Funzione omografica

Tommaso Severini

Per definizione, una funzione omografica è una funzione rappresentata dalla funzione analitica:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Nonostante questa funzione possa sia rappresentare sia una retta che un'iperbole, questa relazione si concentrerà sulla rappresentazione di un'iperbole e, in particolare, della sua derivazione.

Derivazione

Ipotesi

In questo testo è presentata la dimostrazione del fatto che la funzione omografica non sia altro che la traslazione di un'iperbole equilatera nella forma $xy = k$.

Dimostrazione

Sia data l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri assi di equazione:

$$xy = k \tag{1}$$

Sia dato un vettore $\hat{V}(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ e il relativo sistema di traslazione:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{d}{c} \\ y' = y + \frac{a}{c} \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} x = x' + \frac{d}{c} \\ y = y' - \frac{a}{c} \end{cases} \tag{2}$$

Sostituendoi nuovi valori di x e y del sistema (2) nell'equazione (1), otteniamo:

$$\left(x + \frac{d}{c}\right)\left(y - \frac{a}{c}\right) = k$$

$$xy + \frac{d}{c}y - \frac{a}{c}x - \frac{ad}{c^2} = k$$

Raccogliendo a fattor comune il termine y, otteniamo:

$$\left(x + \frac{d}{c}\right)y = \frac{a}{c}x + \frac{ad}{c^2} + k$$

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{ad}{c^2} + k}{x + \frac{d}{c}}$$

Moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per c, otteniamo:

$$y = \frac{ax + \frac{ad}{c} + kc}{cx + d}$$

Ponendo $\frac{ad}{c} + kc = b$, otteniamo la funzione omografica nella sua forma canonica:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{3}$$

■