概率分布函数性质：F(x)单调不减、右连续、$\lim_{x->\infty} F(x)=0, \lim_{x->\infty} F(x)=1$. **联合分布函数性质**：**极限**$\lim_{x_i->\infty} F(x_1,\dots,x_n)=0$, $\lim_{x_1,\dots,x_n->\infty} F(x_1,\dots,x_n)=1$；**非负性**：$R^n$中任意区间$(a,b]=(a_1,b_1;a_2,b_2)$: $F(a_2,b_2)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1)+F(a_1,b_1)\ge 0$.

N 维随机变量转换公式: 设$(\xi_1,\dots,\xi_n)p.d.f\,p(x_1,\dots,x_n);\eta_1=f_1(\xi_1,\dots,\xi_n)$，$\dots\eta_n=f_n(\xi_1,\dots,\xi_n)$，$(\xi_1,\dots,\xi_n)$与$(\eta_1,\dots,\eta_n)$有 1-1 对应关系时，若对$y_i=f_i(x_1,\dots,x_n)$,$\exists$*唯一反函数*$x_i(y_1,\dots,y_n)=x_i$,且$(\eta_1,\dots,\eta_n)$p.d.f 为 $q(y_1,\dots,y_n)$则：$q(y_1,\dots,y_n)=p(x_1,\dots,x_n)|J|,J=\begin{vmatrix}\partial x_1/\partial y_1 & \cdots & \partial x_n/\partial y_1\\ \partial x_1/\partial y_n & \dots & \partial x_n/\partial y_n\end{vmatrix}$. 例：若$\xi,\eta$是独立同分布的$r.v.$，作极坐标$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$及$\varphi=actg\frac{\eta}{\xi}$取值变换于$[0,2\pi]$,则$\rho$*与*$\varphi$也独立。**随机变量特征函数**：连续性随机变量$\varphi(t)\triangleq E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,dF(x),-\infty<t<\infty$;离散型随机变量$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itx_k}p_k$. **特征函数性质**：**1)** $\varphi(0)=1$; $|\varphi(t)|\le 1$; $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$ **2)** $\varphi(t)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。**3)**若随机变量 X 的 n 阶矩EX^n存在，那么 X 的特征函数$\varphi(t)$可微分 n 次，且当$k\le n$时，有$\varphi^{(k)}(0)=i^kEX^k$; **4)** $\varphi(t)$是非负定的; **5)**设$X_1,X_2,\dots,X_n$是独立随机变量，则$X=X_1+\dots X_n$的特征函数$\varphi(t)=\varphi_1(t)\dots\varphi_n(t)$,式中，$\varphi_k(t)$是$x_i$的特征函数，$k=1,2,\dots,n$随机变量的分布函数由其特征函数唯一确定。

N 维正态分布联合分布密度：$f(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=exp\{-\frac{1}{2}(x-m_x)C^{-1}(x-m_X)'\}/(2\pi)^{\frac{n}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}]$，其中$x=(x_1,x_2,\dots,x_n),m_X=(m_X(t_1),m_X(t_2)\dots,m_X(t_n))$,C 是协方差矩阵。正态随机过程的有限维分布密度完全的由其**期望和协方差函数**所确定。**N 维正态分布特征函数**：则$\varphi(t)=\varphi(t_1,\dots,t_n)=e^{iat'-\frac{1}{2}tCt'}$. **N 维正态随机变量相关性质**:1) $Y=XA$，若$A'CA$正定，则$Y\sim N(aA,A'CA)$即正态随机变量经线性变换还是正态随机变量；2) $EX_k=a_k,B_{X_kX_l=b_{kl},k,l=1,2,\dots,n}$。{X(t), t∈T}是**高斯过程的充要条件**是它的任意有限个元 X(t1),X(t2)…X(tn)的任意线性组合都是一个一维正态随机变量或常数。高斯过程是**二阶矩过程**。**正态独立定理**：**正态过程**{X(t), t∈T}是**独立过程的充要条件**是协方差函数 C(s,t) = 0, s != t。**二阶矩**过程的协方差函数、相关函数总是存在的。

均方极限唯一定理：若$\lim_{n\to\infty}X_n=X$,且$\lim_{n\to\infty}X_n=Y$，则 P{X=Y} = 1，即均方极限在概率为 1 相等的意义下唯一。**均方极限性质**：**1**.均方极限与数学期望可交换次序。；**2**.若$\lim_{n\to\infty}X_n=X$,且$\lim_{n\to\infty}X_n=Y$，则$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}EX_mY_n=EXY$。**3**.均方极限线性性质。**4**.数列$a_n$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$,X 是随机变量, 有$\lim_{n\to\infty}(a_nX)=0$。**5**.$\lim_{n\to\infty}X_n$存在⇔$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}(X_m-X_n)=0$; **6**.在性质(2)条件下不能得到$\lim_{n\to\infty}X_nY_n=XY$, $\lim_{m\to\infty}X_m^2=X^2$。**均方连续性定理**：随机过程{X(t), t∈T}在 T 上均方连续⇔其相关函数 Rx(t1,t2)在{(t,t): t∈T}的所有点上是连续的。**均方可导性定理:** 随机过程{X(t), t∈T}在 t 处均方可导⇔极限$\lim_{h\to 0;h'\to 0}\frac{R_X(t+h,t+h')-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h')+R_X(t,t)}{hh'}$存在。**均方连续性性质: 1.**若过程 X(t)在 t 处可导，则它在 t 处连续。**2.**求导数记号与数学期望符号可交换次序。**3.**随机过程 X(t)之均方导数 X'(t)相关函数是二重微分关系。**4.**随机变量均方导数=0。5.均方导数线性性质。**均方可积性定理**：f(t)X(t)在区间[a,b]上均方可积的充分条件是二重积分$\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R_x(s,t)dsdt$存在，且有$E\left|\int_a^b f(t)X(t)dt\right|^2=\int_a^b\int_a^b f(s)f(t)R_x(s,t)dsdt$。**均方积分性质: 1.**若 X(t)在[a,b]上均方连续➔均方可积。**2.**期望与均方积分符号可互换。**3.**均方积分的线性性质。**4.**随机变量可拿到积分符号外。**5.**X(t)在[a,b]上均方连续，则$Y(t)=\int_a^b X(s)ds,a\le t\le b$,在[a,b]上均方连续，均方可导，且 Y'(t) = X(t)。**6.**X(t)在[a,b]上均方可导，X'(t)在[a,b]上均方连续，则$X(b)-X(a)=\int_a^b\dot{X}(t)dt$。

宽平稳随机过程:$m_x(t)=m_x,R_x(t,t+\tau)$与 t 无关。二阶距过程**严平稳必定宽平稳，正态过程严平稳和宽平稳等价**。**宽平稳相关函数的性质** (**1**)$R_x(0)=EX^2(t)\ge 0$ (**2**)$|R_x(\tau)|\le R_x(0)$ (**3**) $R_x(\tau)$是偶函数 (**4**)非负定性$\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n R_x(\tau_j-\tau_k)Z_k\overline{Z_j}\ge 0$ 协方差函数 c 同样具有上述性质，第一条改为$C_x(0)=D_x(t)\ge 0$。**时间平均**$<X(t)>=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,dt$ P{<X(t)>=m_x}=1;**时间相关函数**$<X(t)X(t+\tau)>=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\,dt$ P{<X(t)X(t+τ)>= $R_x(\tau)$ }=1。**期望各态历经定理**：$<X(t)>=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,dt=m_x\leftrightarrow\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)(R_x(\tau)-m_x^2)d\tau=0$。**相关函数各态历经定理:** $B_\tau(\tau_1)=E[X(t)X(t+\tau)X(x+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$；$<X(t)X(t+\tau)>=R_x(\tau)\leftrightarrow\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(B_\tau(\tau_1)-R_x^2(\tau))d\tau_1=0$。**期望各态历经定理(上半轴)**：$\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt=m_x\leftrightarrow\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)(R_x(\tau)-m_x^2)d\tau=0$。**相关函数各态历经定理(上半轴):** $\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)X(t+\tau)\,dt=R_x(\tau)\leftrightarrow\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)(B_\tau(\tau_1)-R_x^2(\tau))d\tau_1=0$; $B_\tau(\tau_1)=E[X(t)X(t+\tau)X(x+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$;**期望各态历经定理(离散)** $\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n X(j)=m_x\leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n\left(1-\frac{j}{n+1}\right)[R(j)-m_x^2]=0$。**相关函数各态历经定理(离散):** $\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n X(j)X(j+m)=R_x(m)\leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n\left(1-\frac{j}{n+1}\right)[B_m(j)-R_x^2(m)]=0$, $B_m(j)=E[X(n)X(n+m)X(n+j)X(n+m+j)]$,其中，x 为平稳过程或平稳序列。**谱密度函数与自相关转换**：$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$；$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$；$R_x(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}S_x(\omega)cos\omega\tau d\omega$; $S_x(\omega)=2\int_0^{+\infty}R_x(\tau)cos\omega\tau d\tau$; **谱密度函数是实的，非负的偶函数。**

C-K 方程: $p_{ij}^{m+n}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}$。**周期极限定理**：设状态 i 的周期为 d，则存在正整数 M，对一切 n>=M 有$P_{ii}^{(nd)}$>0。**首次返回概率**：$\boldsymbol{f_{ii}^{(n)}}$表示**系统从 i 出发**，经 n 步首次返回 i 的概率。$f_{ij}^{(0)}=0$; $f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$。若$f_{ii}=1$则称 i 是**常返状态**；若$f_{ii}<1$则称是 i **非常返状态或滑过状态**。**n 步转移概率分解定理**：对任意状态 i，j∈S, n>1,有$p_{ij}^{(n)}=\sum_{m=1}^n f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}$，显然有$0\le f_{ij}^{(n)}\le p_{ij}^{(n)}\le f_{ij}\le 1$。**周期计算等价定理**: 状态 i 的周期可由首次到达状态 i 的步数的 GCD 求出。**状态周期判定定理**: **(1)** 若存在正整数 n,使$P_{ii}^{(n)}>0$, $P_{ii}^{(n+1)}>0$,则 i 非周期。**(2)** 若存在正整数 m,使 m 步转移矩阵$P^{(m)}$中对应于状态 j 的那列元素全不为 0，则 j 非周期。**平均返回时间:** $\boldsymbol{\mu_i}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$表示由 i 出发再返回 i 的平均返回时间。设状态 i 是**常返**的. 若$\mu_i<\infty$,则称 i 是正常返的；若$\mu_i=\infty$，则称 i 是**零常返**的。非周期的正常返态称为**遍历态。常返性判定定理:** 状态常返的充要条件为$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$，如果 i 非常返，则$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty$。若 j 为非常返状态，则对任意 i∈S,有$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}<\infty$, $\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。**周期常返极限定理**：设状态 i 常返且有周期 d，则$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=d/\mu_i$。**n 步转移概率极限定理**：设 i 是常返状态，则：(1) i 是零常返状态⇔ $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=0$;(2) i 是遍历状态⇔ $\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(n)}=1/\mu_i>0$。

闭集相关结论（C 是闭集）:整个状态空间 S 是闭集，是最大的闭集；吸收状态 i 是闭集，是最小的闭集。**状态空间分解方法 1**：分解为：$S=S_N\cup S_R^{(1)}\cup S_R^{(1)}\cup\dots$；其中每个$S_R^{(k)}$是常返状态组成的不可约闭集。$S_R^{(k)}$中的状态或全是正常返状态，或全是零常返状态，且有相同的周期；S_N是由全体非常返状态组成，自$S_R^{(k)}$中的状态不能到达S_N中的状态。注：分解定理中的S_N不一定是闭集，但如果 S 为有限集，S_N一定是非闭集。**状态空间分解方法 2:** 周期为 d 的不可约马尔可夫链，其状态空间 S 可唯一地分解为 d 各个互不相交的子集之和, 即$S=S_0\cup S_1\cup S_2\dots\cup S_{d-1}$,且使得自$S_r$中任一状态出发, 经一步转移必进入$S_{r+1}$, $r=0,1,2,\dots,d-1$。约定：$S_d=S_0$。**分解公式**：任意取定一状态$i\in S$，令$S_r=\{j|\exists n\ge 0,$ *使*$p_{ij}^{(nd+r)}>0\},r=0,1,2..,d-1$。因 S 是不可约的，即 S 中的状态是互通的，故 S 是不可约的，即 S 中的状态是互通的，故$\cup_{r=0}^{d-1}S_r=S$。

非常返状态和零常返状态极限定理: 若$j\in S$是非常返状态或零常返状态，则$\forall j\in S$，有$\lim_{n->\infty}p_{ij}^{(n)}=0$。**推论:** 如果马尔可夫链的状态空间 S 是有限集，则 S 中的状态不可能全是非常返状态，也不可能含有零常返状态，从而**不可约有限马尔可夫链的状态都是正常返状态**。**马尔可夫链遍历性定义**: 若对于一切$i,j\in S$,极限$\lim_{n->\infty}p_{ij}^{(n)}=p_j>0$存在, 则该马尔可夫链具有遍历性, 此链又称遍历链。**遍历态性**：若 j 是非周期，正常返状态（即遍历态）且$i\to j$，则$\lim_{n->\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_i}$,其中$\mu_j=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{jj}^{(n)}$为状态 j 的平均返回时间。**遍历性判定:** 大前提：不可约的马尔可夫链；**1)** 非周期+正常返 ➔ 遍历性;**2)** 非周期+状态有限➔遍历性。

平稳分布的定义:设马尔可夫链有转移矩阵 P=(p_{ij}),若存在一个概率分布$\{\pi_i,i\ge 0\}$,其满足$\pi_j=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_ip_{ij},j\epsilon S$称$\{\pi_i,i\ge 0\}$为该马尔可夫链的平稳分布 。**平稳分布的性质**：马尔可夫链的初始分布是一平稳分布=>则该马尔可夫链任何时刻的绝对分布都与初始分布相同。**非周期不可约的马尔可夫链正常返的充要条件**是它存在平稳分布，且此平稳分布就是极限分布$1/\mu_j,j\epsilon S$。马氏链**存在平稳分布的判定方法**：**1)**对不可约非周期马尔可夫链，若所有状态都正常返，则存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布$1/\mu_j$,jϵS.若所有状态是非常返或所有状态是零常返，则不存在平稳分布。**2)**不可约非周期有限状态马氏必存在平稳分布。**3)**若$1/\mu_j$,jϵS是马氏链对平稳分布，则$\lim_{n->\infty}p_{ij}{}^{(n)}=1/\mu_j=\pi_j$

泊松过程定义 1：设随机过程{X(t),t∈[0,∞]}的无限状态空间是 S={0,1,2…},若满足两个条件: (1) X(t)是平稳独立增量过程.(2) 任意 a,t>=0,每一增量 X(t+a)-X(a)非负,且服从参数为 λt(λ>0)的泊松分布, 即有$P\{X(t+a)-X(a)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=0,1,2\dots$, 则称 X(t)是具有参数 λ 的泊松过程。**泊松过程定义 2**：设随机过程{X(t),t∈[0,∞]}的无限状态空间是 S={0,1,2…},若满足两个条件: (1) X(t)是平稳独立增量过程. (2) 任意 a,t>=0,每一增量 X(t+a)-X(a)非负,且有$P\{X(t+\Delta t)-X(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t),P\{X(t+\Delta t)-X(t)\ge 2\}=o(\Delta t)$,则称 X(t)是具有参数 λ 的泊松过程。**数字特征：期望** EX(t) = λt; **方差** DX(t) = λt; **自相关函数** Rx(s,t) =λs(λt+1); **协方差函数** Cx(s,t) = λ*min(s,t)。

两角和公式 sin(A+B) = sinAcosB+cosAsinB ; sin(A-B) = sinAcosB-cosAsinB ; cos(A+B) = cosAcosB-sinAsinB ; cos(A-B) = cosAcosB+sinAsinB ；**二倍角**: Sin2A=2SinA•CosA; Cos2A= $Cos^2A-Sin^2A=2Cos^2A-1=1-2Sin^2A$; **和差化积**: $SinA+SinB=2Sin\frac{A+B}{2}Cos\frac{A-B}{2}$; $SinA-SinB=2Cos\frac{A+B}{2}Sin\frac{A-B}{2}$; $CosA+CosB=2Cos\frac{A+B}{2}Cos\frac{A-B}{2}$; $CosA-CosB=-2Sin\frac{A+B}{2}Sin\frac{A-B}{2}$; **积化和差**：$CosASinB=\frac{1}{2}[Sin(A+B)-Sin(A-B)]$; $CosACosB=\frac{1}{2}[Cos(A+B)+Cos(A-B)]$; $SinACosB=\frac{1}{2}[Sin(A+B)+Sin(A-B)]$; $SinASinB=\frac{1}{2}[Cos(A-B)-Cos(A+B)]$; **三角不等式**：CosA – 1 <= A; $SinA\le A+A^2$;

随机变量数字特征：**1)** **二项分布 B(n,p)**:$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$, $E=np,D=np(1-p),\varphi=(1-p+pe^{it})^n$. **2)** **柏松分布 P(λ)**:$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},E=\lambda,D=\lambda,\varphi=e^{\lambda(e^{it}-1)}$. **3)** **几何分布 G(p)**:$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},E=1/p,D=q/p^2,\varphi=\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$. **4)** **均匀分布 U(a,b)**:$f(x)=\frac{1}{b-a}(a<x<b)$ or 0 $(else),E=(a+b)/2,D=(b-a)^2/12,\varphi=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$. **5)** **正态分布 N(a,σ2)**:$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2},E=a,D=\sigma^2,\varphi=exp\{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\}$. **6}** **指数分布 E(λ)**:$f(x)=\lambda e^{-\lambda t},t\ge 0$ or $0,t<0,E=1/\lambda,D=1/\lambda^2,\varphi=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$. **7)** **伽马分布Γ(a,λ)**:$f(x)=\frac{x^{(\alpha-1)}\lambda^\alpha e^{(-\lambda x)}}{\Gamma(\alpha)}$,$E=\frac{\alpha}{\lambda-t},D=\frac{\alpha}{(\lambda-t)^2}$

傅立叶变换性质：$F\{c_1f_1(\tau)+c_2f_2(\tau)\}=c_1F\{f_1(\tau)\}+c_2F\{f_2(\tau)\}$ $F^{-1}\{c_1\varphi_1(\omega)+c_2\varphi_2(\omega)\}=c_1F^{-1}\{\varphi_1(\omega)\}+c_2F\{\varphi_2(\omega)\}$。**卷积性质:** $F\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(\tau-u)du\}=F\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau-u)g(u)du\}=F\{f(\tau)\}F\{g(\tau)\}$。**RS 转换公式: 1)** $R_x(\tau)=\sigma^2e^{-a|\tau|}$ $S_x(\omega)=\frac{2\sigma^2a}{a^2+\omega^2}$ **2)** $R_x(\tau)=\begin{cases}\sigma^2\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right),\tau\le T\\0,|\tau|>T\end{cases}$ $S_x(\omega)=\frac{4\sigma^2\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$ **3)** $R_x(\tau)=e^{-a|\tau|}cos(\omega_0\tau)$ $S_x(\omega)=\frac{a}{a^2+(\omega+\omega_0)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$ **4)** $R_x(\tau)=N\frac{sin\omega_0\tau}{\pi\tau}$ $S_x(\omega)=\begin{cases}N,|\omega|\le\omega_0\\0,|\omega|>\omega_0\end{cases}$ **5)** $R_x(\tau)=1$ $S_x(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ **6)** $R_x(\tau)=acos(\omega_0\tau)$ $S_x(\omega)=a\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ **7)** $F[f(x)cosw_0t]=\frac{1}{2}[F(w-w_0)+F(w+w_0)]$ **8)** $R_x(\tau)=e^{-a|\tau|}sin^{b|\tau|}$ $S_x(w)=\frac{b-w}{a^2+(w-b)^2}+\frac{b+w}{a^2+(w+b)^2}$； **9）** $R_x(\tau)=\frac{2sin^2\frac{\omega_0\tau}{2}}{\pi\omega_0\tau}$, $S_x(\omega)=1-\frac{|\omega|}{\omega_0}$

商的概率密度公式：$Z=\frac{X}{Y}$, $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_Y(xz)f_X(x)dx$；**欧拉公式**：$e^{ix}=cosx+isinx$，$e^{-ix}=cosx-isinx$；**级数求和**：$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$，其中$|x|<1$；$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$，其中 $x!=1$；$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$；**柯西不等式**：$E(XY)\le\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$; $|\int f(x)*g(x)dx|^2\le\int|f(x)|^2dx*\int|g(x)|^2dx$；$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)$； **均值不等式**：$H_n=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$；$G_n=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$；$A_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$；$Q_n=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$；则$H_n\le G_n\le A_n\le Q_n$。**δ函数**：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$。

证明 1：均方极限与期望可以交换位置。利用 $DY=E|Y|^2-|EY|^2\ge0$,有 $|EX_n-EX|=|E(X_n-X)|\le(E|X_n-X|^2)^{1/2}$ 而已知 $E|X_n-X|^2\xrightarrow{n\to+\infty}0$,所以 $|EX_n-EX|\to0$。**证明 2：均方导数与期望可以交换位置。**$m_{x'}(t)=EX'(t)=E\lim\limits_{h\to0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\overset{均方极限性质(1)}{\Longleftrightarrow}\lim\limits_{h\to0}\frac{EX(t+h)-EX(t)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{m_x(t+h)-m_x(t)}{h}=m'_x(t)$。**证明 3：均方积分与期望可以交换位置。**$E\lim\limits_{\Delta\to0}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)X(u_k)(t_k-t_{k-1})\overset{均方极限性质(1)}{\Longleftrightarrow}\lim\limits_{\Delta\to0}E\sum_{k=1}^{n}f(u_k)X(u_k)(t_k-t_{k-1})=\lim\limits_{\Delta\to0}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)m_x(u_k)(t_k-t_{k-1})=\int_a^bf(t)m_x(t)dt=E\int_a^bf(t)X(t)dt$。

证明 4：随机过程在 t 处可导等价于极限 $\lim\limits_{h\to0;h'\to0}\frac{R_X(t+h,t+h')-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h')+R_X(t,t)}{hh'}$**存在。**

"⇐".若要使上式成立，只要证$\lim\limits_{h\to0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$存在。由均方极限性质（5），只要 $\underset{\substack{h\to0\\h'\to0}}{\text{l·i·m}}\left[\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right]=0$，即 $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h'\to0}}E\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right|^2=0$，亦即 $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h'\to0}}\left[\frac{R_X(t+h,t+h)-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h)+R_X(t,t)}{h^2}+\frac{R_X(t+h',t+h')-R_X(t+h',t)-R_X(t,t+h')+R_X(t,t)}{h'^2}-2\cdot\frac{R_X(t+h,t+h')-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h')+R_X(t,t)}{hh'}\right]=0$，因为式 (2.1) 的极限存在，而此极限在 h=h'时亦存在，且极限数值不变，所以上式为 0 成立，于是$\lim\limits_{h\to0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$存在；"⇒"，设 X(t)在处可导，利用均方极限性质（2），并知$\lim\limits_{h\to0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$ 存在，可得 $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h'\to0}}E\left[\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\cdot\frac{X(t+h')-X(t)}{h'}\right]$存在，亦即$\lim\limits_{\substack{h\to0\\h'\to0}}\frac{R_X(t+h,t+h')-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h')+R_X(t,t)}{hh'}$存在。

证明 5：随机过程在 T 上均方连续⇔相关函数第一象限所有点连续　　**证明 6：Ck 方程**

证明　事实上需证：$X(t)$ 在 T 上的任一固定点 t_0 上连续 ⇔ $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续.

"⇐". 设 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续，待证

$$\underset{t\to t_0}{\text{l·i·m}}\,X(t)=X(t_0)$$

$$E|X(t)-X(t_0)|^2=EX^2(t)-2E[X(t)X(t_0)]+EX^2(t_0)=R_X(t,t)-2R_X(t,t_0)+R_X(t_0,t_0)$$

当 $t\to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续，上式右边趋近于零，故

$$E|X(t)-X(t_0)|^2\to0$$

"⇒". 已知 $\underset{t\to t_0}{\text{l·i·m}}\,X(t)=X(t_0)$，由均方极限性质(2) 有

$$\lim_{\substack{t_1\to t_0\\t_2\to t_0}}E[X(t_1)X(t_2)]=E[X(t_0)X(t_0)]$$

即

$$\lim_{\substack{t_1\to t_0\\t_2\to t_0}}R_X(t_1,t_2)=R_X(t_0,t_0)$$

$$p_{ij}(k+l)=P\{X(m+k+l)=j\,|\,X(m)=i\}=\frac{P\{X(m)=i,X(m+k+l)=j\}}{P\{X(m)=i\}}=\frac{\sum_r P\{X(m)=i,X(m+k)=r,X(m+k+l)=j\}}{P\{X(m)=i\}}=\quad(时齐性)$$

$$\frac{\sum_r P\{X(m)=i,X(m+k)=r\}\cdot P\{X(m+k+l)=j\,|\,X(m)=i,X(m+k)=r\}}{P\{X(m)=i\}}$$

利用无后效性，上式等于

$$\frac{\sum_r P\{X(m)=i,X(m+k)=r\}\cdot P\{X(m+k+l)=j\,|\,X(m+k)=r\}}{P\{X(m)=i\}}=\sum_r\frac{P\{X(m)=i,X(m+k)=r\}}{P\{X(m)=i\}}\cdot p_{rj}(l)=\sum_r P\{X(m+k)=r\,|\,X(m)=i\}\cdot p_{rj}(l)=\sum_r p_{ir}(k)p_{rj}(l)$$

证明 7：泊松过程定义 1 与定义 2 等价性定理

定义 1➔定义 2：$P\{X(t+\Delta t)-X(t)=1\}=\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$；$P\{X(t+\Delta t)-X(t)\ge2\}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t}=(\lambda\Delta t)^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(\lambda\Delta t)^{k-2}}{k!}\cdot e^{-\lambda\Delta t}=o(\Delta t)$

定义 2➔定义 1：$p_k(t)$ 表示长度为 t 的时间区间中来到 k 个呼唤的概率，

$p_k(t+\Delta t)=p_k(t)p_0(\Delta t)+p_{k-1}(t)p_1(\Delta t)+\cdots+p_0(t)p_k(\Delta t),k\ge0$ b $p_0(t+\Delta t)=p_0(t)p_0(\Delta t)$ s

$p_0(t)=a^t,a\ge0$;s $\lambda=\ln\frac{1}{a}>0$;b $p_0(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$;b

$p_1(\Delta t)\overset{式(5.27)}{=\!=\!=}1-p_0(\Delta t)-o(\Delta t)=1-(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))-o(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$;b

$\sum_{i=2}^{+\infty}p_{k-i}(t)p_i(\Delta t)\le\sum_{i=2}^{+\infty}p_i(\Delta t)\overset{式(5.27)}{=\!=\!=}o(\Delta t)$;s $p_k(t+\Delta t)=p_k(t)(1-\lambda\Delta t)+p_{k-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t),k\ge0$;

s $\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t}=\lambda[p_{k-1}(t)-p_k(t)]+o(1)$;s $p'_k(t)=\lambda[p_{k-1}(t)-p_k(t)]$;b

$p'_1(t)=\lambda[p_0(t)-p_1(t)]=\lambda[e^{-\lambda t}-p_1(t)]$;s $p_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$;s $p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=0,1,2,\cdots$。

证明 8：均方极限在概率为 1 相等的意义下唯一　**证明 9：正态过程独立定理**　**证明 10：n 步转移概率分解定理**

证明　可知

$$E|X-Y|^2=E|(X_n-X)-(X_n-Y)|^2\le E|X_n-X|^2+2E|(X_n-X)(X_n-Y)|+E|X_n-Y|^2\le E|X_n-X|^2+2(E|X_n-X|^2)^{\frac12}\cdot(E|X_n-Y|^2)^{\frac12}+E|X_n-Y|^2\to0(n\to+\infty)$$

(利用柯西－施瓦兹(Cauchy-Schwarz) 不等式 $E|XY|\le(E|X|^2)^{\frac12}\cdot(E|Y|^2)^{\frac12}$)，所以

$$E|X-Y|^2=0$$

故　　$P(X-Y=0)=1$ 或 $P(X=Y)=1$

证明 相互独立 <=> 协方差=0 <=> 不相关

⇐ $\forall t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$　$C(t_j,t_k)=0,j\ne k$

$(X(t_1),\cdots,X(t_n))$的特征函数为：

$\varphi(u_1,\cdots,u_n)=\exp\{i\sum_{j=1}^{n}m_X(t_j)u_j-\frac12\sum_{j=1}^{n}C(t_j,t_j)u_j^2\}$

$=\prod_{j=1}^{n}\exp\{im_X(t_j)u_j-\frac12C(t_j,t_j)u_j^2\}$

$=\varphi_{X(t_1)}(u_1)\times\cdots\times\varphi_{X(t_n)}(u_n)$

⇒ $\forall s\ne t$，$X(s),X(t)$ 相互独立

$C(s,t)=E[X(s)X(t)]-m_X(s)\cdot m_X(t)$

$=EX(s)\cdot EX(t)-m_X(s)\cdot m_X(t)$

$=0$

$P_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j\,|\,X_0=i\}$

$=P\{\bigcup_{m=1}^{n}(X_\nu\ne j,1\le\nu\le m-1,X_m=j,X_n=j)\,|\,X_0=i\}$

$=\sum_{m=1}^{n}P\{X_\nu\ne j,1\le\nu\le m-1,X_m=j,X_n=j\,|\,X_0=i\}$

$=\sum_{m=1}^{n}P\{X_\nu\ne j,1\le\nu\le m-1,X_m=j\,|\,X_0=i\}\cdot P\{X_n=j\,|\,X_m=j\}$

$=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(n-m)}$

证明 11：期望各态历经性证明 ：下页开始

$E\langle X(t)\rangle=E[\underset{T\to\infty}{\text{l·i·m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\int_{-T}^{T}X(t)dt]$

$=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}EX(t)dt=m_X$

$D\langle X(t)\rangle=E\{\langle X(t)\rangle^2\}-(E\langle X(t)\rangle)^2=E\{[\underset{T\to\infty}{\text{l·i·m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]^2\}-m_X^2$

$=\lim\limits_{T\to\infty}E[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt]^2-m_X^2=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}E[\int_{-T}^{T}X(t_1)dt_1\int_{-T}^{T}X(t_2)dt_2]-m_X^2$

$=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)dt_1dt_2-m_X^2$

$\begin{cases}\tau_1=t_1+t_2\\\tau_2=t_2-t_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\tau_1+\tau_2}{2}=t_2\end{cases}$，$\frac{\tau_1-\tau_2}{2}=t_1$

雅可比行列式 $\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(\tau_1,\tau_2)}=\frac12$

积分 $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{8T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)dt_1dt_2=\iint4\cdot R_X(\tau_2)\frac12d\tau_1d\tau_2$

$=2\int_0^{2T}d\tau_2\int_0^{2T-\tau_2}R_X(\tau_2)d\tau_1=2\int_0^{2T}(2T-\tau)R_X(\tau)d\tau$

$\therefore D\langle X(t)\rangle=\lim\limits_{T\to\infty}\frac1T\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R_X(\tau)d\tau-m_X^2=\lim\frac1T\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})(R_X(\tau)-m_X^2)d\tau$

计算 1：泊松分布数字特征

① $EX(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(X(t)=n)P(X(t)=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda t\cdot e^{-\lambda t}$

$=\lambda t\cdot e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t}=\lambda t$

② $DX(t)=EX_{(t)}^2-m_X^2(t)=(\lambda t)^2+\lambda t-(\lambda t)^2=\lambda t$ (同理,自写)

③ $R_X(s,t)=EX(s)X(t)=EX(s)(X(t)-X(s))+EX^2(s)$

$=E(X(s)-X(0))(X(t)-X(s))+EX^2(s)$

$=E(X(s)-X(0))E(X(t)-X(s))+EX^2(s)$ (泊松过程性质) 定义

$=\lambda s\lambda(t-s)+(\lambda s)^2+\lambda s=\lambda s(\lambda t+1)$

④ $C_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)=\lambda s(\lambda t+1)-\lambda s\lambda t=\lambda s=\lambda\min(s,t)$

平稳过程 $X(t)=a\cos(\Omega t+\Phi)$，a是常数，$\Phi\sim U(0,2\pi)$ Ω的f(x)是偶函数.

试证 X(t)的功率密度为$S_X(w)=a\pi f(w)$

$EX(t)=Ea\cos(\Omega t+\Phi)=a(E\cos\Omega t\cdot\cos\Phi-E\sin\Omega t\cdot\sin\Phi)$

$=a(E\cos\Omega t\cdot E\cos\Phi-E\sin\Omega t\cdot E\sin\Phi)=0$

$EX(t)X(t+\tau)=a^2E\cos(\Omega t+\Phi)\cos(\Omega(t+\tau)+\Phi)$

$=\frac{a^2}{2}E[\cos(2\Omega t+2\Phi+2\pi)+\cos\Omega\tau]$

$=\frac{a^2}{2}E\cos\Omega\tau$

$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\tau f(x)dx$ (偶函数)

$=a^2\int_0^{+\infty}\cos\tau f(x)dx$

$S_X(w)=2\int_0^{+\infty}R_X(\tau)\cos w\tau d\tau$

$=2a^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos\tau\cdot f(x)dx\cos w\tau d\tau=a^2\int_0^{+\infty}[2\int_0^{+\infty}\cos x\tau\cdot\cos w\tau d\tau]f(x)dx$

$=a^2\pi[\int_0^{+\infty}\delta(w-x)f(x)dx+\int_0^{+\infty}\delta(w+x)f(x)dx]=a^2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(w-x)f(x)dx$

$=a^2\pi f(w)$

例1：具有随机初相位正弦波$X(t)=a\cos(w_0t+\Phi)$，$-\infty<t<+\infty$ 其中a，w_0是正常数，而$\Phi\sim U[0,2\pi]$，试讨论其各态历经性

解：易说明X(t)是平稳过程，$m_X=0$，$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos w_0\tau$

现在计算平衡过程的时间平均和时间相关函数

$\langle X(t)\rangle=\underset{T\to\infty}{\text{l·i·m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(w_0t+\Phi)dt=$

$\underset{T\to+\infty}{\text{l·i·m}}\frac{a}{2T}\int_{-T}^{T}(\cos w_0t\cos\Phi-\sin w_0t\sin\Phi)dt=$ 下面简解

(关于t的奇函数)

$\underset{T\to+\infty}{\text{l·i·m}}\frac{a}{2T}\cos\Phi\int_{-T}^{T}\cos w_0tdt=\underset{T\to+\infty}{\text{l·i·m}}\frac{a\cos\Phi\sin w_0T}{w_0T}=0$

$E\left|\frac{a\cos\Phi\sin w_0T}{w_0T}\right|^2=(E\cos^2\Phi)(\frac{a\sin w_0T}{w_0T})^2$

$E\cos^2\Phi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos^2\Phi d\Phi=\frac{1}{4\pi}(2\pi+\frac12\sin2\varphi|_0^{2\pi})=\frac12$ $<+\infty$

$\frac{a^2\sin^2w_0T}{(w_0T)^2}\xrightarrow{T\to+\infty}0$

$EY(n)=E\frac1m(X(n)+\cdots X(n-m+1))=0$；$R_Y(i,i+j)=EY(i)Y(i+j)=\frac{1}{m^2}E(X(i)\cdots+X(i-m+1))($

当 $i<i+j-m+1$　$R_Y(i,i+j)=0$ $(j>m-1)$　；$i\ge i+j-m+1$　$R_Y(i,i+j)=\frac{(m-j)}{m^2}\sigma^2$ $(j\le m-1)$

正态过程分布 <=> 期望 + 协方差矩　马尔可夫，正常返 <- 平稳分布

$S_X(w)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{w^2+b_k^2}$　$R_X(\tau)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2b_k}\cdot F^{-1}(\frac{2b_k}{b_k^2+w^2})=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2b_k}e^{-b_k|\tau|}$

$S_X(w)=b^2$，$a\le|w|\le2a$　$R_X(\tau)=\frac{b^2}{\pi\tau}\sin^{2a\tau}-\frac{b^2}{\pi\tau}\sin^{a\tau}$

$ES=E\int_0^1X(t)dt=1$　$DS=ES^2-(ES)^2=\int_0^1\int_0^1EX(t_1)X(t_2)dt_1dt_2-1=\iint(R_X(\tau))dsd\tau-1$ $(\begin{smallmatrix}t_1=s\\t_2=s+\tau\end{smallmatrix})$

$=\int_0^1ds\int_{-s}^{1-s}(1+e^{-2|\tau|})d\tau-1=\frac12(1+e^{-2})$

$\lim\limits_{n\to+\infty}p_{ij}^{(n)}=p_j>0$ 遍历　n奇 $P^{(n)}=P$　n偶 $P^{(n)}=P^2$　∴不遍历

$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=\underset{T\to+\infty}{\text{l·i·m}}\frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(w_0t+\Phi)\cos[w_0(t+\tau)+\Phi]$

$dt=$积化和差 $\underset{T\to+\infty}{\text{l·i·m}}\frac{a^2}{2T}\cdot\frac12\int_{-T}^{T}[\cos(2w_0t+w_0\tau+2\Phi)+\cos w_0\tau]$

$dt=\underset{T\to+\infty}{\text{l·i·m}}\frac{a^2}{4T}[\frac{1}{2w_0}(\sin(2w_0T+w_0\tau+2\Phi)-\sin(-2w_0T+w_0\tau+2\Phi))+2T\cos w_0\tau]=$

$\underset{T\to\infty}{\text{l·i·m}}W+\frac12a^2\cos w_0\tau=\frac{a^2}{2}\cos w_0\tau$

故 $\text{l·i·m}\,W=0$

$\langle X(t)\rangle=m_X$

$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle=R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos w_0\tau$

$(\xi,\eta)\overset{pdf}{\sim}P(x,y)$

(ρ,φ) Pdf $q(r,\theta)$

$q(r,\theta)=P(x,y)|J|$

$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\\theta=\arctan\frac yx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$

$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial r}\\\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=r$

$q(r,\theta)=P(x,y)r$

$\int1\cdot e^{-i(w-w_0)\tau}d\tau$

$=2\pi\delta(w-w_0)$

$1+f(2t)=1+\int_{-\infty}^{+\infty}\cos2tx\,dF(x)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\cos2tx)dF(x)$

$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2tx\,dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}1^2dF(x)$

$\ge2(\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\cdot1\,dF(x))^2$

$=2(f(t))^2$

$f(t)=Ee^{itx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\,dF(x)$

$1-f(2t)=1-\int_{-\infty}^{+\infty}\cos2tx\,dF(x)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos2tx)dF(x)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}2\sin^2tx\,dF(x)$

$=2\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos^2tx)dF(x)$

$=2\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\cos tx)(1-\cos tx)dF(x)$

$\le4\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos tx)dF(x)=4(1-f(t))$

$S(w)=(\frac{1}{1+w^2})^2$

$\because F^{-1}(\frac{1}{1+w^2})=\frac12e^{-|\tau|}$

$\therefore F(R_X(\tau))=F(\frac12e^{-|\tau|})\cdot F(\frac12e^{-|\tau|})$

$=F(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac12e^{-|u|}\cdot\frac12e^{-|\tau-u|}du$

$\therefore R_X(\tau)=\frac14\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|u|}e^{-|\tau-u|}du$

$=\frac14e^{-|\tau|}+\frac14|\tau|e^{-|\tau|}$

$P\{X_{t_0}=i_0,X_{t_1}=i_1\cdots X_{t_n}=i_n\}$

$=\sum_{i_0\in S}P\{X_0=i_0\}P_{i_0i_1}^{t_1}P_{i_1i_2}^{t_2-t_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}^{t_n-t_{n-1}}$

$\pi_{j+1}q_{j+1}-\pi_jp_j=\pi_1q_1-\pi_0p_0=0$

$\pi_j=\frac{\pi_{j-1}p_{j-1}}{q_j}=\frac{p_{j-1}\cdots p_0}{q_j\cdots q_1}\pi_0$

例1. 定义 $X(t)=\sin At$，其中A是r.v.，$EA^4<+\infty$，证

$AX'(t)=A\cos At$

证：$\lim\limits_{h\to0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=A\cos At$ ⇔ $\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(A(t+h))-\sin At}{h}=A\cos At$

⇔ $\lim\limits_{h\to0}E\left|\frac{\sin A(t+h)-\sin At}{h}-A\cos At\right|^2=E\left|\frac{\sin At\cos Ah+\cos At\sin Ah-\sin Ah-\sin At-Ah\cos At}{h}\right|^2$

$=E\left|\frac{\sin At(\cos Ah-1)+\cos At(\sin Ah-Ah)}{h}\right|^2\le2E\frac{\sin^2At(\cos Ah-1)^2}{h^2}+2E\frac{\cos^2At(\sin Ah-Ah)^2}{h^2}$

$\le2E\frac{\sin^2At\cdot A^4h^4}{h^2}+2E\frac{\cos^2At\,A^4h^4}{h^2}$

$=2E\,A^4h^2(\sin^2At+\cos^2At)=2h^2\cdot EA^4=0$

$(\cos\alpha-1)^2\le\alpha^2$

$\sin\alpha\le\alpha+\alpha^2$

例2. $X(t)=2A^2t$　A为随机变量。$EA^4<+\infty$，求$\int_0^tX(s)ds$

证：$\int_0^tX(s)ds$存在 ⟺ $\int_0^t\int_0^tR_X(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2$ 存在　；只需证 $R_X(s,t)$在$[0,t]\times[0,t]$连续

$R_X(s,t)=EX(s)X(t)=E2A^2s\cdot2A^2t=E4A^4s\cdot t=4st\,EA^4$；显然连续

$\lim\limits_{\Delta\to0}\sum_{k=1}^{n}X(u_k)(t_k-t_{k-1})=\lim\limits_{\Delta\to0}\sum_{k=1}^{n}2A^2u_k(t_k-t_{k-1})\overset{取u_k=\frac{t_k+t_{k-1}}{2}}{=}\lim\limits_{\Delta\to0}\sum_{k=1}^{n}A^2(t_k^2-t_{k-1}^2)=0$