《普通物理学 I（H）》课程

课程作业 (3)

张晗潇　12036020　浙江大学物理学系　理论物理班·聚变理论与模拟中心
邮箱：zhx_199855@163.com　联系电话：17367078032　授课教师：马志为　on 2021.3.19

Exercise 5.11

如果鞋子与路面之间的静摩擦因数为0.95，那么跑步者可以产生的最大加速度是多少？

解：

跑步前进的动力由静摩擦力提供。由于鞋子与路面之间的静摩擦因数$\mu_s = 0.95$，所以其所能提供的最大静摩擦力为

$$f_{smax} = \mu_s mg$$

则跑步者能产生的最大加速度为

$$a_{max} = \frac{f_{smax}}{m} = \mu_s g = 9.3\ \mathrm{m/s^2}$$

其中取重力加速度$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$。

Exercise 5.18

一个学生想确定盒子和木板之间的静摩擦因数和动摩擦因数。她将盒子放在木板上，然后逐渐抬起木板的一端。当与水平方向的倾斜角度达到28.0°时，盒子开始滑动并在3.92 s内沿木板向下滑动2.53 m，求摩擦因数。

解：

盒子所受的摩擦力恰超过其最大静摩擦力时，盒子开始下滑。此时沿木板平面方向有

$$f_{smax} = \mu_s mg\cos\theta = mg\sin\theta$$

其中$\theta = 28.0°$，则解得静摩擦因数为

$$\mu_s = \tan\theta = 0.532$$

盒子开始下落后，沿木板平面方向同时受到动摩擦力和重力分量作用，其加速度表示为

$$a = \frac{mg\sin\theta - f_k}{m} = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$$

又由于盒子从静止开始作匀加速直线运动，有$\Delta t = 3.92\ \mathrm{s}$、$\Delta l = 2.53\ \mathrm{m}$，易计算得

$$\Delta l = \frac{1}{2}a\Delta t^2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2\Delta l}{\Delta t^2} = 0.329\ \mathrm{m/s^2}$$

所以解得动摩擦因数为（取$g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$）

$$\mu_k = \frac{g\sin\theta - a}{g\cos\theta} = 0.494$$

Exercise 5.39

无摩擦的工作台上的质量为m的圆盘通过绳索穿过工作台中央的孔连接到下面悬挂的质量为M的圆柱体上（图略）。 为了使圆柱体能够保持静止，找到圆盘在半径r的圆轨道上运动所必须的速率值。

解：

在惯性系中，圆盘所受的合外力提供向心力使之绕工作台中央的孔作圆周运动，向心力的方向指向圆心；转换到圆盘和绳索自身系中，等效为圆盘受到一个惯性离心力并与其所受的其他合外力共同维持平衡，惯性离心力的方向背离圆心。因此对于不下落（沿绳索方向平动加速度为零）的圆盘，由受力平衡有

$$F_{\mathrm{ic}} = T_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = T_1$$

其中T_1为绳索对圆盘的拉力。而对于保持静止的圆柱体，由受力平衡有

$$T_2 = Mg$$

其中T_2为绳索对圆柱体的拉力。由于绳索平动加速度为零（注意并不是因为它是轻绳），有

$$T_1 = T_2 \qquad \text{（所以也可以统一记作}T\text{）}$$

因此有

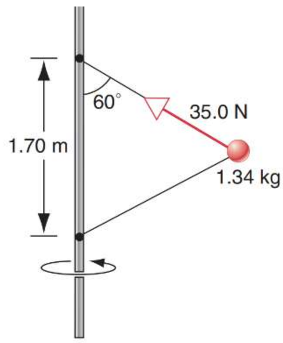
$$F_{\mathrm{ic}} = T_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = Mg$$

对应的速率值

$$v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}}$$

Problem 5.17

一个$1.34\ \mathrm{kg}$重的球通过两条无质量的弦（每根长$1.70\ \mathrm{m}$）固定在一根刚性垂直杆上， 弦在相距$1.70\ \mathrm{m}$的位置处与杆连接。系统围绕杆的轴旋转，两根弦都拉紧，并与杆形成一个等边三角形，如右图所示。上弦的张力为$35.0\ \mathrm{N}$。



(1)　求下弦的张力；

(2)　计算图中所示瞬间作用在球上的净力；

(3)　球的速度是多少？

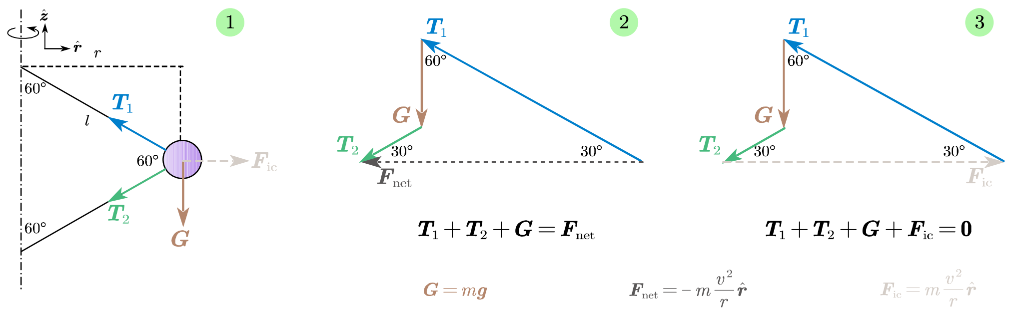
解：

(1)　对球受力分析如下图所示，并将所有力矢量首尾相接成为封闭的矢量多边形，则满足

$$\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{net}} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \text{（合外力等于向心力）}$$

或　$$\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{ic}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{net}} + \frac{mv^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{（或合外力与惯性离心力平衡）}$$

下图画出了两种受力分析的方式，两种方式是彼此等价的。注意我们将球到杆的水平距离定义为r，显然有$r = l\sin 60°$，其中$l = 1.70\ \mathrm{m}$。其中重力$\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$、向心力$F_{\mathrm{net}} = -\dfrac{mv^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$、惯性离心力$F_{\mathrm{ic}} = \dfrac{mv^2}{r}\hat{\boldsymbol{r}}$。注意①图中只示意了各力的方向，而②图与③图（分别表示两种受力分析方式）中表示各力的矢量箭头的长度应与各力大小成正比。



由矢量多边形，我们在水平方向和竖直方向分别有等量关系

$$\sum F_r = ma_r \quad \Longrightarrow \quad -T_1\cos 30° - T_2\cos 30° = -m\frac{v^2}{r}$$

（或 $$\sum F_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad -T_1\cos 30° - T_2\cos 30° + m\frac{v^2}{r} = 0$$ ）

$$\sum F_z = 0 \quad \Longrightarrow \quad T_1\sin 30° - mg - T_2\sin 30° = 0$$

代入数据$T_1 = 35.0\ \mathrm{N}$、$mg = 13.1\ \mathrm{N}$（取$g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$），易解得

$$T_2 = 8.80\ \mathrm{N}$$

$$m\frac{v^2}{r} = 37.9\ \mathrm{N}$$

故下弦的张力大小$T_2 = 8.80\ \mathrm{N}$，方向沿弦如图所示。

(2)　同样解得此时的净力

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{net}} = -m\frac{v^2}{r}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = (-37.9\ \mathrm{N})\cdot\hat{\boldsymbol{r}}$$

即净力大小$F_{\mathrm{net}} = 37.9\ \mathrm{N}$，方向沿$-\hat{\boldsymbol{r}}$方向（水平向内指向杆）。

(3)　根据$r = l\sin 60° = 1.47\ \mathrm{m}$、$m = 1.34\ \mathrm{kg}$，易解得此时球的速度大小

$$v = 6.45\ \mathrm{m/s}$$

由于此时球应当绕杆作圆周运动，由图可知其方向垂直纸面向里。

评注：

在解答有关圆周运动或其他更一般曲线运动的问题时，既可以利用惯性系中的传统思路（合外力提供向心力）解答，也可以转换到非惯性系中利用惯性力的思路（合外力与一个假想的惯性离心力达成平衡）从而将动力学问题转化为静力学问题解答——这种方式被称为运用了质点的达朗贝尔原理。这两种思路是等效的。

将所有力矢量首尾相接形成矢量三角形或多边形是一种直观性极强的分析技巧，称为矢量图解法，常用于很多动态变化问题的定性判断，有时还要结合与实际问题中几何结构的相

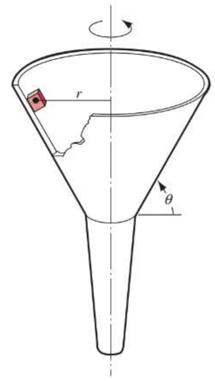
似性进行分析。

位置、力、速度等都是矢量，矢量有大小和方向，矢量的模长（大小）是标量，矢量的各分量也是标量。我们常用粗斜体字母如$\boldsymbol{r}$表示矢量（印刷时为了排印方便使用粗体，手写时则应加箭头写作$\vec{r}$或$\overrightarrow{r}$，不要遗漏箭头），而对应的细斜体字母表示其模长标量，如r就表示$\boldsymbol{r}$的大小（即$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}$）。

而$\hat{\boldsymbol{r}}$表示的是与$\boldsymbol{r}$同方向、模长为1（无单位）的单位矢量，其上的尖角符号读作 hat。一般情况下，沿着空间直角坐标系三根坐标轴方向的单位矢量除可表示为$\hat{\boldsymbol{x}}$、$\hat{\boldsymbol{y}}$、$\hat{\boldsymbol{z}}$外，也常用$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$（或$\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$、$\hat{\boldsymbol{k}}$）表示，此外还有诸如$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{u}_x$等其他表示单位矢量的方法。

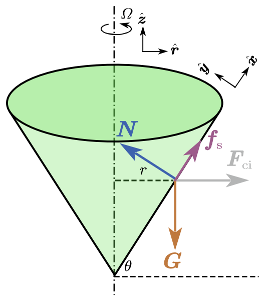
注意表达矢量时也不要遗漏物理量的单位。

Problem 5.18



一个非常小的滑块，质量为m，被放置在一个围绕垂直轴以每秒ω转的恒定速率旋转的漏斗内部。漏斗的壁与水平面成一个角θ。滑块和漏斗之间的静摩擦系数为μ_s，滑块的中心距旋转轴的距离为r。找出能使滑块相对于漏斗不会移动的ω最大值和最小值。

解：



对小滑块受力分析如右图所示。对于此题，引入惯性离心力将动力学问题转化为静力学问题的方法明显更加方便（故此时我们将惯性离心力也视作和其他各力有着同等地位的一个力，故右图中$\boldsymbol{F}_{ci}$所对应的箭头未用虚线，图中依然只示意各力方向而未表示大小）。根据受力平衡有

$$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{f}_s+\boldsymbol{F}_{ci}=\boldsymbol{0}$$

其中

$$\boldsymbol{G}=m\boldsymbol{g}$$
$$\boldsymbol{F}_{ci}=m\Omega^2\boldsymbol{r}$$
$$|\boldsymbol{f}_s|\leq\mu_s\boldsymbol{N}$$

需要注意这几点：静摩擦力$\boldsymbol{f}_s$的方向可能沿漏斗内斜面向上、也有可能沿漏斗内斜面向下，，但总之与支持力$\boldsymbol{N}$的方向垂直，其大小也是不确定的；惯性离心力（也可简称为离心力）$\boldsymbol{F}_{ci}$的表达式中用Ω来代表角速度，要关注到本题中给出的ω是转速而不是角速度，两者的关系为$\Omega=2\pi\omega$。

方法一（解析求解法）：

不妨以沿漏斗内斜面向上为x轴正方向、以垂直于漏斗内斜面向上为y轴正方向建立坐标系，设静摩擦力沿x轴正方向的分量为f_s，根据受力平衡列出

$$\sum F_x=0 \implies m\Omega^2 r\cos\theta+f_s-mg\sin\theta=0$$

$$\sum F_y=0 \implies N-m\Omega^2 r\sin\theta-mg\cos\theta=0$$

通过上述第一式，我们显然发现 f_s 与 Ω 呈现单调的反相关关系，即 Ω 最大时 f_s 应最小，Ω 最小时 f_s 应最大。注意这里我们设的 f_s 并不是静摩擦力的大小，而是静摩擦力沿 x 轴正方向的分量的大小（即可正可负），所以我们进一步得到的结论是：当 Ω 最大时，静摩擦力应刚好沿着沿漏斗内斜面向下并取得最大值；当 Ω 最小时，静摩擦力应刚好沿着沿漏斗内斜面向上并取得最大值。

由于 $|\boldsymbol{f}_s| \leq \mu_s \boldsymbol{N}$，显然有 $-\mu_s N \leq f_s \leq \mu_s N$。因此，当 Ω 最大时，应将 $f_s = -\mu_s N$ 代入，联立解得

$$\Omega = \Omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}$$

即使滑块不运动的最大角速度值，对应的最大转速值

$$\omega = \omega_{\max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}$$

同理，当 Ω 最小时，应将 $f_s = \mu_s N$ 代入，联立解得

$$\Omega = \Omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}}$$

即使滑块不运动的最小角速度值，对应的最小转速值

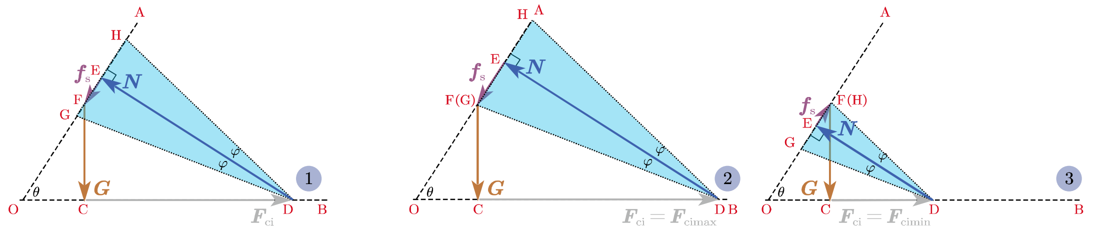
$$\omega = \omega_{\min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}}$$

与之前的最大转速值相比，可以发现只是改变了 μ_s 之前的符号。

方法二（矢量图解法）：

现在我们尝试利用矢量图解法解决这个问题，同样将所有力矢量首尾相接成为封闭的矢量多边形。我们要注意的是：只有重力 $\boldsymbol{G}$ 有确定的大小和方向，其他所有力矢量只有确定的方向而未确定大小，静摩擦力的 $\boldsymbol{f}_s$ 的朝向也不能确定。

因此我们画出下图中图①：固定重力 $\boldsymbol{G}$ 在竖直向下的有向线段 $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$ 上，过点 C 作水平方向的射线 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$、过点 F 作与 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 夹 θ 角的射线 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，两射线的交点就是 O 点，故有 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$。支持力 $\boldsymbol{N}$ 的首端点 D 在射线 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 上自由移动、尾端点 E 在射线 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上自由移动，要求始终有 $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，连有向线段 $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ 为静摩擦力 $\boldsymbol{f}_s$，连有向线段 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 为惯性离心力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ci}}$。显然当 ω 最大或最小时将有 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ci}}$ 最大或最小，所以我们关注的是什么条件下有向线段 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$（即代表 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ci}}$）能取得最长或最短。



我们注意到，静摩擦力 $\boldsymbol{f}_s$ 的大小不是任意的，它受到支持力 $\boldsymbol{N}$ 大小的制约关系。根据

$$\frac{f_{\text{smax}}}{N}=\mu_{\text{s}}$$

我们不妨定义$\varphi=\arctan\mu_{\text{s}}$，将$\varphi$称作最大的摩擦角。由此我们可以以D为顶点、E为底边中点，绘制出如图所示的蓝色等腰三角形△GDH，它由两个直角三角形Rt△DEG和Rt△DEH组合而成，满足$\angle\text{EDG}=\angle\text{EDH}=\varphi$。这样我们知道：F点只可能在线段$\overline{\text{HG}}$上移动，故有向线段$\overrightarrow{\text{EF}}$最长只能到达$\overrightarrow{\text{EG}}$或$\overrightarrow{\text{EH}}$。

当ω最大时，$\boldsymbol{F}_{\text{ci}}$也要取得最大，故有向线段$\overrightarrow{\text{CD}}$最长。易见此时要求G点刚好位于F点处，即$\overrightarrow{\text{EF}}$与$\overrightarrow{\text{EG}}$重合，如上图中图②所示。此时在Rt△FCD中根据几何关系易有

$$\frac{G}{F_{\text{cimax}}}=\frac{mg}{m\Omega_{\text{max}}^2 r}=\tan(90°-\theta-\varphi)$$

解得最大角速度

$$\Omega_{\text{max}}=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{1}{\tan(90°-\theta-\varphi)}}=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{1+\cot\theta\tan\varphi}{\cot\theta-\tan\varphi}}=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta+\mu_{\text{s}}\cos\theta}{\cos\theta-\mu_{\text{s}}\sin\theta}}$$

同理最大转速

$$\omega_{\text{max}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta+\mu_{\text{s}}\cos\theta}{\cos\theta-\mu_{\text{s}}\sin\theta}}$$

而当ω最小时，$\boldsymbol{F}_{\text{ci}}$也要取得最小，故有向线段$\overrightarrow{\text{CD}}$最短。易见此时要求H点刚好位于G点处，即$\overrightarrow{\text{EF}}$与$\overrightarrow{\text{EG}}$重合，如上图中图③所示。此时在Rt△FCD中根据几何关系易有

$$\frac{G}{F_{\text{cimin}}}=\frac{mg}{m\Omega_{\text{min}}^2 r}=\tan(90°-\theta+\varphi)$$

解得最小角速度

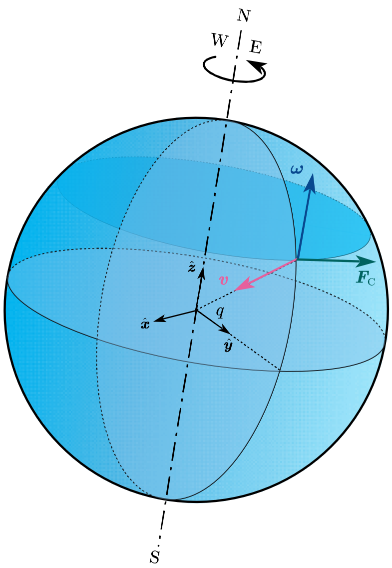
$$\Omega_{\text{min}}=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{1}{\tan(90°-\theta+\varphi)}}=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{1-\cot\theta\tan\varphi}{\cot\theta+\tan\varphi}}=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta-\mu_{\text{s}}\cos\theta}{\cos\theta+\mu_{\text{s}}\sin\theta}}$$

同理最小转速

$$\omega_{\text{min}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}\frac{\sin\theta-\mu_{\text{s}}\cos\theta}{\cos\theta+\mu_{\text{s}}\sin\theta}}$$

Quiz 2

一个质量为m的球从北半球纬度q、距地球表面高度为h处自由下落，其中$h\ll R$，R为地球半径。请问到它落地时它的位置会向东偏移多少？



解：

如右图所示。地球自转方向自西向东，根据右手螺旋定则判断其角速度矢量$\boldsymbol{\omega}$的方向朝北，初速度$\boldsymbol{v}$的方向为竖直向下（即指向地球中心）。

由于地球表面是一个非惯性系，利用科里奥利

力的公式

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$$

有两种方法求得科里奥利力的大小和方向：

方法一（根据矢量叉积的定义直接计算）：根据矢量叉积的定义，其方向可利用右手定则判断为沿着地球表面朝东（顺着地球自转方向），其大小满足

$$F_{\mathrm{C}} = 2m\omega v \sin(90° + q)$$

其中$(90° + q)$是$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{v}$两矢量的夹角，解得

$$F_{\mathrm{C}} = 2m\omega v \cos q$$

方法二（根据矢量叉积的坐标表示进行计算）：建立如图所示的右手空间直角坐标系，则$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{v}$两矢量分别可以表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{v} = (-v\cos q)\hat{\boldsymbol{y}} + (-v\sin q)\hat{\boldsymbol{z}}$$

由于

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = (\omega_y v_z - \omega_z v_y)\hat{\boldsymbol{x}} + (\omega_z v_x - \omega_x v_z)\hat{\boldsymbol{y}} + (\omega_x v_y - \omega_y v_x)\hat{\boldsymbol{z}} = (\omega v \cos q)\hat{\boldsymbol{x}}$$

故

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = (-2m\omega v \cos q)\hat{\boldsymbol{x}}$$

也即科里奥利力的大小为$2m\omega v \cos q$，方向为$-\hat{\boldsymbol{x}}$方向，也即沿着地球表面朝东（顺着地球自转方向）。

受科里奥利力影响，物体在自由下落时应向东偏转，其位移

$$d_{\mathrm{east}} = \int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t \frac{F_{\mathrm{C}}}{m} \mathrm{d}t = \int_0^t \mathrm{d}t \int_0^t 2\omega v \cos q \, \mathrm{d}t$$

其中v为自由落体的速度，随时间的变化满足$v = gt$。（注：由于科里奥利力相对于重力来说非常小，故不计科里奥利力的偏转对其速度大小和方向的影响；由于下落高度$h \ll R$，故认为重力加速度g为恒定值。）代入得

$$d_{\mathrm{east}} = \frac{1}{3}\omega g \cos q t^3$$

将落地所需时间$t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$代入，最终得到偏转的距离

$$d_{\mathrm{east}}\Big|_{t=\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\, h\omega \cos q$$

评注：

这是一个典型的利用科里奥利力相关性质求解的问题。科里奥利力（Coriolis Force，简称科氏力），是对旋转参考系中进行直线运动的质点引入的一种惯性力，要注意惯性力是非惯性系中引入的假想力，故没有施力物体。

由于我们的地球在不断自转，本质是个非惯性系，所以在地球表面附近运动的物体往往也会受到科里奥利力的作用而发生偏转，此时它被称作“地转偏向力”。总的而言，在北半球运动的物体有向右偏转的趋势，在南半球运动的物体则有向左偏转的趋势。因此，北半球的河流，流向的右侧因侵蚀较强而多峭壁，左侧则多平缓河岸，南半球反之；长途飞机、洲

际导弹等长距离飞行器在设计轨道时也要考虑科里奥利力的影响。该现象还主宰着全球的大气环流，使得北半球低纬度地区的偏北风变成东北风、南半球低纬度地区的偏南风变成西南风，形成了所谓的信风带。此外，北半球的低压区（如热带气旋等）逆时针旋转而南半球的则顺时针旋转也是处于同样的原因。我们利用科里奥利力的原理设计傅科摆，可以证明地球在自转。但要注意的是：因为地球自转非常慢，所以科里奥利力的效应只有在较大的时空尺度上才比较明显，对于马桶或水槽漩涡旋转方向之类的小尺度、短时间过程的影响并不显著。

本题还需要利用到矢量叉积（或称矢积）的相关性质和计算方法。叉积在物理学有着广泛应用（尤其是后续在电磁学中，例如洛伦兹力$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$），希望同学们了解其计算方法和几何意义，可以多做些相关练习。

Problem 6.10

如图所示（图略），两只$22.7\ \mathrm{kg}$重的雪橇相隔很短的距离，一个直接放在另一个后面。一只体重$3.63\ \mathrm{kg}$的猫站在一只雪橇上，跳到另一只雪橇上，很快又回到第一只雪橇上。两次跳跃相对于起跳时所在雪橇的速度均为$3.05\ \mathrm{m/s}$，求两只雪橇的最终速度。

解：

本题以水平向右为正方向。

每只雪橇的质量$M=22.7\ \mathrm{kg}$，猫的质量$m=3.63\ \mathrm{kg}$。设雪橇原先静止放置在地面上，猫原先站在左边的雪橇上。第一次跳跃，猫从左边的雪橇跳到右边的雪橇；第二次跳跃，猫从右边的雪橇跳到左边的雪橇。

第一次，猫从左边的雪橇跳起后，设猫的速度水平分量为v_{c1}、左右两只雪橇的速度水平分量为v_{a1}和v_{b1}，则由动量守恒可得

$$0=Mv_{a1}+mv_{c1}$$
$$0=Mv_{b1}$$

其中要求$v_{c1}-v_{a1}=v_0=3.05\ \mathrm{m/s}$。解得$v_{a1}=-0.420\ \mathrm{m/s}$、$v_{b1}=0\ \mathrm{m/s}$、$v_{c1}=2.63\ \mathrm{m/s}$。

猫落到右边的雪橇后，设左右两只雪橇的速度水平分量为v_{a2}和v_{b2}，则由动量守恒可得

$$Mv_{a1}=Mv_{a2}$$
$$Mv_{b1}+mv_{c1}=(M+m)v_{b2}$$

解得$v_{a2}=-0.420\ \mathrm{m/s}$、$v_{b2}=0.364\ \mathrm{m/s}$。

第二次，猫从右边的雪橇跳起后，设猫的速度水平分量为v_{c3}、左右两只雪橇的速度水平分量为v_{a3}和v_{b3}，则由动量守恒可得

$$Mv_{a2}=Mv_{a3}$$
$$(M+m)v_{b2}=Mv_{b3}+mv_{c3}$$

其中要求$v_{b3}-v_{c3}=v_0$。解得$v_{a3}=-0.420\ \mathrm{m/s}$、$v_{b3}=0.784\ \mathrm{m/s}$、$v_{c3}=-2.27\ \mathrm{m/s}$。

猫落到左边的雪橇后，设左右两只雪橇的速度水平分量为v_{a4}和v_{b4}，则由动量守恒可得

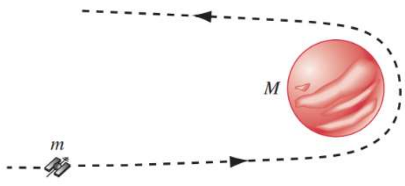
$$Mv_{b3} = Mv_{b4}$$
$$Mv_{a3} + mv_{c3} = (M+m)v_{a4}$$

解得$v_{a4} = -0.675\ \text{m/s}$、$v_{b4} = 0.784\ \text{m/s}$。

综上，最终左侧雪橇的速度应为$0.675\ \text{m/s}$向左，右侧雪橇的速度应为$0.784\ \text{m/s}$向右。

Problem 6.14

旅行者 2 号探测器（质量为m，相对于太阳的速度为v）接近木星（质量为M，相对于太阳的速度为V），如右图所示。探测器绕过木星并调转方向离开。在这次“弹弓”式的相遇后，它相对于太阳的速度是多少？假设$v = 12\ \text{km/s}$和$V = 13\ \text{km/s}$（木星的轨道速度），该过程视为弹性碰撞，木星的质量远远大于探测器的质量。



解：

本题以探测器初速度方向为正方向。题中所谓“相对于太阳的速度”暗示其为静止的惯性系中的速度（因为题中不考虑太阳系整体的运动）。

设探测器和木星在经过此次“弹弓”式的相遇后速度分别为v'和V'，根据其为弹性碰撞，列出动量守恒和能量守恒的关系式（注意由于木星的速度方向是迎着探测器的，所以其初速度以$-V$代入）

$$mv + M(-V) = mv' + MV'$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M(-V)^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

解出末速度的通用表达式

$$v' = \frac{m-M}{m+M}v + \frac{2M}{m+M}(-V)$$
$$V' = \frac{2m}{m+M}v + \frac{M-m}{m+M}(-V)$$

由于木星质量远远大于飞船质量（$M \gg m$），此时有

$$v' = -(v+2V)$$
$$V' = -V$$

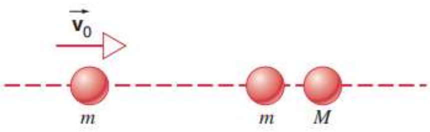
则木星速度基本不变，而探测器朝相反方向运动，速度在原有基础上增加了两倍行星的速度。将$v = 12\ \text{km/s}$和$V = 13\ \text{km/s}$代入，易计算得到此时探测器的速度高达$38\ \text{km/s}$，即探测器被木星明显加速。

这就是“引力弹弓”效应，它能够利用行星的相对运动速度和引力来改变飞行器的速度，从而为飞行器高效加速或减速，节省燃料和时间。在从地球上发射飞行器到外太阳系乃至飞出太阳系，为了使飞行器达到足够的速度，必须使飞行器飞掠木星和土星等巨行星，借助这

些行星的“引力弹弓”效应来加速。水手 10 号、旅行者 1 号、伽利略号、尤利西斯号、信使号、卡西尼号、新视野号、朱诺号等探测器都曾借助过“引力弹弓”效应。

“引力弹弓”的概念在《星际穿越》和《火星救援》等电影中都有提及。在小说和电影《流浪地球》中，被推动的地球之所以需要冒险接近木星，就是为了借助木星的“引力弹弓”效应为地球加速从而飞出太阳系。电影中主要情节背景为在此过程中出现意外致使地球被木星引力俘获，而原著小说中并无此情节，小说中的原始设定更加复杂，需要同时借助太阳和木星的引力缓慢修正地球轨道。

Problem 6.16



右图中，右侧的两个小球最初处于静止状态，略微分开；左侧小球以速度v_0入射，假设该过程为弹性正碰。

(1) 如果$M \le m$，证明总共发生过两次碰撞，并求出各最终速度；

(2) 如果$M > m$，证明总共发生过三次碰撞，并求出各最终速度

解：

将从左向右的三个小球分别编号为1、2、3。本题以1球初速度方向为正方向。

让我们回顾完全弹性碰撞的速度公式，它由动量守恒和能量守恒推导而出。设两个碰撞的小球质量分别为m_1和m_2，碰撞前的速度分别为$v_{1\mathrm{i}}$和$v_{2\mathrm{i}}$，则碰撞后的速度$v_{1\mathrm{f}}$和$v_{2\mathrm{f}}$分别可表示为

$$v_{1\mathrm{f}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2\mathrm{i}}$$

$$v_{2\mathrm{f}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1\mathrm{i}} + \frac{m_2 - m}{m_1 + m_2} v_{2\mathrm{i}}$$

首先我们可以确定的是：第一次碰撞必然会发生，它是1球和2球间的碰撞，而3球未受影响。由于1球初速度$v_{10} = v_0$、2球初速度$v_{20} = 0$、3球初速度$v_{30} = 0$，解得各球此次碰撞后末速度

$$v_{11} = v_{20} = 0$$

$$v_{21} = v_{10} = v_0$$

$$v_{31} = v_{30} = 0$$

接下来我们还可以确定的是：第二次碰撞也必然会发生，它是2球和3球间的碰撞，而1球未受影响。再次解得各球此次碰撞后末速度

$$v_{12} = v_{11} = 0$$

$$v_{22} = \frac{m - M}{m + M} v_{21} + \frac{2m}{m + M} v_{31} = \frac{m - M}{m + M} v_0$$

$$v_{32} = \frac{2m}{m + M} v_{21} + \frac{m - M}{m + M} v_{31} = \frac{2m}{m + M} v_0$$

现在主要需要确定的是是否会发生第三次碰撞。在$M \leq m$的情况下，会有$v_{22} \geqslant 0$，即此时2球的速度方向向右或静止，又由于显然$v_{32} > v_{22}$，故向右运动的2球永远也不可能追上向右运动的3球，当然也不可能去碰撞在它左边的1球，所以不可能再发生第三次碰撞。因此在$M \leq m$的情况下总共只发生两次碰撞，各球最终速度如上。

而如果是$M > m$的情况下，会有$v_{22} < 0$，即此时2球的速度方向向左，那就必然会与在它左边的1球发生第三次碰撞。又解得各球此次碰撞后末速度

$$v_{13} = v_{22} = \frac{m - M}{m + M} v_0$$

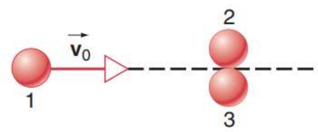
$$v_{23} = v_{12} = 0$$

$$v_{33} = v_{32} = \frac{2m}{m + M} v_0$$

那是否还会发生第四次碰撞呢？显然此时$v_{13} < 0$，故1球向左、2球静止、3球继续向右，它们永远不会再发生碰撞。因此在$M > m$的情况下总共的碰撞次数为三次，各球最终速度如上。

Problem 6.17

一个初速度为$10.0\ \mathrm{m/s}$的球与两个相同的球发生弹性碰撞，两个球的中心位于与初始速度垂直的直线上，并且两个球最初相互接触（如右图）。第一个球直接对准接触点，各球均无摩擦。求碰撞后三个球的速度。（提示：在没有摩擦的情况下，碰撞时的冲量均沿着碰撞两球的中心连线，垂直于碰撞表面。）



解：

这是一个二维空间中的问题。设三个球的质量均为m，所有小球的大小和形状完全相同。1球初速度为$\boldsymbol{v}_0$水平向右，三个球碰撞后的速度分别为$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$和$\boldsymbol{v}_3$。

由于本题为完全弹性碰撞，根据动量守恒和能量守恒

$$m\boldsymbol{v}_0 = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 + m\boldsymbol{v}_3$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2$$

即我们实际上可以列出三个方程

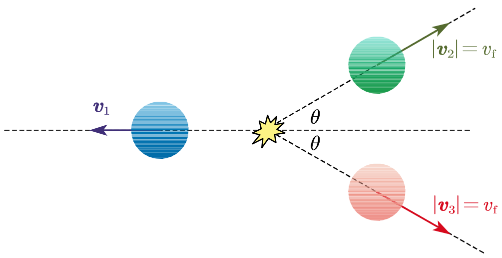
$$mv_{0x} = mv_{1x} + mv_{2x} + mv_{3x}$$

$$mv_{0y} = mv_{1y} + mv_{2y} + mv_{3y}$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(v_{3x}^2 + v_{3y}^2\right)$$

其中有六个未知数。为了能够求解，我们必须将未知数减少到三个。

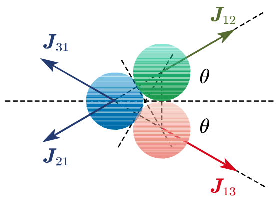
由于所有的小球都一模一样，根据系统的对称性，我们猜想1球被碰后速度必水平向左，2球和3球则应相对于水平轴线以相同大小的速度对称散开，如右图所示。记2球和3球末速度大小为v_f，其方向与水平轴线均呈θ角，则代入到前述三个方程后为



$$mv_0 = -mv_1 + 2 \cdot mv_f \cos\theta$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}mv_f^2$$

此时还剩下三个未知数（v_1、v_f和θ），但也少了一个方程（竖直方向的动量守恒由于对称性必须成立，故该方程自然丢失），依然无法求解，还需要减少一个未知数。我们再查考碰撞过程，根据题目的提示（在没有摩擦的情况下，碰撞时的冲量均沿着碰撞两球的中心连线，垂直于碰撞表面），由于所有球具有相同的半径，根据右图可知θ应为$30°$。



代入后未知数即减少为两个，解得

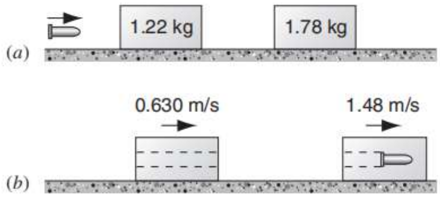
$$v_f = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0 = 6.93\ \text{m/s}$$

$$v_1 = \frac{1}{5}v_0 = 2.00\ \text{m/s}$$

即1球被碰后水平向左运动，速度大小$2.00\ \text{m/s}$（或$\boldsymbol{v}_1 = 2.00\ \text{m/s}\,\underline{/180°}$）；2球和3球被碰后均以$6.93\ \text{m/s}$大小的速度运动，运动方向分别沿右斜上方和右斜下方，与水平轴线夹$30°$角（或$\boldsymbol{v}_2 = 6.93\ \text{m/s}\,\underline{/30°}$、$\boldsymbol{v}_3 = 6.93\ \text{m/s}\,\underline{/330°}$）。

Problem 6.19

一枚$3.54\ \text{g}$的子弹水平射向无摩擦桌面上的两个块体。子弹穿过第一个质量为$1.22\ \text{kg}$的块体，嵌入第二个质量为$1.78\ \text{kg}$的块体，最终它们的速度分别为$0.630\ \text{m/s}$和$1.48\ \text{m/s}$，如右图所示。忽略子弹穿过使第一个块体损失的质量，求：



(1) 子弹从第一个块体射出后瞬间的速度；

(2) 子弹的初速度。

解：

本题以子弹初速度方向为正方向。

(1) 考察子弹从第一个块体射出后再射出第二个块体直到嵌入其中的过程。由于子弹质

量为$m_0 = 3.54\ \mathrm{g} = 0.00354\ \mathrm{kg}$，第二个块体的质量记作$M_2 = 1.78\ \mathrm{kg}$、最终第二个块体的速度为$v_2 = 1.48\ \mathrm{m/s}$，设子弹从第一个块体射出后瞬间的速度为$v_0'$，则根据动量守恒

$$mv_0' = (m + M_2)v_2$$

解得$v_0' = \dfrac{(m + M_2)}{m}v_2 = 746\ \mathrm{m/s}$向右。

(2) 再考察子弹从初始到从第一个块体中射出的过程。由于我们将第一个块体的质量记作$M_1 = 1.22\ \mathrm{kg}$、最终第一个块体的速度为$v_1 = 0.630\ \mathrm{m/s}$，设子弹初速度为$v_0$，则根据动量守恒

$$mv_0 = mv_0' + M_1 v_1$$

解得$v_0 = \dfrac{mv_0' + M_1 v_1}{m} = 963\ \mathrm{m/s}$向右。

Quiz 3

如果我们捏住一根均质的软链条上端并使其下端刚好接触地面。在从静止释放之后，链条对地面的作用力最大是多少？假设链条长度为L、质量为M。

解：

当释放并经过时间t后，设已经落到地面上的那段链条长度为l（或质量为m）；再经过时间$\mathrm{d}t$，设已经落到地面上的链条长度变为$l + \mathrm{d}l$（或质量为$m + \mathrm{d}m$）。

首先取已经在地面上长度为l的链条分析，显然地面对其支持力大小为

$$F_1 = mg$$

再取这一正在落地的长为$\mathrm{d}l$的小段链条分析，以竖直向下为正方向，设落地前该段链条的速度为v，落地后即变为0。设地面对其支持力（冲击力）大小为F_2，根据动量定理

$$-F_2\mathrm{d}t = \mathrm{d}p = 0 - v\,\mathrm{d}m$$

（注：此处忽略该小段链条自身重力$\mathrm{d}m \cdot g$，这是因为$\mathrm{d}m$自身原本就是一个无穷小量，再乘$\mathrm{d}t$，则为二阶无穷小量，可忽略不计；同时由于假设为软链条，也忽略已经落地的部分链条对正在落地的该小段链条的相互作用力。）

注意$\dfrac{m}{l} = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} = \lambda = \dfrac{M}{L}$，$\lambda$称为线密度，故等式右边

$$\mathrm{d}p = -v\,\mathrm{d}m = -v\frac{M}{L}\mathrm{d}l = -v^2\frac{M}{L}\mathrm{d}t$$

由于在该小段链条落地前瞬间在地面上已有长度为l的链条，说明这小段链条是从高度为l的位置开始下落的，根据自由落体定律，该段链条落地前瞬间的速度v显然满足

$$v = \sqrt{2gl}$$

故有

$$-F_2\mathrm{d}t=-2gl\frac{M}{L}\mathrm{d}t$$

即

$$F_2=2gl\frac{M}{L}$$

同理

$$F_1=mg=gl\frac{M}{L}$$

所以地面对链条的总和作用力大小

$$F=F_1+F_2=3gl\frac{M}{L}$$

显然这也是链条对地面的作用力大小，最大时取到$l=L$，故最大作用力大小为$3Mg$。

本题为动量定理的直接应用。动量定理常用于处理和连续体运动（如本题中的链条、水流、粒子束、豆子等）以及变质量物体运动（水滴、火箭等）有关的问题。解答这类问题的关键在于选择合适的分析对象，寻找不同物理量之间的等量关系。