\mathrm{d}v' \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gb}}\left[\ln\left(1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v\right)-\ln\left(1-\sqrt{\frac{b}{mg}}v\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gb}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v}{1-\sqrt{\frac{b}{mg}}v}\right)
\end{aligned}$$

即

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gb}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v}{1-\sqrt{\frac{b}{mg}}v}\right)$$

整理得到

$$v=\sqrt{\frac{mg}{b}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}+1}$$

当下落足够长时间之后，即取$t\to\infty$的极限

$$\lim_{t\to\infty}v=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{\frac{mg}{b}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}+1}\right)$$

右边，由于原式为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，根据洛必达法则求得极限

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{\frac{mg}{b}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}+1}\right)=\sqrt{\frac{mg}{b}}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{\frac{gb}{m}}\cdot e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}}{2\sqrt{\frac{gb}{m}}\cdot e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}}\right)=\sqrt{\frac{mg}{b}}\cdot 1=\sqrt{\frac{mg}{b}}$$

左边，由于我们将$t\to\infty$极限时的速度上限记作收尾速度v_{T}，故有

$$\lim_{t\to\infty}v=v_{\mathrm{T}}$$

所以有

$$v_{\mathrm{T}}=\sqrt{\frac{mg}{b}}$$

（注：从我们的分析中可以看出，达到收尾速度后匀速下落实际上是取$t\to\infty$的极限的情况，而在时间有限的时候是不可能达到的。所以其实按照我们的模型，物体的速度一直在增长，只能不断趋近收尾速度，而实际上当物体的速度很接近v_{T}时我们就可以近似认为速度几乎已不再变化，从而近似认为已达到匀速，具体运动过程详见教材 P72 的三张图。而在实际问题中，当下落足够长时间之后，由于加速度已经足够小，空气密度的变化、气流的扰动甚至高度降低带来重力加速度g改变的影响等都可能对运动加以更大的影响，模型便不再精确。对于下雨的问题，由于雨滴是液体，在下落过程中会被空气冲击飞溅、破碎，在时间足够长后速度甚至反倒会减小。）

(3)　**方法一：** $v=\frac{v_{\mathrm{T}}}{2}$时，对应的阻力大小

$$D=bv^2=b\frac{v_{\mathrm{T}}^2}{4}=\frac{mg}{4}$$

则通过合外力求解加速度的大小

$$a=\frac{mg-D}{m}=\frac{3}{4}g$$

方法二： 之前已得出速度随时间变化的表达式$v(t)$，即

$$v=\sqrt{\frac{mg}{b}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}+1}$$

将上式对时间求导，得到加速度随时间变化的表达式$a(t)$，即

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4g\cdot\frac{e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}}{\left(e^{2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}+1\right)^2}$$

又已知$v=\frac{v_T}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{b}}$时，对应的时间

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gb}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{b}{mg}}v}{1-\sqrt{\frac{b}{mg}}v}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gb}}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\ln 3}{2}\sqrt{\frac{m}{gb}}$$

所以此时的加速度

$$a\Big|_{t=\frac{\ln 3}{2}\sqrt{\frac{m}{gb}}}=4g\cdot\frac{3}{(3+1)^2}=\frac{3}{4}g$$

Problem 4.18

(1) 假定阻力D由$D=bv$给出，证明物体从静止状态自由下落直到达到95%所需要经过距离y_{95}的计算公式时

$$y_{95}=\frac{v_T^2}{g}\left(\ln 20-\frac{19}{20}\right)$$

其中v_T为收尾速度。

(2) 对于收尾速度为$42\ \mathrm{m/s}$的棒球，计算其“95%距离”y_{95}。为什么这个值与表 4-1 中所列出的值存在差别？

解：

本题中同样以竖直向下为正方向。

(1) **方法一（直接求解速度和位移的关系）：** 根据牛顿第二定律

$$\frac{F}{m}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

物体受到的是重力和阻力，以竖直向下为正方向，得到

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{mg-bv}{m}$$

对于方程左边，注意到（利用微积分中学习到的链式法则）

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

其中y为竖直方向的位移。则上式变为

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=g-\frac{bv}{m}$$

移项得到（将所有含v的项移动到同一边）

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{\left(\frac{g}{v}-\frac{b}{m}\right)}\mathrm{d}v$$

两边从开始下落到达到95%收尾速度这一过程积分

$$\int_0^{y_{95}} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{19}{20}v_\mathrm{T}} \frac{1}{\left(\frac{g}{v} - \frac{b}{m}\right)} \mathrm{d}v$$

即

$$\begin{aligned}
y_{95} &= \int_0^{\frac{19}{20}v_\mathrm{T}} \frac{1}{\left(\frac{g}{v} - \frac{b}{m}\right)} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{\frac{19}{20}v_\mathrm{T}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{b}{mg}v\right)\frac{b}{m}} - \frac{1}{\left(\frac{b}{m}\right)}\right] \mathrm{d}v \\
&= \left[-\frac{m^2 g}{b^2} \ln\left(1 - \frac{b}{mg}v\right) - \frac{m}{b}v\right]\Bigg|_0^{\frac{19}{20}v_\mathrm{T}} \\
&= -\frac{m^2 g}{b^2} \ln\left(1 - \frac{b}{mg}\frac{19}{20}v_\mathrm{T}\right) - \frac{m}{b} \cdot \frac{19}{20}v_\mathrm{T} \\
&= \frac{v_\mathrm{T}^2}{g}\left(-\ln\left(\frac{1}{20}\right) - \frac{19}{20}\right) \\
&= \frac{v_\mathrm{T}^2}{g}\left(\ln 20 - \frac{19}{20}\right)
\end{aligned}$$

故题目中所要求的式子得证，其中利用了$v_\mathrm{T} = \dfrac{mg}{b}$（用与【Problem 4.15】中类似的方法极易求得）。

方法二（利用从【Problem 4.17】中解出的位移与时间关系的结论）：根据牛顿第二定律

$$\frac{F}{m} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

物体受到的是重力和阻力，以竖直向下为正方向，移项后得到

$$\mathrm{d}t = \frac{m}{mg - bv}\mathrm{d}v$$

两边从初始开始积分（为免混淆，将中间变量记作t'和v'）

$$\int_0^t \mathrm{d}t' = \int_0^v \frac{m}{mg - bv'}\mathrm{d}v'$$

左边

$$\int_0^t \mathrm{d}t' = t$$

右边

$$\int_0^v \frac{m}{mg - bv'}\mathrm{d}v' = \frac{1}{g}\int_0^v \frac{1}{1 - \frac{b}{mg}v'}\mathrm{d}v' = -\frac{m}{b}\ln\left(1 - \frac{b}{mg}v\right)$$

即

$$t = -\frac{m}{b}\ln\left(1 - \frac{b}{mg}v\right)$$

整理得到

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

即速度与时间的关系$v(t)$，同样用取极限的方式也可知$t\to\infty$时收尾速度$v_{\mathrm{T}}=\dfrac{mg}{b}$。

将上式对时间积分，得到位移与时间的关系

$$y=\int_0^t v\,\mathrm{d}t=\frac{mg}{b}\int_0^t\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)\mathrm{d}t=\frac{mg}{b}\left[t+\frac{m}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t}-1\right)\right]$$

由于速度达到95%收尾速度所需的时间t_{95}满足

$$t_{95}=-\frac{m}{b}\ln\left(1-\frac{19}{20}\frac{b}{mg}v_{\mathrm{T}}\right)=\frac{m}{b}\ln 20$$

将其代入位移与时间的关系，得到

$$y_{95}=\frac{mg}{b}\left[t+\frac{m}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t}-1\right)\right]=\frac{m^2g}{b^2}\left(\ln 20-\frac{19}{20}\right)=\frac{v_{\mathrm{T}}^2}{g}\left(\ln 20-\frac{19}{20}\right)$$

故题目中所要求的式子得证。

(2)　将$v_{\mathrm{T}}=42\ \mathrm{m/s}$、$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$代入上述表达式，得到

$$y_{95}=\frac{v_{\mathrm{T}}^2}{g}\left(\ln 20-\frac{19}{20}\right)=370\ \mathrm{m}\qquad（写作368\ \mathrm{m}亦可）$$

从表 4-1 中查得的$210\ \mathrm{m}$的结果比该结果小。原因是当棒球速度很大时，其所受的阻力将不再与v成正比（可能与v^2成正比或更复杂的情况），导致实际阻力比模型中所考虑的情况更大，从而更早达到收尾速度。

Problem 4.20

一质点P沿着半径$3.0\ \mathrm{m}$的圆轨道作匀速圆周运动，每转一周需要$20\ \mathrm{s}$。$t=0$时刻的质点位于O点。以O点为坐标原点，求：

(1)　$5.0\ \mathrm{s}$、$7.5\ \mathrm{s}$和$10\ \mathrm{s}$后质点分别所在的位置矢量大小和方向；

(2)　从第五秒末到第十秒末这$5.0\ \mathrm{s}$的过程内质点位移矢量的大小和方向；

(3)　在上述过程中质点的平均速度矢量；

(4)　在上述过程开始和结束时质点的瞬时速度矢量；

(5)　在上述过程开始和结束时质点的瞬时加速度矢量。

辐角从$+x$轴朝逆时针方向起算。

解：

(1)　根据周期$T=20\ \mathrm{s}$，可解得质点的角速度为

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{10}\ \mathrm{rad/s}$$

则分别经历了$5.0\ \mathrm{s}$、$7.5\ \mathrm{s}$和$10\ \mathrm{s}$后，质点的角位移分别为

$$\theta\big|_{t=5.0\ \mathrm{s}} = \omega t = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta\big|_{t=7.5\ \mathrm{s}} = \omega t = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta\big|_{t=10\ \mathrm{s}} = \omega t = \pi$$

根据质点的运动方程（容易求出）

$$x(t) = R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(t) = R\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + R$$

其中 $R = 3.0\ \mathrm{m}$ 为圆轨道半径。这里 x 和 y 分别是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的两个分量，也就是位矢随时间的演化满足

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\cdot\hat{\boldsymbol{i}} + y(t)\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$$

将时间（或角位移）分别代入，则可求出对应时刻质点的位矢，并以模长和辐角形式表示

$$\boldsymbol{r}\big|_{t=5.0\ \mathrm{s}} = (3.0\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{i}} + (3.0\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{j}} = 4.2\ \mathrm{m}\,\underline{/45^\circ}$$

$$\boldsymbol{r}\big|_{t=7.5\ \mathrm{s}} = (2.1\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{i}} + (5.1\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{j}} = 5.5\ \mathrm{m}\,\underline{/67.5^\circ}$$

$$\boldsymbol{r}\big|_{t=10\ \mathrm{s}} = (0.0\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{i}} + (6.0\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{j}} = 6.0\ \mathrm{m}\,\underline{/90^\circ}$$

(2) 质点位移即初末时刻位矢的变化量，故

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\big|_{t=10\ \mathrm{s}} - \boldsymbol{r}\big|_{t=5.0\ \mathrm{s}} = (-3.0\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{i}} + (3.0\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{j}} = 4.2\ \mathrm{m}\,\underline{/135^\circ}$$

(3) 平均速度

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = (-0.60\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{i}} + (0.60\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{j}} = 0.85\ \mathrm{m/s}\,\underline{/135^\circ}$$

（解出 $\bar{v} = 0.84\ \mathrm{m/s}\,\underline{/135^\circ}$ 亦可，这是有效数字位数截断导致的计算误差。）

(4) 根据瞬时速度的定义

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}} + x\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}} + y\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}} = v_x(t)\cdot\hat{\boldsymbol{i}} + v_y(t)\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$$

其中有

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\omega\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

代入该过程的初末时刻即可得到对应时刻的瞬时速度

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=5.0\ \mathrm{s}} = (0.00\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{i}} + (0.94\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{j}} = 0.94\ \mathrm{m/s}\,\underline{/90^\circ}$$

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=10\ \mathrm{s}} = (-0.94\ \mathrm{m/s})\hat{\boldsymbol{i}} + (0.00\ \mathrm{m})\hat{\boldsymbol{j}} = 0.94\ \mathrm{m/s}\,\underline{/180^\circ}$$

可见速率为恒定的 $v = R\omega = 0.94\ \mathrm{m/s}$，方向沿着圆轨道切线方向。

(5)　根据瞬时加速度的定义

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}}+v_x\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}}+v_y\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}}=a_x(t)\cdot\hat{\boldsymbol{i}}+a_y(t)\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$$

其中有

$$a_x(t)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-R\omega^2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_y(t)=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-R\omega^2\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

代入该过程的初末时刻即可得到对应时刻的瞬时加速度

$$\boldsymbol{a}\big|_{t=5.0\ \mathrm{s}}=(-0.30\ \mathrm{m/s^2})\hat{\boldsymbol{i}}+(0.00\ \mathrm{m/s^2})\hat{\boldsymbol{j}}=0.30\ \mathrm{m/s^2}\ \underline{/180^\circ}$$

$$\boldsymbol{a}\big|_{t=10\ \mathrm{s}}=(0.00\ \mathrm{m/s^2})\hat{\boldsymbol{i}}+(-0.30\ \mathrm{m/s^2})\hat{\boldsymbol{j}}=0.30\ \mathrm{m/s^2}\ \underline{/270^\circ}$$

可见加速度大小为恒定的 $a=R\omega^2=0.30\ \mathrm{m/s^2}$，方向指向圆轨道的圆心（即向心加速度）。

（利用加速度的切向与法向分量 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 和 $a_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{R}$ 计算亦可，前者在本题中为零。）

Problem 4.23

一个质点在平面中作如下运动

$$x=R\sin\omega t+\omega Rt$$

$$y=R\cos\omega t+R$$

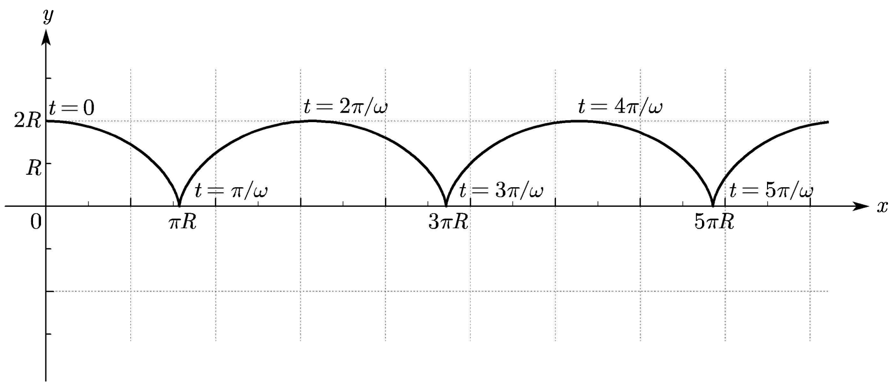
其中 ω 和 R 为常量，这条曲线被称为摆线（cycloid），是一个车轮在沿 x 轴不打滑滚动的过程中其轮缘上某固定点所描绘的轨迹。

(1)　画出这条轨迹；

(2)　计算当该质点的 y 坐标为最小和最大值时的瞬时速度和瞬时加速度。

解：

(1)　运动轨迹如下图所示：



(2)　根据上图可以发现这是一个具有明显周期性的运动。当 $t=\dfrac{\pi}{\omega},\ \dfrac{3\pi}{\omega},\ \dfrac{5\pi}{\omega},\ \ldots$ 等时刻 $y=0$ 为最小，当 $t=0,\ \dfrac{2\pi}{\omega},\ \dfrac{4\pi}{\omega},\ \ldots$ 等时刻 $y=2R$ 为最大。

根据瞬时速度的定义

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}}+x\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}}+y\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}}=v_x(t)\cdot\hat{\boldsymbol{i}}+v_y(t)\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$$

其中有

$$v_x(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=R\omega\cos\omega t+\omega R$$

$$v_y(t)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-R\omega\sin\omega t$$

将$t=\frac{\pi}{\omega}$（代表y最小时）和$t=0$（代表y最大时）分别代入，解得对应的瞬时速度

$$\boldsymbol{v}\Big|_{t=\frac{\pi}{\omega}}=0\cdot\hat{\boldsymbol{i}}+0\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=0$$

$$\boldsymbol{v}\Big|_{t=0}=-2R\omega\cdot\hat{\boldsymbol{i}}+0\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=2R\omega\ \underline{/180^\circ}$$

即当y最小时质点速度为零；当y最大时质点速度为$2R\omega$，方向水平向左。

(3) 根据瞬时加速度的定义

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}}+v_x\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}}+v_y\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{j}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{j}}=a_x(t)\cdot\hat{\boldsymbol{i}}+a_y(t)\cdot\hat{\boldsymbol{j}}$$

其中有

$$a_x(t)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-R\omega^2\sin\omega t$$

$$a_y(t)=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-R\omega^2\cos\omega t$$

将$t=\frac{\pi}{\omega}$（代表y最小时）和$t=0$（代表y最大时）分别代入，解得对应的瞬时加速度

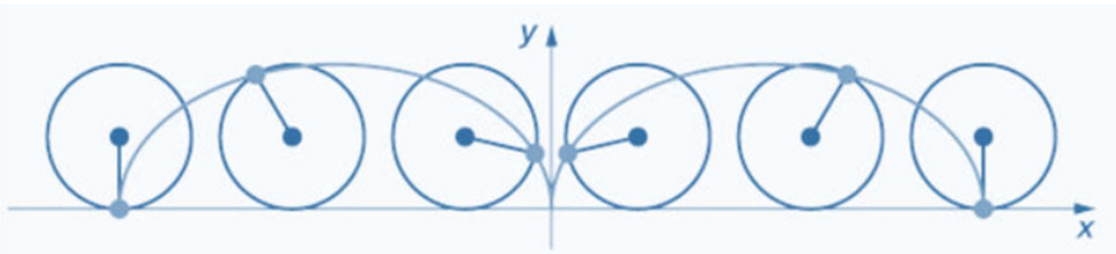
$$\boldsymbol{a}\Big|_{t=\frac{\pi}{\omega}}=0\cdot\hat{\boldsymbol{i}}+R\omega^2\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=R\omega^2\ \underline{/90^\circ}$$

$$\boldsymbol{a}\Big|_{t=0}=0\cdot\hat{\boldsymbol{i}}-R\omega^2\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=R\omega^2\ \underline{/270^\circ}$$

即当y最小时质点加速度为$R\omega^2$，方向竖直向上；当y最大时质点加速度也为$R\omega^2$，方向竖直向下。

附：摆线的形成及质点速度和加速度的直观分析法

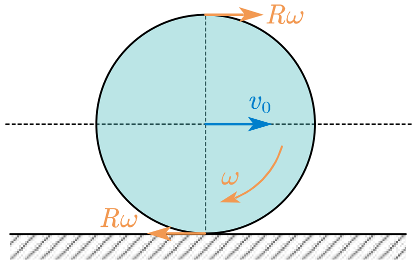
摆线又称旋轮线或滚轮线，其形成可用下图描述，即题干中所说的“一个车轮在沿x轴不打滑滚动的过程中其轮缘上某固定点所描绘的轨迹”。



因此摆线上点的运动可以分解为两部分：和车轮轮轴沿x轴向右的水平运动和该点围绕

轮轴的顺时针转动。所以摆线上的点的瞬时速度也可以分为这两部分计算再后合成。

设轮轴水平运动速度大小为v_0（方向显然水平向右）、轮轴转动角速度为ω（顺时针方向），所以质点圆周运动的线速度大小为$R\omega$。则质点在最高处和最低处的合速度应为v_0和$R\omega$分别所代表速度的矢量合成。



在最低点，由于车轮滚动不打滑，故此时合速度应该为零。而此时两个分速度反向，解出v_0的大小应等于$R\omega$。

在最高点，两个分速度同向，合速度应为$2R\omega$。

瞬时加速度大小均为$R\omega^2$，方向指向轮轴，即向心加速度。

有兴趣的同学还可以查询关于“最速降线”等有趣问题的资料。