微积分H作业解答

第五周

题目1. (8.4.20) 求满足下列给定条件的平面方程:

(2) 过点$(2,-1,3)$,且平行于平面$x-y+2z+1=0$;

(3) 过三点$(4,2,1),(-1,-2,2),(0,4,-5)$;

(5) 过点$(1,2,3)$和$(-1,-2,-3)$,且与平面$2x+3z=5$垂直.

解答: (2) 由平行可设平面方程为$x-y+2z+D=0$,代入点$(2,-1,3)$

解得$D=-9$,故所求平面方程为$x-y+2z-9=0$.

(3) 记点$A(4,2,1),B(-1,-2,2),C(0,4,-5)$,

则向量$\overrightarrow{AB}=(-5,-4,1),\overrightarrow{AC}=(-4,2,-6)$

平面的法向量可取为$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22,-34,-26)$,

取点C,则平面方程为$22(x-0)-34(y-4)-26(z+5)=0$,

化简得平面方程为$11x-17y-13z+3=0$.

(5) 记点$A(1,2,3),B(-1,-2,-3)$,则$\overrightarrow{AB}=(-2,-4,-6)$,

注意到平面$2x+3z=5$的法向量为$\overrightarrow{m}=(2,0,3)$,

则所求平面的法向量可取为$\overrightarrow{n}=(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{m}=(1,2,3)\times(2,0,3)$

$=(6,3,-4)$,取点A,则平面方程为$6(x-1)+3(y-2)-4(z-3)=0$,

化简得平面方程为$6x+3y-4z=0$.

题目2. (8.4.23) 设点$M(2,1,-1)$是原点到平面π所引垂线的垂足,

求平面π的方程.

解答: $\overrightarrow{OM}=(2,1,-1)$为平面$\pi$的法向量,

则平面方程为$2(x-2)+(y-1)-(z+1)=0$,

化简得平面方程为$2x+y-z-6=0$.

题目3. (8.4.24) 求满足下列给定条件的直线方程:

(3) 过原点且与平面$x+y+2z+2=0$垂直;

(4) 过点$(2,0,1)$,且与平面$x-y+z+3=0$和$x+y-z+5=0$皆平行;

(5) 过点$(-1,-2,0)$且落在平面$2x+3y-z+8=0$内,又与直线

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{2}$相交.

解答: (3) 平面$x+y+2z+2=0$的法向量为$\overrightarrow{n}=(1,1,2)$与所求直线平行,

而所求直线过原点,则其方程为$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

(4) 平面$x-y+z+3=0$和$x+y-z+5=0$的法向量分别为

$\overrightarrow{m}=(1,-1,1),\overrightarrow{n}=(1,1,-1)$.

则所求直线的方向向量可取为$\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{n}=(0,2,2)$,

得所求直线方程为$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$,即$x=2; y-z+1=0$.

(5) 所求直线落在平面$2x+3y-z+8=0$内,

则其与直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{2}$的交点也落在平面$2x+3y-z+8=0$内.

将直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-5}{2}$ 改写为参数式$x=1+3t, y=-2-t, z=5+2t$,

代入平面$2x+3y-z+8=0$得$t=1$,交点为$(4,-3,7)$,

则所求直线的方向向量$\overrightarrow{u}=(4,-3,7)-(-1,-2,0)=(5,-1,7)$,

得所求直线方程为$\frac{x+1}{5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{7}$.

题目4. (8.4.25) 将直线方程$\begin{cases}5x+y+z=0,\\ 2x+3y-2z+5=0\end{cases}$ 化为点向式方程和参数式方程.

解答: 平面$5x+y+z=0$和$2x+3y-2z+5=0$的法向量分别为

$\overrightarrow{m}=(5,1,1), \overrightarrow{n}=(2,3,-2)$.

则所求直线的方向向量可取为$\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{n}=(-5,12,13)$,

注意到直线过点$(0,-1,1)$, 得所求直线的点向式方程为$\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$

参数式方程为$\begin{cases}x=-5t,\\ y=-1+12t,\\ z=1+13t\end{cases}$.

题目5. (8.4.27) 求直线$\begin{cases} 3x+z=6, \\ y+2z=0 \end{cases}$与$z$轴之间的距离.

解答: 平面$3x+z=6$和$y+2z=0$的法向量分别为

$\overrightarrow{m}=(3,0,1), \overrightarrow{n}=(0,1,2)$.

则直线的方向向量可取为$\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{n}=-(-1,-6,-3)=(1,6,3)$,

注意到直线过点$P_1(2,0,0)$, 而z轴的方向向量为$\overrightarrow{z}=(0,0,1)$,且过原点$P_2(0,0,0)$,

则$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{z}=(6,-1,0), \overrightarrow{P_1P_2}=(-2,0,0)$,

直线到z轴的距离为$\frac{|(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{z})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{z}|}=\frac{|(6,-1,0)\cdot(-2,0,0)|}{|(6,-1,0)|}=\frac{12}{\sqrt{37}}=\frac{12\sqrt{37}}{37}$.

题目6. (8.4.30) 求过直线$\begin{cases} x+2y-2z=5, \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$且与$zOx$平面垂直的平面方程.

解答: 平面$x+2y-2z=5$和$5x-2y-z=0$的法向量叉乘为$(1,2,-2)\times(5,-2,-1)=(-6,-9,-12)$, 则直线的方向向量可取为$\overrightarrow{u}=(2,3,4)$,

设所求平面的法向量为$\overrightarrow{n}=(A,B,C)$,由平面与$zOx$平面垂直知$B=0$,

直线在所求平面内可得$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=0$,解得$A=-2C$,

所求平面方程形如$2x-z+D=0$,又直线过点$(0,\frac{5}{6},-\frac{5}{3})$,代入得$D=\frac{5}{3}$,

故所求平面方程为$2x-z+\frac{5}{3}=0$,化简得$6x-3z-5=0$.

题目7. (8.4.32) 求两直线$L_1:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 与$L_2:\begin{cases}x=1+t,\\ y=2,\\ z=3-t\end{cases}$

的公垂线方程.

解答：1. 设公垂线与直线L_1,L_2分别交于点$A(-2+2p,1+p,p)$,

$B(1+q,2,3-q)$,直线L_1,L_2的方向向量为 $\overrightarrow{m}=(2,1,1),\overrightarrow{n}=(1,0,-1)$.

则$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

即$2(3+q-2p)+(1-p)+(3-q-p)=0,(3+q-2p)-(3-q-p)=0$

化简得$10+q-6p=0,2q-p=0$,解得$p=\frac{20}{11},q=\frac{10}{11}$,

故$A(\frac{18}{11},\frac{31}{11},\frac{20}{11}),B(\frac{21}{11},2,\frac{23}{11})$,

所求公垂线即为直线AB,其直线方程为 $\frac{x-\frac{18}{11}}{1}=\frac{y-\frac{31}{11}}{-3}=\frac{z-\frac{20}{11}}{1}$.

解答：2. 直线L_1,L_2的方向向量为 $\overrightarrow{m}=(2,1,1),\overrightarrow{n}=(1,0,-1)$,

则公垂线的方向向量可取为$\overrightarrow{t}=\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{n}=(-1,3,-1)$,

公垂线与直线L_1所张成平面的法向量为$\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{t}=(-4,1,7)$,

又直线L_1过点$(-2,1,0)$,可得此平面的方程为$4x-y-7z+9=0$.

公垂线与直线L_2所张成平面的法向量为$\overrightarrow{n}\times\overrightarrow{t}=(3,2,3)$,

又直线L_2过点$(1,2,3)$,可得此平面的方程为$3x+2y+3z-16=0$.

公垂线为上述两平面的交，则其直线方程可写为$\begin{cases}4x-y-7z+9=0;\\ 3x+2y+3z-16=0\end{cases}$.

题目8. (8.5.36) 写出曲线$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases}$ 分别绕z轴和y轴旋转所成的旋转曲面方程.

解答: 绕z轴旋转所成的旋转曲面方程为$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,

即$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,

绕y轴旋转所成的旋转曲面方程为$\frac{y^2}{b^2}-\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{c^2}=1$,

即$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$.

题目9. (8.5.37) 求直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}$绕$y$轴旋转所生成的旋转曲面方程.

解答: 直线方程的参数形式为$x=1+t; y=-t; z=3+2t$,

设曲面上的点$M(x,y,z)$由$M_0(1+t_0,-t_0,3+t_0)$绕y轴旋转所得,

故$y=-t_0, x^2+z^2=(1+t_0)^2+(3+t_0)^2$,

所求曲面方程为$x^2+z^2=(1-y)^2+(3-2y)^2=5y^2-14y+10$.

题目10. (8.5.40) 求母线平行于y轴,准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 的柱面方程.

解答: 设曲面上的点$M(x,y,z)$由准线上的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$沿母线平移而得,

因为母线为y轴,则点$M(x,y,z)=(x_0,y_0+t,z_0)$

而点M_0在准线上,则有$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=4, \\ x_0+y_0+z_0=0, \end{cases}$

得$y_0=-x_0-z_0=-x-z, x^2+(x+z)^2+z^2=4,$

则所求柱面方程为$x^2+xz+z^2=2.$

题目11. (8.5.41) 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在xOy平面和yOz平面上的投影曲线方程.

解答: 消去z,得在xOy平面上的投影曲线方程为$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}; z=0;$

消去x,得在yOz平面上的投影曲线方程为$x=0, 2z^2=a^2,$

注意此时还有$z=\sqrt{x^2+y^2}\geq|y|\geq 0$,则$-\frac{|a|}{\sqrt{2}}\leq y\leq\frac{|a|}{\sqrt{2}}.$

则方程为$x=0, -\frac{|a|}{\sqrt{2}}\leq y\leq\frac{|a|}{\sqrt{2}}, z=\frac{|a|}{\sqrt{2}}.$

题目12. (8.5.45) 求顶点为$(1,2,3)$,母线与直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$的正圆锥面的方程.

解答: 设正圆锥面上的点为$M(1+a,2+b,3+c)$,

当a,b,c不全为0时,$\overrightarrow{u}=(a,b,c)$为某条母线的方向向量,

而直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$的方向向量为$\overrightarrow{v}=(2,2,-1)$,

则$\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即$\frac{|2a+2b-c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$

解得$11a^2+11b^2+23c^2-32ab+16ac+16bc=0$,

代入$x=1+a, y=2+b, z=3+c$得 $11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2$

$-32(x-1)(y-2)+16(x-1)(z-3)+16(y-2)(z-3)=0$,

化简得$11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0$.