МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені Тараса Шевченка
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра програмних систем і технологій

Дисципліна
«Ймовірнісні основи програмної інженерії»

Лабораторна робота №5
«Дискретні розподіли ймовірностей»

Виконав:	Булава Геннадій Юрійович	**Перевірила**:	Вєчерковська Анастасія Сергіївна
Група	ІПЗ-21(2)	Дата перевірки	
Форма навчання	денна	Оцінка	
Спеціальність	121		

2022

<u>Назва теми:</u> Дискретні розподіли ймовірностей

<u>Мета:</u> навчитись використовувати на практиці набуті знання про центральні тенденції та міри.

<u>Постановка задачі</u>

1. Аналітичним шляхом розв'язати вказані задачі.

1. Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п'яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення.
2. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8.
3. На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників.
4. На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходить 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів.
5. Ймовірність того, що пара взуття, яка взята навмання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку?
6. Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня, та його ймовірність.
7. Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?.
8. Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів?
9. Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів.
10. Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуто 150 монет.

2. Написати програму, яка, використовуючи відомі формули теорії ймовірності(запрограмувати вручну) розв'яже задачі приведені у п.1.

3. Порівняти результати обчислень, зробити висновки.

Математична модель

Ймовірність того, що в n повторних незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи випадкової події А рівна p, дана подія відбудеться рівно m разів знаходиться за **формулою Бернуллі:**

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p появи події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність Pn(m) того, що подія А з'явиться в n випробуваннях рівно m разів, приблизно дорівнює значенню функції:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m)$$

де $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$ - це функція Гауса.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p появи події А в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці ($0<p<1$), то ймовірність Pn(m1≤m≤m2) того, що подія А з'явиться в n випробуваннях від m1 до m2 разів, приблизно рівна визначеному інтегралу:

$$\mathrm{P}_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ - функція Лапласа,

Теорема Пуассона.

Якщо n достатньо велике, а ймовірність події настільки мала, що число np невелике (звичайно $p \le 0{,}1$; $npq \le 10$), тобто для подій, що рідко трапляються, використовують асимптотичну формулу Пуассона.

Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні при необмеженому збільшенні числа випробувань n змінюється таким чином, що при np=λ, λ=const, то ймовірність того, що деяка подія A з'явиться m разів в n випробуваннях обчислюється за формулою:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

Випробування алгоритму

Завдання 1

Імовірність: 0.051

Завдання 2

а) 0.41

б) 0.738

Завдання 3

Імовірність: 0.04987

Завдання 4

Імовірність: 0.0378

Завдання 5

Імовірність: 0.6827

Завдання 6

Число вимог: 40.0

Імовірність: 0.08143

Завдання 7

Імовірність: 0.7901

Завдання 8

Імовірність: 0.00798

Завдання 9

Імовірність: 0.0361

Завдання 10

Імовірність: 4

Псевдокод

```
def ce(k, n):
    return math.factorial(n)/(math.factorial(k)*math.factorial(n-k))

def gauss(x):
    return math.exp(-math.pow(x, 2)/2)/math.sqrt(2*math.pi)

def integral(t1, t2):
    x = Symbol('x')
    expr = exp(-x**2 / 2)
    return integrate(expr, (x, t1, t2))

def integfunc(t1, t2):
    return integral(t1, t2)/math.sqrt(2*math.pi)

def integlaplas(n, m1, m2, p):
    q = 1 - p
    x1 = (m1 - n * p) / math.sqrt(n * p * q)
    x2 = (m2 - n * p) / math.sqrt(n * p * q)
    return round(integfunc(x1, x2), 4)

def bernulli(n, m, p):
    return round(ce(m, n) * math.pow(p, m) * math.pow(1 - p, n - m), 3)

def laplas(n, m, p):
    q = 1 - p
    x = (m - n*p)/math.sqrt(n*p*q)
    return round(1/math.sqrt(n*p*q)*gauss(x), 5)

def puasson(n, m, p):
    return round(math.pow(n*p, m) * math.exp(-n*p) / math.factorial(m), 4)

def searchc(n, p):
    if (n * p - int(n * p) == 0):
        c = n * p
    else:
        c = int(n * p + p)
    return c

def task1():
    with open("Lab5_Result.txt", "w") as f:
        f.write('Завдання 1\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 5
        m = 3
        p = 0.2
        f.write(str(bernulli(n, m, p)) + '\n\n')

def task2():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 2\n')
        f.write('а) ')
        m = 4
        n = 5
        p = 0.8
        f.write(str(bernulli(n, m, p)) + '\n')
        f.write('б) ')
        sum = 0.0
        for i in range(4, n + 1):
            sum = sum + bernulli(n, i, p)
        f.write(str(round(sum, 5)) + '\n\n')
```

```
def task3():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 3\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 400
        m = 80
        p = 0.2
        f.write(str(laplas(n, m, p)) + '\n\n')

def task4():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 4\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 100000
        m = 5
        p = 0.0001
        f.write(str(puasson(n, m, p)) + '\n\n')

def task5():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 5\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 600
        m1 = 228
        m2 = 252
        p = 0.4
        f.write(str(integlaplas(n, m1, m2, p)) + '\n\n')

def task6():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 6\n')
        f.write('Число вимог: ')
        n = 100.0
        p = 0.4
        c = searchc(n, p)
        f.write(str(c) + '\n')
        f.write('Імовірність: ')
        f.write(str(laplas(n, c, p)) + '\n\n')

def task7():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 7\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 4000
        p = 0.04
        m1 = 0
        m2 = 170
        f.write(str(integlaplas(n, m1, m2, p)) + '\n\n')

def task8():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 8\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 10000
        m = 5000
        p = 0.5
        f.write(str(laplas(n, m, p)) + '\n\n')
def task9():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 9\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 1000
        m = 5
        p = 0.002
        f.write(str(puasson(n, m, p)) + '\n\n')
def task10():
    with open("Lab5_Result.txt", "a") as f:
        f.write('Завдання 10\n')
        f.write('Імовірність: ')
        n = 150.0
        p = 0.03
        c = searchc(n, p)
        f.write(str(c) + '\n')
```

Аналітичний розв’язок

№1.

Дано:

$p=0,2$

$m=3$

$n=5$

$P_n(m)-?$

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$q=1-p=1-0,2=0,8$$

$$P_n(m)=C_5^3\cdot(0,2)^3\cdot(0,8)^2=$$

$$=10\cdot(0,2)^3\cdot(0,8)^2=0,0512$$

№2.

Дано:

$p=0,8$

$n=5$

$m_1=4$

$m_2\geq 4$

а) $P_m(m_1)-?$

б) $P_n(m_2)-?$

$$q=1-p=1-0,8=0,2$$

а) $P_n(m_1)=C_n^{m_1}p^{m_1}q^{n-m_1}=$

$$=C_5^4\cdot(0,8)^4\cdot(0,2)^1=5\cdot(0,8)^4\cdot 0,2=0,4096$$

б) $P_n(m_2)=C_5^4(0,8)^4(0,2)^1+C_5^5(0,8)^5(0,2)^0=$

$$=0,4096+0,32768=0,73728$$

№3.

Дано:

$p=0,2$

$n=400$

$m=80$

$P_n(m)-?$

$$q=1-p=1-0,2=0,8$$

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=0$$

$$\varphi(x)=\varphi(0)=0,3989$$

$$P_n(m)=\frac{1}{8}\cdot 0,3989\approx 0,04986$$

№4.

Дано:

$n=100000$

$p=0,0001$

$m=5$

$P_n(m)-?$

$$P_n(m)=\frac{(np)^m}{m!}e^{-np}=$$

$$=\frac{10^5}{5!}e^{-10}\approx 0,0378$$

№5.

Дано:

$p=0,4$

$m_1=228$

$m_2=252$

$n=600$

$P_n(m_1\le m\le m_2)-?$

$$P_n(m_1\le m\le m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=$$

$$=\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{252-240}{12}\right)-\Phi\left(\frac{228-240}{12}\right)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)+\Phi(1)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\cdot 2\approx 0,6827$$

№6.

Дано:

$n=100$

$p=0,4$

$N-?$

$p(N)-?$

$$N=np=100\cdot 0,4=40$$

$$p(N)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{101\cdot 0,24}}\cdot\varphi(0)\approx 0,081$$

№7.

Дано:

$p = 0{,}04$

$n = 4000$

$0 \le m \le 170$

$P_n(m) - ?$

$q = 1 - p = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$P_n(m) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) =$

$= \Phi\left(\frac{170-160}{\sqrt{153{,}6}}\right) - \Phi\left(\frac{0-160}{\sqrt{153{,}6}}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{153{,}6}}\right) + \Phi\left(\frac{160}{\sqrt{153{,}6}}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{10}{\sqrt{153{,}6}}} e^{\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{160}{\sqrt{153{,}6}}} e^{\frac{x^2}{2}} dx \approx 0{,}7901$

№8.

Дано:

$n = 10000$

$m = 5000$

$P_n(m) - ?$

$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$

$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5000 - 10000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0$

$P_n(m) = \frac{0{,}3989}{2500} \approx 0{,}007978$

№9.

Дано:

$n=1000$

$p=0{,}002$

$m=5$

$P_n(m)-?$

$$q=1-p=1-0{,}002=0{,}998$$

$$P_n(m)=\frac{(np)^m}{m!}e^{-np}=$$

$$=\frac{2^5}{5!}e^{-2}\approx 0{,}0361$$

№10.

Дано:

$n=150$

$p=0{,}03$

$N-?$

$$q=1-p=1-0{,}03=0{,}97$$

$k_0=np=150\cdot 0{,}03=4{,}5$ – не ціле

$$np-q\le k_0\le np+p$$

$$3{,}53\le k_0\le 4{,}53 \Rightarrow k_0=4$$

$$N=k_0=4$$

Висновок

В ході виконаної роботи було опрацьовано Дискретні розподіли ймовірностей. Було на практиці використано знання про центральні тенденції та міри. Також було зроблено аналітичний розв’язок завдань. Результати співпали з програмним, що свідчить про правильність розв’язання завдань.