Fisica - Cinetica rotazionale

Tommaso Severini

April 2, 2021

1 Energia cinetica rotazionale

Sappiamo che qualsiasi corpo che si muove di moto traslatorio possiede un'energia cinetica. Ad esempio, un corpo di massa m e in movimento a una velocità costante v, la sua energia cinetica sarà data dall'equazione $\frac{1}{2}mv^2$. Nel caso di un corpo in rotazone, però, ogni particella che fa parte del corpo si muove a velocità tangenziale diversa a seconda della sia distanza dal raggio. Nonostante ciò, la velocità angolare è la stessa per tutti i corpi e, provando a sostituire la velocità tangenziale v con la sua espressione in funzione della velocità angolare ω, otteniamo la seguente formula

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \tag{1}$$

Notiamo che questa forma differisce di poco dalla forma classica dell'energia cinetica traslatoria, con la sola differenza della velocità angolare al posto di quella tangenziale e la sostituzione della massa del corpo con la grandezza mr^2, che definisce la tendenza di un corpo a subire cambiamenti nel suo moto. Questa "inerzia di movimento" prende il nome di **momento di inerzia I**. Infatti, più I è grande maggior sarà la resistenza del corpo alla variazione del suo moto.

Definition 1: Energia cinetica di rotazione

$\frac{1}{2}I\omega^2$ dove I è il momento di inerzia del corpo, mentre ω è la velocità angolare del corpo.

2 Momento di inerzia

Considerando un corpo non puntiforme, possiamo calcolare il suo momento di inerzia dividendolo in masse più piccole e trovando il momento di inerzia di ognuno per poi sommarli. In formule:

Definition 2: Momento di inerzia

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{2}$$

2.1 Calcolo alternativo del momento d'inerzia

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse x si ottiene sommando al momento di inerzia iniziale rispetto al baricentro il prodotto tra la massa del corpo stesso e il quadrato della distanza tra l'asse x e il baficentro del corpo.

Definition 3: Teorema di Huygens Steiner

$$I_x = I_{CM} + md^2 \tag{3}$$

2.2 Momento di inerzia di alcuni oggetti

Ogni corpo presenta la sua quantità di moto a seconda della sua forma, distribuzione del peso e asse di rotazione. Di seguito è riportata la dimostrazione della formula del momento di inerzia di un disco:

$$\int_0^R mrdr = m\int_0^R rdr = m[\frac{r^2}{2}]_0^R = \frac{1}{2}mr^2 \tag{4}$$

3 Seconda legge di Newton nel moto rotazionale

Pariamo dalla seconda legge di Newton nella sua forma classica:

$$F = ma$$

Sapendo che nel moto rotazionale l'accelerazione lineare è uguale a αr, otteniamo:

$$F = m\alpha r$$

Moltiplicando entrambi i membri per r, ottenaimo:

$$rF = m\alpha r^2$$

$$M = \alpha I$$

Dove M rappresenta il momento angolare totale applicato al corpo e I rappresenta il momento di inerzia.

4 Legge di conservazione del momento angolare

Consideriamo una massa m che possiede una certa quantaità di moto che si muove in moto circolare. Il suo momento angolare sarà dato da:

$$L = r \times p$$

$$L = rmv$$

$$L = rm\omega r = m\omega r^2$$

$$L = I\omega$$

Prendendo la derivata di entrambi i membri dell'equazione ottenuta, otteniamo nuovamente la seconda legge di Newton per il moto rotazionale:

$$M = I\alpha = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Da ciò è facile vedere come se il momento torcente applicato ad un corpo sia 0, anche la variazione di momento angolare sia 0 e che questo si conservi.

Definition 4: Conservazione del momento angolare

$$\sum M_{est} = 0 \rightarrow L_i = L_f \tag{5}$$

Ovvero:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \tag{6}$$