微积分H作业解答

第二周

题目1. (7.3.17) 判断下列级数是否收敛?若收敛,是条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+3}$.

解答: (1) $|\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}|<\frac{1}{n(\ln n)^2}$, 而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$收敛,

则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}|$收敛, 得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n(\ln n)^2+1}$绝对收敛.

(4) $\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$单调递减收敛于0,由莱布尼茨判别法, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$收敛.

另一方面级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$ 与级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$同敛散, 得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$发散,

故级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+2}$条件收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}\neq 0$,由级数收敛的必要条件, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{2n+3}$发散.

题目2. (7.3.22) 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有2阶连续导数,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a$ $(a\geq 0)$, 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$ 和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$的敛散性.

解答: 对$a>0$和$a=0$两种情况分类讨论:

1. 当$a>0$时,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a>0$,由于$f'(x)$连续,

则$\exists\delta>0$使得$f'(x)>0,\forall x\in(0,\delta)$, 由此可得当$n>\frac{1}{\delta}$时,$f(\frac{1}{n})$单调递减,

又$\lim\limits_{n\to+\infty}f(\frac{1}{n})=f(0)=0$, 根据莱布尼茨判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$收敛.

另一方面,根据极限判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$ 与级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$同敛散,即发散.

综上,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$发散, 级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$条件收敛.

2. 当$a=0$时,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 记$b=f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|f(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}}=|b|\geq 0$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 由极限判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|f(\frac{1}{n})|$收敛.

得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$ 和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

题目3. (7.3.26) 设$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$, 证明级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$收敛.

解答: $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin(x+n\pi)}{\sqrt{x+n\pi}}dx=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x+n\pi}}dx$,

记$v_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x+n\pi}}dx\geq 0$, $v_{n+1}-v_n=\int_0^{\pi}\sin x(\frac{1}{\sqrt{x+(n+1)\pi}}-\frac{1}{\sqrt{x+n\pi}})dx\leq 0$,

得v_n单调递减,另一方面$v_n\leq\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{n\pi}}=\frac{\pi}{\sqrt{n\pi}}\to 0$,即$v_n$单调递减收敛于0.

根据莱布尼茨判别法,级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n v_n$收敛.

题目4. (7.4.30) 求下列幂级数的收敛域:

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{3^n}{n^2}+\frac{n}{2^n})x^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n\cdot 4^n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3(2x-1)^{2n}}{(3n)!}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$.

解答: (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}+\frac{n}{2^n}}=3$,

收敛半径$r=\frac{1}{3}$,收敛区间为$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

当$x=\frac{1}{3}$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{n}{6^n})$收敛,

当$x=-\frac{1}{3}$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^n}{n^2}+\frac{(-1)^n\cdot n}{6^n})$收敛,

故收敛域为$[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

(3) 令$t=(x+1)^2$,考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}t^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 4^n}}=\frac{1}{4}$,

收敛半径$r=4$,收敛区间为$(-4,4)$.

当$t=4$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散,又$t=(x+1)^2\geq 0$,

故关于t的收敛域为$[0,4)$,代回x得收敛域为$(-3,1)$.

(7) 令$t=(2x-1)^2$,考虑幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}t^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{1}{27}$,

收敛半径$r=27$,收敛区间为$(-27,27)$.

当$t=27$时,$\frac{(n!)^3 27^n}{(3n)!}=\frac{(3^n\prod\limits_{k=1}^{n}k)^3}{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k-2)(3k-1)3k}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}3k\cdot 3k\cdot 3k}{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k-2)(3k-1)3k}>1$,

故级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3 27^n}{(3n)!}$发散,又$t=(x+1)^2\geq 0$,

得关于t的收敛域为$[0,27)$,代回x得收敛域为$(\frac{1-3\sqrt{3}}{2},\frac{1+3\sqrt{3}}{2})$.

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$,

收敛半径$r=\frac{1}{e}$,收敛区间为$(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

当$x=\pm\frac{1}{e}$时,因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{2}+o(1)}=\frac{1}{\sqrt{e}}$, 得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$ 与级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$均发散,

故收敛域为$(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

题目5. (7.4.31) 求下列幂级数的收敛域与和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n-1}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$.

解答: (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$,收敛半径$r=1$,

收敛区间为$(-1,1)$.当$x=\pm1$时级数显然发散,故收敛域为$(-1,1)$.

和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{2-x}{(1-x)^2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}=1$,收敛半径$r=1$,

收敛区间为$(-1,1)$.当$x=\pm1$时,级数$\pm\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}$发散,故收敛域为$(-1,1)$.

和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n-1}=x^2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x^2\int\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{2n-2}=x^2\int\frac{dx}{1-x^2}$

$=\frac{x^2}{2}\int(\frac{dx}{1+x}+\frac{dx}{1-x})=\frac{x^2}{2}\cdot(\ln(1+x)+\ln(1-x))=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

(6) 令$t=\frac{(x-2)^2}{4}$,考虑幂级数$S(t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}$.

书上已证该级数的收敛域是$[-1,1)$,和函数为$S(t)=-\ln(1-t)$.

代回x得,级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$的收敛域为$(0,4)$,

和函数为$S(x)=-\ln(1-\frac{(x-2)^2}{4})=\ln 4-\ln(4x-x^2)$.

题目6. (7.4.32) 证明下列级数收敛,并计算级数的和:

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

解答: (3) 收敛性由莱布尼茨判别法可以直接得到.

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)}$,

则$S'(x)=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)}$, $S''(x)=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n-2}=-\frac{2}{1+x^2}$.

对$S''(x)$再积分可得,$S'(x)=-2\int\frac{dx}{1+x^2}=-2\arctan x$,

$S(x)=-2\int\arctan x dx=\ln(1+x^2)-2x\arctan x$.

故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}=S(1)=\ln 2-\frac{\pi}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}<1$, 根据比值判别法知级数收敛.

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^n$,

则有$S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^{n-1}-x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=x(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n+1})''-x(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n)'$

$=x(\frac{x^2}{1-x})''-x(\frac{x}{1-x})'=\frac{2x}{(1-x)^3}-\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}=S(\frac{1}{2})=6$.