Лабораторная Работа №5. Модель хищник-жертва

Математическое моделирование

Исаев Б.А.

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва, Россия

Докладчик

- Исаев Булат Абубакарович
- НПИбд-01-22
- Российский университет дружбы народов
- [1132227131@pfur.ru]

Цели и задачи

В лесу проживают x число волков, питающихся зайцами, число которых в этом же лесу y. Пока число зайцев достаточно велико, для прокормки всех волков, численность волков растет до тех пор, пока не наступит момент, что корма перестанет хватать на всех. Тогда волки начнут умирать, и их численность будет уменьшаться. В этом случае в какой-то момент времени численность зайцев снова начнет увеличиваться, что повлечет за собой новый рост популяции волков. Такой цикл будет повторяться, пока обе популяции будут существовать. Помимо этого, на численность стаи влияют болезни и старение. Данная модель описывается следующим уравнением:

$dx/dt = -ax(t) + bx(t)y(t)$ $dy/dt = -cy(t) - dx(t)y(t)$

a, d - коэффициенты смертности b, c - коэффициенты прироста популяции

1. Построить график зависимости x от y и графики функций x(t), y(t)
2. Найти стационарное состояние системы

Выбор варианта

```
PS C:\Windows\system32> 1132227131 % 70 + 1
22
```

Figure 1: Узнаём наш вариант по формуле (“Номер Студенческого” % “Количество вариантов” + 1)

Полученный вариант

Вариант 22

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.45x(t) + 0.046x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.47y(t) - 0.048x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 7, y_0 = 12$. Найдите стационарное состояние системы.

Figure 2: Просматриваем наше задание

Модель “Хищник-Жертва” (Часть 1)

Модель хищник-жертва

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - **модель Лотки-Вольтерры**. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy(t) + dx(t)y(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

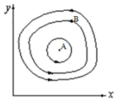


Рисунок 3.1. Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B)

Модель “Хищник-Жертва” (Часть 2)

приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние *B*.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \ \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние *B*), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок *f* и *g* возможны следующие сценарии 1-3 рис. 3.2.

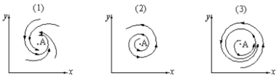


Рисунок 3.2. Мягкая модель борьбы за существование.

В случае 1 равновесное состояние *A* устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений *x* и *y*, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием *A* с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический

Модель "Хищник-Жертва" (Часть 3)

режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

Вывод: *жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).*

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости

Figure 5: Изучаем работу модели Лотки-Вольтерры (Часть 3)

Задача лабораторной

Лабораторная работа № 4

Задача

В лесу проживают x число волков, питающихся зайцами, число которых в этом же лесу y. Пока число зайцев достаточно велико, для прокормки всех волков, численность волков растет до тех пор, пока не наступит момент, что корма перестанет хватать на всех. Тогда волки начнут умирать, и их численность будет уменьшаться. В этом случае в какой-то момент времени численность зайцев снова начнет увеличиваться, что повлечет за собой новый рост популяции волков. Такой цикл будет повторяться, пока обе популяции будут существовать. Помимо этого, на численность стаи влияют болезни и старение. Данная модель описывается следующим уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = cy(t) - dx(t)y(t)$$

a, d - коэффициенты смертности

b, c - коэффициенты прироста популяции

1. Построить график зависимости x от y и графики функций $x(t)$, $y(t)$
2. Найти стационарное состояние системы

Код лабораторной (Scilab)

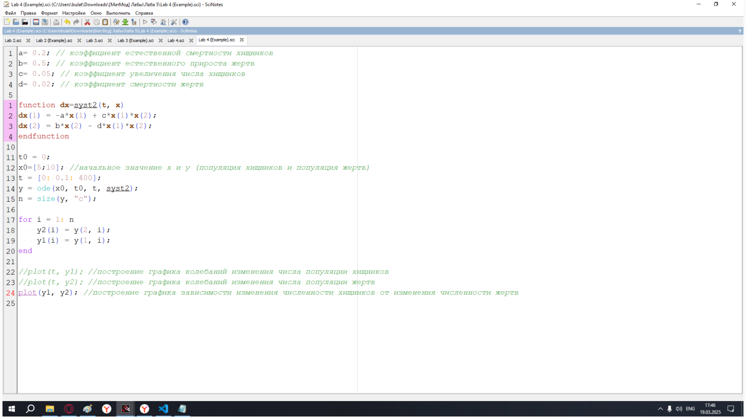
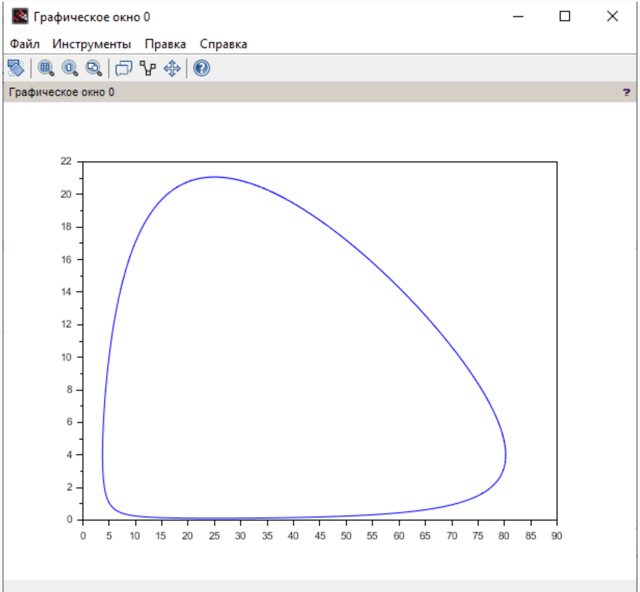


Figure 7: Смотрим код лабораторной, написанный на языке Scilab

График



Графическое окно 0
Файл
Инструменты
Правка
Справка
Графическое окно 0
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90

Выполнение задачи

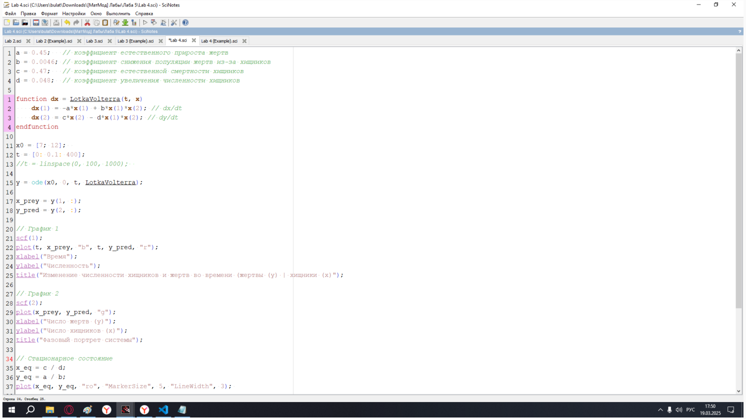


Figure 9: Выполняем нашу задачу на Scilab

Графики

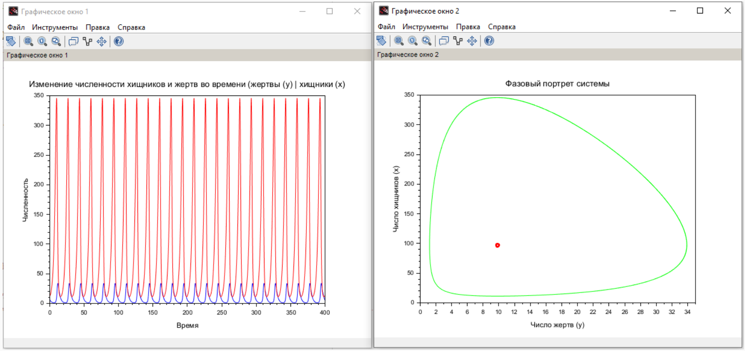


Figure 10: Просматриваем графики, полученные по уравнениям нашей

Вывод

Мы научились работать с моделью Лотки-Вольтерры