1. Теоретические задачи.

1.

Пусть t - истинный таргет, $t_{ср}$ - среднее значение таргета, $t_{сл}$ - таргет для случайного объекта из листа.

Рассмотрим мат. ожидание ошибки по MSE для $t_{ср}$:

$$E(t-t_{ср})^2 = (t - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i)^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t-t_i))^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(t-t_i)}{n}\right)^2 \le$$

$$\le \left| \text{Из нер-ва о средних } \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n^2} \right| \le$$

$$\le \frac{\sum_{i=1}^{n}(t-t_i)^2}{n^2} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t-t_i)^2 = \underbrace{E(t-t_{сл})^2}_{\text{мат. ожидание ошибки по MSE для } t_{сл}}$$

Т.о. $E(t-t_{ср})^2 \le E(t-t_{сл})^2$, т.е. ответ средним значением таргета приводит к меньшему матожиданию ошибки по MSE.

3.

$H(S) = \frac{1}{2}\ln((2\pi e)^n|\Sigma|)$ - надо док-ть.

Δ $$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\ln f(x) = -\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) - \frac{1}{2}\ln((2\pi)^n|\Sigma|).$$

$$H(S) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln((2\pi)^n|\Sigma|) + \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)f(x)\,dx \;=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)f(x)\,dx = \left| \text{сместим на } \mu,\ f'(x) := f(x+\mu) \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x f'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} \Sigma_{i,j} \text{ - эл-т м-цы ковариаций,} \\ \Sigma^{i,j} \text{ - алгебраическое дополнение эл-та} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2|\Sigma|}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \Sigma^{i,j}\,dx = \frac{1}{2|\Sigma|}\sum_{i,j=1}^{n}\Sigma_{i,j}\Sigma^{i,j} = \frac{1}{2|\Sigma|}\sum_{i=1}^{n}|\Sigma| = \frac{n|\Sigma|}{2|\Sigma|} = \frac{n}{2}.$$

$$= \frac{1}{2}\ln((2\pi)^n|\Sigma|) + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\ln((2\pi)^n|\Sigma| \cdot e^n) = \frac{1}{2}\ln((2\pi e)^n|\Sigma|).$$ $\triangleright$