## Расчётно-графическая работа по функциональному анализу

В приведённых ниже вариантах $k \in \{1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ — номер группы, $l = 15$, если номер студента в списке группы не больше 10, $l = 10$, если номер студента в списке группы от 11 до 20, $l = 5$, если номер студента не меньше 21. Вариант выбирается как остаток от деления номера по списку группы на 10.

### Задание I

Докажите, что приведённое ниже отображение $T\colon C[0;1] \to C[0;1]$ (либо его степень) является сжимающим. Определите число итераций, необходимое для поиска неподвижной точки этого отображения с точностью $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ с помощью метода сжимающих отображений. С помощью вычислительной техники постройте график функции, являющейся неподвижной точкой отображения $T$. Проверьте результаты при различных значениях $\varepsilon$ и различных начальных приближениях в методе сжимающих отображений. Продемонстрируйте несколько графиков, получающихся при промежуточных вычислениях.

Варианты задания I

1) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x(3t) - \frac{l}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2) + \frac{l}{2}, & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $f(t)$ — аффинная функция такая, что $T(x)$ — непрерывная функция;

2) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x(3t) - \frac{l}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2), & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $f(t)$ — аффинная функция такая, что $T(x)$ — непрерывная функция;

3) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x\left(\frac{12t}{5}\right) - \frac{l}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{5}{12}; \\ f(t), & \frac{5}{12} < t < \frac{7}{12}; \\ \frac{1}{1+k}x\left(\frac{12t-7}{5}\right) + \frac{l}{2}, & \frac{7}{12} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $f(t)$ — многочлен степени не больше 2 такой, что $T(x)$ — непрерывная функция и $(T(x))\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ (указание: используйте интерполяционные многочлены Лагранжа);

4) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x\left(\frac{12t}{5}\right) + \frac{l}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{5}{12}; \\ f(t), & \frac{5}{12} < t < \frac{7}{12}; \\ \frac{1}{1+k}x\left(\frac{12t-7}{5}\right) - \frac{l}{2}, & \frac{7}{12} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $f(t)$ — многочлен степени не больше 2 такой, что $T(x)$ — непрерывная функция и $(T(x))\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ (указание: используйте интерполяционные многочлены Лагранжа);

5) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x(3t) + \frac{l}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2) + \frac{l}{2}, & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $f(t)$ — уравнение ломаной, проходящей через точки $\left(\frac{4}{9}, 1\right)$ и $\left(\frac{5}{9}, -1\right)$, такой, что $T(x)$ — непрерывная функция;

6) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x(3t) - \frac{l}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ f(t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2) + \frac{l}{2}, & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $f(t)$ — уравнение ломаной, проходящей через точки $\left(\frac{4}{9}, 1\right)$ и $\left(\frac{5}{9}, -1\right)$, такой, что $T(x)$ — непрерывная функция;

7) $T(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+k}x(3t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ -\frac{1}{1+k}\left(1 + x(1) - \cos\left(\frac{3l\pi}{5}(t-\frac{1}{3})\right)\right), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ -\frac{1}{1+k}x(3t-2) + C, & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $C$ — константа такая, что $T(x)$ — непрерывная функция;

8) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}x(3t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(1) - \sin\left(\frac{3l\pi}{5}(t-\frac{1}{3})\right), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(3t-2) + C, & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$ где $C$ — константа такая, что $T(x)$ — непрерывная функция;

9) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(5t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{5}; \\ -\frac{1}{2}\left(x(5t-1) - x(0) - x(1)\right), & \frac{1}{5} < t \leqslant \frac{2}{5}; \\ 3k\left(e^{-\frac{l}{15}\left|t-\frac{1}{2}\right|} - e^{-\frac{l}{150}}\right) + \frac{1}{2}x(0), & \frac{2}{5} < t \leqslant \frac{3}{5}; \\ -\frac{1}{2}\left(x(4-5t) - x(1) - x(0)\right), & \frac{3}{5} < t \leqslant \frac{4}{5}; \\ \frac{1}{2}x(5-5t), & \frac{4}{5} < t \leqslant 1; \end{cases}$

10) $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+k}\left(x(3t) + \sin\left(\frac{3\pi l}{5}t\right)\right), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{1+k}x(2-3t), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{1+k}\left(x(3t-2) + \sin\left(\frac{3\pi l}{5}\left(t-\frac{2}{3}\right)\right)\right), & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

## Задание II

Проведите ортогонализацию системы функций $x_n(t) = t^{n-1}$ в пространстве квадратично суммируемых функций относительно склярного произведения $\langle x, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)y(t)f(t)\,dt$. Найдите приближение функции $y$ частичной суммой ряда Фурье, обеспечивающее среднеквадратичную точность разложения $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}\}$ (при достаточных вычислительных ресурсах). Постройте график функции $y(t)$ и его приближения частичными суммами ряда Фурье. Продемонстрируйте несколько графиков, получающихся при промежуточных вычислениях.

Варианты задания II

1) $[a,b] = \left[0; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \left(\frac{2l}{5} - t\right)t$, $y(t) = e^t$;
2) $[a,b] = \left[0; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \left(\frac{2l}{5} - t\right)t$, $y(t) = \cos(2t)$;
3) $[a,b] = \left[-0{,}8 - \frac{k}{10}; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \left(\frac{2l}{5} - t\right)^2$, $y(t) = \sin(2t)$;
4) $[a,b] = \left[-0{,}8 - \frac{k}{10}; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \left(\frac{2l}{5} - t\right)^2$, $y(t) = \cos(3t)$;
5) $[a,b] = \left[0; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \left(\frac{2l}{5} - t\right)^2$, $y(t) = e^t$;
6) $[a,b] = \left[0; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \left(\frac{2l}{5} - t\right)^2$, $y(t) = \cos(2t)$;
7) $[a,b] = \left[0; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \left(\frac{2l}{5} - t\right)^2$, $y(t) = \sin(3t)$;
8) $[a,b] = \left[-0{,}8 - \frac{k}{10}; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \frac{4l}{5} - t^2$, $y(t) = \sin(2t)$;
9) $[a,b] = \left[-0{,}8 - \frac{k}{10}; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \frac{4l}{5} - t^2$, $y(t) = \cos(3t)$;
10) $[a,b] = \left[-0{,}8 - \frac{k}{10}; 0{,}8 + \frac{k}{10}\right]$, $f(t) = \frac{4l}{5} - t^2$, $y(t) = e^{-t}$.

## Задание III

Вычислите интеграл Лебега–Стилтьеса $\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dF(x)$.

Варианты задания III

1) $[a,b]=[-k,5l]$; $f(x)=\sin kx-3\chi\left(2x-\frac{l}{5}\right)+3x^2$, $F(x)=e^x+\chi(x-1)+2\chi(x-k)+x^3$;
2) $[a,b]=[-k,5l]$; $f(x)=2\cos kx+2\chi\left(3x-\frac{l}{5}\right)-x^2$, $F(x)=e^x+2\chi(x+1)+2\chi(4x-k)+x^3$;
3) $[a,b]=[-k,5l]$; $f(x)=2\sin kx+3\chi\left(3x-\frac{l}{5}\right)+2|x|$, $F(x)=e^x+3\chi(x-1)+\chi(x-k)+x^3$;
4) $[a,b]=[-2k,4l]$; $f(x)=e^{kx}-3\chi\left(4x+\frac{l}{5}\right)+3x^2$, $F(x)=e^x+\chi(x-1)+2\chi(2x-k)+x^3$;
5) $[a,b]=[-2k,4l]$; $f(x)=e^{kx}+\chi\left(5x+\frac{l}{5}\right)-x^2$, $F(x)=e^x+\chi(x+1)+4\chi(x-k)+2x^3$;
6) $[a,b]=[-2k,4l]$; $f(x)=2\cos lx+3\chi\left(3x+\frac{k}{5}\right)+2x$, $F(x)=2e^x+2\chi(x-1)+2\chi(x-k)+x^3$;
7) $[a,b]=[-3k,3l]$; $f(x)=2\sin lx-3\chi\left(3x+\frac{k}{5}\right)-|x|$, $F(x)=2e^x+2\chi(x-1)+\chi(3x-k)+2x^3$;
8) $[a,b]=[-3k,3l]$; $f(x)=e^{kx}-3\chi\left(4x+\frac{l}{5}\right)+3x^2$, $F(x)=e^x+\chi(x-1)+2\chi(x-k)+x^2\operatorname{sgn}x$;
9) $[a,b]=[-2k,3l]$; $f(x)=\sin kx+4\chi\left(2x-\frac{l}{5}\right)-3x^2$, $F(x)=e^x+3\chi(x-1)+\chi(2x-k)+x^2\operatorname{sgn}x$;
10) $[a,b]=[-2k,3l]$; $f(x)=e^{-kx}+3\chi\left(4x+\frac{l}{5}\right)-3|x|$, $F(x)=e^x+2\chi(x+1)+\chi(x-k)+x^2\operatorname{sgn}x$.